

# Colles : Suites et Séries

Quentin Canu

19 Septembre 2024

## 1 Questions de cours

- Définition d'une suite convergente vers une limite réelle  $l$ .
  - Convergence et somme des séries exponentielles.
- Définition de suites adjacentes. Condition de convergence et limite.
  - Séries géométriques, dérivée et dérivée seconde de raison  $q$ . Convergence et somme.
- Somme des  $n$  premiers entiers.
  - Théorèmes de comparaison de séries à termes positifs.

## 2 Exercices

- Étudier la convergence de la série de terme général  $u_n = \frac{(n!)^3}{3n!}$ .
- a) Montrer que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$x_n = \cos \left( \left( n + \frac{1}{n} \right) \pi \right)$$

est divergente.

- En montrant que  $(3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n$  est un entier pair pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , en déduire que la suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$y_n = \sin \left( \left( 3 + \sqrt{5} \right)^n \pi \right)$$

converge et donner sa limite.

- Soit  $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1 + \sqrt{n-2 + \sqrt{\dots + \sqrt{1}}}}}$  pour  $n \geq 1$ .
  - Déduire une relation de récurrence entre  $u_n$  et  $u_{n+1}$ .
  - Montrer que la suite  $\left( \frac{u_n}{\sqrt{n}} \right)$  est bornée.
  - En déduire la convergence et la limite de cette suite.
- Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels positifs. On pose  $v_n = \frac{u_n}{1 + u_n}$ . Démontrer que  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature. (Indication : on étudiera la croissance de la fonction  $x \mapsto \frac{x}{1+x}$  sur  $\mathbb{R}_+$ )

## 3 BCPST 3

### 3.1 Tillet Louise

Exercice 1 : A étudié la monotonie de la suite, puis a suivi mes indications pour répondre. Elle a bien réagi face à ma fausse piste.

Question de cours : Ok

Note : 15

## 3.2 Runquist Inès

Exercice 3 : Elle a bien maîtrisé sa preuve par récurrence, et mené parfaitement une bonne étude de fonction pour tester une inégalité. Les indications ont bien aidé.

Question de cours : Ok

Note : 15

## 3.3 de Dreuille Marine

Exercice 2 : Fonce un peu bille en tête sur des choses un peu avancées comme des DL de fonction trigonométriques, et a eu un peu de mal avec la  $2\pi$ -périodicité des fonctions trigo. Mais les indications l'ont bien aidée et elle a su se débrouiller.

Question de cours : Ok

Note : 15

# 4 BCPST 2

## 4.1 Baudry Marielle

Exercice 3 : Une très bonne intuition pour comprendre l'évolution de la suite, elle s'en est ensuite servi une fois l'indication de faire une récurrence (Je n'ai pas donné les sous-points de l'exercice) pour chercher les bornes souhaitées.

Question de cours : Ok

Note : 15

## 4.2 Chouiter Sarah

Exercice 1 : Elle a eu des difficultés à appréhender l'exercice, mais ne s'est pas laissée abattre. Elle a eu besoin d'un peu d'aide, mais a abouti. A perdu un point sur l'utilisation d'équivalent de la forme  $\prod_k^n k \sim n^n$ .

Question de cours : Ok

Note : 14

## 4.3 Marché Chloé

Exercice 2 : A foncé sur l'utilisation d'équivalents. Mais a bien réagi, notamment devant le calcul de  $(3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n$ .

Question de cours : Ok

Note : 15