Contrôle : Produit scalaire

Première Spécialité Mathématiques

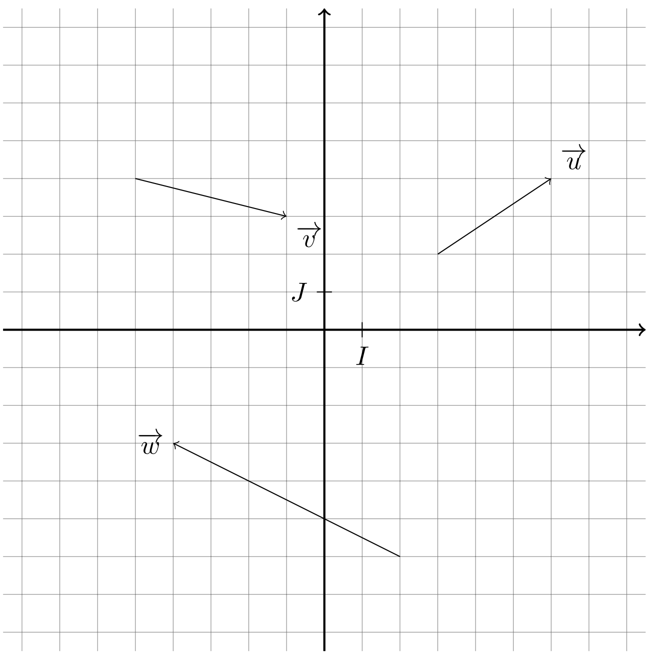
2 Octobre 2024

— Une présentation soignée est de rigueur.
— Tout effort de recherche, même non abouti, sera valorisé.
— La calculatrice est INTERDITE.

Exercice 1 : Plusieurs versions du produit scalaire (5 points)
Pour chaque couple de vecteur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ décris ci-après, donner le produit scalaire $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$.

(a) $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{2}$, $\|\overrightarrow{v}\| = 2$ et $\cos(\widehat{\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
(b) $\|\overrightarrow{u}\| = 7$, $\|\overrightarrow{v}\| = 8$ et $\cos(\widehat{\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}}) = -\dfrac{1}{2}$.
(c) $\|\overrightarrow{u}\| = 12^2$, $\|\overrightarrow{v}\| = 13^3$ et $\widehat{\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}} = 90°$
(d) $\|\overrightarrow{u}\| = 3$, $\|\overrightarrow{v}\| = 4$ et $\|u - v\| = 5$.
(e) $\|\overrightarrow{u}\| = 6$, $\|\overrightarrow{v}\| = 6$ et $\|u + v\| = 3$.

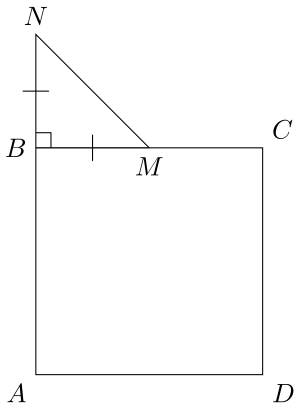
Exercice 2 : Coordonnées de vecteurs (4 points)
On se munit d'un repère orthonormé (O, I, J).



(a) Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.
(b) En déduire les produits scalaires $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$.
(c) En déduire la valeur de $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$.

Exercice 3 : Démonstration (4 points)

Soit $ABCD$ un carré. On pose un point M mobile sur le segment $[BC]$, et on trace un triangle isocèle BNM extérieur au carré $ABCD$. On note b la longueur BM.



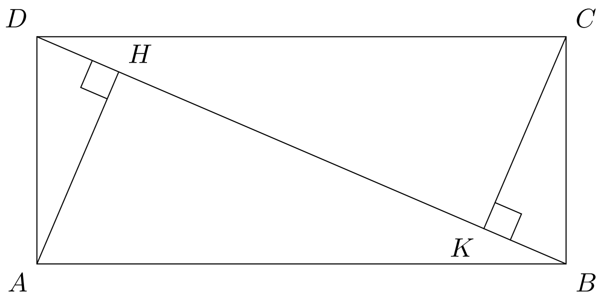
(a) En posant le repère orthonormé $(A; D; B)$, exprimer les coordonnées des points A, M, N et C.

(b) En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{NC}$.

(c) Calculer $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{NC}$. Que peut-on en déduire pour les droites (AM) et (NC) ?

Exercice 4 : Situation géométrique (5 points)

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 7$ et $AD = 3$. On pose H le projeté orthogonal de A par rapport à la droite (DB) et K le projeté orthogonal de C par rapport à la droite (DB). On cherche dans cet exercice la longueur HK



(a) Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs colinéaires. Rappeler la valeur de $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ en fonction de $\|\overrightarrow{u}\|$, de $\|\overrightarrow{v}\|$, et du sens des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

(b) En constatant que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HK} + \overrightarrow{KC}$, donner la valeur de $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$ en fonction de HK et de DB.

(c) À l'aide de la projection orthogonale, donner les valeurs de $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$.

(d) En remarquant que $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$, et à l'aide de la question précédente, calculer d'une nouvelle manière $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$.

(e) Conclure en donnant la valeur exacte de HK à l'aide des questions précédentes.