

## Exercice : Probabilités conditionnelles et espérance

Quentin Canu

9 Mai 2025

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon, la maladie est mortelle. Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1 % est porteur de la maladie. On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.

On note  $M$  l'événement : « L'animal est porteur de la maladie » et  $P$  l'événement : « Le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation.
2. On choisit un animal au hasard. Déterminer la probabilité que son test soit positif.
3. Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 € et le coût de l'abattage d'un animal malade non dépisté par le test est de 1 000 €. Un animal sain et ayant un test négatif est vendu 250 €. On suppose que le test est gratuit et que les soins sont 100 % efficaces sur les animaux malades. Soit  $X$  la variable aléatoire égale à la recette par animal subissant le test.
  - a. Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .
  - b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire  $X$ .
  - c. Un éleveur possède un troupeau de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle recette l'éleveur peut-il espérer ?

*D'après un sujet de bac.*