

Calcul Littéral

Seconde 3

1 Introduction : Lire un cours de maths

En mathématiques, un cours est composé de **définitions**, de résultats (comme des **propositions**, des **propriétés** ou des **théorèmes**), de **remarques** ainsi que d'**exemples** ou **exercices**.

Les définitions décrivent ce que sont les objets.

Une **définition** permet l'introduction d'un concept nouveau en mathématiques. Il utilise des définitions déjà connues pour construire quelque chose de nouveau.

Il faut connaître ses définitions pour comprendre les énoncés des exercices.

Les propositions, les propriétés et les théorèmes décrivent ce que font les objets.

Une **proposition**, une **propriété** ou un **théorème** est un **résultat** à propos des objets définis plus tôt. Ce résultat est vrai parce qu'il a été démontré.

Il faut connaître les résultats du cours pour pouvoir résoudre les exercices.

Exemple.

- *Un triangle rectangle est un triangle dont l'un des angles est droit. C'est une **définition**.*
- *Le **Théorème de Pythagore** est un résultat à propos des triangles rectangles. Il nous en apprend un peu plus sur l'objet « triangle rectangle ».*

Dans un cours, il y a aussi des remarques pour bien aider à comprendre, il ne faut pas les négliger.

2 Expressions et égalité

2.1 Expressions

Définition 1. Une **expression algébrique** est composée de nombres et d'opérations mathématiques $(+, -, \times, \dots)$.

Les expressions servent à écrire des formules. Les nombres sont soit connus (on utilise la plupart du temps des chiffres pour les écrire), soit indéterminés (on utilise des lettres pour les désigner).

Remarque. On ignore les divisions $(/)$ pour le moment : on préférera travailler avec les expressions fractionnaires plus tard.

Exemple.

- L'expression $2x + 5$ signifie que le nombre indéterminé x est multiplié par 2, et que l'on ajoute 5 au résultat.
- La formule πr^2 permet de calculer l'aire d'un disque de rayon r . Ici, r est indéterminé (car cette formule marche pour n'importe quel disque quelque soit son rayon), et π est une constante (c'est la même quantité quoiqu'il arrive).

Exercice 1. Pour chacune des situations suivantes, donner l'expression correspondante :

- a) On achète une orange à 10€ et trois pommes qui coûtent p € chacune. Quel est le prix total P ? $P = \dots\dots\dots$
- b) On considère un rectangle de longueur 12 et de largeur l . Que vaut son aire A ? $A = \dots\dots\dots$
- c) Le marié envoie n dragées à ses 47 invités, et la mariée en envoie m à ses 35 invités. Soudain, il réalise qu'il a oublié ses parents, et il envoie un paquet de 100 dragées pour se faire pardonner. Combien de dragées ont été envoyées en tout ? $\dots\dots\dots$
- d) Dans un jeu de société, il y a chaque joueur possède deux dés transparents ainsi qu'autant de dés noirs qu'il y a de joueurs dans ce jeu. On suppose qu'il y a m joueurs, combien y a-t-il de dés en tout ? $\dots\dots\dots$

2.2 Égalité : Substitution

Proposition 1. Soient deux nombres x et y tels que $x = y$. Alors toute expression comportant x peut-être transformée en la même expression en remplaçant les x par y . On parle de **substitution**.

Exemple. On suppose que $x = y$. Alors l'expression $2x + 1$ peut-être transformé en $2y + 1$.

Remarque. On pourrait aussi substituer $2y + 1$ en $2x + 1$: **Une égalité marche dans les deux sens**

On peut aussi faire des substitutions à partir d'expressions plus avancées.

Méthode 1 (Substitution d'expression sans se tromper avec les parenthèses).

On suppose $x = a + 5$, comment transformer l'expression $x^2 + 3x$?

1. On souhaite transformer x , on met tous les x entre parenthèses : $(x)^2 + 3(x)$
2. On efface x : $()^2 + 3()$
3. On remplace par $a + 5$: $(a + 5)^2 + 3(a + 5)$

Exercice 2. En utilisant les égalités données, transformer l'expression correspondante :

a) $e = f : 84e + 62$ devient

b) $x = 2z + 4y : -x^2 + 5z$ devient

c) $l + L = P : \sqrt{l + L} + \frac{1}{l + L}$ devient

d) $a = b + d$ et $b = c + d : 5a + 2e$ devient

e) $2c + 3a = n - 5u : 2(2c + 3a)^2 - 3(n - 5u)^2$ devient

3 Développement et factorisation

3.1 Développement

Définition 2. Une expression littérale est sous forme **développée réduite** si elle correspond à une **somme de termes** avec le moins de termes possible.

Méthode 2. Pour développer et réduire une expression, on procède comme suit :

1. On utilise la distributivité de la multiplication sur l'addition pour transformer les produits contenant des « parenthèses de sommes »

$$a(\overbrace{b+c}) = ab + ac$$

$$(\overbrace{a+b})(\overbrace{c+d}) = ac + ad + bc + bd$$

2. Une fois toutes les distributions finies, on ajoute entre eux tous les termes ayant les mêmes produits d'indéterminées.

$$5x + 12 + 7rx - 3x + rx + r^2 = 2x + 12 + 8rx + r^2$$

Exemple. Développer et réduire les expressions suivantes :

a) $4(5a + 2b)$

b) $(7x + 2)(3x - 4)$

c) $-4(2x - 1) + (-5 + 4x)(8 + 5x)$

d) $(a - b)(a + b)$

3.2 Factorisation

Pour factoriser une somme, on peut chercher dans chaque terme de la somme un **facteur commun**.

$$\underline{a}b + \underline{a}c = \underline{a}(b + c)$$

Exemple. Factoriser les expressions suivantes :

- a) $5a + 10b = \dots\dots\dots$
- b) $-8y^2 + y = \dots\dots\dots$
- c) $21x - 28x^2 = \dots\dots\dots$
- d) $35p - 42q = \dots\dots\dots$
- e) $x(3x - 2) + 10(3x - 2) = \dots\dots\dots$

4 Identités remarquables

Proposition 2. Soient a et b deux nombre réels quelconques. Alors,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Exemple. Développer les expression suivantes :

- a) $(c - 1)(c + 1) = \dots\dots\dots$
- b) $(x + 4)^2 = \dots\dots\dots$
- c) $(x - 4)^2 = \dots\dots\dots$

Exemple. Factoriser l'expression suivante.

$$y^2 - 64 = \dots\dots\dots$$

5 Expressions Fractionnaires

Définition 3 (Expression fractionnaire).

$$\text{Expression Fractionnaire} = \frac{\text{Numérateur}}{\text{Dénominateur} \neq 0}$$

Exemple. Les expressions $\frac{3}{4}$; $\frac{x}{3-x}$ et $\frac{a+b}{c-d}$ sont des expressions fractionnaires.

L'expression $\frac{x^2-1}{0}$ ne l'est pas à cause du 0.

5.1 Simplification de fractions

Exemple. Simplifier les fractions suivantes :

- a) $\frac{35}{42} = \dots\dots\dots$
- b) $\frac{10a^2(1+b)}{5a(2+b)} = \dots\dots\dots$
- c) $\frac{a^2+2a+1}{a^2-1} = \dots\dots\dots$
- d) $\frac{49-x^2}{x^2-14x+49} = \dots\dots\dots$

5.2 Dénominateurs communs

Proposition 3 (Formule universelle). Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux expressions fractionnaires. Alors les expressions fractionnaires

$$\frac{ad}{bd} \text{ et } \frac{bc}{bd}$$

ont le même dénominateur.

Remarque. Cette formule est à utiliser **en dernier recours**, si vous ne voyez pas comment mettre deux expressions fractionnaires au même dénominateur.

Exemple. Simplifier les expressions suivantes :

- a) $\frac{2}{3} + \frac{13}{6} = \dots\dots\dots$
- b) $\frac{9}{15} - \frac{35}{25} = \dots\dots\dots$
- c) $\frac{3}{p(q-1)} + \frac{5}{(q-1)} = \dots\dots\dots$
- d) $\frac{y+1}{y-2} - \frac{y-3}{y^2-4y+4} = \dots\dots\dots$

5.3 Égalité d'expressions fractionnaires

Remarque. Pour comparer deux expressions fractionnaires $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$:

1. On les mets au même dénominateur, et on compare les numérateurs ;
2. On vérifie que $ad = bc$.