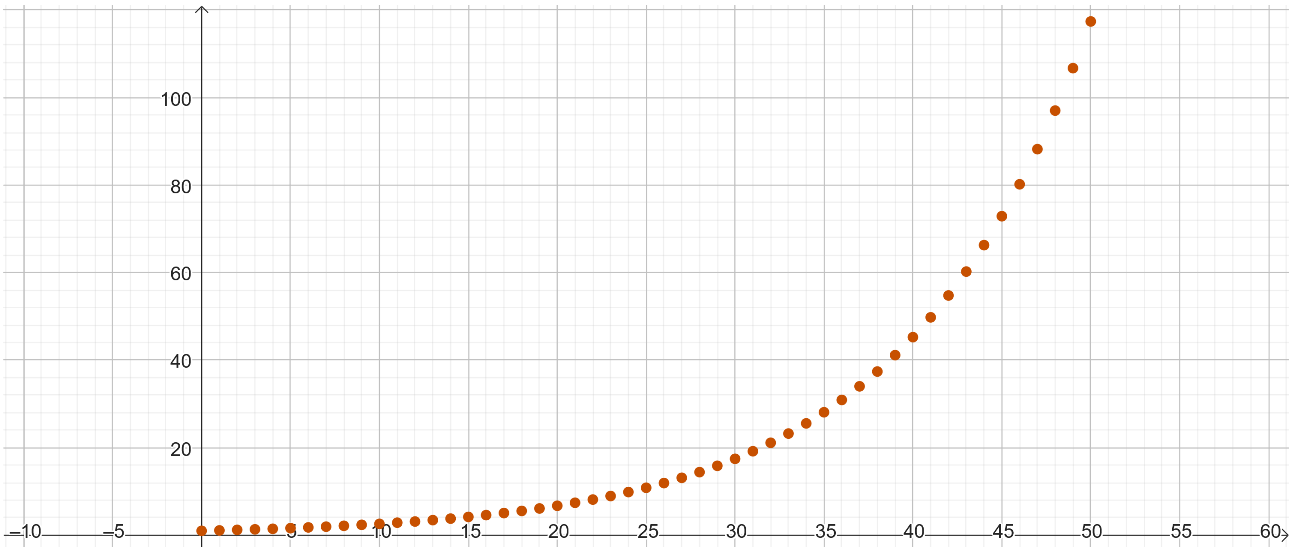
Fonctions exponentielles

Terminale STMG2

1 Définition de l'exponentielle de base a

On représente ci-contre les valeurs de la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = a^n$, avec $a > 0$.



Définition 1. *Le prolongement aux réels de la suite u_n est appelée* ***fonction exponentielle de base*** *a. Pour tout x réel, l'image de x par cette fonction est notée a^x. En particulier, si $x < 0$, alors cette image est définie par :*

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}}$$

Exemple. *À l'aide d'une calculatrice, donner la valeur des image de fonctions exponentielles suivantes :*

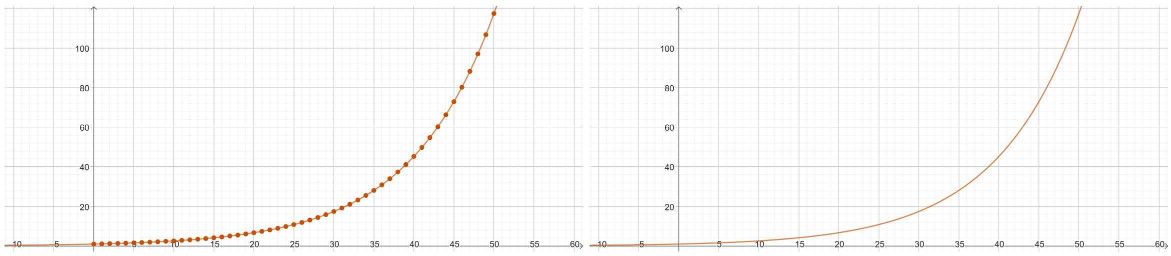
a) $2^{3,5} =$ ....

b) $10,2^{0,2} =$ ....

c) $0,6^{-5,4} =$ ....

2 Représentation graphique

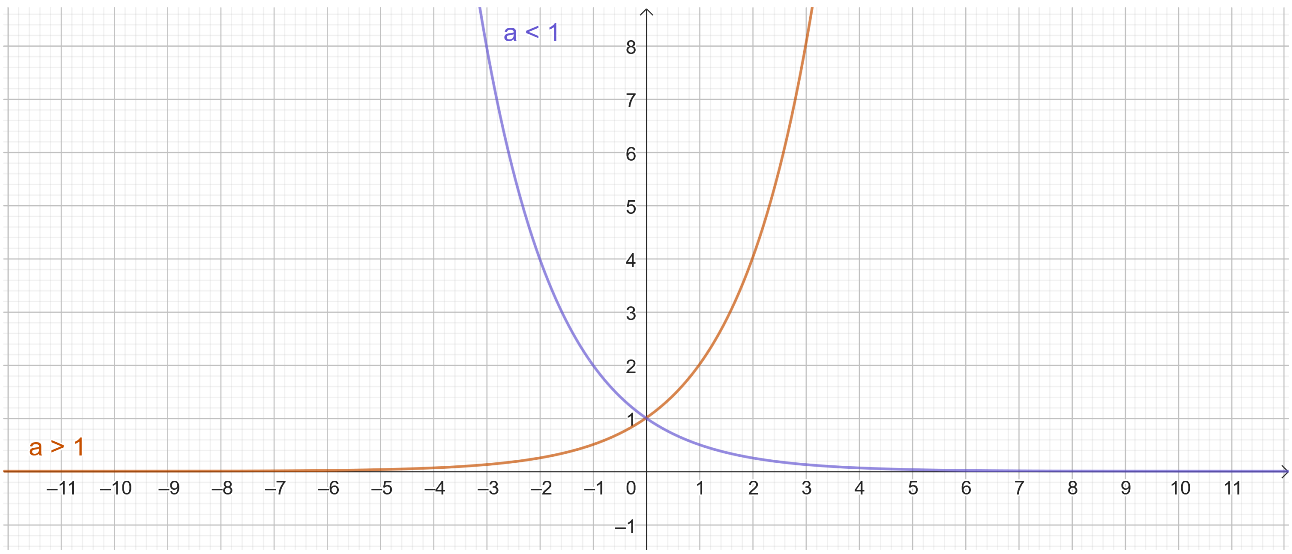
On représente ci-dessous la courbe représentative d'une fonction exponentielle de base a. Elle correspond au prolongement des points de coordonnées $(n; a^n)$.



3 Sens de variation

Proposition 1. *Soit $a > 0$ un nombre réel. Alors,*

- *La fonction exponentielle de base a est strictement croissante si et seulement si $a > 1$.*
- *La fonction exponentielle de base a est strictement décroissante si et seulement si $a < 1$.*
- *La fonction exponentielle de base a est constante si et seulement si $a = 1$.*



Exemple.

a) *Comparer $3,4^{12}$ et $3,4^{15}$:* ....

b) *Comparer $0,7^3$ et $0,7^9$:* ....

Proposition 2. *Soit une fonction de la forme $f : x \mapsto ka^x$ avec k un nombre réel et $a > 0$, alors le sens de variation de f est donné grâce au tableau suivant.*

	$a > 1$	$a < 1$
$k > 0$	*Croissante*	*Décroissante*
$k < 0$	*Décroissante*	*Croissante*

4 Propriétés algébrique de la fonction exponentielle

Proposition 3. *Soit a un réel positif, ainsi que x, y deux réels quelconques. Alors,*

- $a^{x+y} = a^x \times a^y$
- $a^{x\times y} = (a^x)^y$
- $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$
- $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
- $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$
- $a^0 = 1$

Exemple. *Simplifier les expressions suivantes en une puissance de 2 :*

a) $2^15 \times 2^12 =$ ……………………………………

b) $2^-7 =$ ……………………………………

c) $(2^12)^{-5} =$ ……………………………………

d) $\dfrac{2^18}{2^5} =$ ……………………………………

e) $64^4 =$ ……………………………………

f) $2^4 + 2^4 =$ ……………………………………

5 Cas particulier : taux d'évolution moyen

Définition 2. *On suppose qu'une quantité évolue de $T\%$ en n étapes. Alors, si le coefficient multiplicateur de T est noté CM, on dit que le* ***taux d'évolution moyen*** *est donné par le taux d'évolution t dont le coefficient multiplicateur cm est donné par*

$$cm = CM^{1/n}$$

Cela correspond au taux d'évolution constant associé à une étape.

$$\begin{tikzcd}
V_0 \arrow[r, "\times CM^{1/n}"'] \arrow[rrrr, bend left, "\times CM"] & V_1 \arrow[r, "\times CM^{1/n}"'] & V_2 \arrow[r, "\times CM^{1/n}"'] & V_3 \arrow[r, "\times CM^{1/n}"'] & V_4
\end{tikzcd}$$

Exemple. *Le prix du loyer augmente de 54% en quatre ans. Donner le taux d'évolution moyen de cette augmentation.*

a) *On calcule d'abord le coefficient multiplicateur de $+54\%$: $CM =$* ……………………………………

b) *On calcule ensuite $cm = CM^{1/4} =$* ……………………………………

c) *On déduit le taux d'évolution moyen $t = cm - 1 =$* ……………………………………