# Dérivation globale

Premières Spécialité Mathématiques

## 1 Fonction dérivée

**Remarque.** *On rappelle qu'une fonction $f$ définie sur un intervalle $I$ est dite **dérivable en** $a \in I$ si et seulement si le taux de variation*

$$T_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

*admet une limite finie quand $h$ tend vers $0$. La valeur de cette limite $\lim_{h \to 0} T_a(h)$ est alors appelé **nombre dérivé de $f$ en** $a$ et est noté $f'(a)$.*

*En résumé, la notion de dérivation est un processus dépendant de $f$ qui à tout nombre $a$ associe, quand c'est possible, un autre nombre $f'(a)$. Il s'agit donc d'une **fonction**.*

**Définition 1.** *Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$. On dit que $f$ est **dérivable sur** $I$ si pour tout nombre $a \in I$, la fonction $f$ est dérivable en $a$. Dans ce cas, on pose $f'$ la fonction définie sur $I$ qui à tout $x \in I$ associe le nombre dérivé $f'(x)$.*

**Exemple.** *Soit* $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$.

*En justifiant son existence, calculer le nombre dérivé de $f$ en $a$, avec $a \in \mathbb{R}$ quelconque. En déduire que la fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et donner l'expression de la fonction dérivée $f'(x)$*

**Proposition 1.**

1. *Soit $c \in \mathbb{R}$. La fonction constante définie sur $\mathbb{R}$ $f : x \mapsto c$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est $f' : x \mapsto 0$.*
2. *La fonction identité définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est $f' : x \mapsto 1$.*
3. *La fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est $f' : x \mapsto 2x$.*
4. *La fonction puissance $n \in \mathbb{N}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^n$ est déribale sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est $f' : x \mapsto nx^{n-1}$*
5. *La fonction inverse définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$, et sa dérivée est $f' : x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$.*
6. *La fonction racine carrée définie sur $[0; +\infty[$ par $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$, et sa dérivée est $f' : x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.*

**Remarque.**

- *Avant de dériver une fonction, il faut s'assurer qu'elle est bien dérivable.*
- *La fonction racine carrée est dérivable sur $]0; +\infty[$ **(ouvert en 0)**, tandis qu'elle sur définie sur $[0; +\infty[$ **(fermé en 0)**. En effet, la fonction n'est pas dérivable en $0$.*

*Démonstration.* On démontre que $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$. □

## 2 Opération algébriques

**Proposition 2.** *Soient $u$ et $v$ deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle $I$* ***ouvert****.*

- *La fonction somme de $u$ et $v$ définie sur $I$ par $s(x) = u(x) + v(x)$ est dérivable sur $I$, et sa dérivée vérifie, pour tout $x \in I$, $s'(x) = u'(x) + v'(x)$. $((u+v)' = u' + v')$*
- *Le produit $p$ d'une fonction $u$ définie sur $I$ par une constante $k \in \mathbb{R}$, définie par $p(x) = k \times u(x)$, est dérivable sur $I$, et sa dérivée vérifie, pour tout $x \in I$, $p'(x) = ku'(x)$.*
- *La fonction produit de $u$ et $v$ définie sur $I$ par $p(x) = u(x) \times v(x)$ est dérivable sur $I$, et sa dérivée vérifie, pour tout $x \in I$, $p'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. $((uv)' = u'v + uv')$*
- *Si la fonction $v$ ne s'annule pas sur l'intervalle $I$, alors la fonction inverse de $v$ définie sur $I$ par $i(x) = \dfrac{1}{v(x)}$ est dérivable sur $I$, et sa dérivée vérifie, pour tout $x \in I$, $i'(x) = -\dfrac{v'}{v^2(x)}$. $\left(\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}\right)$*
- *Si la fonction $v$ ne s'annule pas sur l'intervalle $I$, alors la fonction quotient de $u$ et de $v$ définie sur $I$ par $q(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ est dérivable sur $I$, et sa dérivée vérifie, pour tout $x \in I$, $q'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$. $\left(\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}\right)$*

**Remarque.** *On résume cette proposition sous la forme d'un tableau :*

| *Forme de $f$* | *Dérivée $f'$* | *Remarques* |
|---|---|---|
| $u+v$ | $u'+v'$ | |
| $ku$ | $ku'$ | |
| $uv$ | $u'v+uv'$ | |
| $uv$ | $u'v+uv'$ | |
| $\dfrac{1}{v}$ | $-\dfrac{v'}{v^2}$ | *$v$ ne s'annule pas* |
| $\dfrac{u}{v}$ | $-\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ | *$v$ ne s'annule pas* |

**Exemple.** *Soient $u$ et $v$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :*

$$\begin{cases} u(x) = x^2 - 5x & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^* \\ v(x) = \sqrt{x} + 1 & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

*a) Les fonctions $u$ et $v$ sont-elles dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ ? Donner l'expression de leur dérivée.*

*b) En déduire la dérivée de la somme, du produit et du quotient de $u$ et $v$.*

# 3 Composition de fonctions

**Définition 2.** *Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$. On pose aussi $a$ et $b$ deux nombres réels. Enfin, on pose $J$ l'intervalle des réels $x$ tels que $ax+b \in I$.*
*Alors on appelle la fonction $g$ définie pour tout $x \in J$ par*

$$g(x) = f(ax+b)$$

*la* ***fonction composée*** *de $f$ par la fonction $x \mapsto ax+b$.*

**Proposition 3.** *Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$, $a$ et $b$ deux réels et $J$ l'intervalle des $x$ vérifiant $ax+b \in I$. Alors la fonction composée de $f$ par $x \mapsto ax+b$, c'est-à-dire la fonction définie pour tout $x \in J$ par $g(x) = f(ax+b)$ est dérivable sur $J$, et sa dérivée vaut pour tout $x \in J$,*

$$g'(x) = af'(ax+b)$$

**Exemple.** *Soit la fonction $g$ définie sur un certain intervalle $J$ par la formule*

$$g(x) = \sqrt{3x-2} \text{ pour tout } x \in J$$

*a) Identifier le plus grand intervalle* ***ouvert*** *$J$ sur lequel cette fonction est définie.*

*b) De quelles fonctions $g$ est-elle la composée ?*

*c) En déduire que $g$ est dérivable sur $J$, et calculer sa dérivée.*

# 4 Variations de fonctions dérivables

**Proposition 4.** *Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$.*

- *La fonction $f$ est* ***croissante*** *sur $I$ si et seulement si $f'$ est* ***positive*** *sur $I$.*
- *La fonction $f$ est* ***décroissante*** *sur $I$ si et seulement si $f'$ est* ***négative*** *sur $I$.*
- *La fonction $f$ est* ***constante*** *sur $I$ si et seulement si $f'$ est* ***nulle*** *sur $I$*

**Remarque.**
- *Cela correspond à l'intuition grâce à laquelle la dérivée a été construite, c'est-à-dire que $f'(x)$ est la pente de la tangente à la courbe représentative de $f$ en le point $(x; f(x))$.*
- *Ce sont des équivalences. Si la fonction est croissante, alors sa dérivée est positive. Si la dérivée d'une fonction est positive, alors cette fonction est croissante.*

**Exemple.** *Soit $f : x \mapsto x^2 - 2x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.*

*a) Donner l'expression de la dérivée de $f$.*

*b) Étudier le signe de $f'$ à l'aide d'un tableau de signe.*

| $x$ | $-\infty$ $\cdots$ $+\infty$ |
|---|---|
| *Signe de $f'$* | |

*c) En déduire le tableau de variations de $f$.*

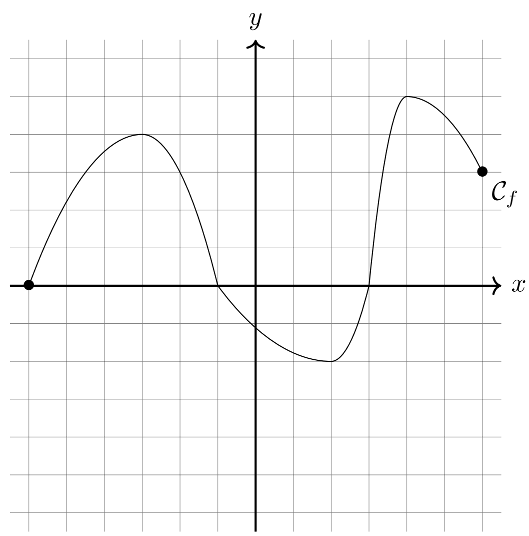
| $x$ | $-\infty$ $\cdots$ $+\infty$ |
|---|---|
| *Variations de $f$* | |

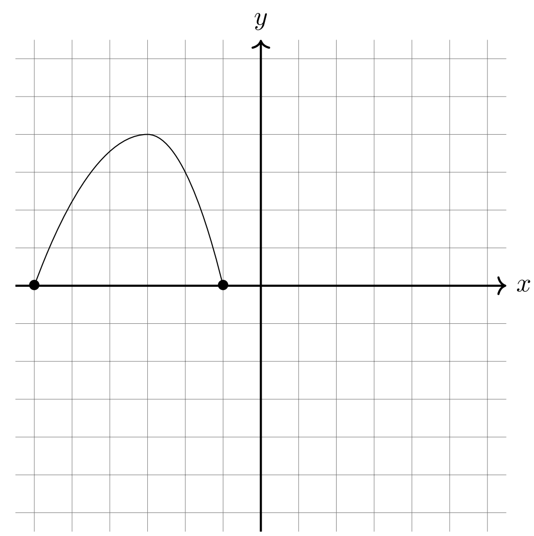
# 5 Extremums de fonctions dérivables

**Définition 3.** *Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$, et $a \in I$. On dit que $f$ atteint un* ***extremum local*** *en $a$ s'il existe un intervalle (non restreint à un point) $J$ tel que : $a \in J$ ; $J \subseteq I$ et la restriction de $f$ sur $J$ atteint un extremum en $a$.*

**Remarque.** *Autrement dit, $f(a)$ est un extremum local de $f$ sur $I$ si l'image de $a$ est supérieure ou inférieure à l'image de ses voisins « proches ».*

**Exercice.** *Soit $f$ une fonction définie sur $[-6; 6]$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est représentée sur le repère suivant (à gauche) :*




a) *Quel est le maximum et le minimum de $f$ ? En quelles valeurs sont-elles atteintes ?*

b) *On a représenté sur le repère à droite la restriction de $f$ sur l'intervalle $[-6; -1]$. En déduire en quel abscisse $f$ admet un extremum local.*

**Proposition 5.** *Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle* ***ouvert*** *$I$, et soit $a \in I$. Si $f$ atteint un extremum local en $a$, alors*

$$f'(a) = 0$$

**Remarque.**

— ***L'hypothèse d'intervalle ouvert est importante*** *: cette proposition devient fausse sinon. Par exemple, la fonction carrée $f : x \mapsto x^2$ restreinte sur $[1; 2]$ admet un extremum en $1$, mais sa dérivée en $1$ est non-nulle.*

— ***La réciproque de cette proposition est fausse*** *: ce n'est pas forcément parce que $f'(a) = 0$ que $f$ atteint un extremum local en $a$. Par exemple, si $f : x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$, on a bien $f'(0) = 0$, et pourtant $f(0) = 0$ n'est ni un minimum ou un maximum local.*

— *Cette proposition donne néanmoins une liste des candidats envisageables pour lex extremums d'une fonction dérivable sur un intervalle $I$ : il suffit de chercher parmi les points $a$ tels que $f'(a) = 0$. C'est ce qu'on appelle une* ***condition nécessaire****.*