

Contrôle : Suites numériques

Premières Spécialité Mathématiques

2 Avril 2025

- Une présentation soignée est de rigueur.
- Tout effort de recherche, même non abouti, sera valorisé.
- Toute résultat, sauf mention contraire, doit être justifié.
- La calculatrice est AUTORISÉE.

Exercice 1 : Limites de suites (3 points)

Pour chaque suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie ci-dessous, calculer ses 5 premiers termes puis conjecturer sa limite :

- (a) (0,5 points) $u_n = 2^n$;
- (b) (0,5 points) $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 0,8u_n + 2 \end{cases}$
- (c) (0,5 points) $u_n = (-3)^n$
- (d) (0,5 points) $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{u_n} \end{cases}$
- (e) (0,5 points) $u_n = 5\pi + 3$
- (f) (0,5 points) $u_n = (-0,7)^n$

Exercice 2 : Suite arithmético-géométrique (6 points)

On pose la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 4u_n - 9 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- (a) (1 point) Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
- (b) (1 point) Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est ni arithmétique, ni géométrique.
On pose $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = u_n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (c) (1 point) Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 4.
- (d) (1 point) En déduire une expression de v_n en fonction de n .
- (e) (1 point) En déduire une expression de u_n en fonction de n .
- (f) (1 point) Calculer u_{20} .

Exercice 3 : Mot de passe (5 points)

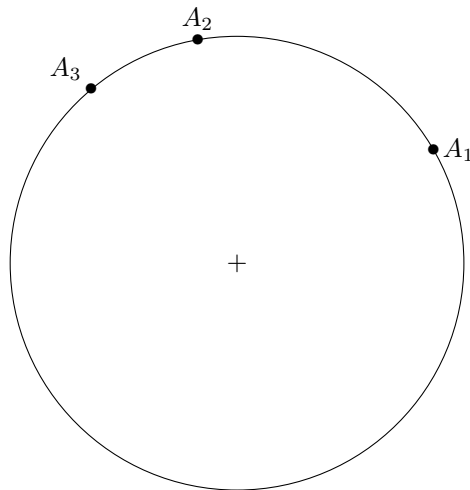
- (a) Calculer les sommes suivantes :
 - i. (1 point) $S_1 = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 102$
 - ii. (1 point) $S_2 = 1 + 1,5 + 1,5^2 + \dots + 1,5^{13}$

Un site web décide de tester la résistance des mots de passe de ses utilisateurs. On considère uniquement les mots de passe composés de chiffres, c'est-à-dire de tous les symboles numériques de 0 à 9. On pose m_n le nombre de mots de passe possibles de n symboles.

- (b) (0,5 points) Quelle est la valeur de u_1 ? et de u_2 ?
- (c) (0,5 points) Justifier que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique.
- (d) (2 points) Pour tester la fiabilité des mots de passe, on décide de créer un programme énumérant tous les mots de passe possibles de moins de 20 symboles. Combien de mots de passe vont être testés en tout.

Exercice 4 : Cercle (5 points)

On considère n points distincts A_1, A_2, \dots, A_n sur un cercle. On représente ici le cas $n = 3$.



On s'intéresse à la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie comme le nombre de segments possibles entre deux points parmi les A_1, A_2, \dots, A_n .

- (a) (0,5 points) Représenter le cas $n = 2$ et le cas $n = 4$.
- (b) (0,5 points) Montrer que $u_1 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ et $u_3 = 3$.
- (c) (1,5 points) Justifier que $u_{n+1} = u_n + n$.
- (d) (0,5 points) En déduire la valeur de u_7 .
- (e) (1,5 points) Donner une expression de u_n en fonction de n .
- (f) (0,5 points) À partir de combien de points sur le cercle peut-on tracer plus de 80 segments entre ces points ?