

Chapitre 1 : Étude de fonctions polynomiales du second degré

Premières Spécialité Mathématiques

1 Rappel : Fonctions affines

Définition 1. Une **fonction affine** est une fonction f définie sur \mathbb{R} telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = ax + b$$

avec $a \neq 0$ et b deux réels.

Le réel a est appelé **coefficient directeur** de f .

Le réel b est appelé **ordonnée à l'origine** de f .

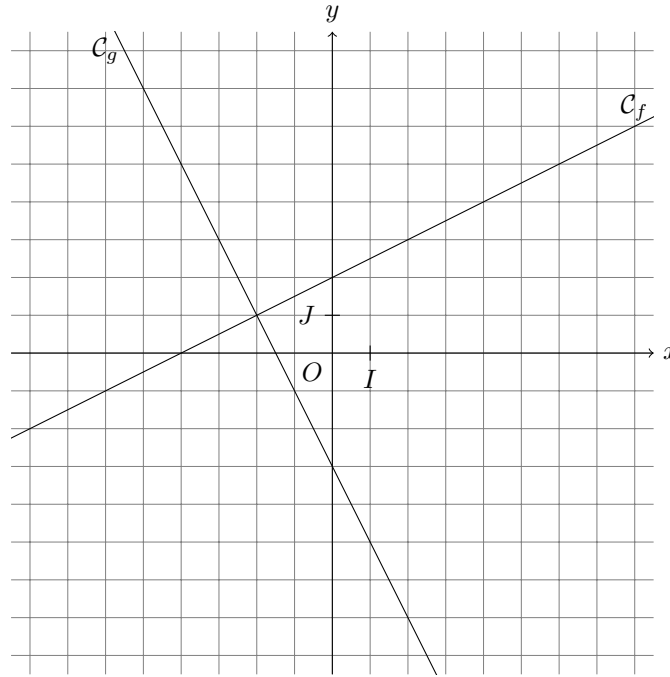
Remarque. Quand $b = 0$, c'est-à-dire quand $f(x) = ax$, on dit que la fonction est **linéaire**.

Proposition 1. Soit $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine avec $a \neq 0$ et b deux nombres réels ; et $(O; I; J)$ un repère orthonormé. Alors, la courbe représentative de f dans ce repère est une droite.

Proposition 2. Soit $(O; I; J)$ un repère orthonormé, et f une fonction définie sur \mathbb{R} dont la courbe représentative est une droite. Alors, f est une fonction affine telle que $f(x) = ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ où :

- son coefficient directeur a est donnée par la pente de la droite ;
- son ordonnée à l'origine b est l'ordonnée du point de la droite d'abscisse 0.

Exercice 1. Sur le repère $(0; I; J)$ ci-contre, on a tracé la courbe représentative de deux fonctions affines f et g .



En déduire l'expression algébrique de f et g .

Proposition 3. Soit $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine, et $x_1 < x_2$ deux réels distincts. Alors,

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \text{et} \quad b = f(x_1) - ax_1$$

Proposition 4. Soit $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine.

- Si $a < 0$, alors f est décroissante sur \mathbb{R} .
- Si $a > 0$, alors f est croissante sur \mathbb{R} .

Méthode 1. Pour dresser le tableau de signes d'une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$, il faut :

1. Déterminer l'antécédant de 0 de f , autrement dit, trouver x tel que $ax + b = 0$;
2. Le tableau de signes s'obtient en suivant la variation de la fonction, autrement dit, cela dépend du signe de a

Exercice 2. Dresser le tableau de signes des fonctions trouvées dans l'exercice 1.

2 Fonction polynomiale du second degré

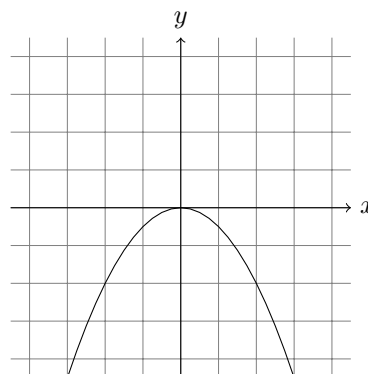
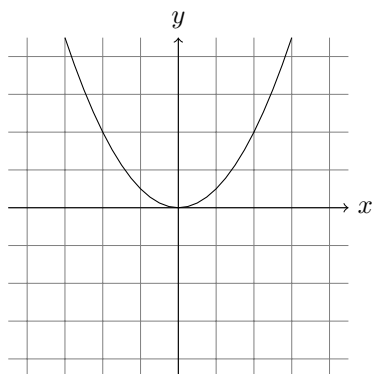
Définition 2. Une **fonction polynomiale du second degré** est une fonction f définie sur les réels qui à tout nombre x associe un réel $f(x)$ de la forme :

$$ax^2 + bx + c$$

où a , b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

Remarque. L'hypothèse $a \neq 0$ est essentielle, sinon la fonction est polynomiale de degré au plus 1.

On trace la courbe représentative de deux fonctions polynomiales du second degré : une avec $a > 0$ et une avec $a < 0$.



Définition 3. Soit f une fonction polynomiale de degré 2. Sa courbe représentative est appelée une **parabole**.

Proposition 5. Soit f une fonction polynomiale de degré 2. telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$. Alors :

- Si $a > 0$, il existe une valeur de x , notée x_m telle que f est décroissante sur $]-\infty; x_m]$ et croissante sur $[x_m; +\infty[$
- Si $a < 0$, il existe une valeur de x , notée x_M telle que f est croissante sur $]-\infty; x_M]$ et décroissante sur $[x_M; +\infty[$

Remarque.

- Dans le cas $a > 0$, les « branches de la paraboles sont tournées vers le haut ». Dans le cas contraire ($a < 0$), elles sont « tournées vers le bas ».
- Dans le cas $a > 0$, f admet un unique minimum, et ce minimum est atteint en x_m . Dans le cas contraire ($a < 0$), f admet un maximum, et ce maximum est atteint en x_M .

3 Recherche de l'extremum

3.1 Forme canonique

Proposition 6. *Soit f une fonction polynomiale du second degré telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$. Alors il existe α et β tel que*

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

Remarque. Dans ce cas, $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

Exemple. Soit l'expression polynomiale du second degré $-x^2 + 2x - 5$. Déterminer sa forme canonique.

Méthode 2 (Par identification).

Méthode 3 (En utilisant les développements limités).

3.2 Extremum

Proposition 7. Soit une fonction polynomiale du second degré $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$. On suppose que $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ pour tout x réel. Alors, f admet un extremum qu'il atteint en α et ayant pour valeur β .

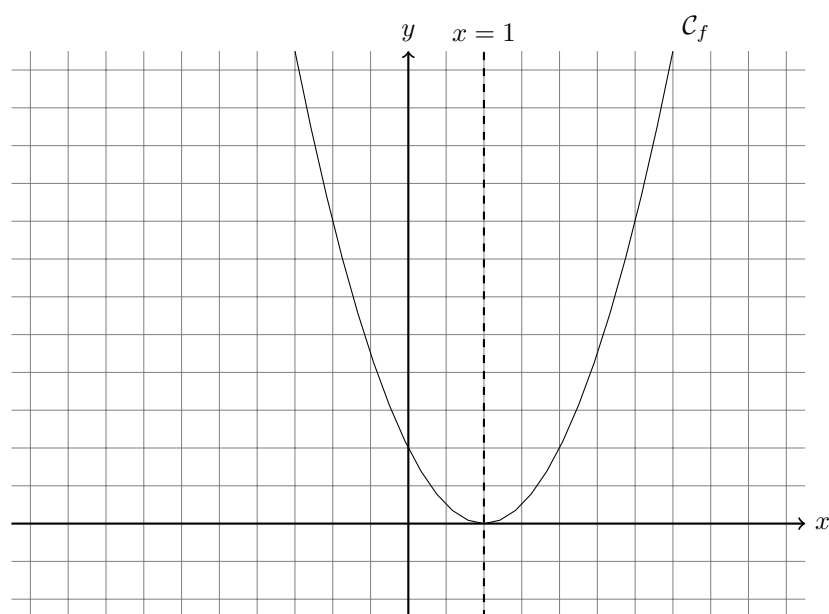
Remarque. Comme dit précédemment, si $a > 0$, alors f admet un minimum qu'il atteint en $\alpha = \frac{-b}{2a}$. Sinon, si $a < 0$, alors f admet un maximum qu'il atteint en $\alpha = \frac{-b}{2a}$. Dans les deux cas, cet extremum vaut $\beta = f(\alpha)$.

Exemple. Soit la fonction polynomiale $g : x \mapsto 4x^2 + 32x - 5$.

- a) Cette fonction admet-elle un minimum ou un maximum ?
- b) En quelle valeur cet extremum est-il atteint ?
- c) Que vaut cet extremum ?

Proposition 8. Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynomiale du second degré. On suppose que $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$. Alors la courbe représentative \mathcal{C}_f est une parabole admettant comme axe de symétrie la droite $x = \alpha$.

Exemple. Soit $f : x \mapsto x^2 - 2x + 1$. Alors f admet un minimum (car $a > 0$) atteint en $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2} = 1$. Alors \mathcal{C}_f admet la droite $x = 1$ comme axe de symétrie.



4 Racines

4.1 Définition

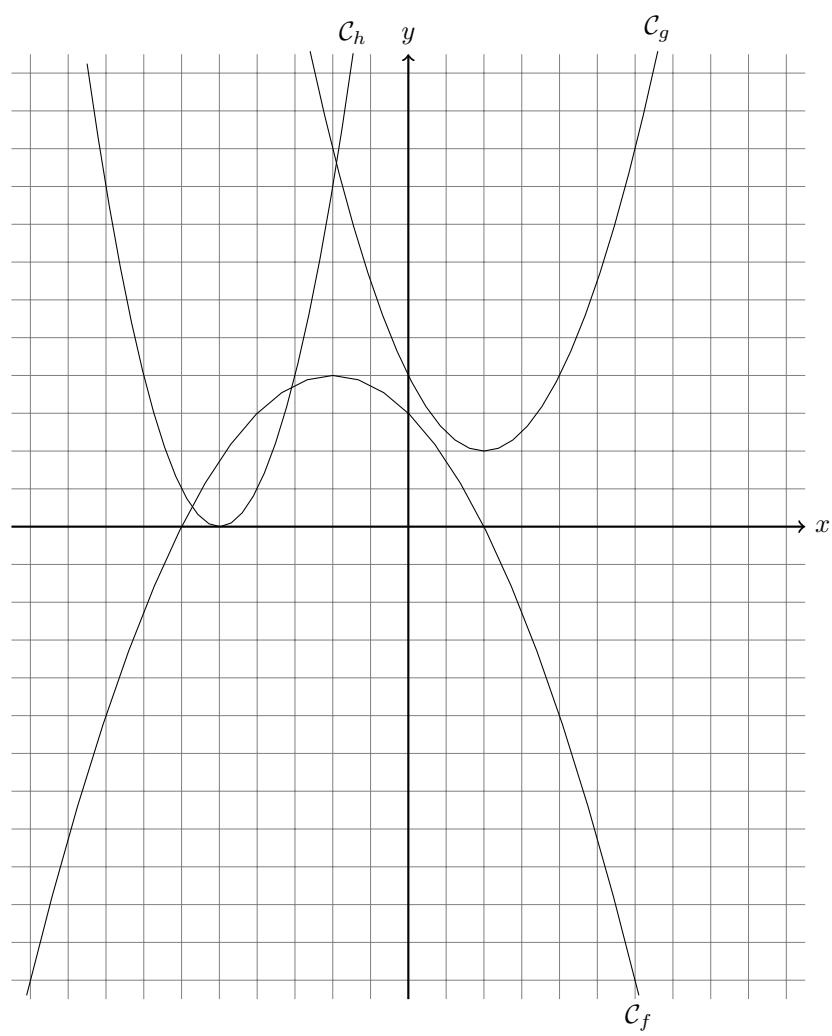
Définition 4. Soit f une fonction. On appelle **racine** de la fonction f un nombre r tel que $f(r) = 0$.

Exemple. Vérifier que $r_1 = 1$ et $r_2 = -3$ sont deux racines de la fonction $f : x \mapsto 2x^2 + 4x - 6$.

Proposition 9. Soit $f : ax^2 + bx + c$ une fonction polynomiale du second degré. Alors, seuls trois cas sont à considérer :

- a) f n'admet aucune racine réelle, c'est-à-dire que pour tout réel x , on a $f(x) \neq 0$.
- b) f admet une unique racine notée r . Dans ce cas, f peut être factorisée en $f(x) = a(x - r)^2$ pour tout x .
- c) f admet deux racines, notées r_1 et r_2 . Dans ce cas, f peut être factorisée en $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$ pour tout x .

Exemple. Soient trois fonctions polynomiales du second degré f , g et h , dont les courbes \mathcal{C}_f , \mathcal{C}_g et \mathcal{C}_h sont représentées ci-après. Combien de racines ont chacune de ces fonctions ?



4.2 Signe

Proposition 10. Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynomiale du second degré. Alors :

- a) Si f n'admet pas de racine, alors f est du même signe que a sur \mathbb{R} .
- b) Si f admet une unique racine r , alors f est du même signe que a sur $]-\infty; r[$ et sur $]r; +\infty[$.
- c) Si f admet deux racines distinctes $r_1 < r_2$, alors f est du même signe que a sur $]-\infty; r_1[$ et sur $]r_2; +\infty[$, et est du signe opposé à a sur $]r_1; r_2[$.

Remarque. Une phrase pour retenir cette proposition :

Une fonction polynomiale du second degré est du même signe que a à l'**extérieur** de ses racines, et est de signe opposé à a à l'**intérieur** de ses racines.

Exemple. En reprenant l'exemple précédent, donner le tableau de signes des fonctions f , g et h .

4.3 Calcul des racines

4.3.1 En identifiant une racine évidente

Soit $f(x) = -x^2 + 6x$ pour $x \in \mathbb{R}$. Alors, l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions évidentes : 0 et 6. Comme f est une fonction polynomiale du second degré, alors on sait que ce sont les seules solutions réelles possibles.

4.3.2 En utilisant une identité remarquable

Soit $f(x) = 2x^2 - 128$ pour $x \in \mathbb{R}$. Alors, la troisième identité remarquable nous donne une factorisation de $f(x) = 2(x - 8)(x + 8)$. Donc les deux racines distinctes de la fonction polynomiale du second degré f sont 8 et -8 .

4.3.3 Avec le produit et la somme des racines

Proposition 11. Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynomiale du second degré. Si r_1 et r_2 sont les deux racines (possiblement confondues) de f , alors

$$r_1 + r_2 = \frac{-b}{a} \quad r_1 \times r_2 = \frac{c}{a}$$

Exemple. Soit $f(x) = x^2 + x - 20$. On remarque que 4 est une racine de f . En déduire une autre racine de f , puis une factorisation de f .

4.3.4 Avec le discriminant

Définition 5. Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynomiale du second degré. Alors on appelle **discriminant de f** , noté Δ , la quantité

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

theorem 1. Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynomiale de second degré, et Δ son discriminant. Alors :

a) Si $\Delta < 0$, alors f n'admet pas de racine réelle.

b) Si $\Delta = 0$, alors f admet une unique racine réelle r , telle que

$$r = -\frac{b}{2a}$$

c) Si $\Delta > 0$, alors f admet deux racines réelles distinctes $r_1 < r_2$, telles que

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Démonstration