Dérivation globale

Premières Spécialité Mathématiques

1 Fonction dérivée

Remarque. *On rappelle qu'une fonction f définie sur un intervalle I est dite* ***dérivable en*** *$a \in I$ si et seulement si le taux de variation*

$$T_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

admet une limite finie quand h tend vers 0. La valeur de cette limite $\lim_{h \to 0} T_a(h)$ est alors appelé ***nombre dérivé de f en*** *a et est noté $f'(a)$.*

En résumé, la notion de dérivation est un processus dépendant de f qui à tout nombre a associe, quand c'est possible, un autre nombre $f'(a)$. Il s'agit donc d'une ***fonction****.*

Définition 1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est* ***dérivable sur*** *I si pour tout nombre $a \in I$, la fonction f est dérivable en a. Dans ce cas, on pose f' la fonction définie sur I qui à tout $x \in I$ associe le nombre dérivé $f'(x)$.*

Exemple. *Soit* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$.

a) *Après avoir vérifié que f est dérivable en -3, calculer $f'(-3)$.*

b) *La valeur -3 a-t-elle eu spécifiquement un impact dans votre démonstration ?* ....

c) *En reprenant votre démonstration pour calculer $f'(x)$, où x est une indéterminée, en déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.*

Proposition 1.

1. *Soit* $c \in \mathbb{R}$. *La fonction constante définie sur* $\mathbb{R}$ $f : x \mapsto c$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *et sa dérivée est* $f' : x \mapsto 0$.
2. *La fonction identité définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f : x \mapsto x$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *et sa dérivée est* $f' : x \mapsto 1$.
3. *La fonction carré définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f : x \mapsto x^2$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *et sa dérivée est* $f' : x \mapsto 2x$.
4. *La fonction puissance* $n \in \mathbb{N}$ *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f : x \mapsto x^n$ *est déribale sur* $\mathbb{R}$, *et sa dérivée est* $f' : x \mapsto nx^{n-1}$
5. *La fonction inverse définie sur* $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ *par* $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ *est dérivable sur* $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$, *et sa dérivée est* $f' : x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$.
6. *La fonction racine carrée définie sur* $[0; +\infty[$ *par* $f : x \mapsto \sqrt{x}$ *est dérivable sur* $]0; +\infty[$, *et sa dérivée est* $f' : x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Remarque.

- *Avant de dériver une fonction, il faut s'assurer qu'elle est bien dérivable.*
- *La fonction racine carrée est dérivable sur* $]0; +\infty[$ (***ouvert en 0***), *tandis qu'elle sur définie sur* $[0; +\infty[$ (***fermé en 0***). *En effet, la fonction n'est pas dérivable en* 0.

Démonstration.

□