Chapitre 4 : Généralités sur les fonctions

Seconde 3

1 Définitions

Définition 1. *Une* ***fonction*** *est un objet mathématique capable d'associer un* ***unique*** *résultat à tout objet d'un ensemble appelé* ***ensemble de définition****.*

Exemple. *On définit plusieurs fonctions dont l'ensemble de définition est* l'ensemble des élèves de la seconde 3 *:*

- *f est la fonction qui à un élève de la seconde 3 associe sa date d'anniversaire.*
- *g est la fonction qui à un élève de la seconde 3 associe sa couleur préférée.*
- *h est la fonction qui à un élève de la seconde 3 associe l'initiale d'un des membres de sa famille.* ***(Attention ! A-t-on vraiment défini une fonction ici ?)***
- *p est la fonction qui à un élève de la seconde 3 associe*
- *q est la fonction qui à un élève de la seconde 3 associe*

Remarque. *On s'intéresse majoritairement en mathématiques aux fonctions numériques. Les ensembles de définitions sont des ensembles de nombres, et le résultat renvoyé par les fonctions est toujours un nombre réel.*

Définition 2. *Une* ***fonction numérique à valeurs réelles*** *est une fonction f définie de la manière suivante :*

$$f\colon \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

avec I son ***ensemble de définition****.*

Remarque.

- *La plupart du temps, on aura $I = \mathbb{R}$, I est un intervalle ou I est une réunion d'intervalles.*
- *On aura toujours $\mathbb{R}$ à droite de la flèche du haut : on dit que* ***l'ensemble d'arrivée*** *est $\mathbb{R}$.*
- *La flèche du bas se lit de la manière suivante : au nombre x, on renvoie le nombre $f(x)$*

Définition 3. *Soit* $f\colon \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ *et $a \in I$. On pose b vérifiant l'égalité*

$$b = f(a)\,.$$

Alors,

- *a est* ***un antécédent*** *de b par la fonction f.*
- *b est* ***l'image*** *de a par la fonction f.*

Exemple. *Soit* $f\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x+1 \end{array}$.

a) Donner l'image de 3 par f :

b) Donner un antécédent de 7 par f :

2 Courbe représentative

Définition 4. *Soit f une fonction définie sur un ensemble de définition I. On se place sur un reprère orthonormé. Alors, la* ***courbe représentative de*** *f, notée $\mathcal{C}_f$, est l'ensemble des points du repère de coordonnées $(x;y)$ vérifiant*

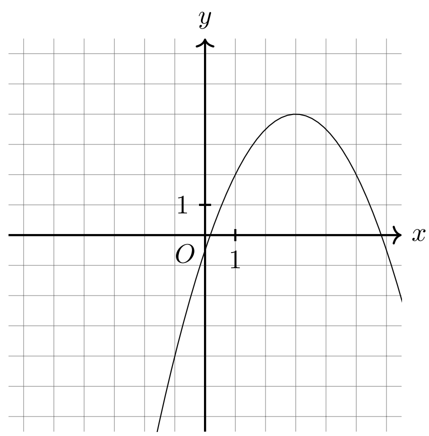
$$y = f(x)$$

Remarque. *Chaque point de la courbe de coordonnées $(x;y)$ représente une association entre antécédent et image :*

— *l'abscisse x du point joue le rôle de l'antécédent ;*

— *l'ordonnée y du point joue le rôle de l'image.*

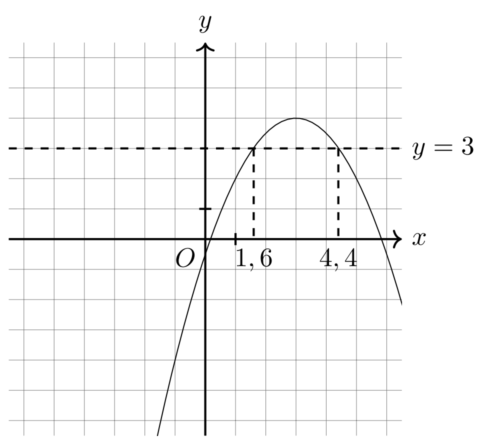
Exemple. *Soit f une fonction dont la courbe représentative est donnée sur le repère orthonormé suivant. Donner l'image de 3 par f :*



2.1 Calcul des antécédents de f

Pour chercher un antécédent (ou tous les antécédents) d'un nombre a par f, on trace une droite horizontale d'équation $y = a$:

Exemple.

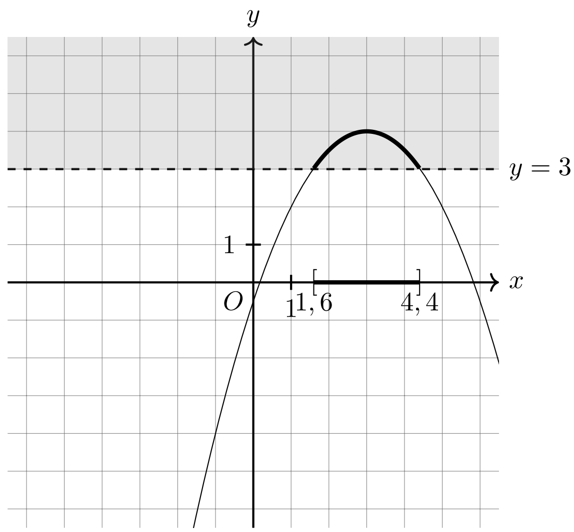


On a résolu ici l'équation $f(x) = 3$: l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions est donné par $\mathcal{S} = \{1,6; 4,4\}$.

2.2 Résolution d'inéquation $f(x) \geq a$

Dans ce cas, on cherche les zones où la courbe est **au-dessus** de la droite horizontale d'équation $y = a$.

Exemple.



Ici, on a résolu l'inéquation $f(x) \geq 3$: l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ de cette inéquation est donné par l'intervalle $[1,6;4,4]$.

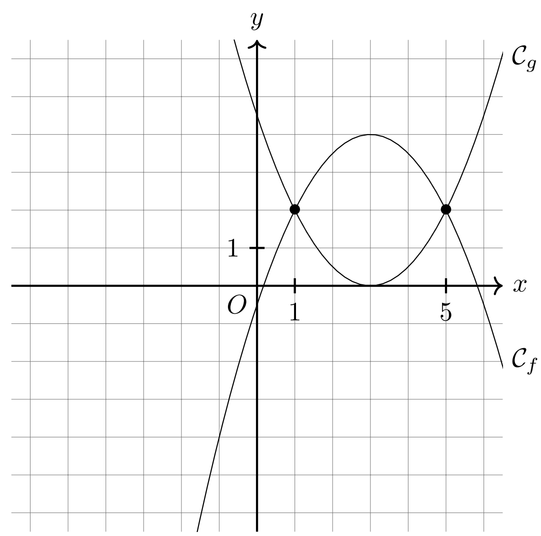
Remarque.

- *Le sens des crochets est toujours dépendant des cas d'égalités.*
- *La même méthode marche pour $f(x) > a$; $f(x) \leq a$ et $f(x) < a$.*
- *Si la courbe est au-dessus de la droite à plusieurs endroit, alors on « joint »les différents intervalles-solutions à l'aide du symbole $\cup$ (qui se lit « **union** »). Par exemple,* $[0;1]\cup]4,5;9]$ *est une union d'intervalles.*

2.3 Résolution d'équation $f(x) = g(x)$

Cette information est donnée par les points d'intersection des courbes représentatives des fonctions f et g

Exemple.

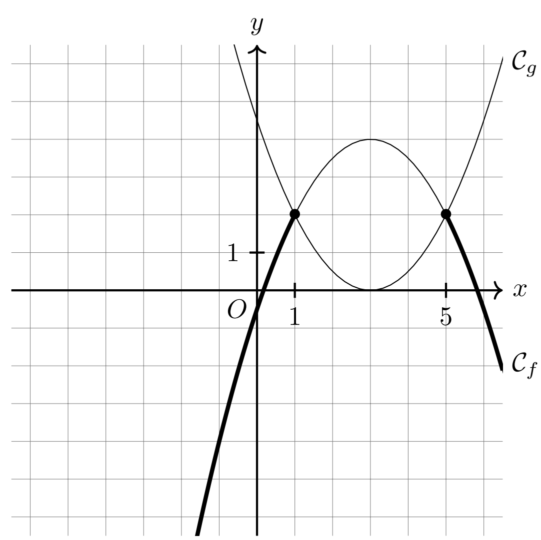


L'ensemble des solutions de $f(x) = g(x)$ est donné par $\mathcal{S} = \{1; 5\}$.

2.4 Résolution d'inéquation $f(x) < g(x)$

Cette information est donnée par la position relative entre les deux courbes représentatives.

Exemple.



L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ est donné par la réunion d'intervalles $]-\infty; 1[\cup]5; +\infty[$.

3 Fonctions croissantes et décroissantes

Définition 5. *Soit f une fonction à valeurs réelles, et I un intervalle sur lequel f est définie.*

- *On dit que f est* ***croissante sur*** *I, si pour tout $x < y \in I$, on a $f(x) \leq f(y)$.*
- *On dit que f est* ***strictement croissante sur*** *I, si pour tout $x < y \in I$, on a $f(x) < f(y)$.*
- *On dit que f est* ***décroissante sur*** *I, si pour tout $x < y \in I$, on a $f(x) \geq f(y)$.*
- *On dit que f est* ***strictement décroissante sur*** *I, si pour tout $x < y \in I$, on a $f(x) > f(y)$.*
- *On dit que f est* ***constante sur*** *I, si pour tout $x < y \in I$, on a $f(x) = f(y)$*

Remarque.

- *Si l'intervalle I est clair suivant le contexte, alors on peut dire qu'une fonction est croissante ou décroissante sans préciser l'intervalle I.*
- *On dit qu'une fonction croissante (ou strictement croissante)* ***conserve l'ordre****, tandis qu'une fonction décroissante (ou strictement décroissante)* ***inverse l'ordre****.*

Définition 6. *Soit f une fonction à valeurs réelles, et I un intervalle sur lequel f est définie.*

- *On dit que f est* ***monotone sur*** *I si f est croissante sur I ou si f est décroissante sur I.*
- *On dit que f est* ***strictement monotone sur*** *I si f est strictement croissante sur I ou si f est strictement décroissante sur I.*

Remarque. *Pour déterminer qu'une fonction n'est pas monotone sur un intervalle I, il suffit de trouver trois réels $x < y < z \in I$ tels que $f(x)$, $f(y)$ et $f(z)$ ne soient pas dans le même ordre (Ni $f(x) \leq f(y) \leq f(z)$, ni $f(x) \geq f(y) \geq f(z)$).*

Exemple. *Soit une fonction f définie sur l'intervalle $[-4; 6]$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous.*

a) *Comparer $f(-2)$ et $f(0)$. L'ordre entre -2 et 0 est-il conservé par f ?*

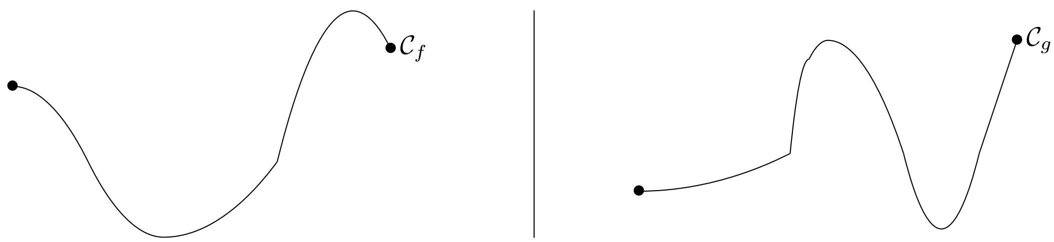
b) *La fonction f est-elle décroissante sur $[-2; 0]$?*

c) *Donner un intervalle I tel que f est croissante sur I :*

d) *Donner un intervalle J tel que la fonction n'est pas monotone sur J :*

4 Tableaux

Soient f et g deux fonctions définies sur $[-5;5]$ dont les courbes représentatives sont données ci-contre.



4.1 Tableau de valeurs

Définition 7. *Le tableau de valeurs associe plusieurs antécédents (ligne x) à leurs images (ligne $f(x)$).*

Exemple.

x	*-5*	*-3*	*2*	*4*	*5*
$f(x)$	*2*	*0*	*0*	*4*	*3*

x	*-5*	*-1*	*0*	*2*	*3*
$g(x)$					

4.2 Tableau de variation

Définition 8. *Le tableau de variation répertorie les plus grand intervalles sur lesquels les fonctions sont monotones.*

Exemple.

x	-5		-1		4		5
Variations de f	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	3

x	-5	5
Variations de g		

4.3 Tableau de signe

Définition 9. *Le tableau de signe d'une fonction f répertorie les intervalles solutions de $f(x) \geq 0$ (où la fonction est* ***positive****) et $f(x) \leq 0$ (où la fonction est* ***négative****).*

Exemple.

x	-5		-3		2		5
Signe de f		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	-5	5
Signe de g		

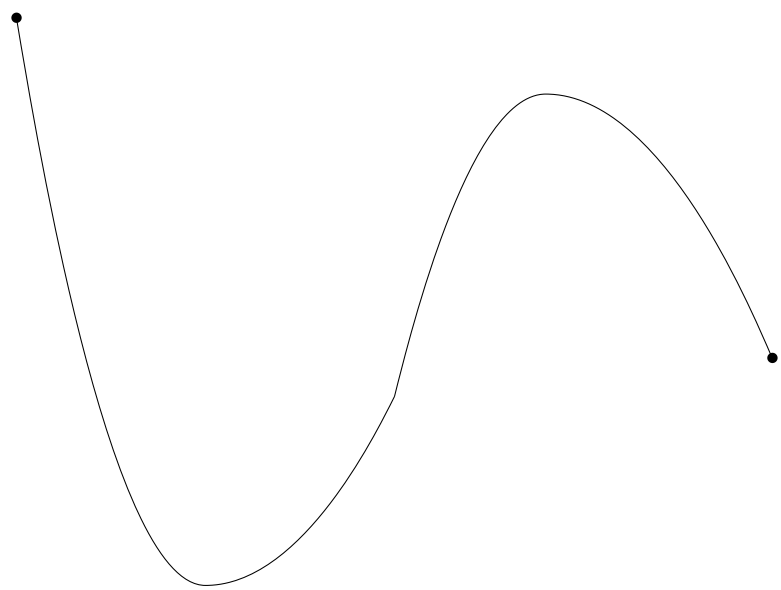
5 Extremum de fonction

Définition 10. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et b un nombre réel.*

- *On dit que b est un **maximum de f sur** I, si pout tout $x \in I$, on a $f(x) \leq b$; et qu'il existe $a \in I$ tel que $f(a) = b$. On dit alors que le maximum b de f sur I est atteint en a.*
- *On dit que b est un **minimum de f sur** I, si pout tout $x \in I$, on a $f(x) \geq b$; et qu'il existe $a \in I$ tel que $f(a) = b$. On dit alors que le minimum b de f sur I est atteint en a.*

Remarque. *Le maximum d'une fonction sur I est donc la plus grande image possible sur I, tandis que le minimum est la plus petite image possible sur I.*

Exemple. *Soit une fonction f dont la courbe représentative est donnée ci-après :*



a) *Compléter le tableau de variation de f.*

x	
Variation de f	

b) *Déterminer le maximum de cette fonction ? En quelle valeur ce maximum est-il atteint ?*

c) *Déterminer le minimum de cette fonction ? En quelle valeur ce minimum est-il atteint ?*