

Chapitre 2 : Second degré

Premières Spécialité Mathématiques

1 Définition

Définition 1. Une *fonction polynomiale du second degré* est une fonction f définie sur les réels qui à tout nombre x associe un réel $f(x)$ de la forme :

$$ax^2 + bx + c$$

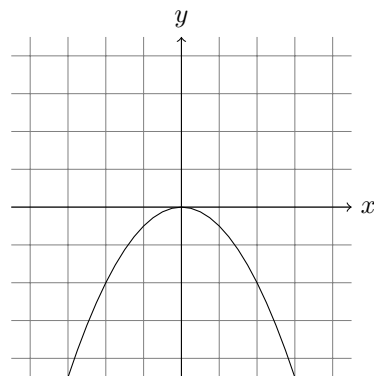
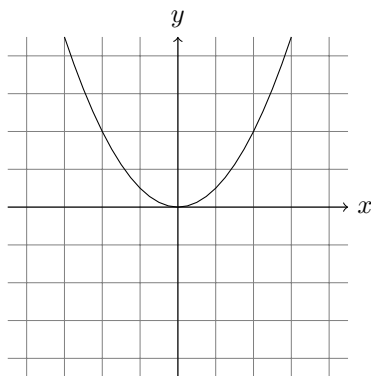
où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

Remarque. L'hypothèse $a \neq 0$ est essentielle, sinon la fonction est polynomiale de degré au plus 1.

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les fonctions polynomiales du second degré : l'allure de leur courbe représentative, leur extremum, leurs racines...

2 Allure du graphique

On trace la courbe représentative de deux fonctions polynomiales du second degré : une avec $a > 0$ et une avec $a < 0$.



Définition 2. Soit f une fonction polynomiale de degré 2. Sa courbe représentative est appelée une *parabole*.

Proposition 1. Soit f une fonction polynomiale de degré 2. telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$. Alors :

- Si $a > 0$, il existe une valeur de x , notée x_m telle que f est décroissante sur $]-\infty; x_m]$ et croissante sur $[x_m; +\infty[$
- Si $a < 0$, il existe une valeur de x , notée x_M telle que f est croissante sur $]-\infty; x_M]$ et décroissante sur $[x_M; +\infty[$

Remarque.

- Dans le cas $a > 0$, les « branches de la paraboles sont tournées vers le haut ». Dans le cas contraire ($a < 0$), elles sont « tournées vers le bas ».
- Dans le cas $a > 0$, f admet un unique minimum, et ce minimum est atteint en x_m . Dans le cas contraire ($a < 0$), f admet un maximum, et ce maximum est atteint en x_M .

3 Recherche de l'extremum

3.1 Forme canonique

Proposition 2. Soit f une fonction polynomiale du second degré telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$. Alors il existe α et β tel que

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

Remarque. Dans ce cas, $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

Exemple. Soit l'expression polynomiale du second degré $-x^2 + 2x - 5$. Déterminer sa forme canonique.

Méthode 1 Par identification :

Méthode 2 En utilisant les « presque » identités remarquables :

3.2 Extremum

Proposition 3. Soit une fonction polynomiale du second degré $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$. On suppose que $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ pour tout x réel. Alors, f admet un extremum qu'il atteint en α et ayant pour valeur β .

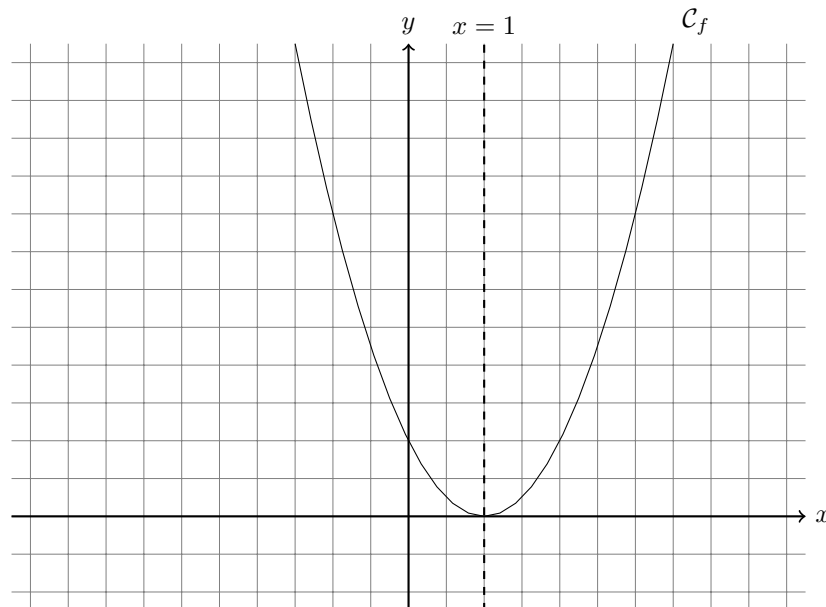
Remarque. Comme dit précédemment, si $a > 0$, alors f admet un minimum qu'il atteint en $\alpha = -\frac{b}{2a}$. Sinon, si $a < 0$, alors f admet un maximum qu'il atteint en $\alpha = -\frac{b}{2a}$. Dans les deux cas, cet extremum vaut $\beta = f(\alpha)$.

Exemple. Soit la fonction polynomiale $g : x \mapsto 4x^2 + 32x - 5$.

- Cette fonction admet-elle un minimum ou un maximum ?
- En quelle valeur cet extremum est-il atteint ?
- Que vaut cet extremum ?

Proposition 4. Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynomiale du second degré. On suppose que $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$. Alors la courbe représentative \mathcal{C}_f est une parabole admettant comme axe de symétrie la droite $x = \alpha$.

Exemple. Soit $f : x \mapsto x^2 - 2x + 1$. Alors f admet un minimum (car $a > 0$) atteint en $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2} = 1$. Alors \mathcal{C}_f admet la droite $x = 1$ comme axe de symétrie.



4 Racines

4.1 Définition

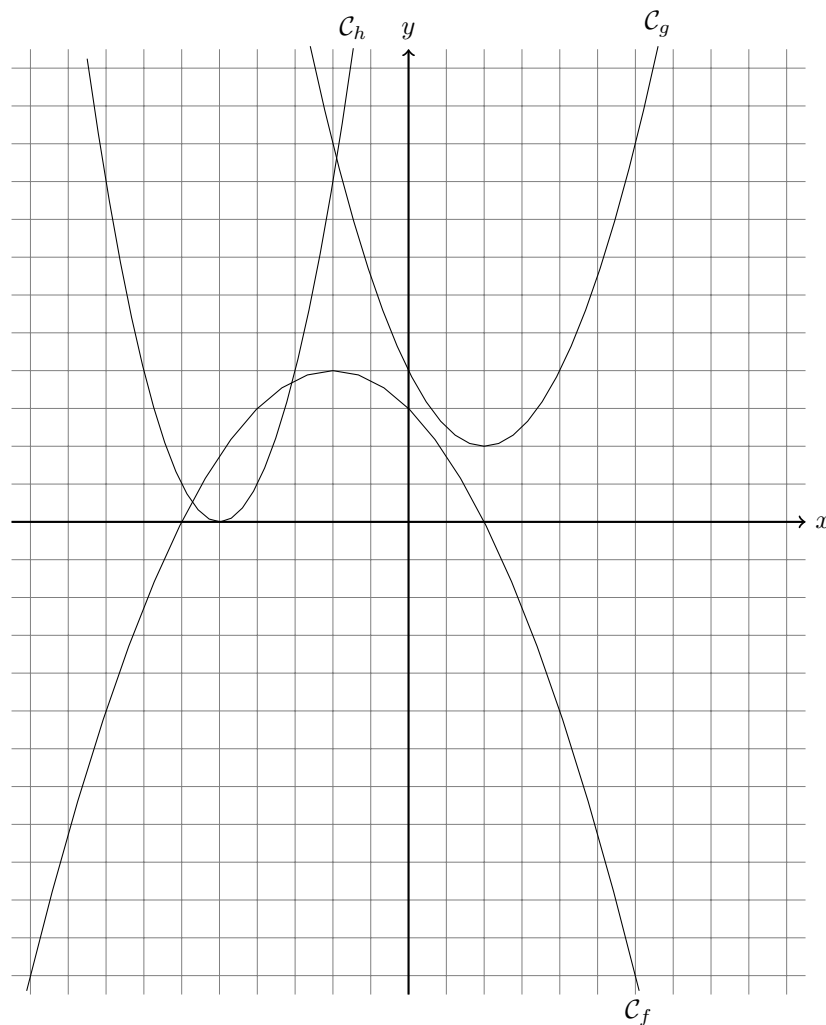
Définition 3. Soit f une fonction. On appelle **racine** de la fonction f un nombre r tel que $f(r) = 0$.

Exemple. Vérifier que $r_1 = 1$ et $r_2 = -3$ sont deux racines de la fonction $f : x \mapsto 2x^2 + 4x - 6$.

Proposition 5. Soit $f : ax^2 + bx + c$ une fonction polynomiale du second degré. Alors, seuls trois cas sont à considérer :

- a) f n'admet aucune racine réelle, c'est-à-dire que pour tout réel x , on a $f(x) \neq 0$.
- b) f admet une unique racine notée r . Dans ce cas, f peut être factorisée en $f(x) = a(x - r)^2$ pour tout x .
- c) f admet deux racines, notées r_1 et r_2 . Dans ce cas, f peut être factorisée en $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$ pour tout x .

Exemple. Soient trois fonctions polynomiales du second degré f , g et h , dont les courbes C_f , C_g et C_h sont représentées ci-après. Combien de racines ont chacune de ces fonctions ?



4.2 Signe

Proposition 6. Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynomiale du second degré. Alors :

- a) Si f n'admet pas de racine, alors f est du même signe que a sur \mathbb{R} .
- b) Si f admet une unique racine r , alors f est du même signe que a sur $]-\infty; r[$ et sur $]r; +\infty[$.
- c) Si f admet deux racines distinctes $r_1 < r_2$, alors f est du même signe que a sur $]-\infty; r_1[$ et sur $]r_2; +\infty[$, et est du signe opposé à a sur $]r_1; r_2[$.

Remarque. Une phrase pour retenir cette proposition :

Une fonction polynomiale du second degré est du même signe que a à l'**extérieur** de ses racines, et est de signe opposé à a à l'**intérieur** de ses racines.

Exemple. En reprenant l'exemple précédent, donner le tableau de signes des fonctions f , g et h .