Définition de la fonction exponentielle

Première Spécialité Mathématiques

14 Mai 2025

1 Équation différentielle

On s'intéresse aux fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient **l'équation différentielle** suivante :

$$f' = f$$

Autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, si f est solution de cette équation, alors,

$$f'(x) = f(x)$$

On suppose que la fonction f est une telle solution.

a) Soit C une constante réelle. Montrer que la fonction $g : x \mapsto Cf(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que sa dérivée vérifie $g'(x) = g(x)$.

b) En déduire qu'il y a une infinité de fonctions f' vérifiant l'équation différentielle $f' = f$.
On suppose alors que f est un telle solution, et qu'en plus, f vérifie :

$$f(0) = 1$$

c) Soit $h : x \mapsto f(x) \times f(-x)$. Montrer que h est défini et dérivable sur $\mathbb{R}$.

d) Calculer la dérivée de h. En déduire que h est une fonction constante.
Cette constante vaut $h(0) = f(0) \times f(-0) = 1 \times 1 = 1$

e) En déduire que pour tout x, $f(x) > 0$.
Ainsi, si f est solution de $f' = f$, et si $f(0) = 1$, f est toujours strictement positive.
On suppose maintenant que f et g vérifient tous les deux les même critères :

— $f' = f$ et $f(0) = 1$

— $g' = g$ et $g(0) = 1$

f) On pose $h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$. Montrer que h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

g) Calculer la dérivée de h, et en déduire que h est constante.

h) Conclure que $g = f$.

En conclusion, si une fonction f vérifie $f' = f$ et $f(0) = 1$. Alors cette fonction est unique.

Nous admettons l'existence d'une telle fonction.

Définition 1. *La **fonction exponentielle**, noté* exp *est l'unique solution de l'équation différentielle*

$$\begin{cases} f'(x) = f(x) & \textit{pour tout } x \in \mathbb{R} \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Définition de la fonction exponentielle

Première Spécialité Mathématiques

14 Mai 2025

2 Méthode d'Euler et Constante de Neper

On cherche à déterminer une fonction f qui vérifie

$$\begin{cases} f'(x) = f(x) & \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Pour déterminer les valeurs que peuvent prendre une telle fonction f, nous allons employer la **méthode d'Euler**. Elle consiste à se souvenir que

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Alors, en prenant h suffisamment petit, on obtient

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1}$$

a) Soit h fixé. À l'aide de la relation (1), en déduire une approximation de $f(x+h)$ en fonction de $f(x)$ et de h.

b) On pose $h = 1$. En déduire une première approximation de $f(1)$. (Indication : partir de $x = 0$)

c) On pose $h = 0,5$. En déduire une deuxième approximation de $f(1)$ (Indication : il faudra pour cela approcher $f(0,5)$).

d) On pose $h = 0,25$. En déduire une troisième approximation de $f(1)$.

e) Même question pour $h = 0,1$ et $h = 0,01$. Quelle formule utiliser pour accélerer vos calculs ?
En passant à la limite, on obtient la **constante de Neper**, notée e. Elle vaut environ $2,718\ldots$
On va montrer que $f : x \mapsto e^x$ est vérifie les critères recherchés : $f' = f$ et $f(0) = 1$. On va admettre l'existence de a^x où a est une constante réelle positive, et x est réel. Notamment, on admet que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $a^{x+y} = a^x a^y$.

f) On pose $a = 2$, et $f(x) = 2^x$. Montrer que $f(0) = 1$.

g) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$. Simplifier l'expression

$$\frac{2^{x+h} - 2^h}{h}$$

h) En prenant $h = 1$, puis $h = 0,5$, puis $h = 0,25$ puis $h = 0,1$, conjecturer l'expression de la dérivée de $x \mapsto 2^x$.

i) Recommencer en remplaçant 2 par $2,7$.

j) Recommencer en remplaçant $2,7$ par $2,71$.

k) Conjecturer la dérivée de $x \mapsto e^x$.

Cette conjecture est un théorème : la fonction $f : x \mapsto e^x$ vérifie $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Définition 2. *La fonction $x \mapsto e^x$ est appelée la **fonction exponentielle**. Elle est notée* exp *et vérifie*

$$\begin{cases} exp'(x) = exp(x) & \textit{pour tout } x \in \mathbb{R} \\ exp(0) = 1 \end{cases}$$