Exercice 1

1) Soit f la fonction définie pour tout x de $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
Déterminer la valeur de $f'(-1)$, en utilisant la définition de cours.

2) Soit f la fonction définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
Déterminer la valeur de $f'(-1)$, en utilisant la définition de cours.

3) Soit f la fonction définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x + 1$.
Déterminer la valeur de $f'(-2)$, en utilisant la définition de cours.

4) Soit f la fonction définie pour tout x de $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
Déterminer la valeur de $f'(5)$, en utilisant la définition de cours.

Exercice 1

1) Pour déterminer $f'(-1)$, on commence par calculer le taux de variation de f, entre -1 et $-1+h$, noté $\tau(h)$, où h est un réel non-nul.

$$\tau(h) = \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} \qquad \text{Définition du taux de variation}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{-1+h} - \dfrac{1}{-1}}{h} \qquad \text{Application à la fonction inverse.}$$

$$= \frac{\dfrac{-1}{(-1+h)\times(-1)} - \dfrac{-1+h}{-1\times(-1+h)}}{h} \qquad \text{Mise au même dénominateur.}$$

$$= \frac{\dfrac{-1+-h}{(-1+h)\times(-1)}}{h} \qquad \text{Réduction au numérateur.}$$

$$= \frac{-h}{(-1+h)\times(-1)} \times \frac{1}{h} \qquad \text{Diviser par } h, \text{c'est multiplier par } \frac{1}{h}.$$

$$= \frac{-1}{(-1+h)\times(-1)} \qquad \text{Simplification par } h$$

On cherche maintenant la limite du taux de variations quand h tend vers 0.

$$\lim_{h\to 0} \frac{-1}{(-1+h)\times(-1)} = \frac{-1}{1}$$

On peut donc conclure que $f'(-1) = -1$

2) Pour déterminer $f'(-1)$, on commence par calculer le taux de variation de f, entre -1 et $-1+h$, noté $\tau(h)$, où h est un réel non-nul.

$$\tau(h) = \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} \qquad \text{Définition du taux de variation}$$

$$= \frac{(-1+h)^2-(-1)^2}{h} \qquad \text{Application à la fonction carré.}$$

$$= \frac{(-1)^2+2\times(-1)\times h+h^2-(-1)^2}{h} \qquad \text{Développement de l'identité remarquable.}$$

$$= \frac{1-2h+h^2-1}{h} \qquad \text{Simplification au numérateur.}$$

$$= \frac{-2h+h^2}{h} \qquad \text{Réduction au numérateur.}$$

$$= \frac{h(-2+h)}{h} \qquad \text{Factorisation par } h \text{ au numérateur.}$$

$$= -2+h \qquad \text{Simplification par} h$$

On cherche maintenant la limite du taux de variations quand h tend vers 0.

$$\lim_{h\to 0} -2+h = -2$$

Comme la limite existe, on peut en déduire que f est dérivable en -1 et on peut conclure que $f'(-1) = -2$

3) Pour déterminer $f'(-2)$, on commence par calculer le taux de variation de f, entre -2 et $-2+h$, noté $\tau(h)$, où h est un réel non-nul.

$$\begin{aligned}
\tau(h) &= \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} && \text{Définition du taux de variation}\\
&= \frac{-4(-2+h)+1-(-4)\times(-2)-1}{h} && \text{Application à la fonction } f(x)=-4x+1\\
&= \frac{8-4h+1-8-}{h} && \text{Développement au numérateur}\\
&= \frac{-4h}{h} && \text{Réduction au numérateur}\\
&= -4 && \text{Simplification par } h
\end{aligned}$$

Le taux de variations de f est une constante qui ne dépend pas de h.
Ce résultat était prévisible puisque la représentation graphique d'une fonction affine est une droite.
La pente entre deux points de la droite est donc toujours égale au coefficient directeur de la fonction affine, ici -4.
On en déduit facilement la limite du taux de variations quand h tend vers 0.
$\lim\limits_{h\to 0} -4 = -4$
On peut en conclure que f est dérivable en -2 et donc $f'(-2) = -4$

4) Pour déterminer $f'(5)$, on commence par calculer le taux de variation de f, entre 5 et $5+h$, noté $\tau(h)$, où h est un réel non-nul.

$$\begin{aligned}
\tau(h) &= \frac{f(5+h)-f(5)}{h} && \text{Définition du taux de variation}\\
&= \frac{\sqrt{5+h}-\sqrt{5}}{h} && \text{Application à la fonction racine carrée.}\\
&= \frac{(\sqrt{5+h}-\sqrt{5})(\sqrt{5+h}+\sqrt{5})}{h(\sqrt{5+h}+\sqrt{5})} && \text{Multiplication par la "quantité conjuguée".}\\
&= \frac{5+h-5}{h(\sqrt{5+h}+\sqrt{5})} && \text{Identité remarquable : } (a-b)(a+b)=a^2-b^2\\
&= \frac{h}{h(\sqrt{5+h}+\sqrt{5})} && \text{Réduction au numérateur .}\\
&= \frac{1}{\sqrt{5+h}+\sqrt{5}} && \text{Simplification de la fraction par } h.
\end{aligned}$$

On cherche maintenant la limite du taux de variations quand h tend vers 0.
$\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{5+h}+\sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$
On peut donc conclure que $f'(5) = \frac{1}{2\sqrt{5}}$