

2 Dérivée locale

2.1 Limite finie en 0

Soit $Q(h)$ une quantité dépendant d'une variable h .

Définition 2. On dit que $Q(h)$ **admet une limite finie en 0** quand il existe un nombre q tel que $Q(h)$ s'approche de plus en plus de q à mesure que h s'approche de plus en plus de 0. Dans ce cas, ce nombre q est appelé **limite de $Q(h)$ en 0**, et est noté

$$\lim_{h \rightarrow 0} Q(h)$$

Exemple. Pour chaque quantité $Q(h)$ suivante, remplir le tableau de valeur suivant, et en déduire si $Q(h)$ admet une limite finie en 0, et le cas échéant, donner $\lim_{h \rightarrow 0} Q(h)$.

a) $Q(h) = 1 + h$

b) $Q(h) = \frac{1}{h}$

h	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	h	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$Q(h)$						$Q(h)$					

Remarque. Il est donc tout à fait possible pour $Q(h)$ de ne pas admettre de limite finie en 0. Toute notion dépendant donc d'une limite finie doit être manipulée avec précaution.

2.2 Nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On fixe $a \in I$. Soit $h \neq 0$ un nombre tel que $a + h \in I$. Alors le taux de variation de f entre a et $a + h$ est donné par

$$T_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Remarque. Par définition, on ne peut pas remplacer h par 0, donc $T_a(0)$ n'est pas défini. Par contre, on peut s'intéresser à son éventuelle limite finie en 0

Définition 3. On dit que f **est dérivable en a** quand $T_a(h)$ admet une limite finie en 0. Dans ce cas, on appelle **nombre dérivé de f en a** la limite en 0 de $T_a(h)$, et on le note $f'(a)$. En résumé, quand f est dérivable en a , alors son nombre dérivé est donné par

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

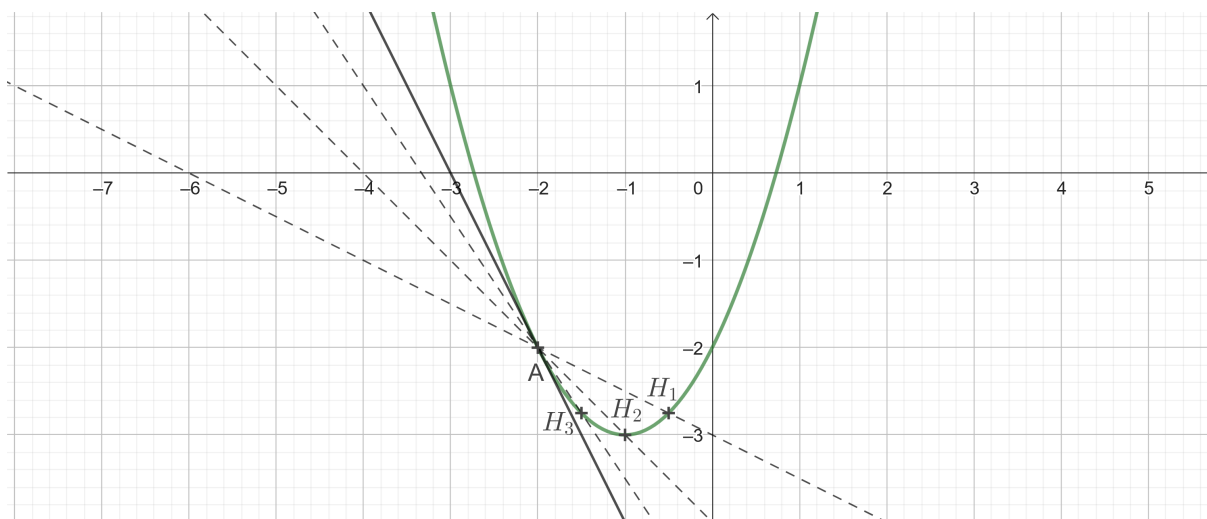
3 Interprétation géométrique

Soit f une fonction définie sur I . On fixe $a \in I$. On s'intéresse aux droites sécantes à la courbe représentative \mathcal{C}_f de f passant par les points $A(a; f(a))$ et $H(a+h; f(a+h))$, pour h suffisamment petit pour que $a+h \in I$.

Remarque. La pente de cette droite sécante est donnée par le taux de variation

$$T_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Au fur et à mesure que H se rapproche de A , cette sécante se rapproche d'une certaine droite, dont la pente est donnée par $f'(a)$.



Définition 4. On dit que f admet une **tangente en a** quand elle est dérivable en a . Dans ce cas, la **tangente en a de f** est la droite passant par le point $A(a; f(a))$ et de pente $f'(a)$.

Remarque. La tangente de f en a , quand elle existe, peut être comprise comme une droite qui « frôle » la courbe en a . Sa pente peut-être interprétée comme la **Vitesse instantanée** de la fonction en a .

Proposition 3. L'équation de la tangente de f en a , quand elle existe, est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Exemple. Soit $f: x \mapsto x^2 - 4$ définie sur \mathbb{R} .

- La fonction f est-elle dérivable en 3 ? En déduire son nombre dérivé en 3.
- En déduire l'équation de la tangente de f en 3.