

Expériences aléatoires et Probabilités : Univers fini

Seconde 9

1 Vocabulaire des probabilités

1.1 Univers

Définition 1. Une *expérience aléatoire* est une expérience...

- dont les résultats **possibles** sont connus;
- mais dont le résultat **obtenu** n'est pas prévisible.

Exemple. Les exemples suivants sont des expériences aléatoires :

1. On lance un dé équilibré à six faces, et on regarde le nombre obtenu.
2. On tire une carte dans un jeu de 52 cartes, et on regarde la couleur (**Coeur, Carreau, Pique, Trèfle**) obtenue.

Définition 2.

- L'un des résultats possible d'une expérience aléatoire est appelé **issue**.
- L'**univers** d'une expérience aléatoire est l'ensemble de ses issues.

Exemple. Pour définir l'univers (fini) d'une expérience aléatoire, on met entre accolades toutes ses issues. On appelle cet univers Ω qui se lit "Oméga".

1. L'univers de l'expérience 1 est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
2. L'univers de l'expérience 2 est $\Omega = \{\text{Coeur}; \text{Carreau}; \text{Pique}; \text{Trèfle}\}$

Exercice 1. Donner l'univers des expériences aléatoires suivantes.

- a) On demande à un ou une élève du lycée s'il préfère les chats ou les chiens.
- b) Un ou une camarade de classe choisit un nombre pair entre 1 et 11.
- c) On lance deux dés équilibrés et on regarde la somme des résultats obtenus.

1.2 Événements

Définition 3. Un événement d'une expérience aléatoire est un ensemble contenant tout ou partie des issues de l'expérience aléatoire.

Exemple.

1. Soit $A = \{1; 3; 5\}$. C'est un événement de l'expérience 1 (lancer de dé) : il correspond à "Obtenir un impair".
2. Soit $B = \{\text{Pique}; \text{Trèfle}\}$. C'est un événement de l'expérience 2 (tirage d'une carte) : il correspond à "La carte tirée est noire".

Remarque.

- Un événement **certain** est un événement qui contient toutes les issues de l'expérience.
- Un événement **impossible** est un événement qui ne contient aucun élément. On le note \emptyset .

Exercice 2. Compléter le tableau suivant :

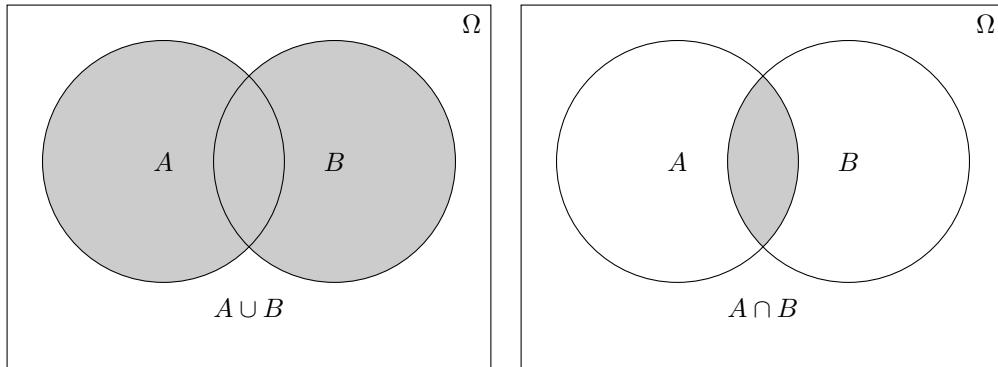
Expérience aléatoire	Univers Ω	Événement A	Issues de A
On lance un dé équilibré à 6 faces et on observe le résultat.	$\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$	Le nombre obtenu est pair.	$\{2; 4; 6\}$
On lance une pièce équilibrée.	$\{\text{Pile}; \text{Face}\}$	On tombe sur Pile.	
On choisit un animal au hasard dans un zoo.	$\{\text{Lion}; \text{Singe}; \text{Perroquet}\}$	L'animal choisi a des plumes.	
On choisit un jour de la semaine au hasard.		On a sélectionné un jour du week-end.	$\{\text{Samedi}; \text{Dimanche}\}$
On lance deux dés équilibrés, et on soustrait le plus grand résultat par le plus petit.		La différence obtenue est 6.	
On lance deux pièces équilibrées.	$\{(P, P); (F, F), (P, F), (F, P)\}$	Les deux pièces sont sur le même côté.	

2 Combinaison d'événements

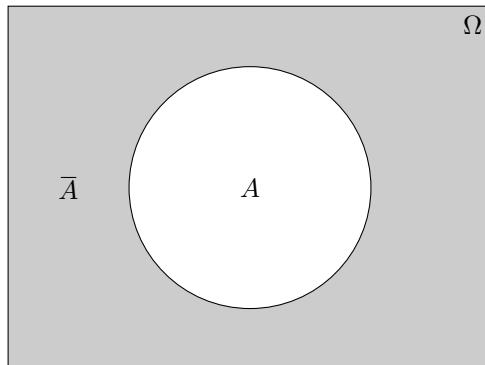
Soit une expérience aléatoire d'univers Ω , et deux événements A et B .

Définition 4.

- La **réunion** de A et de B , notée $A \cup B$, est l'événement contenant toutes les issues de A ainsi que celles de B .
- L'**intersection** de A et B , notée $A \cap B$, est l'événement contenant les issues présentes à la fois dans A et dans B



Définition 5. Le **complémentaire** de A , noté \bar{A} , est l'ensemble des éléments de Ω qui ne sont pas des éléments de A .



Exemple. On lance un dé à 6 faces et on observe le résultat. Compléter le tableau ci-après.

A	B	$A \cup B$	$A \cap B$	\bar{A}
<i>On obtient un nombre pair</i>	<i>On obtient un nombre supérieur ou égal à 4</i>	$\{2; 4; 5; 6\}$	$\{4; 6\}$	$\{1; 3; 5\}$
<i>On obtient un multiple de 3</i>	<i>On obtient un nombre inférieur à 2</i>			
<i>On obtient un 4</i>	<i>On obtient un 3</i>			

Remarque. — En français, $A \cup B$ représente “l'événement A OU l'événement B s'est réalisé.”

- En français, $A \cap B$ représente “l'événement A ET l'événement B se sont réalisés.”
- En français, \bar{A} représente “l'événement A ne s'est pas réalisé.”

3 Probabilités sur un univers fini

3.1 Loi de probabilité

Définition 6. Soit une expérience aléatoire dont l'univers est **fini** : il est de la forme

$$\Omega = \{e_1; e_2; \dots; e_n\}, \text{ avec } n \geq 1.$$

Une **loi de probabilité** sur Ω est l'association de chaque issue e_i à un nombre p_i compris entre 0 et 1 inclus. De plus, la somme de tous ces nombres doit être égale à 1.

Exemple. On lance un dé équilibré et on observe le résultat. Les deux associations ci-dessous sont des lois de probabilité.

Ω	1	2	3	4	5	6
Probabilités	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$\text{car } 0 + 0 + 0 + 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Ω	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$\text{car } \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1.$$

Exercice 3. Compléter le tableau suivant afin de définir une loi de probabilité sur Ω . Cette loi de probabilité devra avantager les nombres impairs.

Ω	1	2	3	4	5	6
Probabilité						

Définition 7. On dit qu'une expérience aléatoire est en **situation d'équiprobabilité** si toutes les issues ont la même probabilité.

Exemple. Les expériences aléatoires suivantes sont en situation d'équiprobabilité :

- Le lancer d'un dé équilibré.
- Le lancer d'une pièce équilibrée.
- Le tirage d'une carte dans un jeu de 52 cartes mélangé.
- Le tirage d'un jeton parmi des jetons indiscernables au toucher dans une urne opaque.

Définition 8. Soit A un événement. La probabilité de A , notée $P(A)$, est la somme des probabilités des issues contenues par A .

Exemple. Pour la loi de probabilité donnée par l'exercice précédent, quelle est la probabilité de l'événement A "Obtenir un nombre pair"?

Remarque.

$$P(\emptyset) = 0$$

$$P(\Omega) = 1$$

3.2 Calcul de Probabilités en situation d'équiprobabilité

Proposition 1. *Dans une expérience aléatoire d'univers Ω en situation d'équiprobabilité, la probabilité de A est donnée par*

$$P(A) = \frac{\text{Nombre d'issues dans } A}{\text{Nombre d'issues dans } \Omega}$$

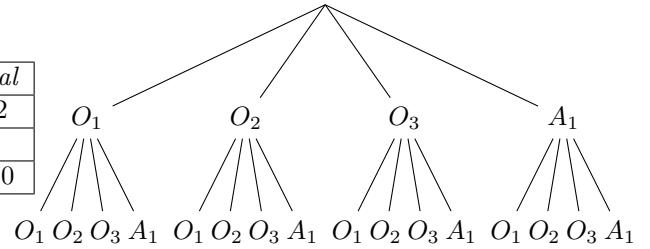
- Exemple.**
- a) On lance un dé équilibré. Quelle est la probabilité d'obtenir un multiple de 3 ?
 - b) On lance deux dé équilibrés, un rouge et un bleu. Quelle est la probabilité que le dé rouge soit pair, et le dé bleu impair ?
 - c) On met dans un sac trois boules rouges, une boule bleue et une boule verte. Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?
 - d) On tire une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes mélangé. Quelle est la probabilité de tirer une "tête" (Valet, Dame, Roi) ?

Dans une situation d'équiprobabilité, il faut donc énumérer les cas favorables, puis diviser par le nombre de cas au total.

Exemple. On tire au sort une personne dans un lycée de 1000 personnes. Sachant qu'il y a 242 secondes, 534 premières, 632 filles dont 320 en terminale et 76 en première, compléter le tableau suivant et donner la probabilité de tomber sur un garçon en seconde.

	Secondes	Premières	Terminale	Total
Filles		76	320	632
Garçons				
Total	242	534		1000

Exemple. Dans un sac opaque contenant trois pièces d'or (O_1 , O_2 et O_3) et une pièce d'argent (A_1), on tire deux pièces successivement et avec remise. En repassant sur les branches favorables, calculer la probabilité d'obtenir deux pièces d'or suite aux deux tirages.

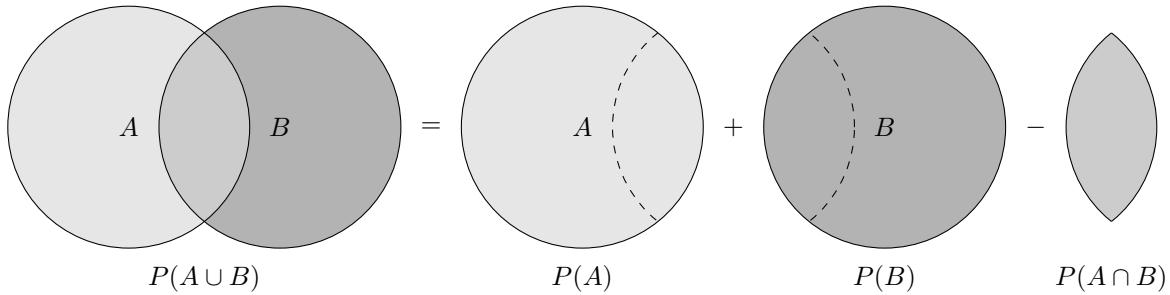


3.3 Calcul de probabilités de combinaisons d'événements

Proposition 2. Soit une expérience aléatoire d'univers fini Ω , et deux événements A et B . Alors,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Remarque. La figure suivante permet d'illustrer une idée de la démonstration de cette formule.



Définition 9. Soit une expérience aléatoire d'univers fini Ω , et deux événements A et B . Ces deux événements sont dits **incompatibles** si et seulement s'ils n'ont pas d'issues en commun. Autrement dit, si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

Proposition 3. Avec deux événements incompatibles A et B , la formule précédente devient

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Exemple. Dans une classe de seconde de 30 élèves, 20 ont un prénom qui commence par "A", et 7 font du Basket. Dans cette même classe, 5 élèves dont le prénom commence par A font aussi du basket. On tire au sort un des élèves.

- a) On note A l'événement "Le prénom de l'élève choisi commence par A". Calculer $P(A)$.
- b) On note B l'événement "L'élève choisi fait du Basket". Calculer $P(B)$.
- c) Décrire en français l'événement $A \cup B$, puis calculer $P(A \cup B)$.

Proposition 4. Soit une expérience aléatoire d'univers fini Ω , et A un événement. Alors,

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Exemple. En reprenant l'expérience aléatoire précédente, combien d'élèves de cette classe ne font pas de basket ? En déduire la probabilité $P(\bar{B})$.