

# Contrôle n°3 : Dérivation globale

Première Spécialité Mathématiques

8 Janvier 2026

- Tout effort de recherche, même non abouti, sera valorisé.
- Les exercices sont indépendants, et peuvent être faits dans l'ordre de votre choix.
- Sauf mention contraire, toute réponse devra être justifiée.
- L'utilisation de la calculatrice est **Interdite**.

## Exercice 1 : Automatismes (6 points)

(a) (3 points) Résoudre sur  $\mathbb{R}$  les équations polynomiales du second degré suivantes :

i.  $x^2 - 7x + 12 = 0$

ii.  $-2x^2 + 16x - 42 = 0$

(b) (3 points) Dériver les fonctions suivantes sur les ensembles donnés, en justifiant correctement l'ensemble de dérivabilité des fonctions.

i.  $f : x \mapsto \sqrt{x}$

ii.  $g : x \mapsto 6x^4 - 3x^2 + 19x - 5$

iii.  $h : x \mapsto (x^3 - 5x)(x - 2)$

## Exercice 2 : Bottes (7 points)

Un fabricant de chaussures fait un peu de comptabilité. Il vend chaque paire de chaussures 201€. On appelle  $C(x)$  le coût de production de  $x$  paires de chaussures.

On définit, pour  $x \in [0; 30]$ ,

$$C(x) = x^3 - 30x^2 + 309x + 500$$

(a) (0.5 points) Justifier que le bénéfice  $B(x)$  associé à la production et à la vente de  $x$  paires de chaussures est défini par

$$B(x) = -x^3 + 30x^2 - 108x - 500$$

(b) (0.5 points) Justifier que  $B$  est dérivable sur  $[0; 30]$  et donner l'expression de sa dérivée  $B'$ .

(c) (2 points) En déduire le tableau de variations de  $B$ .

(d) (2 points) Combien de chaussures doit vendre ce fabricant afin de réaliser un bénéfice maximal ?

(e) (2 points) On appelle coût marginal de production la fonction  $C_m$  définie par, pour tout  $x \in [0; 30]$ ,

$$C_m(x) = C'(x)$$

i. Démontrer que pour tout  $x \in [0; 30]$ ,  $C_m(x) = 3(x - 10)^2 + 9$ .

ii. En déduire combien de paires doit produire le fabricant pour observer un coût marginal minimal.

## Exercice 3 : Courbes de Lorenz (7 points)

On appelle **courbe de Lorenz** la courbe représentative d'une fonction  $L$  vérifiant les propriétés suivantes :

1.  $L$  est définie et croissante sur  $[0; 1]$  ;
2.  $L(0) = 0$  et  $L(1) = 1$  ;
3. Pour tout  $x \in [0; 1]$ , on a  $L(x) \leq x$ .

Soit  $f : x \mapsto \frac{3}{2}x + \frac{1}{x+1} - 1$ , définie sur  $[0; 1]$ . On souhaite montrer que  $f$  est une courbe de Lorenz.

- (a) (1 point) Montrer que  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$ . En déduire que le critère 2 est respecté.
- (b) (1 point) On admet que la fonction est dérivable sur  $[0; 1]$ . Montrer que pour tout  $x \in [0; 1]$ ,  

$$f'(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{(x+1)^2}.$$
- (c) (1 point) En déduire pour tout  $x \in [0; 1]$ , on a  $f'(x) = \frac{3(x+1)^2 - 2}{(x+1)^2}$ .
- (d) (2 points) Dresser le tableau de signes de  $f'$ , et en déduire le tableau de variations de  $f$ .  
La fonction  $f$  vérifie-t-elle le critère 1 ?
- (e) (1 point) Justifier que pour montrer que  $f$  vérifie le critère 3, il suffit de vérifier que  $f(x) - x \leq 0$  pour tout  $x \in [0; 1]$ .
- (f) (2 points) On admet que pour montrer que  $f(x) - x \leq 0$ , il suffit de montrer que  $x^2 - x \leq 0$  pour tout  $x \in [0; 1]$ . Montrer alors que  $f(x) - x \leq 0$ . Conclure que  $f$  vérifie le critère 3