Dérivation globale

Premières Spécialité Mathématiques

1 Fonction dérivée

Remarque. *On rappelle qu'une fonction f définie sur un intervalle I est dite **dérivable en** $a \in I$ si et seulement si le taux de variation*

$$T_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

*admet une limite finie quand h tend vers 0. La valeur de cette limite $\lim_{h\to 0} T_a(h)$ est alors appelé **nombre dérivé de f en** a et est noté $f'(a)$.*

*En résumé, la notion de dérivation est un processus dépendant de f qui à tout nombre a associe, quand c'est possible, un autre nombre $f'(a)$. Il s'agit donc d'une **fonction**.*

Définition 1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est **dérivable sur** I si pour tout nombre $a \in I$, la fonction f est dérivable en a. Dans ce cas, on pose f' la fonction définie sur I qui à tout $x \in I$ associe le nombre dérivé $f'(x)$.*

Exemple. *Soit* $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$.

En justifiant son existence, calculer le nombre dérivé de f en a, avec $a \in \mathbb{R}$ quelconque. En déduire que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et donner l'expression de la fonction dérivée $f'(x)$

Proposition 1.

1. *Soit $c \in \mathbb{R}$. La fonction constante définie sur $\mathbb{R}$ $f : x \mapsto c$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est $f' : x \mapsto 0$.*
2. *La fonction identité définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est $f' : x \mapsto 1$.*
3. *La fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est $f' : x \mapsto 2x$.*
4. *La fonction puissance $n \in \mathbb{N}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^n$ est déribale sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est $f' : x \mapsto nx^{n-1}$*
5. *La fonction inverse définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$, et sa dérivée est $f' : x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$.*
6. *La fonction racine carrée définie sur $[0; +\infty[$ par $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$, et sa dérivée est $f' : x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.*

Remarque.

— *Avant de dériver une fonction, il faut s'assurer qu'elle est bien dérivable.*

— *La fonction racine carrée est dérivable sur $]0; +\infty[$ **(ouvert en 0)**, tandis qu'elle sur définie sur $[0; +\infty[$ **(fermé en 0)**. En effet, la fonction n'est pas dérivable en 0.*

Démonstration. On démontre que $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$. □

2 Opération algébriques

Proposition 2. *Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I **ouvert**.*

- *La fonction somme de u et v définie sur I par $s(x) = u(x) + v(x)$ est dérivable sur I, et sa dérivée vérifie, pour tout $x \in I$, $s'(x) = u'(x) + v'(x)$. ($(u+v)' = u' + v'$)*
- *Le produit p d'une fonction u définie sur I par une constante $k \in \mathbb{R}$, définie par $p(x) = k \times u(x)$, est dérivable sur I, et sa dérivée vérifie, pour tout $x \in I$, $p'(x) = ku'(x)$.*
- *La fonction produit de u et v définie sur I par $p(x) = u(x) \times v(x)$ est dérivable sur I, et sa dérivée vérifie, pour tout $x \in I$, $p'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. ($(uv)' = u'v + uv'$)*
- *Si la fonction v ne s'annule pas sur l'intervalle I, alors la fonction inverse de v définie sur I par $i(x) = \dfrac{1}{v(x)}$ est dérivable sur I, et sa dérivée vérifie, pour tout $x \in I$, $i'(x) = -\dfrac{v'}{v^2(x)}$. $\left(\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}\right)$*
- *Si la fonction v ne s'annule pas sur l'intervalle I, alors la fonction quotient de u et de v définie sur I par $q(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ est dérivable sur I, et sa dérivée vérifie, pour tout $x \in I$, $q'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$. $\left(\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}\right)$*

Remarque. *On résume cette proposition sous la forme d'un tableau :*

Forme de f	*Dérivée f'*	*Remarques*
$u + v$	$u' + v'$	
ku	ku'	
uv	$u'v + uv'$	
uv	$u'v + uv'$	
$\dfrac{1}{v}$	$-\dfrac{v'}{v^2}$	*v ne s'annule pas*
$\dfrac{u}{v}$	$-\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	*v ne s'annule pas*

Exemple. *Soient u et v deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :*

$$\begin{cases} u(x) = x^2 - 5x & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^* \\ v(x) = \sqrt{x} + 1 & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

a) *Les fonctions u et v sont-elles dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$? Donner l'expression de leur dérivée.*

b) *En déduire la dérivée de la somme, du produit et du quotient de u et v.*