

## 4 Nombres réels, intervalles

### 4.1 Ensemble $\mathbb{R}$

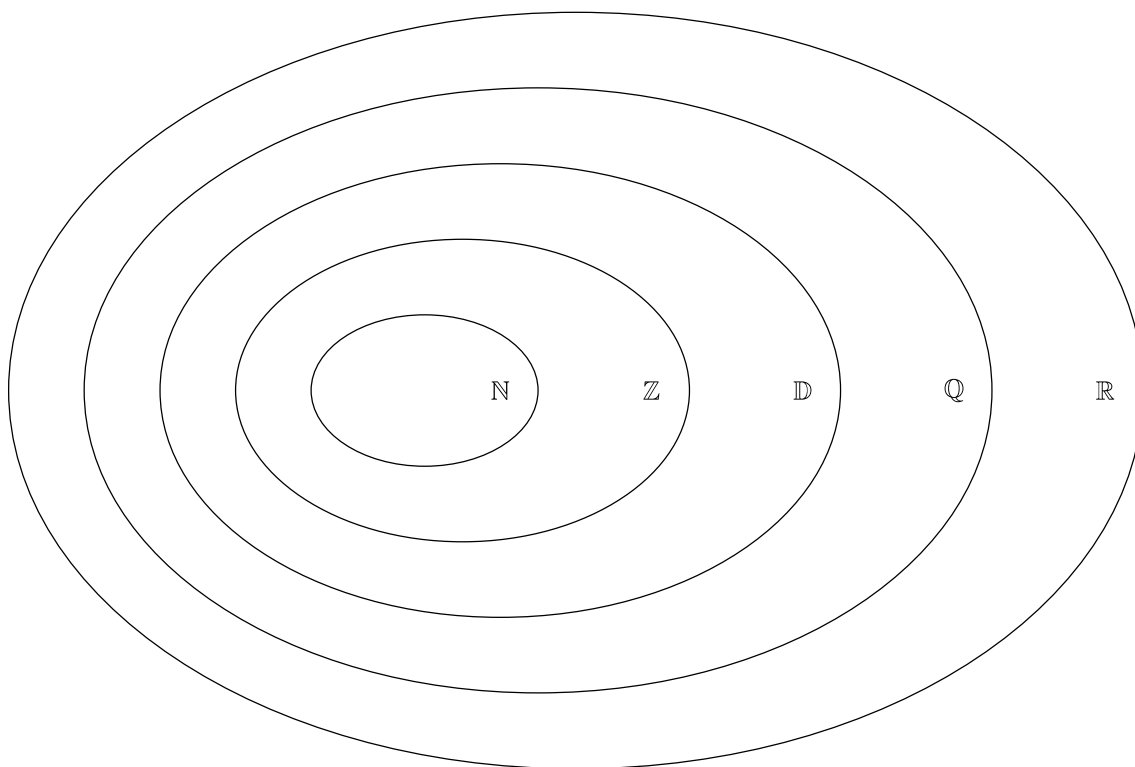
**Remarque.** Certains nombres ne sont des éléments d'aucun des ensembles mentionnés. En particulier, certains nombres ne sont pas rationnels. C'est le cas de  $\pi$  ou de  $\sqrt{2}$ . On dit donc qu'ils sont **irrationnels**.

**Définition 8.** On note  $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres **réels**.

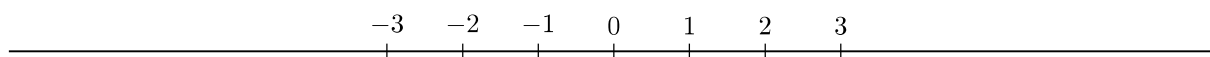
**Proposition 10.** Les différents ensembles de nombres vu précédemment vérifient les inclusions suivantes :

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{D} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

**Exemple.** Intégrer dans le schéma ci-dessous les nombres suivants :  $2$ ;  $-3$ ;  $0,5$ ;  $\frac{4}{3}$ ;  $\pi$ ;  $\sqrt{2}$ ;  $\frac{27}{16}$ ;  $-1,666\dots$



**Proposition 11.** Pour représenter l'ensemble des réels, on utilise une droite graduée nommée la **droite des réels**. Chaque point de la droite correspond à un nombre réel, et chaque nombre réel est associé à un point de cette droite.



**Exemple.** Placer approximativement sur cette droite les points associés aux nombres utilisés dans l'exemple précédent.

## 4.2 Intervalles de $\mathbb{R}$

**Définition 9.** Soit  $a, b$  deux nombres réels tels que  $a < b$ .

- L'intervalle  $[a; b]$  est l'ensemble de tous les nombres réels  $x$  vérifiant  $a \leq x \leq b$ .
- L'intervalle  $]a; b]$  est l'ensemble de tous les nombres réels  $x$  vérifiant  $a < x \leq b$ .
- L'intervalle  $[a; b[$  est l'ensemble de tous les nombres réels  $x$  vérifiant  $a \leq x < b$ .
- L'intervalle  $]a; b[$  est l'ensemble de tous les nombres réels  $x$  vérifiant  $a < x < b$ .

**Remarque.** Un intervalle décrit donc un ensemble de nombres compris entre deux bornes. Le sens des crochets indique si une borne est comprise ou non dans l'intervalle.

**Exemple.** Pour chacune des phrases suivantes, donner la notation de l'intervalle correspondant :

- Les nombres compris entre 2 (inclus) et 5 (inclus) :  $[2; 5]$
- Les nombres compris entre 4 (exclus) et 12 (inclus) : .....
- Tous les nombres supérieurs ou égaux à  $-10$  et inférieurs strictement à  $-5$  : .....
- Tous les nombres positifs non nuls inférieurs strictement à  $113$  : .....

**Définition 10.** Soit  $a$  un nombre réel.

- L'intervalle  $[a; +\infty[$  est l'ensemble des nombres  $x$  vérifiant  $a \leq x$ .
- L'intervalle  $]a; +\infty[$  est l'ensemble des nombres  $x$  vérifiant  $a < x$ .
- L'intervalle  $] - \infty; a]$  est l'ensemble des nombres  $x$  vérifiant  $x \leq a$ .
- L'intervalle  $] - \infty; a[$  est l'ensemble des nombres  $x$  vérifiant  $x < a$ .

**Remarque.**

- Avec les symboles  $-\infty$  («  $-$  l'infini ») et  $+\infty$  («  $+$  l'infini »), le crochet est toujours ouvrant.
- En théorie,  $\mathbb{R} = ] - \infty; +\infty[$ .

**Remarque.** Les intervalles se représentent comme des portions continues de la droite des réels. On ajoute des crochets identiques à celui de l'intervalle.

On a représenté  $[1; 3]$  sur la droite des réels représentée ci-dessous.

Représenter  $] - 3; -1[$ .

