3 Suites arithmétiques

Définition 5. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On dit que la suite est* ***arithmétique*** *si et seulement il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que*

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Dans ce cas, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite arithmétique de ***premier terme*** *u_0 et de* ***raison*** *r.*

Remarque. *Le calcul des termes d'une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ peut être schématisé comme suit :*

$$\begin{tikzcd} u_0 \arrow[r, dash, "+r"] & u_1 \arrow[r, dash, "+r"] & u_2 \arrow[r, dash, "+r"] & u_3 \arrow[r, dash, "+r"] & u_4 \arrow[r, "+r"] & \cdots \end{tikzcd}$$

Exemple. *Calculer les termes u_1, u_2 et u_3 pour chaque définition suivante :*

a) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est la suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 1 :* ....

b) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 2 :* ....

c) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est la suite arithmétique de premier terme 10 et de raison $-\dfrac{1}{2}$:* ....

Proposition 2 (Variation d'une suite arithmétique)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$.*

- *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si $r \geq 0$.*
- *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si et seulement si $r \leq 0$.*

Remarque. *Dans le cas particulier où $r = 0$, on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* ***constante****.*

Proposition 3 (Formule explicite d'une suite arithmétique)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on observe*

$$u_n = u_0 + n \times r$$

Remarque. *On peut résumer cette formule à l'aide du schéma suivant :*

$$\begin{tikzcd} u_0 \arrow[r, dash, "+r"] \arrow[rrrr, bend right, "4\times r"'] & u_1 \arrow[r, dash, "+r"] & u_2 \arrow[r, dash, "+r"] & u_3 \arrow[r, dash, "+r"] & u_4 \arrow[r, "+r"] & \cdots \end{tikzcd}$$

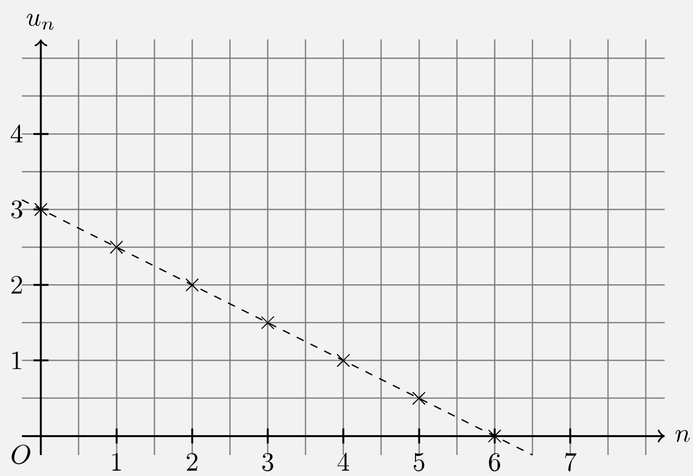
Exemple. *Pour chacune des définitions suivantes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, calculer u_{10} :*

a) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est la suite arithmétique de premier terme 6 et de raison 5 :* ....

b) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est la suite arithmétique de premier terme 0 et de raison -2 :* ....

c) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison $\dfrac{1}{5}$:* ....

Proposition 4. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique, alors les points de sa représentation graphique sont alignés sur la droite d'équation $y = rx + u_0$:*



On dit que les suites arithmétiques permettent de modéliser des ***évolutions linéaires****.*

4 Suites géométriques

Définition 6. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On dit que la suite est **géométrique** si et seulement il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que*

$$u_{n+1} = u_n \times q$$

*Dans ce cas, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de **premier terme** u_0 et de **raison** q.*

Remarque. *Le calcul des termes d'une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ peut être schématisé comme suit :*

$$\begin{tikzcd} u_0 \arrow[r, "\times q"] & u_1 \arrow[r, "\times q"] & u_2 \arrow[r, "\times q"] & u_3 \arrow[r, "\times q"] & u_4 \arrow[r, "\times q"] & \cdots \end{tikzcd}$$

Exemple. *Calculer les termes u_1, u_2 et u_3 pour chaque définition suivante :*

a) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est la suite géométrique de premier terme* 1 *et de raison* 2 *:* ....

b) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est la suite arithmétique de premier terme* 64 *et de raison* $\dfrac{1}{2}$ *:* ....

c) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est la suite arithmétique de premier terme* 1000 *et de raison* $-0,1$ *:* ....

Proposition 5 (Variation d'une suite géométrique)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$. **On suppose que son premier terme u_0 est non nul**.*

- *Si $q > 1$:*
  - *Si $u_0 > 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.*
  - *Si $u_0 < 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.*
- *Si $0 < q < 1$:*
  - *Si $u_0 > 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.*
  - *Si $u_0 < 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.*
- *Si $q = 0$ ou $q = 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir du terme u_1.*
- *Si $q < 0$, alors la suite n'est pas **monotone** (elle n'est ni croissante, ni décroissante).*

Proposition 6 (Formule explicite d'une suite arithmétique)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on observe*

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Remarque. *On peut résumer cette formule à l'aide du schéma suivant :*

$$\begin{tikzcd} u_0 \arrow[r, "\times q"] \arrow[rrrr, bend right, "\times q^4"'] & u_1 \arrow[r, "\times q"] & u_2 \arrow[r, "\times q"] & u_3 \arrow[r, "\times q"] & u_4 \arrow[r, "\times q"] & \cdots \end{tikzcd}$$

Exemple. *Pour chacune des définitions suivantes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, calculer u_{10} :*

a) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est la suite géométrique de premier terme* 1 *et de raison* -2 *:* ....

b) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est la suite arithmétique de premier terme* $5^{10} = 9\,765\,625$ *et de raison* $\dfrac{1}{5}$ *:* ....

Définition 7. *Les suites géométriques permettent de modéliser des évolutions dites **exponentielles**.*