

Chapitre 3 : Équations et inéquations du second degré

Première Spécialité Mathématiques

1 Racines

1.1 Définition

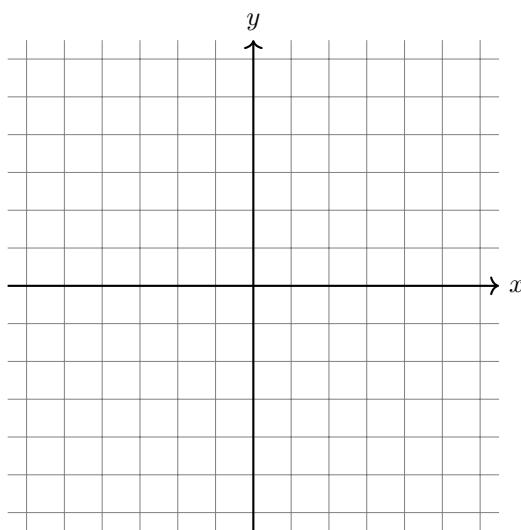
Définition 1. Soit f une fonction. On appelle **racine** de la fonction f un nombre r tel que $f(r) = 0$.

Exercice. Vérifier que $r_1 = 1$ et $r_2 = -3$ sont deux racines de la fonction $f : x \mapsto 2x^2 + 4x - 6$.

Proposition 1. Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynomiale du second degré. Alors, seuls trois cas sont à considérer :

- f n'admet aucune racine réelle, c'est-à-dire que pour tout réel x , on a $f(x) \neq 0$.
- f admet une unique racine notée r . Dans ce cas, f peut être factorisée en $f(x) = a(x - r)^2$ pour tout x .
- f admet deux racines, notées r_1 et r_2 . Dans ce cas, f peut être factorisée en $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$ pour tout x .

Exercice. Sur le repère suivant, tracer la courbe représentative de trois fonctions polynomiale du second degré correspondant à chacun des cas exposés dans la proposition précédente.



1.2 Calcul des racines

1.2.1 En identifiant une racine évidente

Exercice. Soit $f(x) = -x^2 + 6x$ pour $x \in \mathbb{R}$. Cette fonction possède-t-elle des racines évidentes ? Essayer avec des entiers comme $0; 1; -1; \dots$

1.2.2 En utilisant une identité remarquable

Exercice. Soit $f(x) = 2x^2 - 128$ pour $x \in \mathbb{R}$.

a) Factoriser $f(x)$ par 2.

b) À l'aide d'une identité remarquable bien choisie, factoriser $f(x)$.

c) En déduire les racines de $f(x)$.

1.2.3 Avec le produit et la somme des racines

Proposition 2. Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynomiale du second degré. Si r_1 et r_2 sont les deux racines (possiblement confondues) de f , alors

$$r_1 + r_2 = \frac{-b}{a} \quad r_1 \times r_2 = \frac{c}{a}$$

Exemple. Soit $f(x) = x^2 + x - 20$. On remarque que 4 est une racine de f . En déduire une autre racine de f , puis une factorisation de f .

1.3 Discriminant

Définition 2. Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynomiale du second degré. Alors on appelle **discriminant de f** , noté Δ , la quantité

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

théorème 1. Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynomiale de second degré, et Δ son discriminant. Alors :

- a) Si $\Delta < 0$, alors f n'admet pas de racine réelle.
- b) Si $\Delta = 0$, alors f admet une unique racine réelle r , telle que

$$r = -\frac{b}{2a}$$

- c) Si $\Delta > 0$, alors f admet deux racines réelles distinctes $r_1 < r_2$, telles que

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Démonstration

2 Signe

Proposition 3. Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynomiale du second degré. Alors :

- a) Si f n'admet pas de racine, alors f est du même signe que a sur \mathbb{R} .
- b) Si f admet une unique racine r , alors f est du même signe que a sur \mathbb{R} , et vaut 0 en r .
- c) Si f admet deux racines distinctes $r_1 < r_2$, alors f est du même signe que a sur $]-\infty; r_1[$ et sur $]r_2; +\infty[$, et est du signe opposé à a sur $]r_1; r_2[$

Remarque. Une phrase pour retenir cette proposition :

Une fonction polynomiale du second degré est du même signe que a à l'**extérieur** de ses racines, et est de signe opposé à a à l'**intérieur** de ses racines.

Exercice. Soit $f : x \mapsto x^2 - 5x + 3$. Compléter le tableau de signes de f .

x	$-\infty$	$+\infty$
<i>Signe de f</i>		