

- Tout effort de recherche, même non abouti, sera valorisé.
- Les exercices sont indépendants, et peuvent être faits dans l'ordre de votre choix.
- Sauf mention contraire, toute réponse devra être justifiée.
- L'utilisation de la calculatrice est **Interdite**.

Exercice 1 : Automatismes (6 points)

(a) (3 points) Résoudre sur \mathbb{R} les équations polynomiale du second degré suivantes :

- $x^2 - 7x + 12 = 0$
- $-2x^2 + 16x - 42 = 0$

(b) (3 points) Dériver les fonctions suivantes sur les ensembles donnés, en justifiant correctement l'ensemble de dérivabilité des fonctions.

- $f : x \mapsto \sqrt{x}$
- $g : x \mapsto 6x^4 - 3x^2 + 19x - 5$
- $h : x \mapsto (x^3 - 5x)(x - 2)$

Exercice 2 : Bottes (7 points)

Un fabricant de chaussures fait un peu de comptabilité. Il vend chaque paire de chaussures 201€. On appelle $C(x)$ le coût de production de x paires de chaussures.

On définit, pour $x \in [0; 30]$,

$$C(x) = x^3 - 30x^2 + 309x + 500$$

(a) (0.5 points) Justifier que le bénéfice $B(x)$ associé à la production et à la vente de x paires de chaussures est défini par

$$B(x) = -x^3 + 30x^2 - 108x - 500$$

(b) (0.5 points) Justifier que B est dérivable sur $[0; 30]$ et donner l'expression de sa dérivée B' .

(c) (2 points) En déduire le tableau de variations de B .

(d) (2 points) Combien de chaussures doit vendre ce fabricant afin de réaliser un bénéfice maximal ?

(e) (2 points) On appelle coût marginal de production la fonction C_m définie par, pour tout $x \in [0; 30]$,

$$C_m(x) = C'(x)$$

i. Démontrer que pour tout $x \in [0; 30]$, $C_m(x) = 3(x - 10)^2 + 9$.

ii. En déduire combien de paires doit produire le fabricant pour observer un coût marginal minimal.

Exercice 3 : Courbes de Lorenz (7 points)

On appelle **courbe de Lorenz** la courbe représentative d'une fonction L vérifiant les propriétés suivantes :

1. L est définie et croissante sur $[0; 1]$;
2. $L(0) = 0$ et $L(1) = 1$;
3. Pour tout $x \in [0; 1]$, on a $L(x) \leq x$.

Soit $f : x \mapsto \frac{3}{2}x + \frac{1}{x+1} - 1$, définie sur $[0; 1]$. On souhaite montrer que f est une courbe de Lorenz.

(a) (1 point) Montrer que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. En déduire que le critère 2 est respecté.

(b) (1 point) On admet que la fonction est dérivable sur $[0; 1]$. Montrer que pour tout $x \in [0; 1]$,

$$f'(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{(x+1)^2}.$$

(c) (1 point) En déduire pour tout $x \in [0; 1]$, on a $f'(x) = \frac{3(x+1)^2 - 2}{(x+1)^2}$.

- (d) (2 points) Dresser le tableau de signes de f' , et en déduire le tableau de variations de f . La fonction f vérifie-t-elle le critère 1 ?
- (e) (1 point) Justifier que pour montrer que f vérifie le critère 3, il suffit de vérifier que $f(x) - x \leq 0$ pour tout $x \in [0; 1]$.
- (f) (2 points) On admet que pour montrer que $f(x) - x \leq 0$, il suffit de montrer que $x^2 - x \leq 0$ pour tout $x \in [0; 1]$. Montrer alors que $f(x) - x \leq 0$. Conclure que f vérifie le critère 3