

Définition de la fonction exponentielle

Terminale STMG2

14 Mars 2025

1 Production au mois

On étudie la production de sirop contre la toux d'une entreprise pharmaceutique. Au 1^{er} du mois de sa création, cette entreprise produit 100 litres de sirop. On réalise que chaque mois, sa production augmente de 20%.

- a) Soit (u_n) la suite donnant la production de sirop au 1^{er} du mois n , le mois 0 étant le mois de création de l'entreprise. Justifier que la suite (u_n) est géométrique. Quelle est sa raison ?
- b) En déduire une expression de u_n en fonction de n .
- c) Donner la production de sirop au bout d'un an.

2 Étude plus précise de la production

L'entreprise souhaite trouver une méthode pour étudier plus précisément sa production de sirop, au jour près. Pour cela, on va chercher à trouver un moyen de calculer la puissance $1,2^x$, où x n'est pas forcément un nombre entier.

- a) À combien de jours correspond un demi-mois ?
- b) Même question pour un tiers de mois.
- c) On se pose donc la question d'une valeur imaginable pour $1,2^{1/2}$. Rappeler la règle de calcul de $a^p \times a^q$, ainsi que de $(a^p)^q$
- d) À l'aide de ces règles de calcul, en déduire la valeur de $(1,2^{1/2})^2$.
- e) En calculant $\sqrt{1,2^2}$, en déduire la valeur de $1,2^{1/2}$.
- f) De combien est multiplié la production de sirop chaque demi-mois ?

En s'inspirant de cette méthode pour la puissance $1/2$, on peut en déduire que

$$(1,2)^{p/q} = \sqrt[q]{1,2^p}$$

où l'on considère la racine q^e de $1,2^p$

3 Étendre le champ des possibles

En réalité, on peut même déterminer une valeur de $1,2^x$ pour n'importe quel nombre réel x , et pas seulement les fractions.

- a) Rappeler ce qu'est un rationnel. Le nombre π est-il rationnel ?
- b) On s'intéresse donc à la valeur hypothétique de $1,2^\pi$. Pour cela, on considère la suite suivante : $3; 3,1 = \frac{3}{10}; 3,14 = \frac{314}{100}; 3,141 = \frac{3141}{1000} \dots$. À quoi correspond cette suite ?
- c) Calculer $1,2^x$ pour chaque fraction de cette suite. Que remarquez-vous ?

En suivant le même modèle, on est capable de calculer $1,2^x$ pour tout x réel, avec la précision nécessaire. En effet, pour tout nombre x , il est toujours possible de mettre en place une suite de fraction se rapprochant de plus en plus de la valeur de x .