Exercices : définitions de suites

Première Spécialité Mathématiques

11 Février 2025

Modes de génération d'une suite

1 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2n^2 - 1$.
- Calculer u_0, u_1, u_2 et u_{10}.

2 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = \frac{n+1}{n}$.
- Calculer u_1, u_2, u_3 et u_{10}.

3 Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 3v_n - 4$.
- Calculer v_1, v_2 et v_3.

4 Soit (w_n) la suite définie par son premier terme $w_0 = 1$ et les autres termes sont obtenus en ajoutant 1 au double du carré du terme précédent.
1. Calculer w_1, w_2 et w_3.
2. Donner la relation entre w_{n+1} et w_n.

5 On considère la suite de triangles rectangles isocèles suivante : le premier triangle a ses côtés de longueur 1, 1 et $\sqrt{2}$ cm. On effectue un agrandissement de rapport 3 pour obtenir le triangle suivant.
1. Construire les trois premiers triangles.
2. Calculer les périmètres p_1, p_2 et p_3 des trois premiers triangles.
Donner la relation entre p_{n+1} et p_n.
3. Calculer les aires a_1, a_2 et a_3 des trois premiers triangles. Donner la relation entre a_{n+1} et a_n.

6 Donner la valeur exacte des cinq premiers termes de chacune des suites proposées.
1. La suite (a_n) est définie comme la suite des décimales de $\sqrt{3}$.
2. La suite (b_n) est définie pour tout entier naturel n par $b_n = (-2)^n$.
3. La suite (c_n) est telle que, pour tout entier naturel n non nul, c_n est l'inverse du nombre n.

7 1. Pour chacune des suites ci-dessous, indiquer si elle est définie par une formule explicite ou par une relation de récurrence.

a. $u_n = 3n^2$ pour tout entier naturel n.

b. $v_n = n - 1$ pour tout entier naturel n.

c. $\begin{cases} w_0 = -2 \\ w_{n+1} = w_n - 5 \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

d. $x_n = 4$ pour tout entier naturel n.

e. $\begin{cases} t_1 = 1 \\ t_n = \frac{1}{2}t_{n-1} \end{cases}$ pour tout entier naturel $n > 1$.

f. $\begin{cases} k_0 = 5 \\ k_{n+1} = 2n + k_n \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

2. Pour chacune des suites précédentes, déterminer les trois premiers termes puis le cinquième terme.

8 Calculer les quatre premiers termes des suites définies ci-dessous par une formule explicite.
1. Pour tout entier naturel n, $u_n = -3n^2 - n + 2$.
2. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_n = \frac{2n+3}{n}$.
3. Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $w_n = \sqrt{n-2}$.

9 ALGO

Les algorithmes ci-dessous permettent de calculer le terme de rang n de trois suites.

```
u ← −4
Pour k allant de 1 à n faire
    u ← u + 5
```

```
v ← 300
Pour k allant de 1 à n faire
    v ← 2 × v
```

```
w ← 0
Pour k allant de 1 à n faire
    w ← k + 3 × w
```

- Indiquer le premier terme et la relation de récurrence définissant chacune de ces suites.

10 ALGO

On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 4$.
1. Cette suite est-elle définie par une formule explicite ou par une relation de récurrence ?
2. Compléter l'algorithme ci-dessous de sorte qu'il calcule le terme de rang n de la suite (u_n).

```
u ← ...
Pour k allant de ... à ... faire
    u ← ...
```

11 ALGO

1. Calculer les quatre premiers termes des suites définies ci-dessous par une relation de récurrence.

a. $u_0 = 2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

b. $v_0 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = -v_n(3 - v_n)$.

c. $w_0 = 0{,}5$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n^{\ 2} + w_n - 1$.

2. Pour chacune des suites précédentes, écrire un algorithme qui calcule le terme de rang n.

12 CALCULATRICE

On considère la suite (a_n) définie par :

$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{10a_n}{a_n + 3} \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

- Avec la calculatrice, donner une valeur approchée de a_5 à 10^{-3} près.