Cours : 18 Mars 2024

Quentin Canu

18 Mars 2024

1 Plan de classe

2 Questions flash

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction affine. Calculer le coefficient directeur de f ...

1. quand $f(3) = 2$ et $f(-2) = 8$.
2. quand $f(\frac{3}{2}) = 7$ et $f(3) = -\frac{1}{3}$.

3 Activité à rendre

En profiter pour annoncer le sujet du jour : la fonction exponentielle de base $a > 0$.

4 Activité du jour

Rappels :

1. Puissance de a par un entier positif.
2. Puissance de a par un entier négatif.

4.1 Le cas d'une puissance fractionnaire

Soit $a > 0$, on souhaite définir une notion de puissance fractionnaire, c'est-à-dire

$$a^{p/q}\,,$$

où p est un entier relatif, et q un entier naturel non nul. On souhaite que cette notion de puissance respecte les propriétés déjà vues pour les puissances, comme $a^k \times a^{k'} = a^{k+k'}$.

1. Justifier que notre définition de $a^{p/q}$ devrait être égal à $(a^p)^{1/q}$.

On peut donc concentrer nos recherches à donner une définition à $a^{1/q}$. Testons pour $q = 2$.

2. Que signifie la notion de racine carrée, *en français* ?
3. Justifier que $a^{1/2}$ correspond à la racine carrée de a, c'est-à-dire $\sqrt{a}$.
4. Que pourrait bien signifier la notion de racine q^{e} de a, notée $\sqrt[q]{a}$, *en français* ?
5. Vérifier que cette notion correspond bien à la définition que l'on souhaite donner à $a^{1/q}$.

On donne donc la définition suivante pour la puissance $\frac{1}{q}$ d'un nombre :

Définition 1. *Le nombre $a^{1/q}$ est le nombre tel que si on le multipliait q fois par lui-même, on obtiendrait a. Il correspond donc à la racine q^{e} de a, notée aussi $\sqrt[q]{a}$.*

$$a^{1/q} = \sqrt[q]{a}\,.$$

4.2 Le cas d'une puissance réelle

On souhaite aller encore plus loin et définir la puissance de $a > 0$ par tout nombre *réel*. Par exemple, quelle définition donner à $2^{\sqrt{2}}$?

6. Montrer que $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = 1$. En déduire que $\sqrt{2} = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$.
7. Une première approximation grossière de $\sqrt{2}$ est $\sqrt{2} = \dfrac{3}{2}$. En utilisant cette égalité dans $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$, en déduire une autre fraction permettant d'approcher $\sqrt{2}$.

En continuant, on obtient ainsi une suite de fractions approchant de plus en plus $\sqrt{2}$: $\dfrac{3}{2}; \dfrac{7}{5}; \dfrac{17}{12} \dots$

8. Utiliser ces fractions pour calculer une valeur approchée de $2^{\sqrt{2}}$ sur votre calculatrice.

On pourrait continuer longtemps. Plus les fractions sont précises, moins le résultat bougera. Ce comportement nous permet de déduire une définition pour $2^{\sqrt{2}}$: c'est la valeur que l'on obtient en continuant ce processus à l'infini.

4.3 Conclusion

On a travaillé sur un moyen de parler de la puissance *réelle* d'un nombre $a > 0$. Maintenant que nous sommes convaincu que c'est possible, il nous est possible de définir une fonction qui à tout nombre réel x renvoie a^x. C'est ce qu'on appelle la *fonction exponentielle de base a*.