Suites arithmétiques

TSTMG1

1 Termes d'une suite arithmétique

Définition 1 (Rappel)**.** *Une suite arithmétique est une suite numérique* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par son* ***premier terme*** u_0 *et un nombre* r *appelé la* ***raison****, tel que chaque terme* u_n *pour* $n > 0$ *est obtenu en ajoutant* r *au terme précédent :*

$$u_n = u_{n-1} + r$$

Exemple.

— *La suite*

$$0; 2; 4; 6; 8; 10; \dots$$

est la suite de premier terme 0 *et de raison* 2*.*

$$0 \xrightarrow{+2} 2 \xrightarrow{+2} 4 \xrightarrow{+2} 6 \xrightarrow{+2} 8 \xrightarrow{+2} 10$$

— *La suite*

$$10; 9; 8; 7; 6; 5; \dots$$

est la suite de premier terme 10 *et de raison* -1*.*

— *La suite* $1; 2; 4; 7; 11; \dots$ *n'est pas une suite arithmétique. En effet,*

$$1 \xrightarrow{+1} 2 \xrightarrow{+2} 4 \xrightarrow{+3} 7 \xrightarrow{+4} 11$$

Remarque. *Une suite arithmétique est constante (tous ses termes sont égaux) si et seulement si sa raison est égale à* 0*.*

Proposition 1. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite arithmétique de raison* r*. Alors, son* n^e *terme est donné par la formule*

$$u_0 + n \times r$$

Exemple.

a) *Donner le* 5^{e} *terme de la suite arithmétique de premier terme* $3,5$ *et de raison* 3 *:* ....

b) *Donner le* 10^{e} *terme de la suite arithmétique de premier terme* 12 *et de raison* -5 *:* ....

En résumé, il y a deux types d'écriture pour le n^{e}terme d'une suite arithmétique :

— La formule de récurrence $u_n = u_{n-1} + r$. Pour vérifier qu'une suite est arithmétique, on vérifie qu'on obtient chaque terme en ajoutant r au terme précédent.

— La formule explicite $u_n = u_0 + n \times r$. On l'utilise une fois qu'on sait qu'une suite est arithmétique, pour calculer directement le n^{e} terme.

2 Étude d'une suite arithmétique

2.1 Variation d'une suite arithmétique

Proposition 2.
- *Une suite arithmétique de raison r est* ***croissante*** *si et seulement si r est positive.*
- *Une suite arithmétique de raison r est* ***décroissante*** *si et seulement si r est négative.*

Exemple. *La suite arithmétique*

$$2; 5; 8; 11; \dots$$

est .... *car sa raison vaut* ....

La suite arithmétique

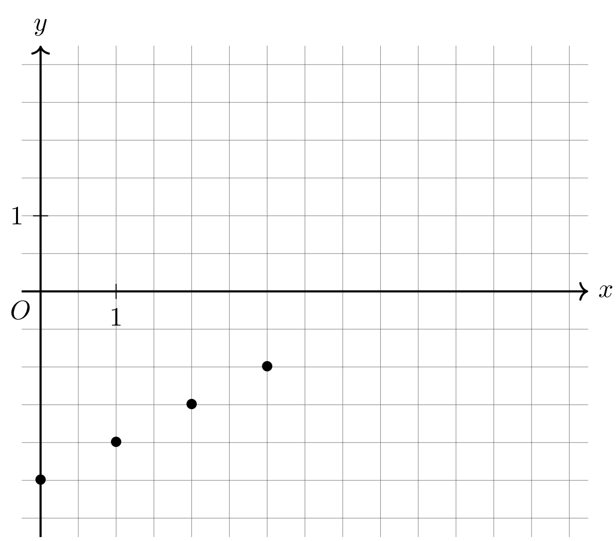
$$4; -2; -8; \dots$$

est .... *car sa raison vaut* ....

2.2 Représentation graphique

Proposition 3. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison n. Alors les points $(0, u_0)$, $(1, u_1)$, $(2, u_2)$, ...sont alignés.*

Exemple.



On a représenté ici les premiers termes d'une suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) *Quel est le premier terme* u_0 *de cette suite ?* ....

b) *Quelle est la raison* r *de cette suite ?* ....

c) *Placer les points correspondants aux termes suivants de cette suite.*

d) *À partir de quel terme (quel* n *?) la suite devient positive ?* ....

Remarque. *Un phénoméne représenté par une suite arithmétique suit une évolution dite* ***linéaire****.*

3 Moyenne arithmétique

Définition 2. *La moyenne arithmétique entre deux nombres a et b est donnée par*

$$\frac{a+b}{2}$$

Exemple. *Calculer la moyenne arithmétique des couples de nombres suivants :*

a) 10 *et* 12 *:* ....

b) -4 *et* 8 *:* ....

c) 0 *et* $0,5$ *:* ....

d) $1,3$ *et* $1,7$ *:* ....

Proposition 4. *Soit une suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors chaque terme u_n est la moyenne arithmétique du terme précédent et du terme suivant.*

$$u_n = \frac{u_{n-1}+u_{n+1}}{2}$$

4 Somme des premiers termes d'une suite arithmétique

Définition 3. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite. Pour parler de la somme* $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_N$*, on utilise la notation suivante :*

$$\sum_{n=0}^{N} u_n$$

Proposition 5. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite arithmétique, et* N *un nombre entier. Alors,* $\sum_{n=0}^{N} u_n = (N+1)\dfrac{u_0 + u_N}{2}$.

Remarque. *En français, cette formule donnerait*

$$(\textit{Nombre de termes à ajouter}) \times \frac{\textit{Premier terme} + \textit{Dernier terme}}{2}$$

Exemple. *Calculer les sommes suivantes :*

a) $u_0 + u_1 + \cdots + u_5$ *pour* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de premier terme* 6 *et de raison* 5.

b) $\sum_{n=0}^{10} v_n$ *pour* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite arithmétique de premier terme* 27 *et de raison* -3.

c) $\sum_{n=0}^{42} w_n$ *pour* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite arithmétique de premier terme* 15 *et de raison* 10.