Chapitre 2 : Second degré

Premières Spécialité Mathématiques

1 Définition

Définition 1. *Une* ***fonction polynomiale du second degré*** *est une fonction f définie sur les réels qui à tout nombre x associe un réel $f(x)$ de la forme :*

$$ax^2 + bx + c$$

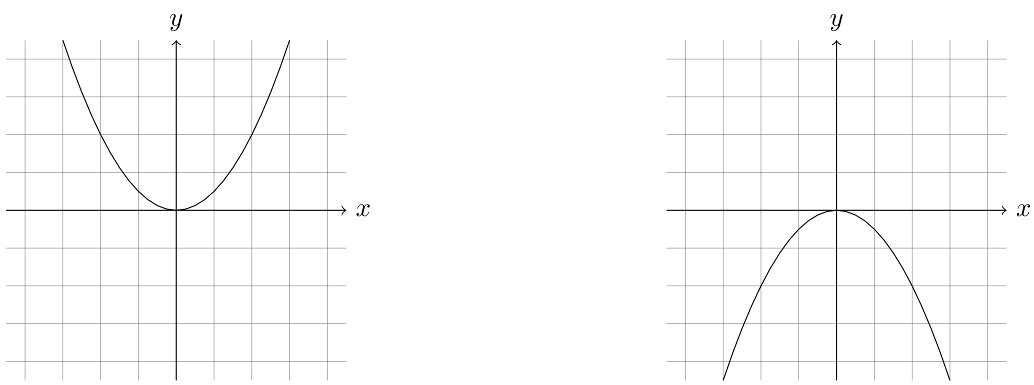
où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

Remarque. *L'hypothèse $a \neq 0$ est essentielle, sinon la fonction est polynomiale de degré au plus* 1*.*

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les fonctions polynomiales du second degré : l'allure de leur courbe représentative, leur extremum, leurs racines...

2 Allure du graphique

On trace la courbe représentative de deux fonctions polynomiales du second degré : une avec $a > 0$ et une avec $a < 0$.



Définition 2. *Soit f une fonction polynomiale de degré* 2*. Sa courbe représentative est appelée une* ***parabole****.*

Proposition 1. *Soit f une fonction polynomiale de degré* 2*. telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$. Alors :*

- *Si $a > 0$, il existe une valeur de x, notée x_m telle que f est décroissante sur $]-\infty; x_m]$ et croissante sur $[x_m; +\infty[$*
- *Si $a < 0$, il existe une valeur de x, notée x_M telle que f est croissante sur $]-\infty; x_M]$ et décroissante sur $[x_M; +\infty[$*

Remarque.

- *Dans le cas $a > 0$, les* « branches de la paraboles sont tournées vers le haut ». *Dans le cas contraire ($a < 0$), elles sont* « tournées vers le bas ».
- *Dans le cas $a > 0$, f admet un unique minimum, et ce minimum est atteint en x_m. Dans le cas contraire ($a < 0$), f admet un maximum, et ce maximum est atteint en x_M.*

3 Recherche de l'extremum

3.1 Forme canonique

Proposition 2. *Soit f une fonction polynomiale du second degré telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$. Alors il existe α et β tel que*

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

Remarque. *Dans ce cas,* $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ *et* $\beta = f(\alpha)$.

Exemple. *Soit l'expression polynomiale du second degré $-x^2 + 2x - 5$. Déterminer sa forme canonique.*

Méthode 1 *Par identification :*

Méthode 2 *En utilisant les « presque » identités remarquables :*

3.2 Extremum

Proposition 3. *Soit une fonction polynomiale du second degré $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$. On suppose que $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ pour tout x réel. Alors, f admet un extremum qu'il atteint en α et ayant pour valeur β.*

Remarque. *Comme dit précédemment, si $a > 0$, alors f admet un minimum qu'il attent en $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$. Sinon, si $a < 0$, alors f admet un maximum qu'il atteint en $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$. Dans les deux cas, cet extremum vaut $\beta = f(\alpha)$.*

Exemple. *Soit la fonction polynomiale $g : x \mapsto 4x^2 + 32x - 5$.*

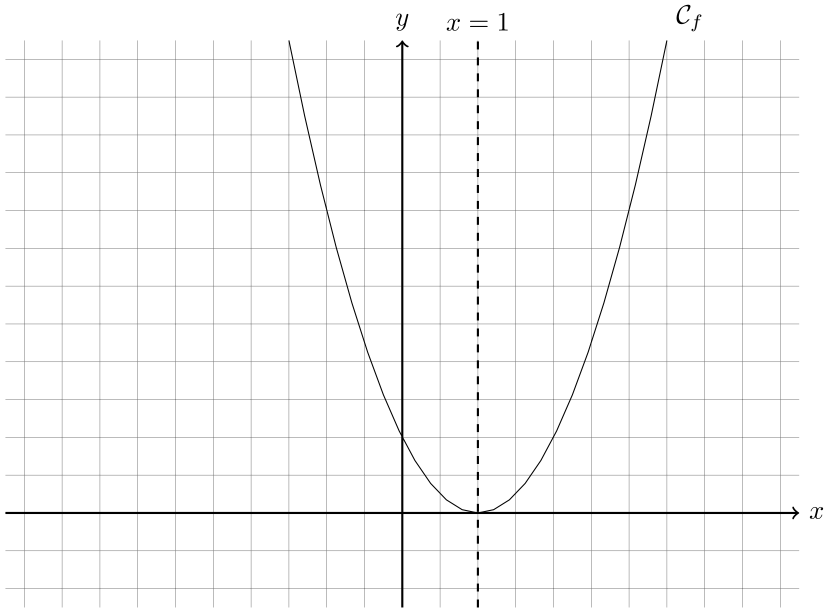
a) *Cette fonction admet-elle un minimum ou un maximum ?*

b) *En quelle valeur cet extremum est-il atteint ?*

c) *Que vaut cet extremum ?*

Proposition 4. *Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynomiale du second degré. On suppose que $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$. Alors la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est une parabole admettant comme axe de symétrie la droite $x = \alpha$.*

Exemple. *Soit $f : x \mapsto x^2 - 2x + 1$. Alors f admet un minimum (car $a > 0$) atteint en $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-2}{2} = 1$. Alors $\mathcal{C}_f$ admet la droite $x = 1$ comme axe de symétrie.*



4 Racines

4.1 Définition

Définition 3. *Soit f une fonction. On appelle* **racine** *de la fonction f un nombre r tel que $f(r) = 0$.*

Exemple. *Vérifier que $r_1 = 1$ et $r_2 = -3$ sont deux racines de la fonction $f : x \mapsto 2x^2 + 4x - 6$.*

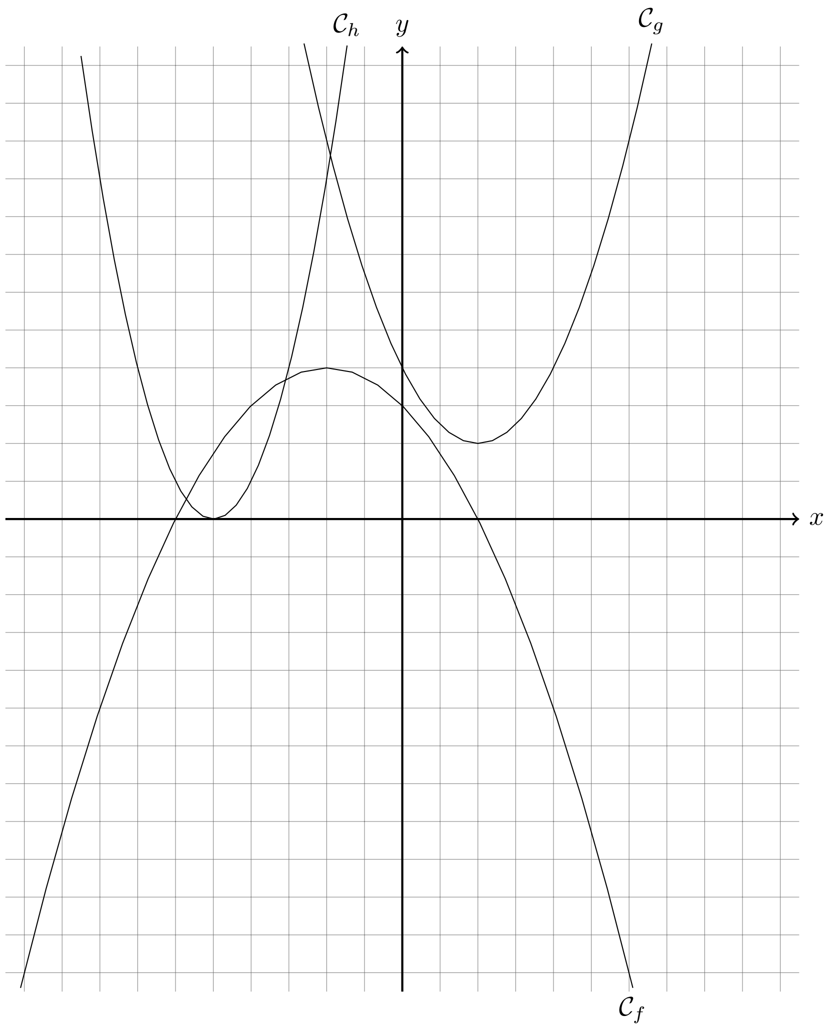
Proposition 5. *Soit $f : ax^2 + bx + c$ une fonction polynomiale du second degré. Alors, seuls trois cas sont à considérer :*

a) *f n'admet aucune racine réelle, c'est-à-dire que pour tout réel x, on a $f(x) \neq 0$.*

b) *f admet une unique racine notée r. Dans ce cas, f peut être factorisée en $f(x) = a(x - r)^2$ pour tout x.*

c) *f admet deux racines, notées r_1 et r_2. Dans ce cas, f peut être factorisée en $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$ pour tout x.*

Exemple. *Soient trois fonctions polynomiales du second degré f, g et h, dont les courbes $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ sont représentées ci-après. Combien de racines ont chacune de ces fonctions ?*



4.2 Signe

Proposition 6. *Soit* $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ *une fonction polynomiale du second degré. Alors :*

a) *Si* f *n'admet pas de racine, alors* f *est du même signe que* a *sur* $\mathbb{R}$.

b) *Si* f *admet une unique racine* r, *alors* f *est du même signe que* a *sur* $]-\infty; r[$ *et sur* $]r; +\infty[$.

c) *Si* f *admet deux racines distinctes* $r_1 < r_2$, *alors* f *est du même signe que* a *sur* $]-\infty; r_1[$ *et sur* $]r_2; +\infty[$, *et est du signe opposé à* a *sur* $]r_1; r_2[$

Remarque. *Une phrase pour retenir cette proposition :*

> *Une fonction polynomiale du second degré est du même signe que* a *à* ***l'extérieur*** *de ses racines, et est de signe opposé à* a *à* ***l'intérieur*** *de ses racines.*

Exemple. *En reprenant l'exemple précédent, donner le tableau de signes des fonctions* f, g *et* h.

4.3 Calcul des racines

4.3.1 En identifiant une racine évidente

Soit $f(x) = -x^2 + 6x$ pour $x \in \mathbb{R}$. Alors, l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions évidentes : 0 et 6. Comme f est une fonction polynomiale du second degré, alors on sait que ce sont les seules solutions réelles possibles.

4.3.2 En utilisant une identité remarquable

Soit $f(x) = 2x^2 - 128$ pour $x \in \mathbb{R}$. Alors, la troisième identité remarquable nous donne un factorisation de $f(x) = 2(x-8)(x+8)$. Donc les deux racines distinctes de la fonction polynomiale du second degré f sont 8 et -8.

4.3.3 Avec le produit et la somme des racines

Proposition 7. *Soit* $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ *une fonction polynomiale du second degré. Si* r_1 *et* r_2 *sont les deux racines (possiblement confondues) de* f, *alors*

$$r_1 + r_2 = \frac{-b}{a} \qquad r_1 \times r_2 = \frac{c}{a}$$

Exemple. *Soit* $f(x) = x^2 + x - 20$. *On remarque que* 4 *est une racine de* f. *En déduire une autre racine de* f, *puis une factorisation de* f.

4.3.4 Avec le discriminant

Définition 4. *Soit $f : x \mapsto ax^2+bx+c$ une fonction polynomiale du second degré. Alors on appelle* ***discriminant de f****, noté Δ, la quantité*

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Théorème 1. *Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynomiale de second degré, et Δ son discriminant. Alors :*

a) *Si $\Delta < 0$, alors f n'admet pas de racine réelle.*

b) *Si $\Delta = 0$, alors f admet une unique racine réelle r, telle que*

$$r = -\frac{b}{2a}$$

c) *Si $\Delta > 0$, alors f admet deux racines réelles distinctes $r_1 < r_2$, telles que*

$$r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Démonstration