

Contrôle : Généralités sur les fonctions.

Quentin Canu

8 Janvier 2023

- Une présentation soignée est de rigueur, et sera notée sur 2.
- Tout effort de recherche, même s'il n'aboutit pas, sera valorisé.
- Toute copie est interdite et sera sanctionnée d'une note de 0.
- La calculatrice est interdite.

Exercice 1: Vrai ou Faux ? (4 points)

Soit f est une fonction à valeurs réelles. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses? Il n'est pas nécessaire de justifier les réponses dans cet exercice.

- (a) Si $f(0) = 4$, alors l'image de 0 par f est 4.
- (b) Si $f(-1) = 3$, alors un antécédent de -1 par f est 3
- (c) Soit \mathcal{C}_f la courbe représentative de f : c'est l'ensemble des points de coordonnées $(x; y)$ vérifiant $f(y) = x$.
- (d) Le plus grand ensemble de définition de f possible est \mathbb{R} .

Exercice 2: Equations du premier degré (4 points)

Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{R} :

- (a) $8x + 2 = 4$
- (b) $3 - 14t = 5$
- (c) $28y = 7y + 2$
- (d) $51a + 12 = 36a - 73$

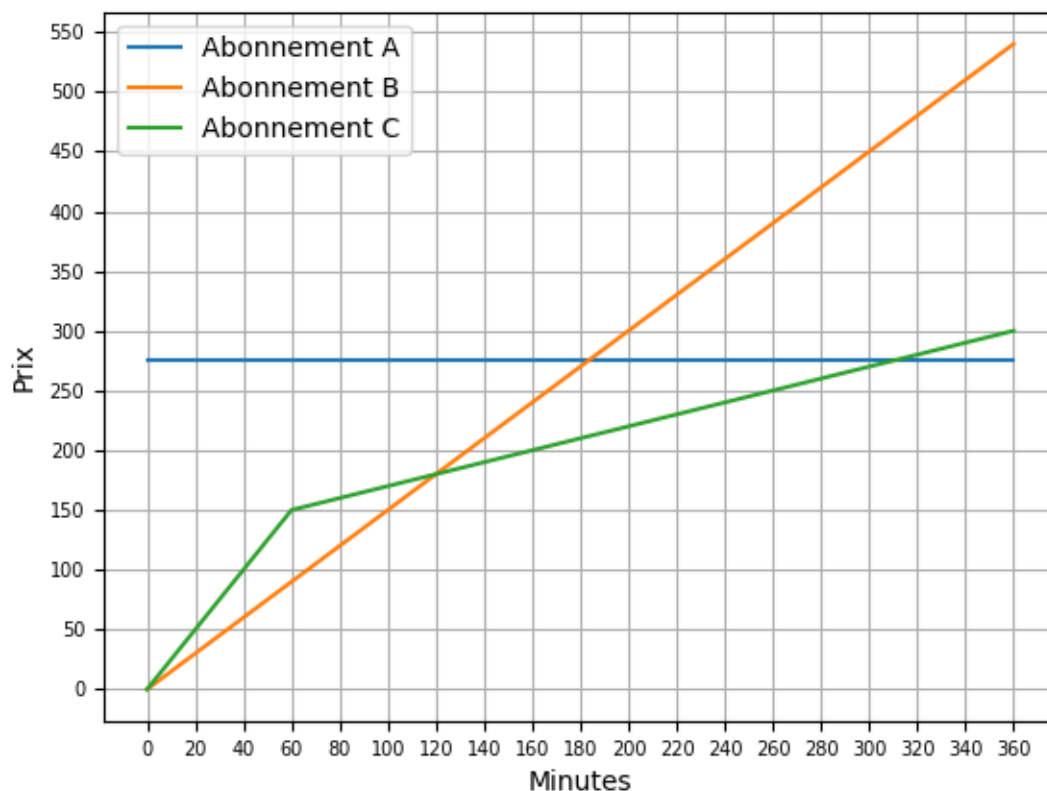
Exercice 3: Abonnements (5 points)

Un service de musique en streaming propose différents types d'abonnement à ses utilisateurs :

1. L'abonnement A coûte 276 € et permet d'écouter de la musique en illimité.
2. L'abonnement B coûte 1.50 € par minute de musique écoutée.
3. L'abonnement C coûte 2.5 € par minute durant la première heure seulement, puis chaque minute coûte seulement 0.5 € après cette heure là.

On note $a(t)$, $b(t)$ et $c(t)$ le prix de l'abonnement A , B et C au bout de t minutes de musique.

- (a) Justifier que les fonctions a , b et c sont définies sur $[0; +\infty[$.
- (b) On se concentre d'abord sur les abonnements A et B .
 - i. Combien a-t-on payé sa musique après 30 minutes d'écoute avec l'abonnement A ? Et avec l'abonnement B ?
 - ii. Donner l'expression de $a(t)$ et de $b(t)$ en fonction de t .
 - iii. À combien de minutes les deux abonnements A et B coûtent le même prix?
- (c) Les courbes représentatives \mathcal{C}_a , \mathcal{C}_b et \mathcal{C}_c sont représentées ci-après.



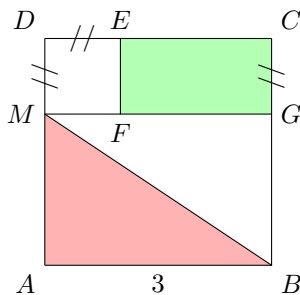
Donner sous forme d'intervalle l'ensemble des minutes d'écoute durant lesquelles l'abonnement C est le moins cher. On pourra dessiner sur la figure pour justifier sa réponse.

Exercice 4: Comparaison d'aires (5 points)

On considère un carré $ABCD$ de côté 3 ainsi qu'un point mobile M sur le segment $[DA]$. On pose alors E sur le segment $[CD]$ et G sur le segment $[BC]$ tel que

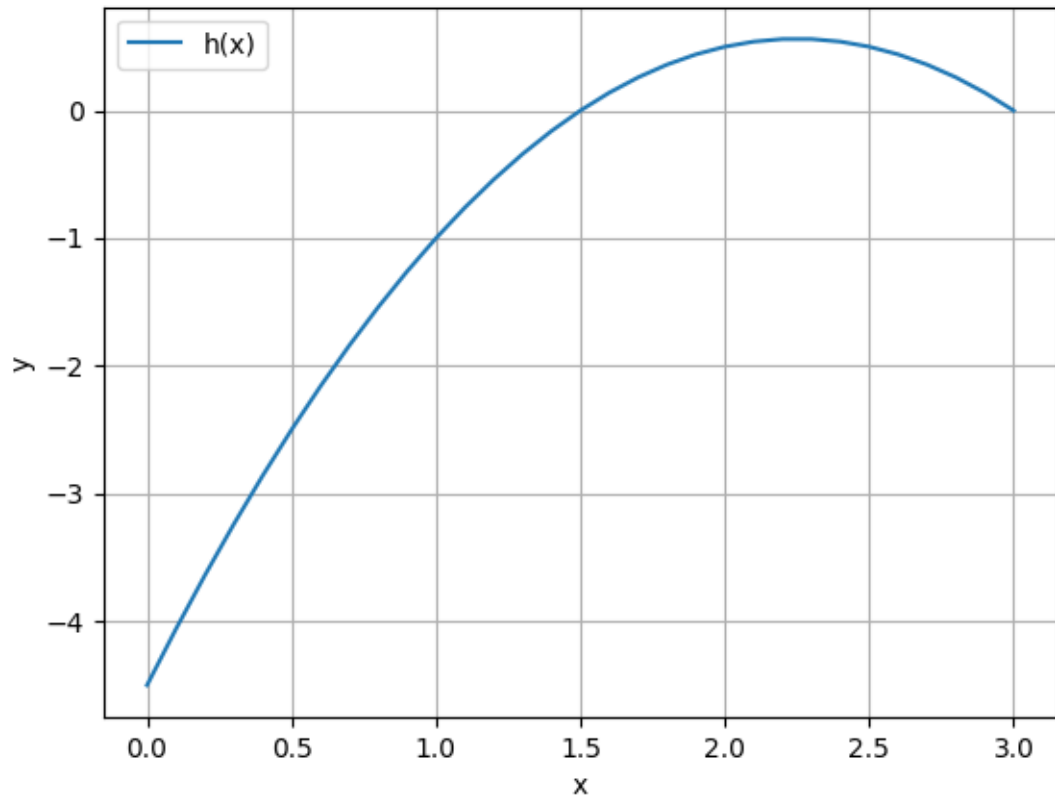
$$DE = DM = CG.$$

Enfin, on pose le point F tel que le quadrilatère $DMFE$ soit un carré. Voici ci-dessous une figure pour illustrer.



L'objectif de cet exercice est de trouver pour quelles valeurs de DM l'aire du rectangle $ECGF$ est supérieure à l'aire du triangle ABM .

- (a) Tracer deux figures correspondantes, une pour une « petite » longueur DM et une autre pour une « grande ». Peut-on conjecturer des solutions possibles ?
- (b) On pose $x = DM$.
- Montrer que l'aire du rectangle $ECGF$ vaut $-x^2 + 3x$.
 - Montrer que l'aire du triangle ABM vaut $-1,5x + 4,5$.
- (c) On pose $f(x) = -x^2 + 3x$ et $g(x) = -1,5x + 4,5$. Justifier que l'ensemble des solutions du problème est donné par l'ensemble des x dans l'intervalle $[0; 3]$ vérifiant $f(x) - g(x) \geq 0$.
- (d) Montrer que $f(x) - g(x) = (x - 1,5)(3 - x)$. On pourra par exemple développer ce produit.
- (e) Voici la courbe représentative de la fonction $h(x) = f(x) - g(x)$.



- Tracer le tableau de signe de $h(x)$. (Attention à l'emplacement du 0 en ordonnée).
- En déduire l'ensemble des solutions du problème.