Dérivation

Première Spécialité Mathématiques

1 Taux de variation

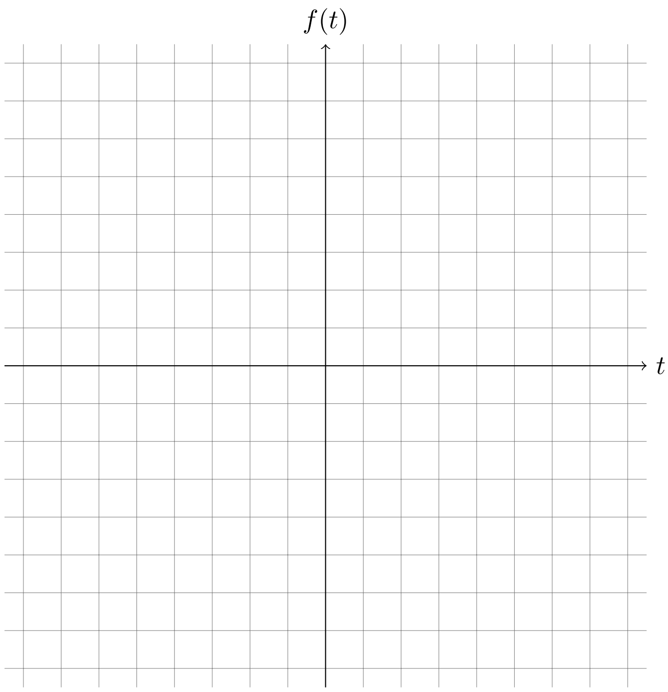
Définition 1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On prend $a < b \in I$. On appelle* ***taux de variation de f entre a et b*** *la grandeur*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Exemple. *Une voiture roule pendant une heure. Soit $f(t)$ la distance parcourue en* km *en fonction du temps t en* min.

a) *Quelle est l'intervalle de définition de f ?* ....

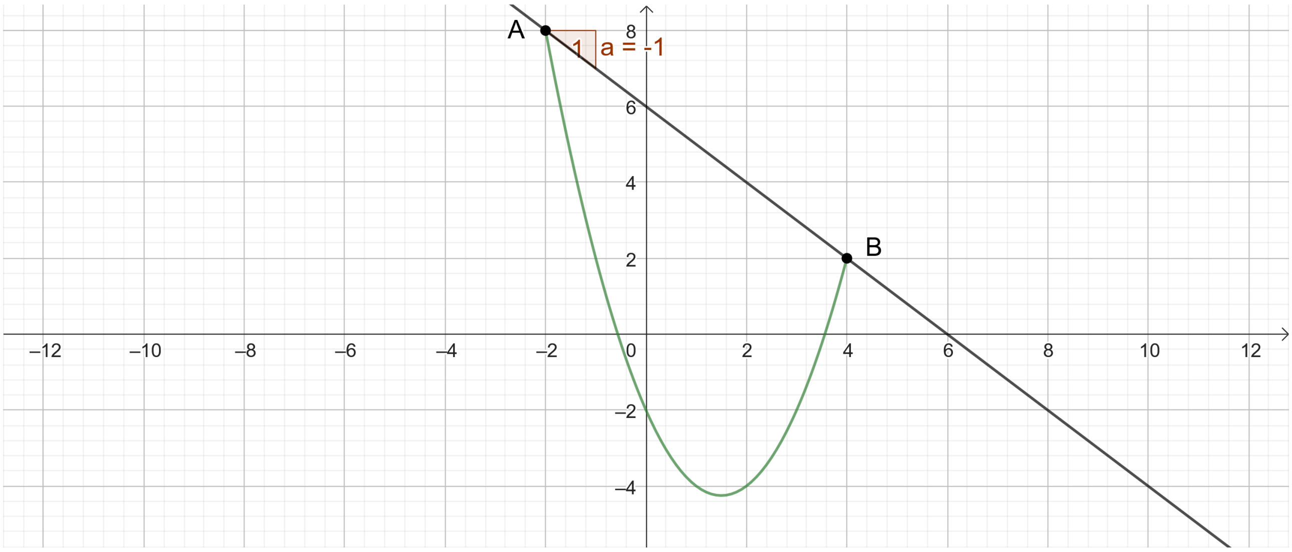
b) *Dessiner sur le repère suivant une courbe représentative possible pour f.*



c) *En fonction de votre réponse, donner le taux de variation de f entre* 0 *et* 30*, et entre* 30 *et* 60.

d) *Comment interpréter votre résultat ?* ....

Proposition 1. *Soit f un fonction définie sur un intervalle I, et $a < b \in I$. Si on se place sur un repère orthonormé, et que l'on considère les points $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$, alors le taux de variation de f entre a et b correspond à la pente de la droite entre A et B.*



Remarque. *Le taux de variation d'une fonction entre a et b répond à la question suivante :* ***Pour chaque abscisse parcourus entre a et b, de combien d'ordonnées sommes-nous montés ou descendus ?***

Proposition 2. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit $J \subseteq I$ un intervalle.*

- *Si f est croissante sur J, alors pour tout $a < b \in J$, le taux de variation de f entre a et b est positif.*
- *Si f est décroissante sur J, alors pour tout $a < b \in J$, le taux de variation de f entre a et b est négatif.*

Remarque. ***Les réciproques sont fausses :*** *un taux de variation de f entre a et b positif n'implique pas que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[a; b]$.*

Exemple. *Soit $f : x \mapsto (x-1)^2 - 2$ définie sur $[-2; 3]$.*

a) *Donner un intervalle I sur lequel f est croissante, et un intervalle J sur lequel f est décroissante :*
$I =$ .... ; $J =$ ....

b) *Choisir deux valeurs dans chacun des intervalles, et calculer les taux de variations de f entre ces deux valeurs.*
....

c) *Calculer le taux de variation entre -2 et 2. Que peut-on en déduire ?* ....

2 Dérivée locale

2.1 Limite finie en 0

Soit $Q(h)$ une quantité dépendant d'une variable h.

Définition 2. *On dit que $Q(h)$ **admet une limite finie en** 0 quand il existe un nombre q tel que $Q(h)$ s'approche de plus en plus de q à mesure que h s'approche de plus en plus de 0. Dans ce cas, ce nombre q est appelé **limite de** $Q(h)$ **en** 0, et est noté*

$$\lim_{h\to 0} Q(h)$$

Exemple. *Pour chaque quantité $Q(h)$ suivante, remplir le tableau de valeur suivant, et en déduire si $Q(h)$ admet une limite finie en 0, et le cas échéant, donner $\lim_{h\to 0} Q(h)$.*

a) $Q(h) = 1 + h$

b) $Q(h) = \dfrac{1}{h}$

h	1	$0,1$	$0,01$	$0,001$	$0,0001$
$Q(h)$					

h	1	$0,1$	$0,01$	$0,001$	$0,0001$
$Q(h)$					

Remarque. *Il est donc tout à fait possible pour $Q(h)$ de ne pas admettre de limite finie en 0. Toute notion dépendant donc d'une limite finie doit être manipulée avec précaution.*

2.2 Nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On fixe $a \in I$. Soit $h \neq 0$ un nombre tel que $a + h \in I$. Alors le taux de variation de f entre a et $a + h$ est donné par

$$T_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Remarque. *Par définition, on ne peut pas remplacer h par 0, donc $T_a(0)$ n'est pas défini. Par contre, on peut s'interesser à son éventuelle limite finie en 0*

Définition 3. *On dit que f **est dérivable en** a quand $T_a(h)$ admet une limite finie en 0. Dans ce cas, on appelle **nombre dérivé de** f **en** a la limite en 0 de $T_a(h)$, et on le note $f'(a)$. En résumé, quand f est dérivable en a, alors son nombre dérivé est donné par*

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Exemple. *Soit $f : x \mapsto 2x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.*

a) *Soit $a = 2$. Écrire le taux de variation $T_a(h)$ de f entre a et $a + h$, et simplifier l'expression.*

b) *La fonction f est-elle dérivable en 2 ?*

c) *En déduire le nombre dérivé de f en 2.*

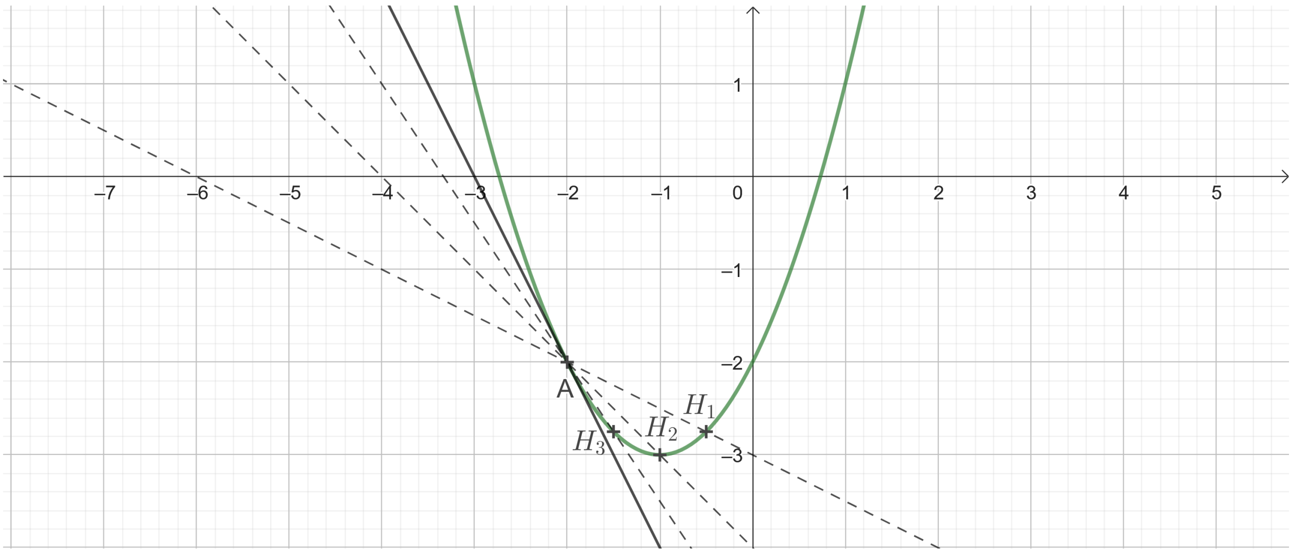
3 Interprétation géométrique

Soit f une fonction définie sur I. On fixe $a \in I$. On s'intéresse aux droites sécantes à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f passant par les points $A(a; f(a))$ et $H(a+h; f(a+h))$, pour h suffisamment petit pour que $a+h \in I$.

Remarque. *La pente de cette droite sécante est donnée par le taux de variation*

$$T_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Au fur et à mesure que H se rapproche de A, cette sécante se rapproche d'une certaine droite, dont la pente est donnée par $f'(a)$.



> **Définition 4.** *On dit que f admet une **tangente en** a quand elle dérivable en a. Dans ce cas, la **tangente en** a **de** f est la droite passant par le point $A(a; f(a))$ et de pente $f'(a)$.*

Remarque. *La tangente de f en a, quand elle existe, peut être comprise comme une droite qui « frôle » la courbe en a.*

Proposition 3. *L'équation de la tangente de f en a, quand elle existe, est*

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Exemple. *Soit $f : x \mapsto x^2 - 4$ définie sur $\mathbb{R}$.*

a) *La fonction f est-elle dérivable en 3 ? En déduire son nombre dérivé en 3.*

b) *En déduire l'équation de la tangente de f en 3.*