Exemple de passage à la forme canonique

On présente les deux méthodes pour passer la fonction polynomiale du second degré $f\colon x \mapsto 2x^2 + 20x + 45$.

Méthode par identification On utilise les formules du cours pour déterminer α et β. Ici,

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 20 \\ c = 45 \end{cases}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{-b}{2a} \\ &= \frac{-(20)}{2 \times (2)} \\ &= \frac{-20}{4} \\ &= -5 \end{aligned}$$

Ainsi que

$$\begin{aligned} \beta &= f(\alpha) \\ &= 2\alpha^2 + 20\alpha + 45 \\ &= 2 \times (-5)^2 + 20 \times (-5) + 45 \\ &= 50 - 100 + 45 \\ &= -5 \end{aligned}$$

On remplace ainsi les valeurs correspondante pour conclure que

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta = 2(x-(-5))^2 + (-5) = 2(x+5)^2 - 5$$

Méthode par identité remarquable « limitée » On s'inspire de la démonstration vue en cours. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Alors,

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + 20x + 45 \\ &= 2(\frac{2}{2}x^2 + \frac{20}{2}x) + 45 && \text{(On factorise par } a\text{)} \\ &= 2(x^2 + 10x) + 45 \end{aligned}$$

L'expression $x^2 + 10x = x^2 + 2 \times x \times 5$ peut être reconnue comme le début d'une identité remarquable $p^2 + 2pq + q^2$ avec $p = x$ et $q = 5$. On sait que $x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2 = (x + 5)^2$, et par conséquent,

$$x^2 + 2 \times x \times 5 = (x + 5)^2 - 5^2$$

On utilise cette formule pour effectuer une substitution dans l'expression de $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(x^2 + 10x) + 45 \\ &= 2((x + 5)^2 - 5^2) + 45 \\ &= 2((x + 5)^2 - 25) + 45 \\ &= 2(x + 5)^2 - 50 + 45 && \text{(Par distributivité)} \\ &= 2(x + 5)^2 - 5 \end{aligned}$$

Ainsi, les deux méthodes permettent d'aboutir à la forme canonique de la fonction polynomiale du second degré f.