

# Suites Numériques

## Première Spécialité Mathématiques

### 1 Définition d'une suite

**Définition 1.** Une **suite numérique réelle** est une fonction  $u$  définie sur  $\mathbb{N}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note l'image  $u(n)$  sous le format  $u_n$ , qui se lit «  $u$  indice  $n$  ». Cette image est appelée **terme de rang  $n$  de  $u$** .

**Exemple.** De nombreux phénomènes ne présentent pas de continuité, et peuvent être modélisés par des suites.

- Le chiffre d'affaire d'une entreprise  $n$  mois après sa création.
- Le nombre de façons de ranger  $n$  figurines sur une étagère.
- L'aire de la figure suivante après la  $n$ -ième étape.



**Remarque.** Une suite peut-être présentée sous la forme d'une séquence de nombres. Dans ce cas, le premier nombre de cette liste correspond au terme d'indice 0.

Pour parler d'une suite  $u$  en toute généralité, on la note  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Remarque.** Ainsi, on ne confondra pas les notations  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (la suite en toute généralité) et  $u_n$  (le  $n^{\text{e}}$  terme de la suite).

**Définition 2.** Si l'on connaît  $f(n)$  une expression dépendant de  $n$  telle que pour tout  $n$ ,  $u_n = f(n)$ , alors on dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est définie de façon **explicite**.

**Exemple.** Pour chacune des définitions explicites de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  données ci-dessous, donner les 4 premiers termes  $u_0$ ;  $u_1$ ;  $u_2$  et  $u_3$ .

- $u_n = 3n + 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  : .....
- $u_n = 5 \times 2^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  : .....
- $u_n =$  « Le nombre de lettres dans l'écriture en français de  $n$  », pour tout  $n \in \mathbb{N}$  : .....

**Définition 3.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite numérique. On dit que  $u_n$  est définie **par récurrence** si  $u_0$  est connue, et si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le terme  $u_{n+1}$  est obtenu en fonction de  $u_n$ .

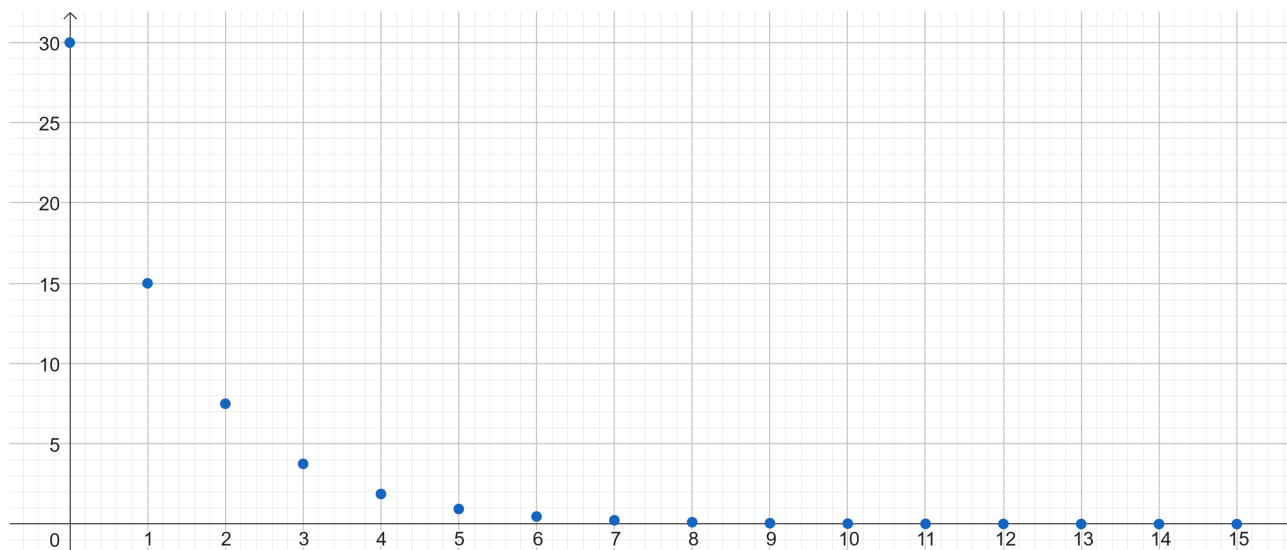
**Exemple.** Pour chacune des définition par récurrence de  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , calculer les 4 premiers termes  $v_0$ ;  $v_1$ ;  $v_2$  et  $v_3$ .

- $v_0 = 6$  et  $v_{n+1} = v_n + 4$  : .....
- $v_0 = 2$  et  $v_{n+1} = 5 \times v_n$  : .....

## 2 Étude de suites

### 2.1 Représentation graphique

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite numérique. Pour représenter  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sur un repère orthonormé, on y fait figurer les points de coordonnées  $(n; u_n)$ .



### 2.2 Variation de suites

**Définition 4.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite numérique.

- On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **croissante** si et seulement si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_n \leq u_{n+1}$ .
- On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **décroissante** si et seulement si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_{n+1} \leq u_n$ .

**Proposition 1.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite numérique.

- La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante si et seulement si, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} - u_n \geq 0$ .
- La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante si et seulement si, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} - u_n \leq 0$ .

**Exemple.** Étudier les variations des suites suivantes :

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_n = 8 + 4n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $v_0 = 64$  et  $v_{n+1} = \frac{v_n}{2}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $w_n = \frac{n}{n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $z_n = (-1)^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

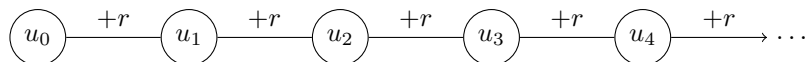
### 3 Suites arithmétiques

**Définition 5.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite numérique. On dit que la suite est **arithmétique** si et seulement il existe  $r \in \mathbb{R}$  tel que

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Dans ce cas, on dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite arithmétique de **premier terme**  $u_0$  et de **raison**  $r$ .

**Remarque.** Le calcul des termes d'une suite arithmétique de raison  $r \in \mathbb{R}$  peut être schématisé comme suit :



**Exemple.** Calculer les termes  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$  pour chaque définition suivante :

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 1 : .....
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 2 : .....
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite arithmétique de premier terme 10 et de raison  $-\frac{1}{2}$  : .....

**Proposition 2** (Variation d'une suite arithmétique). Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique de raison  $r \in \mathbb{R}$ .

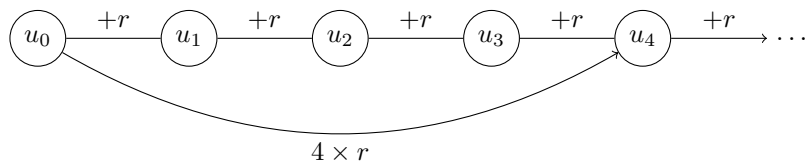
- La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante si et seulement si  $r \geq 0$ .
- La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante si et seulement si  $r \leq 0$ .

**Remarque.** Dans le cas particulier où  $r = 0$ , on dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **constante**.

**Proposition 3** (Formule explicite d'une suite arithmétique). Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique de raison  $r \in \mathbb{R}$ . Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on observe

$$u_n = u_0 + n \times r$$

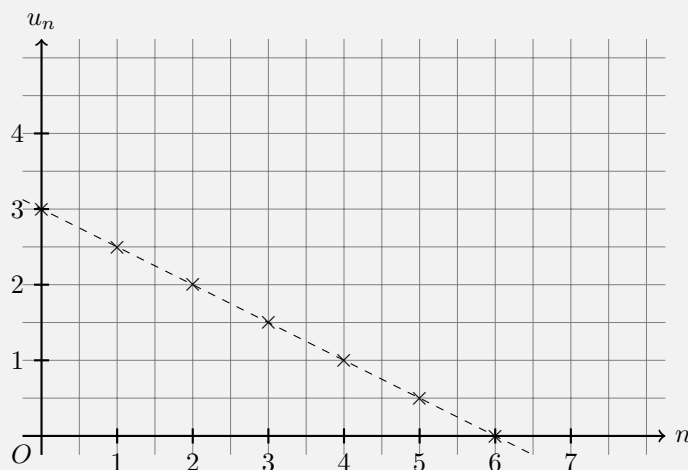
**Remarque.** On peut résumer cette formule à l'aide du schéma suivant :



**Exemple.** Pour chacune des définitions suivantes de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , calculer  $u_{10}$  :

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite arithmétique de premier terme 6 et de raison 5 : .....
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite arithmétique de premier terme 0 et de raison  $-2$  : .....
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison  $\frac{1}{5}$  : .....

**Proposition 4.** Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite arithmétique, alors les points de sa représentation graphique sont alignés sur la droite d'équation  $y = rx + u_0$  :



On dit que les suites arithmétiques permettent de modéliser des **évolutions linéaires**.

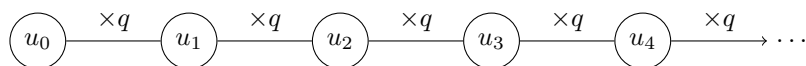
## 4 Suites géométriques

**Définition 6.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite numérique. On dit que la suite est **géométrique** si et seulement il existe  $q \in \mathbb{R}$  tel que

$$u_{n+1} = u_n \times q$$

Dans ce cas, on dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite géométrique de **premier terme**  $u_0$  et de **raison**  $q$ .

**Remarque.** Le calcul des termes d'une suite géométrique de raison  $q \in \mathbb{R}$  peut être schématisé comme suit :



**Exemple.** Calculer les termes  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$  pour chaque définition suivante :

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2 : .....
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite géométrique de premier terme 64 et de raison  $\frac{1}{2}$  : .....
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite géométrique de premier terme 1000 et de raison  $-0,1$  : .....

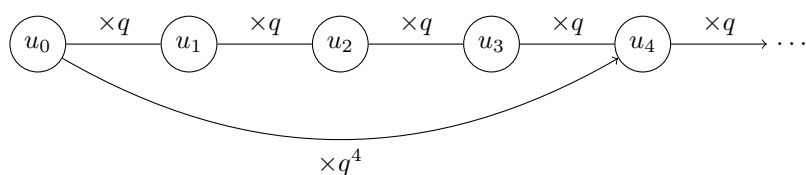
**Proposition 5** (Variation d'une suite géométrique). Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite géométrique de raison  $q \in \mathbb{R}$ . On suppose que son premier terme  $u_0$  est non nul.

- Si  $q > 1$  :
  - Si  $u_0 > 0$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante.
  - Si  $u_0 < 0$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement décroissante.
- Si  $0 < q < 1$  :
  - Si  $u_0 > 0$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement décroissante.
  - Si  $u_0 < 0$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante.
- Si  $q = 0$  ou  $q = 1$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante à partir du terme  $u_1$ .
- Si  $q < 0$ , alors la suite n'est pas **monotone** (elle n'est ni croissante, ni décroissante).

**Proposition 6** (Formule explicite d'une suite géométrique). Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite géométrique de raison  $q \in \mathbb{R}$ . Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on observe

$$u_n = u_0 \times q^n$$

**Remarque.** On peut résumer cette formule à l'aide du schéma suivant :



**Exemple.** Pour chacune des définitions suivantes de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , calculer  $u_{10}$  :

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite géométrique de premier terme 1 et de raison  $-2$  : .....
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite géométrique de premier terme  $5^{10} = 9\,765\,625$  et de raison  $\frac{1}{5}$  : .....

**Définition 7.** Les suites géométriques permettent de modéliser des évolutions dites **exponentielles**.

## 5 Calcul de sommes

### 5.1 Sommes arithmétiques

**Proposition 7.** Soit  $n$  un nombre entier naturel. Alors,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

*Démonstration.*

□

**Proposition 8.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique de raison  $r$ , et  $N$  un entier naturel. Alors,

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_N = (N+1)u_0 + \frac{N(N+1)r}{2}$$

*Démonstration.*

□

**Exemple.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique de premier terme  $u_0 = 2$  et de raison  $r = 3$ . Calculer  $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{15}$  (somme des 16 premiers termes).

## 5.2 Sommes géométriques

**Proposition 9.** Soit  $n$  un nombre entier naturel, et  $q \neq 1$  un réel. Alors,

$$1 + q^1 + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

*Démonstration.*

□

**Proposition 10.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite géométrique de raison  $q \neq 1$ , et  $N$  un entier naturel. Alors,

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_N = u_0 \frac{q^{N+1} - 1}{q - 1}$$

*Démonstration.*

□

**Exemple.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite géométrique de premier terme  $u_0 = 3$  et de raison  $q = 2$ . Calculer  $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{19}$  (somme des 20 premiers termes).

## 6 Notion de limite

### 6.1 Convergence de suites

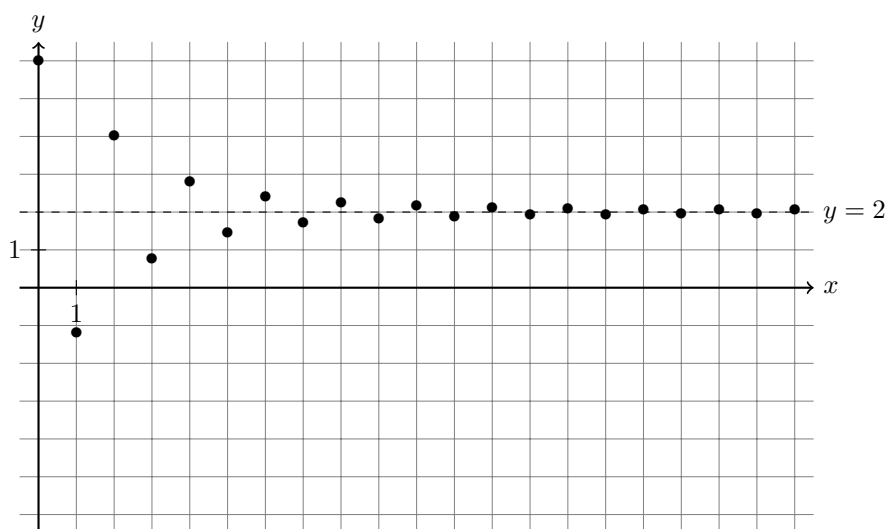
**Définition 8** (Limite finie d'une suite). Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite numérique, et  $l$  un nombre réel. On dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **admet  $l$  comme limite** quand les nombres  $u_n$  sont aussi proches de  $l$  que l'on veut à mesure que les indices  $n$  sont grands. On le note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

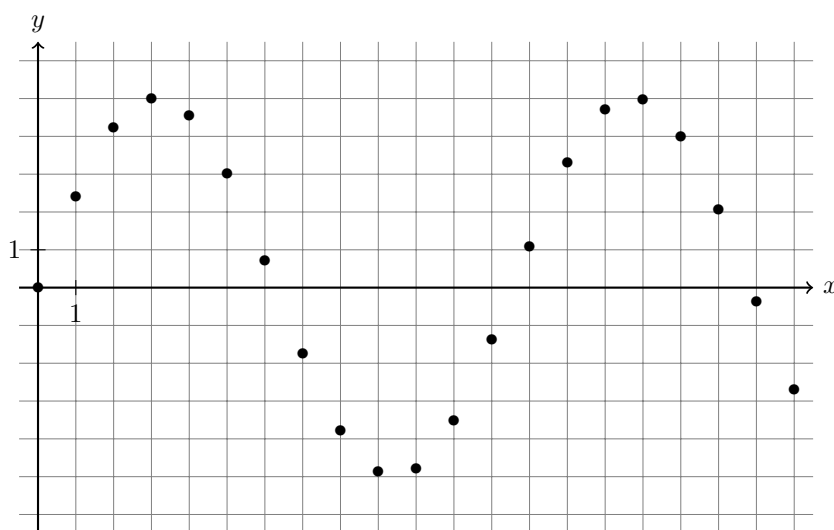
**Remarque.**

- Quand une suite admet une limite finie, on dit que la suite **converge**.
- Quand une suite ne converge pas, on dit qu'elle **diverge**.

**Exemple.** On représente une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par les points de coordonnées  $(n, u_n)$ .



La suite  $(u_n)$  semble converger vers le réel 2 : plus  $n$  est grand (pour des abscisses de plus en plus grandes), et plus  $u_n$  est proche de 2 (les ordonnées des points sont de plus en plus proche de 2).



Ici, la suite représentée ne semble pas admettre de limite finie  $l$ . En effet, les ordonnées des points de coordonnées  $(n, u_n)$  ne semblent pas se rapprocher d'une valeur en particulier, à la mesure que  $n$  augmente.

## 6.2 Divergence vers l'infini

**Définition 9.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite numérique. On dit que **la suite  $(u_n)$  admet  $+\infty$  comme limite** quand les valeurs de  $u_n$  sont de plus en plus grandes à la mesure où  $n$  augmente. On le note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

**Définition 10.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite numérique. On dit que **la suite  $(u_n)$  admet  $-\infty$  comme limite** quand les valeurs de  $u_n$  sont de plus en plus petites à la mesure où  $n$  augmente. On le note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

**Remarque.** Une suite admettant  $+\infty$  ou  $-\infty$  comme limite est dite **divergente**. Une suite diverge donc dans deux cas :

- si elle n'admet pas de limite finie ;
- ou si elle admet  $+\infty$  ou  $-\infty$  comme limite.

**Exemple.** Les deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  représentées ci-après admettent  $-\infty$  et  $+\infty$  comme limite.

