Généralités sur les fonctions

Seconde 9

1 Définitions

Définition 1. *Une **fonction** est un objet mathématique capable d'associer un **unique** résultat à tout objet d'un ensemble appelé **ensemble de définition**.*

Exemple. *On définit plusieurs fonctions dont l'ensemble de définition est* l'ensemble des élèves de la seconde 9 *:*

- f *est la fonction qui à un élève de la seconde 9 associe sa date d'anniversaire.*
- g *est la fonction qui à un élève de la seconde 9 associe sa couleur préférée.*
- h *est la fonction qui à un élève de la seconde 9 associe l'initiale d'un des membres de sa famille.* (***Attention ! A-t-on vraiment défini une fonction ici ?***)
- p *est la fonction qui à un élève de la seconde 9 associe* ....
- q *est la fonction qui à un élève de la seconde 9 associe* ....

Remarque. *On s'intéresse majoritairement en mathématiques aux fonctions numériques. Les ensembles de définitions sont des ensembles de nombres, et le résultat renvoyé par les fonctions est toujours un nombre réel.*

Définition 2. *Une **fonction numérique à valeurs réelles** est une fonction f définie de la manière suivante :*

$$f : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

*avec I son **ensemble de définition**.*

Remarque.

- *La plupart du temps, on aura $I = \mathbb{R}$, I est un intervalle ou I est une réunion d'intervalles.*
- *On aura toujours $\mathbb{R}$ à droite de la flèche du haut : on dit que **l'ensemble d'arrivée** est $\mathbb{R}$.*
- *La flèche du bas se lit de la manière suivante : au nombre x, on renvoie le nombre $f(x)$*

Définition 3. *Soit $f : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ et $a \in I$. On pose b vérifiant l'égalité*

$$b = f(a)\,.$$

Alors,

- *a est **un antécédent** de b par la fonction f.*
- *b est **l'image** de a par la fonction f.*

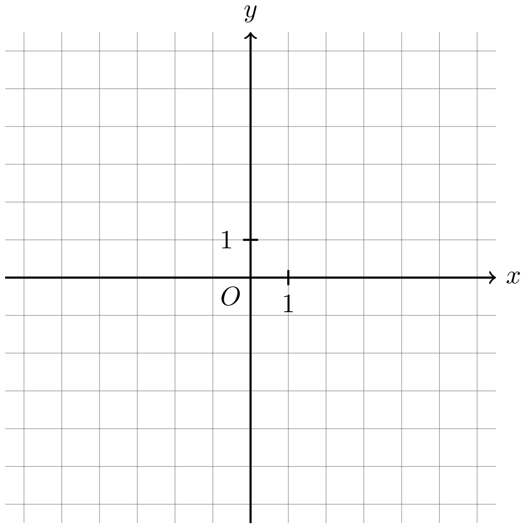
Exemple. *Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x+1 \end{array}$.*

a) *Donner l'image de 3 par f :* ....
b) *Donner un antécédent de 7 par f :* ....

2 Courbe représentative

Définition 4. *Un **repère orthonormé** est un repère formé par deux axes tels que :*
- *Les deux axes sont perpendiculaires (on dit que le repère est **orthogonal**)*
- *Les deux axes sont gradués et ont des graduations de longueurs égales (on dit que le repère est **normé**)*

Exemple. *On représente traditionnellement un repère orthonormé de la manière suivante :*



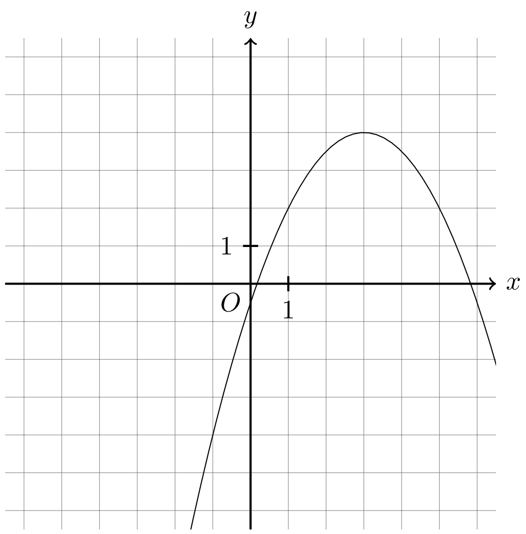
- *L'axe horizontal est appelé **axe des abscisses**.*
- *L'axe vertical est appelé **axe des ordonnées**.*
- *Le point d'abscisse 0 et d'ordonnée 0 (de coordonnées $(0;0)$) est appelé **origine du repère**.*

Définition 5. *Soit f une fonction définie sur un ensemble de définition I. On se place sur un reprère orthonormé. Alors, la **courbe représentative de** f, notée $\mathcal{C}_f$, est l'ensemble des points du repère de coordonnées $(x;y)$ vérifiant*

$$y = f(x)$$

Remarque. *La courbe représentative d'une fonction permet donc de représenter la fonction, c'est-à-dire de représenter la transformation d'un antécédent en une image par la fonction f. Chaque point de la courbe de coordonnées $(x;y)$ représente une telle transformation : l'abscisse x du point joue le rôle de l'antécédent, et l'ordonnée y du point joue le rôle de l'image.*

Exemple. *Soit f une fonction dont la courbe représentative est donnée sur le repère orthonormé suivant. Donner l'image de 3 par f :* ....

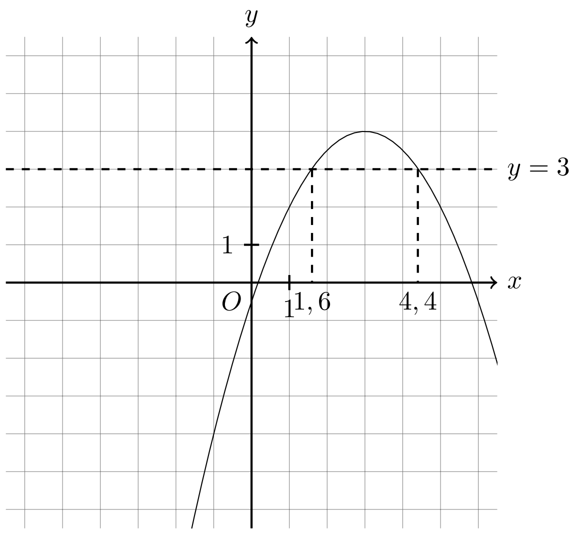


La courbe représentative d'une fonction f procure de nombreuses informations concernant f.

2.1 Calcul des antécédents de f

Pour chercher un antécédent (ou tous les antécédents) d'un nombre a par f, on trace une droite horizontale d'équation $y = a$:

Exemple.

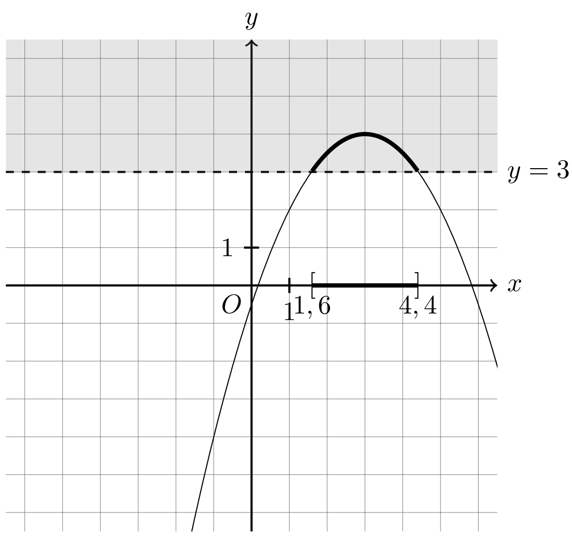


On a résolu ici l'équation $f(x) = 3$: l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions est donné par $\mathcal{S} = \{1,6; 4,4\}$.

2.2 Résolution d'inéquation $f(x) \geq a$

Dans ce cas, on cherche les zones où la courbe est **au-dessus** de la droite horizontale d'équation $y = a$.

Exemple.



Ici, on a résolu l'inéquation $f(x) \geq 3$: l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ de cette inéquation est donné par l'intervalle $[1,6; 4,4]$.

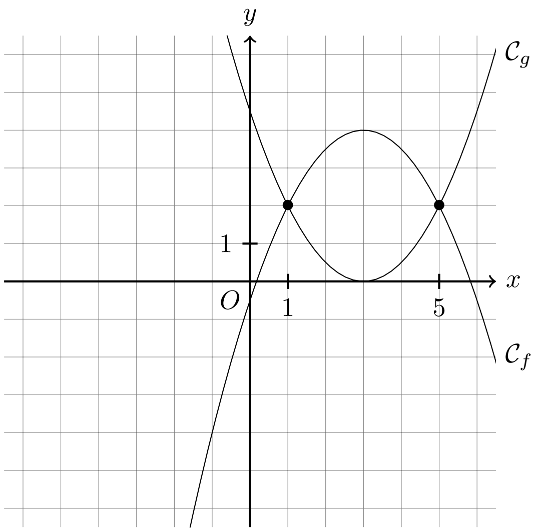
Remarque.

- *Le sens des crochets est toujours dépendant des cas d'égalités.*
- *La même méthode marche pour $f(x) > a$; $f(x) \leq a$ et $f(x) < a$.*
- *Si la courbe est au-dessus de la droite à plusieurs endroit, alors on « joint » les différents intervalles-solutions à l'aide du symbole $\cup$ (qui se lit **« union »**). Par exemple,* $[0; 1] \cup]4,5; 9]$ *est une union d'intervalles.*

2.3 Résolution d'équation $f(x) = g(x)$

Cette information est donnée par les points d'intersection des courbes représentatives des fonctions f et g

Exemple.

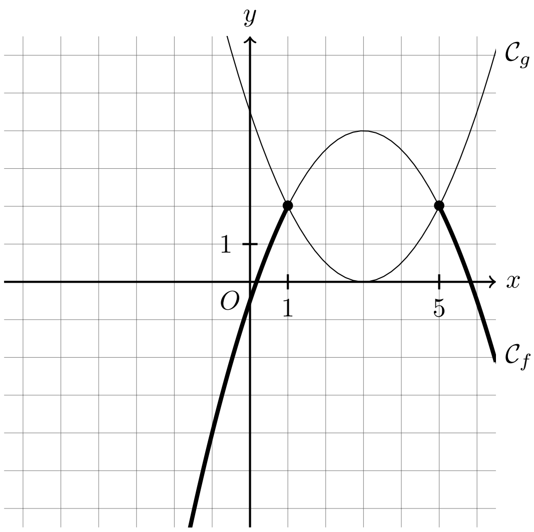


L'ensemble des solutions de $f(x) = g(x)$ est donné par $\mathcal{S} = \{1; 5\}$.

2.4 Résolution d'inéquation $f(x) < g(x)$

Cette information est donnée par la position relative entre les deux courbes représentatives.

Exemple.



L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ est donné par la réunion d'intervalles $]-\infty; 1[\cup]5; +\infty[$.

3 Fonctions croissantes et décroissantes

Définition 6. *Soit f une fonction à valeurs réelles, et I un intervalle sur lequel f est définie.*

- *On dit que f est* ***croissante sur*** *I, si pour tout $x < y \in I$, on a $f(x) \leq f(y)$.*
- *On dit que f est* ***strictement croissante sur*** *I, si pour tout $x < y \in I$, on a $f(x) < f(y)$.*
- *On dit que f est* ***décroissante sur*** *I, si pour tout $x < y \in I$, on a $f(x) \geq f(y)$.*
- *On dit que f est* ***strictement décroissante sur*** *I, si pour tout $x < y \in I$, on a $f(x) > f(y)$.*
- *On dit que f est* ***constante sur*** *I, si pour tout $x < y \in I$, on a $f(x) = f(y)$*

Remarque.

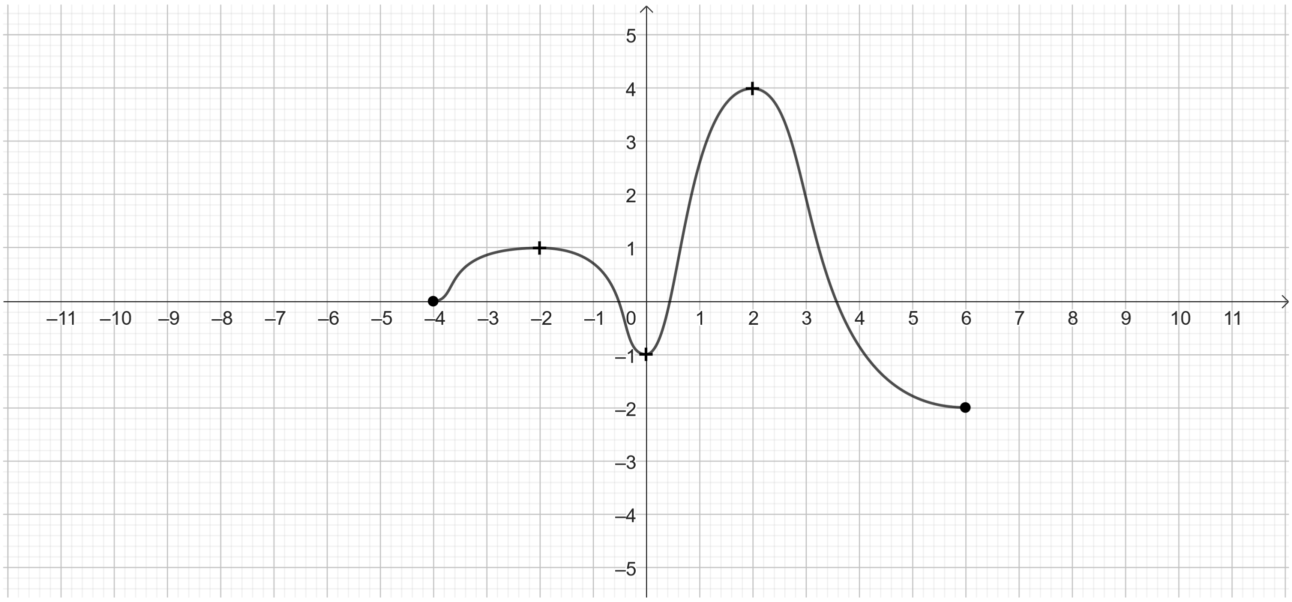
- *Si l'intervalle I est clair suivant le contexte, alors on peut dire qu'une fonction est croissante ou décroissante sans préciser l'intervalle I.*
- *On dit qu'une fonction croissante (ou strictement croissante)* ***conserve l'ordre****, tandis qu'une fonction décroissante (ou strictement décroissante)* ***inverse l'ordre****.*

Définition 7. *Soit f une fonction à valeurs réelles, et I un intervalle sur lequel f est définie.*

- *On dit que f est* ***monotone sur*** *I si f est croissante sur I ou si f est décroissante sur I.*
- *On dit que f est* ***strictement monotone sur*** *I si f est strictement croissante sur I ou si f est strictement décroissante sur I.*

Remarque. *Pour déterminer qu'une fonction n'est pas monotone sur un intervalle I, il suffit de trouver trois réels $x < y < z \in I$ tels que $f(x)$, $f(y)$ et $f(z)$ ne soient pas dans le même ordre (Ni $f(x) \leq f(y) \leq f(z)$, ni $f(x) \geq f(y) \geq f(z)$).*

Exemple. *Soit une fonction f définie sur l'intervalle $[-4; 6]$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous.*



a) *Comparer $f(-2)$ et $f(0)$. L'ordre entre -2 et 0 est-il conservé par f ?* ....

b) *La fonction f est-elle décroissante sur $[-2; 0]$?* ....

c) *Donner un intervalle I tel que f est croissante sur I :* ....

d) *Donner un intervalle J tel que la fonction n'est pas monotone sur J :* ....