Produit scalaire, orthogonalité

Première Spécialité Mathématiques

1 Première définition du produit scalaire

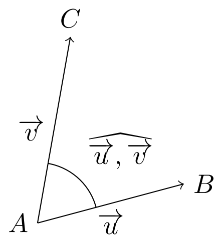
Lorsque que la notion de vecteur a été définie, l'objectif était d'avoir un objet géométrique capable de se comporter comme un nombre. Ainsi, on a défini en classe de seconde l'*addition*, la *soustraction* de vecteurs, ainsi que la multiplication d'un vecteur par un *scalaire*.

L'objectif est de définir une nouvelle opération sur les vecteurs qui se comporte comme une *multiplication entre deux vecteurs*.

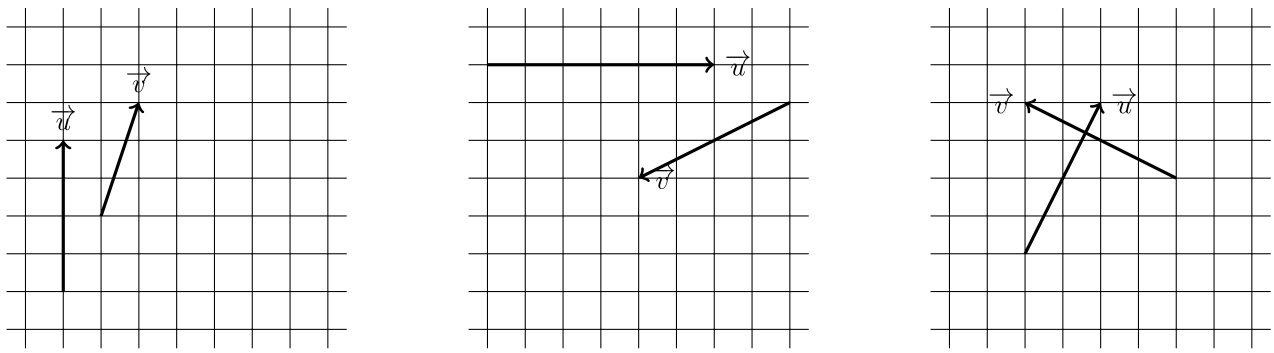
On se place sur le plan.

Définition 1. *Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur. Alors, la norme de $\overrightarrow{u}$ (sa « longueur ») est notée $\|\overrightarrow{u}\|$.*

Définition 2. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls. On pose A, B, C trois points du plan tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$. On note $\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}$ l'angle $\widehat{BAC}$.*



Exemple. *Pour chaque couple de vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ suivants, construire trois points A, B et C tels que $\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}} = \widehat{BAC}$.*



Définition 3 (Produit scalaire)**.** *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. On appelle* **produit scalaire** *de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$, noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$, le nombre :*

- 0 *si $\overrightarrow{u}$ est nul ou $\overrightarrow{v}$ est nul.*
- $\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right)$ *dans le cas contraire.*

2 Premières propriétés

2.1 Propriétés algébriques

Proposition 1. *Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, ainsi que $k \in \mathbb{R}$.*

1. *On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$. (Le produit scalaire est* symétrique*)*
2. *On a $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$.*

Remarque. *Attention à l'usage de $\cdot$ et de $\times$: l'un concerne deux vecteurs, et l'autre deux nombres.*

Exemple. *Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}} = 30°$. Calculer les produits scalaires suivants.*

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} =$ ....

b) $\vec{u} \cdot \vec{u} =$ ....

c) $\vec{v} \cdot (2\vec{u}) =$ ....

d) $(-4\vec{u}) \cdot (3\vec{v}) =$ ....

2.2 Propriétés géométriques

Proposition 2. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.*

- *Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$;*
- *Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens opposés, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$;*

Définition 4. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Alors ces deux vecteurs sont dit* ***orthogonaux*** *si l'un des deux vecteurs est nul ; ou si l'angle $\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}} = 90°$.*

Proposition 3. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Alors, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.*

Remarque.
- *Cette proposition est facile à démontrer avec notre définition, mais sera surtout utile avec les définitions suivantes.*
- *Le vecteur nul est donc orthogonal à tous les vecteurs.*

2.3 Définition avec le projeté orthogonal

Définition 5 (Rappel)**.** *Soit M un point du plan et (d) une droite. Le* **projeté orthogonal** *de M par rapport à la droite (d) est l'unique point M' appartenant à la droite (d) et tel que les droite (MM') et (d) sont perpendiculaires.*

Proposition 4. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. On pose A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. De plus, on pose H le projeté orthogonal de C par rapport à la droite AB. Alors,*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} AB \times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de même sens ;} \\ -AB \times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de sens opposés.} \end{cases}$$

3 Produit scalaire en géométrie repérée

On munit le plan d'un repère orthonormée (O, I, J). Les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ d'abscisse x et d'ordonnée y sont notées

$$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

3.1 Bilinéarité du produit scalaire

Proposition 5. *Soient trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$. Alors,*

$$\overrightarrow{u}\cdot(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}$$

Remarque. *Ce résultat correspond donc à la distributivité du produit scalaire sur l'addition de vecteurs.*

Exemple. *Soient trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ de norme 1 tels que $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Que vaut $\overrightarrow{u}\cdot(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})$?*
....

3.2 Définition en géométrie repérée

Proposition 6. *Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x_u\\y_u\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x_v\\y_v\end{pmatrix}$. Alors, le produit scalaire $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ est égal à*

$$x_u\times x_v+y_u\times y_v$$

Exemple. *Calculer le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ suivants*

a) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$: $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=$ ....

b) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-7\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$: $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=$ ....

c) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$: $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=$ ....

d) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}9\\12\end{pmatrix}$: $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=$ ....

3.3 Produit scalaire et norme

Proposition 7. *Soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un vecteur. Alors,*

$$\|\overrightarrow{u}\|^2=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}=x^2+y^2$$

Proposition 8 (Identités remarquables)**.** *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. Alors*

$$\begin{cases}\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 & =\|\overrightarrow{u}\|^2+2(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})+\|\overrightarrow{v}\|^2\\ \|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2 & =\|\overrightarrow{u}\|^2-2(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})+\|\overrightarrow{v}\|^2\\ (\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) & =\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\end{cases}$$

Proposition 9. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. Alors,*

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\frac{1}{2}(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2)=\frac{1}{2}(\|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u-v}\|^2)$$