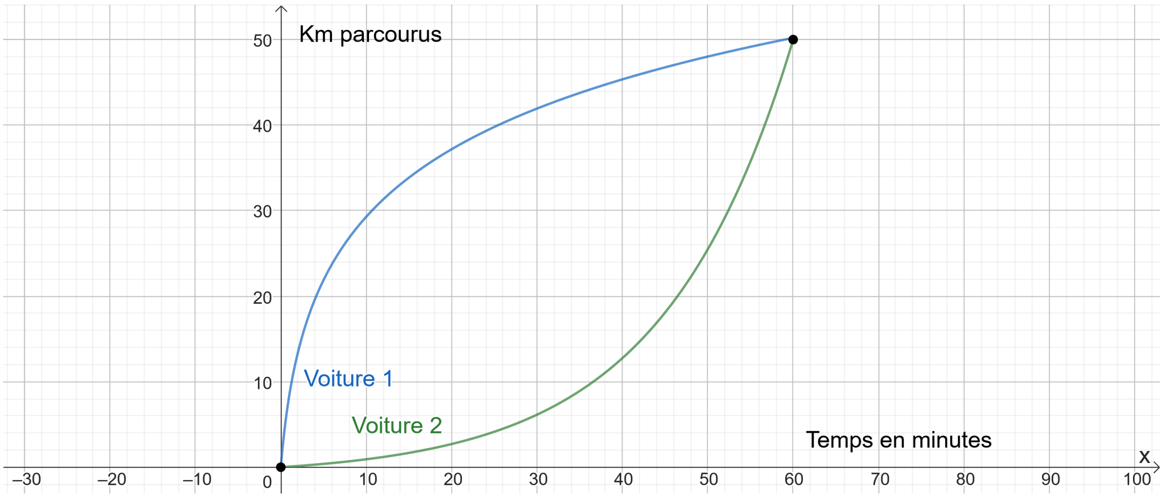
Variation instantanée, Variation globale

Maths Spécifiques

1 Variation instantanée

1.1 Introduction

Deux voitures parcourent le même trajet sur la même route. Elles partent en même temps et mettent toutes deux le même temps pour arriver à destination. Les deux courbes ci-dessous représentent les kilomètres parcourus en fonction du temps.



Exercice. a) *Quelle est la distance du trajet ? En combien de temps ces deux voitures ont-elles parcourru ce trajet ?*

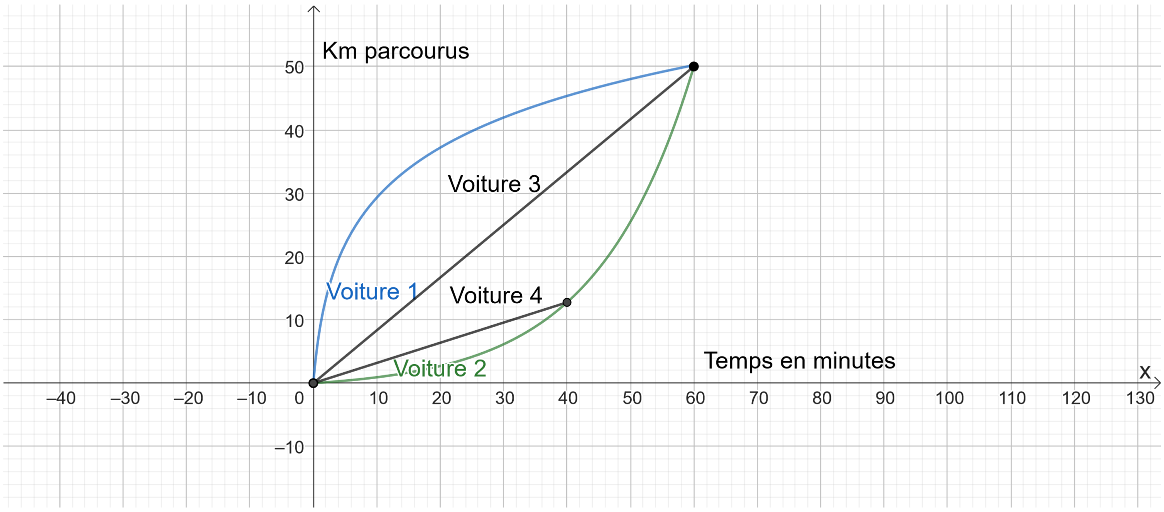
b) *Quelle voiture allait plus vite sur les* 30 *premières minutes ? Pourquoi ?*

c) *Admettons qu'une troisième voiture parcourt le trajet, mais garde la même vitesse du début à la fin. Quelle est cette vitesse en* $\mathrm{km\,h^{-1}}$ *?*

d) *Combien de kilomètres a parcourru la voiture* 1 *au bout de* 30 *minutes ? Même question pour la voiture* 2*.*

e) *Admettons qu'une quatrième voiture roule* 30 *minutes et parcourt la même distance que la voiture* 2 *au terme de ces* 30 *minutes, mais en gardant une vitesse constante durant tout le trajet. Quelle est cette vitesse ?*

On trace les trajets des voitures 3 et 4 des questions précédentes. Leur vitesse constante est donnée par la *pente* de la droite correspondante.

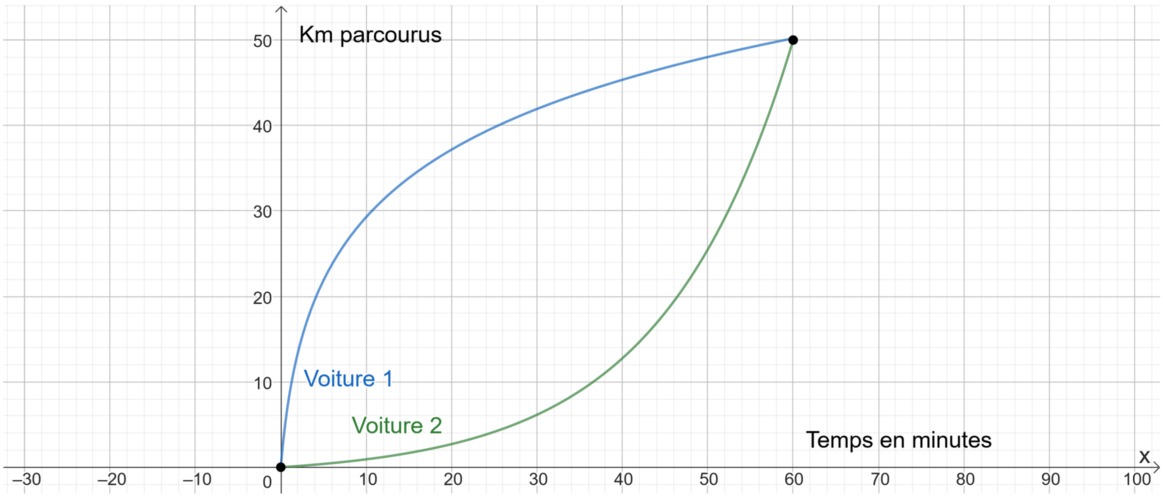


S'il est facile d'estimer la vitesse d'une voiture dont la vitesse est constante, il est plus difficile de le faire dans le cas où une voiture a une vitesse variable. Pourtant, les compteurs de nos voitures estiment facilement la vitesse à laquelle nous roulons.

Exercice. *Sur le schema suivant, faire figurer le trajet d'une voiture...*

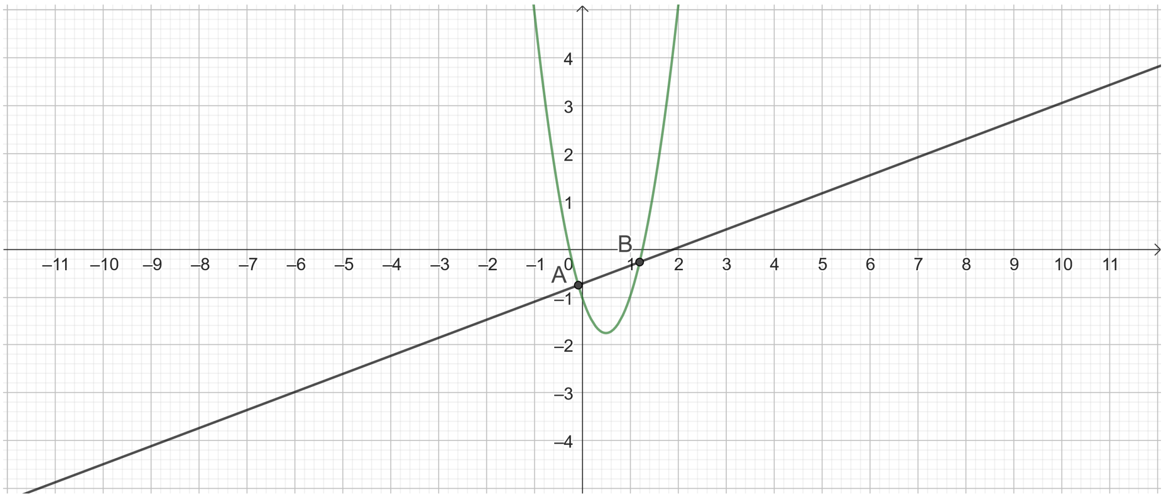
- *Arrivant au bout de la* 20^e *minute au même kilométrage que la voiture* 2
- *Arrivant au bout de la* 40^e *minute au même kilométrage que la voiture* 2
- *Et roulant à vitesse constante entre la* 20^e *et la* 40^e *minute.*

Quelle est la vitesse de la voiture entre 20 *et* 40 *minutes ?*



1.2 Variation instantanée

Définition 1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dont la courbe représentative est donnée $\mathcal{C}_f$. Une droite est appelé* sécante *à $\mathcal{C}_f$ si elle coupe deux points distincts de la courbe.*



Remarque.
- *Une sécante à $\mathcal{C}_f$ ne peut pas être verticale.*
- *Étant donné une sécante à $\mathcal{C}_f$, il existe une fonction affine $x \mapsto ax + b$ dont la courbe représentative est exactement cette sécante.*

Exercice. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, et une sécante d à $\mathcal{C}_f$.*

a) *Justifier que d passe par deux points de la forme $(x_1; f(x_1))$ et $(x_2; f(x_2))$ avec $x_1, x_2 \in I$.*

b) *Soit $g : x \mapsto ax + b$ une fonction affine dont la courbe représentative est d. Justifier que sa pente vaut*

$$a = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

On suppose que $A(x_1; f(x_1))$ est fixé. Plus $B(x_2; f(x_2))$ est proche de A, plus la sécante à $\mathcal{C}_f$ passant par A et B se rapproche d'une position limite. Cette droite limite est appelée *tangente* à la courbe $\mathcal{C}_f$ passant par A.

Remarque. *Quand elle existe, la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ est unique.*

Définition 2. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, et $a \in I$. On appelle nombre dérivé de f en a la pente de la tangente à C_f passant par $A(a; f(a))$.*

Remarque. *Pour calculer le nombre dérivé de f en a, on regarde vers quelle valeur le taux d'accroissement*

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x}$$

se dirige quand x se rapproche de a.

2 Variation globale

2.1 Fonction dérivée

Définition 3. *Soit f un fonction définie sur un intervalle I et admettant un nombre dérivé sur tout a appartenant à I. On dit que f est dérivable sur I.*

Définition 4. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable sur I. Alors on note f' la fonction définie sur I qui a tout nombre a dans I associe le nombre dérivé de f en a.*

Remarque.

- *Pour parler de la fonction dérivée de f, il faut avoir préalablement dit que f est dérivable.*

Exemple.

1. *Soit $f\colon x \mapsto \frac{1}{2}x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$. La fonction f admet un nombre dérivé en a, pour n'importe quel a appartenant à $\mathbb{R}$. Ce nombre dérivé est toujours $\frac{1}{2}$. On en déduit que la* fonction dérivée *de f, f', est la fonction telle que pour tout a*

$$f'(a) = \frac{1}{2}\,.$$

2. *Soit $g\colon x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$. La fonction g admet un nombre dérivé en a, pour n'importe quel a appartenant à $\mathbb{R}$. On en déduit que g est dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction dérivée de g, g', est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et telle que*

$$g'(x) = 2x$$

Proposition 1. *Soit f une fonction définie sur I et dérivable sur I. Soit J un intervalle inclus dans I. Alors,*

- *f est croissante sur J si et seulement si f' est positive sur J.*
- *f est décroissante sur J si et seulement si f' est négative sur J.*

Exemple.

a) *Soit $g\colon x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de x a-t-on $g'(x) \geq 0$? Et $g'(x) \leq 0$?*

b) *Compléter le tableau de variations suivant.*

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de g'		0	
Variations de g			

2.2 Calcul de la fonction dérivée

Proposition 2 (Fonctions usuelles)**.**

- *Soit la fonction $f\colon x \mapsto 1$ définie sur $\mathbb{R}$. Alors cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée f' vérifie*
$$f'(x) = 0$$
pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- *Soit la fonction $f\colon x \mapsto x$ définie sur $\mathbb{R}$. Alors cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée f' vérifie*
$$f'(x) = 1$$
pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- *Soit la fonction $f\colon x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$. Alors cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée f' vérifie*
$$f'(x) = 2x$$
pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- *Soit la fonction $f\colon x \mapsto x^3$ définie sur $\mathbb{R}$. Alors cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée f' vérifie*
$$f'(x) = 3x^2$$
pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Remarque. *Pour l'écrire de façon condensée, on peut utiliser $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x))$. Donc,*
$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1) = 0; \quad \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) = 1; \quad \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2\right) = 2x; \quad \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^3\right) = 3x^2$$

Proposition 3 (Somme et produit par un réel)**.** *Soit f et g deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.*

- *Soit $k \in \mathbb{R}$, la fonction $h\colon x \mapsto k \times f(x)$ est alors dérivable sur $\mathbb{R}$. Et sa dérivée h' vérifie*
$$h'(x) = k \times f'(x)$$
pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- *La fonction $s\colon x \mapsto f(x) + g(x)$ est alors dérivable sur $\mathbb{R}$. Et sa dérivée s' vérifie*
$$s'(x) = f'(x) + g'(x)$$
pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Remarque.
$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(kf(x)) = k\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)); \quad \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x) + g(x)) = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)) + \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(g(x))$$

Exemple. *Soit $f\colon x \mapsto 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ définie sur $\mathbb{R}$. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de sa dérivée.*

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions qui le sont.
Pour calculer sa dérivée f', on utilise $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x))$.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(2x^3 + 3x^2 + 4x + 5\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(2x^3\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(3x^2\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(4x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5) \\
&= 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^3\right) + 3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2\right) + 4\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) + 5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1) \\
&= 2 \times 3x^2 + 3 \times 2x + 4 \times 1 + 5 \times 0 \\
&= 6x^2 + 6x + 4
\end{aligned}$$

Donc la dérivée de f est donnée par $f'\colon x \mapsto 6x^2 + 6x + 4$.