Colles : Suites et Séries

Quentin Canu

19 Septembre 2024

1 Questions de cours

1. a. Définition d'une suite convergente vers une limite réelle l.
   b. Convergence et somme des séries exponentielles.
2. a. Définition de suites adjacentes. Condition de convergence et limite.
   b. Séries géométriques, dérivée et dérivée seconde de raison q. Convergence et somme.
3. a. Somme des n premiers entiers.
   b. Théorèmes de comparaison de séries à termes positifs.

2 Exercices

1. Étudier la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{(n!)^3}{3n!}$.
2. *a)* Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$x_n = \cos\left(\left(n + \frac{1}{n}\right)\pi\right)$$
est divergente.
   b) En montrant que $\left(3+\sqrt{5}\right)^n + \left(3-\sqrt{5}\right)^n$ est un entier pair pour tout $n \in \mathbb{N}$, en déduire que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$y_n = \sin\left(\left(3+\sqrt{5}\right)^n \pi\right)$$
converge et donner sa limite.
3. Soit $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1+\sqrt{n-2+\sqrt{\cdots+\sqrt{1}}}}}$ pour $n \geq 1$.
   a) Déduire une relation de récurrence entre u_n et u_{n+1}.
   b) Montrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{\sqrt{n}}\right)$ est bornée.
   c) En déduire la convergence et la limite de cette suite.
4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. On pose $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$. Démontrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature. (Indication : on étudiera la croissance de la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{1+x}$ sur $\mathbb{R}_+$)