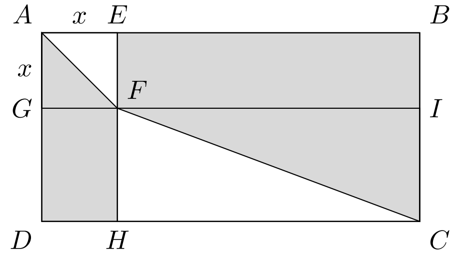
Exercice 1 : Vous avez carte blanche (6 points)

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 10\,\text{cm}$ et $AD = 6\,\text{cm}$.
On pose E un point **mobile** du segment $[AB]$ et G un point du segment $[AD]$ tel que $AE = AG$.
On pose F tel que $AEFG$ est un carré.
On pose I un point du segment $[BC]$ et H un point du segment $[CD]$ tel que le quadrilatère $FICH$ est un rectangle.
On pose $x = AE$. On s'intéresse à l'aire $M(x)$ de la **partie laissée blanche**, c'est-à-dire l'aire du triangle AEF et l'aire du triangle FHC.



(a) (1 point) Justifier que x est dans l'intervalle $[0; 6]$.

> **Correction:** G est un point du segment $[AD]$, la longueur x du segment $[AG]$ ne peut donc pas dépasser la longueur $AD = 6$.
> De plus, x est une longueur, et est donc positive.
> On en déduit donc que $x \in [0; 6]$.

(b) (2 points) Démontrer alors que pour tout $x \in [0; 6]$,

$$M(x) = x^2 - 8x + 30$$

> **Correction:** $M(x)$ est donné par l'aire du triangle rectangle AEF et du triangle HFC.
> Alors,
>
> $$\begin{aligned} M(x) &= \frac{AE \times EF}{2} + \frac{HF \times HC}{2} \\ &= \frac{x \times x}{2} + \frac{(10 - x) \times (6 - x)}{2} \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{60 - 16x + x^2}{2} \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{60}{2} - \frac{16x}{2} + \frac{x^2}{2} \\ &= x^2 - 8x + 30 \end{aligned}$$

(c) (1 point) Tracer le tableau de variations de l'aire laissée blanche.
En déduire la valeur de x pour laquelle cette aire est minimale.

> **Correction:** On écrit l'expression de l'aire $M(x) = x^2 - 8x + 30$ sous forme canonique.
>
> $$\begin{aligned} M(x) &= x^2 - 8x + 30 \\ &= (x - 4)^2 - 16 + 30 \\ &= (x - 4)^2 + 14 \end{aligned}$$

On en déduit que $\alpha = 4$ et $\beta = 14$. De plus, comme $a = 1 > 0$, on en déduit que

x	$-\infty$	4	$+\infty$
Variations de f	$\searrow$	14	$\nearrow$

(d) (2 points) Montrer que quelque soit la valeur de x, l'aire blanche est toujours supérieure à l'aire du rectangle $GFDH$. (Indication : Si on pose $N(x)$ l'aire de $GFDH$, on étudiera le signe $M(x) - N(x)$)

Correction: On pose $N(x)$ l'expression de l'aire de $GDFH$. Alors, pour tout $x \in [0;6]$,

$$N(x) = GD \times HD = (6 - x) \times x = -x^2 + 6x$$

On souhaite donc montrer que pour tout $x \in [0,6]$, $M(x) > N(x)$. Cela est équivalent à montrer que $M(x) - N(x) > 0$.
On s'intéresse à $M(x) - N(x)$,

$$\begin{aligned} M(x) - N(x) &= x^2 - 8x + 30 - (-x^2 + 6x) \\ &= x^2 - 8x + 30 + x^2 - 6x \\ &= 2x^2 - 14x + 30 \\ &= 2(x^2 - 7x) + 30 \\ &= 2((x - 3,5)^2 - 12,25) + 30 \\ &= 2(x - 3,5)^2 + 17,75 \end{aligned}$$

En mettant $M(x) - N(x)$ sous forme canonique, on constate que $\beta = 17,75$. De plus, ici, $a = 2 > 0$, ce qui signifie que cette fonction admet un minimum supérieur à 0. On en déduit que $M(x) - N(x)$ est positif pour tout $x \in [0;6]$. On a donc démontré le résultat souhaité.