Méthodes d'Al-Khwarizmi

pour la résolution d'équations du 2nd degré

I – Exposé sur le mathématicien Al-Khwarizmi

Répondre aux questions suivantes (sur cette feuille) :

a) A quelle époque a-t-il vécu ? Dans quel pays a-t-il vécu ?
b) Sur quoi a-t-il travaillé ?
c) Quelle est l'étymologie du mot algorithme ?

II – Exercice d'introduction

Al-Khwarizmi s'intéresse à la résolution des équations au IXe siècle. Voici ce qu'il a écrit :

« J'ai rédigé sur le sujet (…) un livre abrégé englobant les choses les plus subtiles et les plus nobles du calcul dont ont besoin les gens dans leurs héritages, dans leurs donations, dans leurs partages, dans leurs jugements, dans leurs commerces et dans toutes les transactions qu'il y a entre eux à propos de l'arpentage des terres, du creusement des canaux, de la géométrie et d'autres choses relatives à ses aspects et à ses arts (…). J'ai découvert ainsi que les nombres dont on a besoin dans le calcul sont de trois types : ce sont les racines, les biens et le nombre seul... »

En algèbre, Al-Khwarizmi considère plusieurs sortes de nombres : les nombres simples ou dirhams (de la drachme, monnaie grecque), les racines, les biens qui sont les produits de racines par elles-mêmes. Dans la suite on dira parfois nombre au lieu de dirham.

Relier :

Un bien égale trente-cinq dirhams	•	•	$8x^2 + 1 = 35x$
Huit biens et un dirham égalent trente-cinq racines	•	•	$x^2 = 35$
Un bien et huit de ses racines égalent trente-cinq dirhams	•	•	$8\,x = 35$
Huit racines égalent trente-cinq dirhams	•	•	$x^2 + 8x = 35$

Nom : Prénom : Classe :

III – Méthode de résolution d'Al-Khwarizmi pour les équations du type $x^2 + bx = c$

Objectif : résoudre l'équation suivante :

« Un bien et dix de ses racines égalent trente-neuf dirhams»

Quelle est la traduction en langage mathématique ? ___________________________________

1) Approche historique

Voici la règle de résolution, selon Al-Khwarizmi :

« Son procédé de résolution consiste à diviser le nombre de ses racines par deux, et c'est cinq dans ce problème. Tu le multiplies par lui-même et ce sera vingt-cinq. Tu l'ajoutes à trente-neuf. Cela donnera soixante-quatre. Tu prends alors sa racine carrée qui est huit et tu en retranches la moitié du nombre des racines et c'est cinq. Il reste trois et c'est la racine du bien que tu cherches et le bien est neuf. »

Traduire les différentes étapes en complétant le schéma ci-dessous :

Son procédé de résolution consiste à diviser le nombre de ses racines par deux, et c'est cinq dans ce problème……………………………

Tu le multiplies par lui-même et ce sera vingt-cinq…………

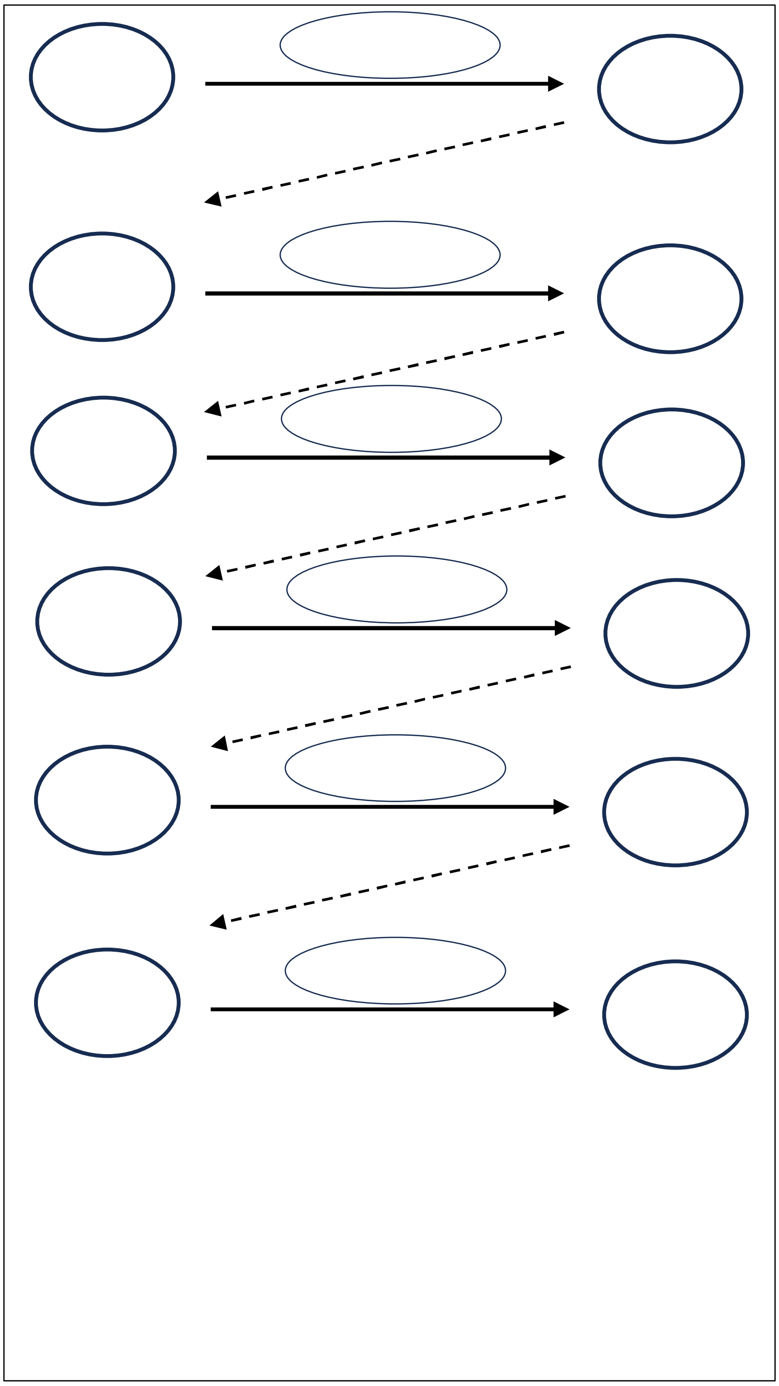
Tu l'ajoutes à trente-neuf. Cela donnera soixante-quatre….

Tu prends alors sa racine carrée qui est huit…………………..

et tu en retranches la moitié du nombre des racines et c'est cinq. Il reste trois …………………………………………………

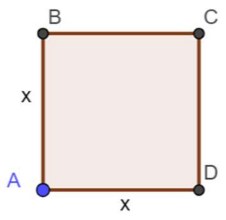
et c'est la racine du bien que tu cherches……………………………………………………………………

et le bien est neuf.

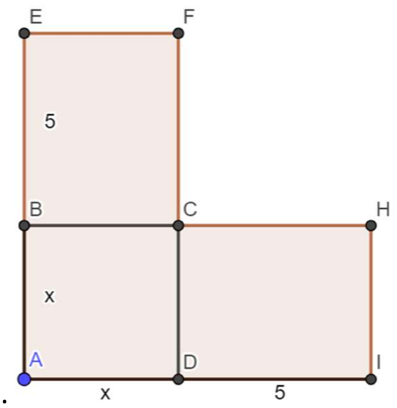


2) Démonstration géométrique

Etape 1 : on suppose que x est positif et on construit un carré de côté x.

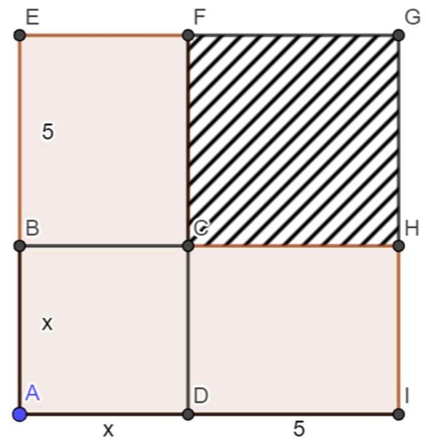


Etape 2 : on borde ce carré de deux rectangles. L'aire de chaque rectangle vaut $\frac{10}{2} \times x$, on obtient ainsi 5 comme largeur du rectangle



.

Etape 3 : on complète alors le grand carré



Questions :

a) Exprimer l'aire $\mathcal{A}_1$ de la figure AEFCHI en fonction de x.

____

b) Quelle est l'aire $\mathcal{A}_2$ du carré hachuré ?

____

c) Exprimer de deux manières différentes l'aire du carré AEGI.

____

d) En déduire que $x^2 + 10x = (x+5)^2 - 25$

____

e) En déduire que résoudre l'équation $x^2 + 10x = 39$ revient à résoudre $(x+5)^2 = 64$.

____

f) Déterminer la solution positive de l'équation ci-dessus.

____

g) La fonction f définie par $f(x) = x^2 + 10x$ est représentée ci-dessous. Retrouve-t-on bien la solution positive de l'équation $x^2 + 10x = 39$. Déterminer graphiquement la 2ème solution (négative) ?

____