Contrôle : fonctions polynomiales du second degré

Premières Spécialité Mathématiques

27 Novembre 2024

— Une présentation soignée est de rigueur.
— Tout effort de recherche, même non abouti, sera valorisé.
— La calculatrice est AUTORISÉE.

Exercice 1 : Etudes de pôlynomes (8 points)

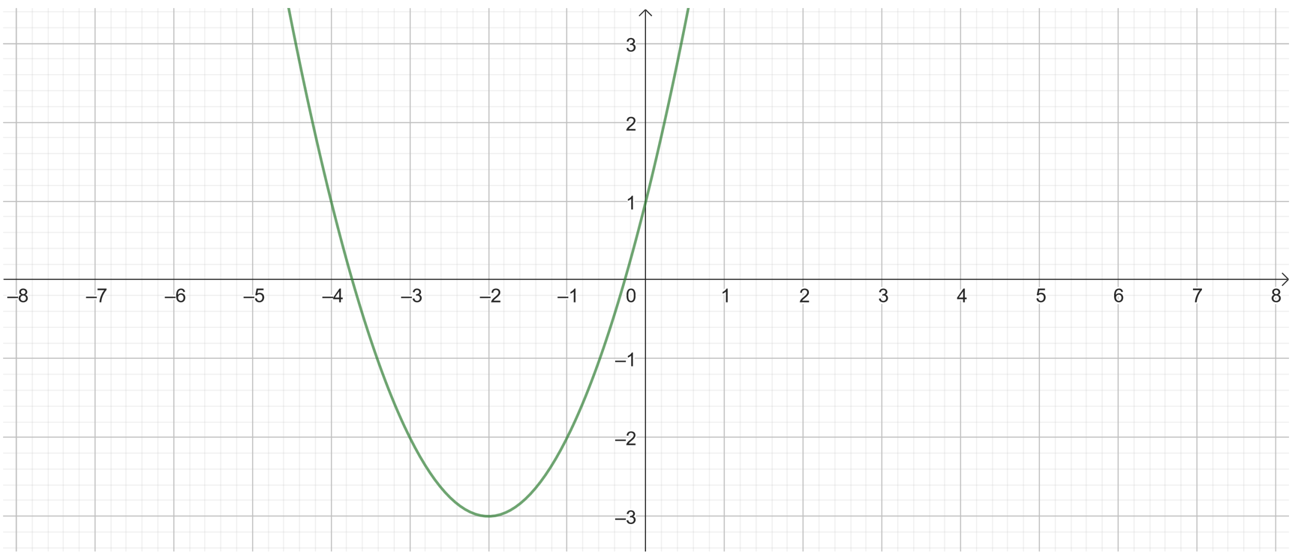
Pour chacune des fonctions polynomiales du second degré suivantes :

— Donner sa forme canonique.
— En déduire son tableau de variation, en précisant son extremum et la valeur atteinte en cet extremum.
— Déterminer si la fonction admet des racines, et les calculer dans ce cas.
— En déduire son tableau de signe.

(a) $p\colon x \mapsto x^2 - 6x + 9$
(b) $f\colon x \mapsto -4x^2 - 32x - 64$
(c) $g\colon x \mapsto 3x^2 + 18x + 32$
(d) $h\colon x \mapsto -5x^2 + 10x - 7$

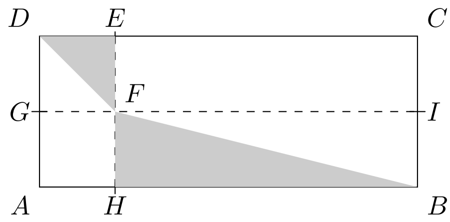
Exercice 2 : Parabole (2 points)

Soit $f\colon x \mapsto x^2 + bx + c$ (on remarque que $a = 1$ dans notre cas). À l'aide de la parabole $\mathcal{C}_f$ représentant f donnée ci-après, en déduire la valeur de b et de c.



Exercice 3 : Drapeau (4 points)

Un drapeau est donné par le motif suivant :



Le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle de longueur $AB = 10$ et de largeur $BC = 5$. Le quadrilatère $DEFG$ est un carré de côté x, et le quadrilatère $FIBH$ est un rectangle. On note $f(x)$ l'aire de la partie grisée, c'est à dire l'aire de DEF et l'aire de FBH.

(a) Justifier que l'ensembre de définition de f est $[0; 5]$.

(b) Justifier que l'aire grisée est donnée par

$$f(x) = x^2 - 7,5x + 25$$

(c) En déduire la valeur de x pour laquelle l'aire grisée est minimale.

(d) En déduire la valeur de x pour laquelle l'aire grisée vaut le quart de l'aire du rectangle $ABCD$.

Exercice 4 : Equation à paramètres (4 points)

(a) Résoudre l'équation $m^2 - 4m - 32 = 0$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Pour quelles valeurs de m l'équation

$$(m + 8)x^2 + mx + 1 = 0$$

admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5 : Radicaux imbriqués *(Bonus)* (2 points)

Montrer que $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\ldots}}}} = 2$.

Indication : poser $X = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\ldots}}}}$; puis exprimer X^2 en fonction de X.