Produit scalaire, orthogonalité

Première Spécialité Mathématiques

1 Première définition du produit scalaire

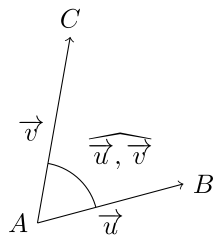
Lorsque que la notion de vecteur a été définie, l'objectif était d'avoir un objet géométrique capable de se comporter comme un nombre. Ainsi, on a défini en classe de seconde l'*addition*, la *soustraction* de vecteurs, ainsi que la multiplication d'un vecteur par un *scalaire*.

L'objectif est de définir une nouvelle opération sur les vecteurs qui se comporte comme une *multiplication entre deux vecteurs*.

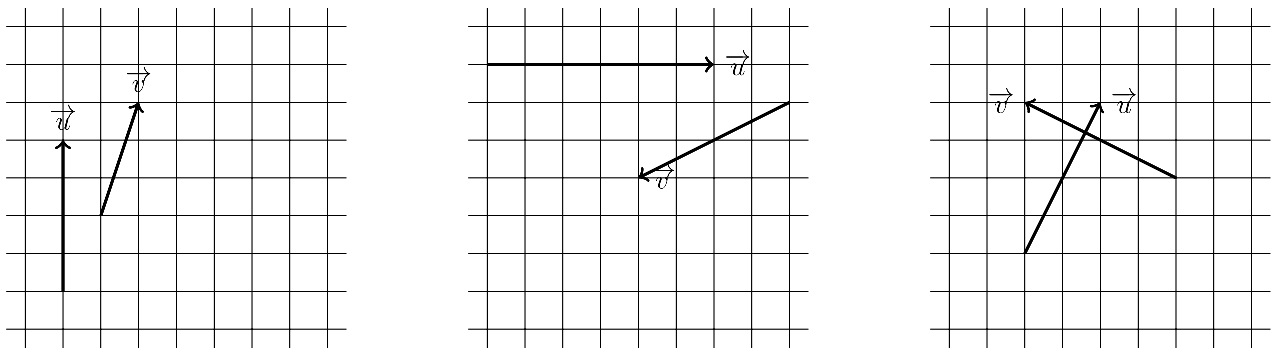
On se place sur le plan.

Définition 1. *Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur. Alors, la norme de $\overrightarrow{u}$ (sa « longueur ») est notée $\|\overrightarrow{u}\|$.*

Définition 2. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls. On pose A, B, C trois points du plan tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$. On note $\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}$ l'angle $\widehat{BAC}$.*



Exemple. *Pour chaque couple de vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ suivants, construire trois points A, B et C tels que $\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}} = \widehat{BAC}$.*



Définition 3 (Produit scalaire). *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. On appelle* ***produit scalaire*** *de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$, noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$, le nombre :*

- 0 *si $\overrightarrow{u}$ est nul ou $\overrightarrow{v}$ est nul.*
- $\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right)$ *dans le cas contraire.*

2 Premières propriétés

2.1 Propriétés algébriques

Proposition 1. *Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan, ainsi que $k \in \mathbb{R}$.*

1. *On a $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$. (Le produit scalaire est* symétrique*)*
2. *On a $(k\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot (k\overrightarrow{v}) = k \times (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$.*

Remarque. *Attention à l'usage de $\cdot$ et de $\times$: l'un concerne deux vecteurs, et l'autre deux nombres.*

Exemple. *Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs tels que $\|\overrightarrow{u}\| = 2$, $\|\overrightarrow{v}\| = 3$ et $\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}} = 30°$. Calculer les produits scalaires suivants.*

a) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} =$ ....

b) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} =$ ....

c) $\overrightarrow{v} \cdot (2\overrightarrow{u}) =$ ....

d) $(-4\overrightarrow{u}) \cdot (3\overrightarrow{v}) =$ ....

2.2 Propriétés géométriques

Proposition 2. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs.*

- *Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires de même sens, alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$;*
- *Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires de sens opposés, alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$;*

Définition 4. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. Alors ces deux vecteurs sont dit* ***orthogonaux*** *si l'un des deux vecteurs est nul ; ou si l'angle $\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}}$.*

Proposition 3. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. Alors, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.*

Remarque.
- *Cette proposition est facile à démontrer avec notre définition, mais sera surtout utile avec les définitions suivantes.*
- *Le vecteur nul est donc orthogonal à tous les vecteurs.*

2.3 Définition avec le projeté orthogonal

Définition 5 (Rappel)**.** *Soit M un point du plan et (d) une droite. Le* ***projeté orthogonal*** *de M par rapport à la droite (d) est l'unique point M' appartenant à la droite (d) et tel que les droite (MM') et (d) sont perpendiculaires.*

Proposition 4. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls. On pose A, B et C tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$. De plus, on pose H le projeté orthogonal de C par rapport à la droite AB. Alors,*

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \begin{cases} AB \times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de même sens ;} \\ -AB \times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de sens opposés.} \end{cases}$$

3 Produit scalaire en géométrie repérée

On munit le plan d'un repère orthonormée (O, I, J). Les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ d'abscisse x et d'ordonnée y sont notées

$$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

3.1 Bilinéarité du produit scalaire

Proposition 5. *Soient trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$. Alors,*

$$\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$$

Remarque. *Ce résultat correspond donc à la distributivité du produit scalaire sur l'addition de vecteurs.*

Exemple. *Soient trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ de norme 1 tels que $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.*

a) *Que vaut $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$?* ....

b) *En déduire une mesure possible de l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$:*

....

3.2 Définition en géométrie repérée

Proposition 6. *Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$. Alors, le produit scalaire $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ est égal à*

$$x_u \times x_v + y_u \times y_v$$