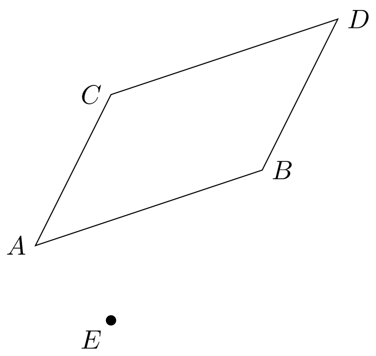
Vecteurs et translations du plan

Seconde 9

1 Définition

Définition 1. *Soient A et B deux points du plan. La **translation transformant** A **en** B est une transformation géométrique qui à chaque point C associe un point D tel que $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement applati).*

Exemple.



La translation correspond à l'idée de « glissement » sans rotation. La translation transformant A en B envoie n'importe quel point C dans la même direction, le même sens et la même longueur que si l'on partait de A pour arriver en B.
Tracer l'image de E par la translation transformant A en B.

Remarque. *Une translation dépend donc uniquement d'une* direction (*car (AB) et (DC) sont parallèles*), *d'un* sens (*car on s'intéresse à $ABDC$ et non pas $ABCD$*) *et d'une* longueur (*car les longueurs AB et DC sont les mêmes*).

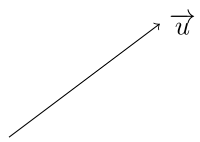
Ces trois caractéristiques sont regroupées derrière la notion de vecteur.

Définition 2. *Un **vecteur** est un objet géométrique caractérisé par trois informations :*
- *Une direction*
- *Un sens*
- *Une longueur (que l'on appelle **norme**)*

Définition 3. *Soient deux points A et B. Le vecteur caractérisant la translation transformant A en B est noté $\overrightarrow{AB}$.*

Remarque.
- *La translation transformant A en B sera plutôt appelée **translation de vecteur** $\overrightarrow{AB}$.*
- *Parmi les caractéristiques définissant un vecteur, il n'y a pas la **position** du vecteur dans le plan.*

Exemple. *On représente un vecteur quelconque $\overrightarrow{u}$ à l'aide d'une flèche dans le plan.*



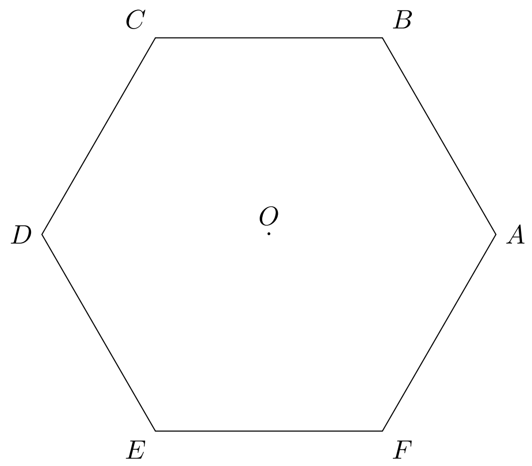
Le vecteur nul est un cas particulier de vecteur de norme nulle. Un tel vecteur n'a **ni direction, ni sens**.

2 Opérations sur les vecteurs

2.1 Égalité entre vecteurs

Définition 4. *Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont la même direction, le même sens et la même norme.*

Exemple. *Soit l'héxagone régulier $ABCDEF$ de centre O.*



a) *Représenter le vecteur $\overrightarrow{BC}$.*

b) *Représenter deux autres vecteurs égaux à $\overrightarrow{BC}$.*

c) *Représenter* LE *représentant de $\overrightarrow{DC}$ ayant pour* ***origine*** *F.*

d) *Représenter* LE *représentant de $\overrightarrow{BA}$ ayant pour* ***extrémité*** *F.*

2.2 Opposé d'un vecteur

Définition 5. *Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur. Alors l'opposé de $\overrightarrow{u}$, noté $-\overrightarrow{u}$, est le vecteur ayant la même direction que $\overrightarrow{u}$, la même norme que $\overrightarrow{u}$, mais le sens* ***opposé*** *au vecteur $\overrightarrow{u}$.*

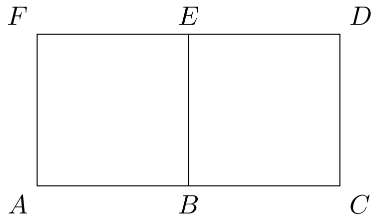
Proposition 1. *Soient A et B deux points du plan. Alors $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.*

2.3 Addition de vecteurs

Définition 6. *Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. Alors la* **somme de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$**, *notée $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$, est le vecteur associé à la translation résultant de l'enchaînement de la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$.*

Remarque. *Autrement dit, $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ décrit le glissement obtenu si l'on parcourt le trajet donné par $\overrightarrow{u}$ puis celui parcouru par $\overrightarrow{v}$.*

Exemple. *Les quadrilatères $ABEF$ et $BCDE$ sont des carrés.*



Tracer sur la figure les vecteurs suivants :

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}$

b) $\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{DC}$

c) $\overrightarrow{FA}+(-\overrightarrow{DE})+\overrightarrow{BE}$

Proposition 2 (Relation de Chasles)**.** *Soient A, B et C trois points quelconques du plan. Alors,*

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}\,.$$

Proposition 3. *Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs du plan. Alors,*

- $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})+\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}+(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})$
- $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}$
- $\overrightarrow{u}+(-\overrightarrow{u})=\overrightarrow{0}$ ($\overrightarrow{0}$ *est le vecteur nul*)
- $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}+\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}$

3 Vecteurs et configurations géométriques

3.1 Parallélogrammes

Définition 7 (Rappels)**.** *Un quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si :*

- *Les côtés opposés sont parallèles 2 à 2 : $(AB) \parallel (CD)$ et $(BC) \parallel (AD)$.*
- *Les côtés opposés sont de même longueur 2 à 2 : $AB = CD$ et $BC = AD$.*
- *Deux côtés opposés sont parallèles et de même longueur : $((AB) \parallel (CD)$ et $AB = CD)$ ou $((BC) \parallel (AD)$ et $BC = AD)$*
- *Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu.*

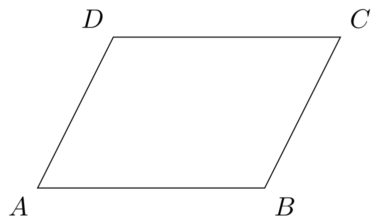
Proposition 4. *Soit un quadrilatère $ABCD$. Alors $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.*

Remarque. *Attention, il ne faut **pas** vérifier $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.*

Proposition 5. *Soit un parallélogramme $ABCD$. Alors,*

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$

Exemple. *Soit $ABCD$ un parallélogramme.*



a) *Placer sur la figure E, le point symétrique de A par rapport à B. Placer sur la figure F, le point symétrique de A par rapport à D.*

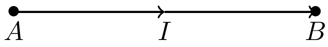
b) *Placer le point G tel que $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$.*

c) *Donner la nature du quadrilatère $AEGF$.*

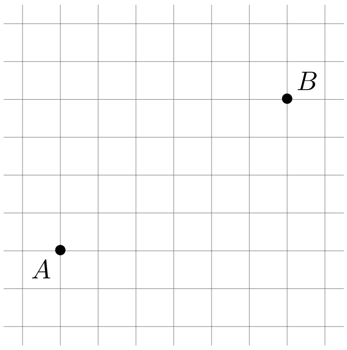
3.2 Milieu d'un segment

Proposition 6. *Soient A et B deux points du plan. Alors I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.*

Exemple.



Exemple. *Placer le milieu I du segment $[AB]$ dans la figure suivante.*



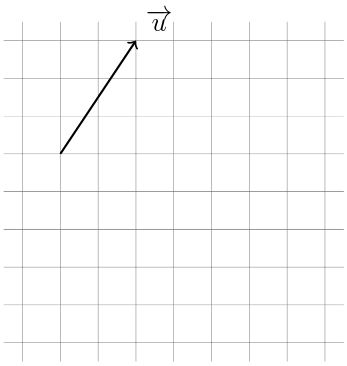
4 Vecteurs colinéaires

4.1 Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

Définition 8. *Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur, et k un nombre réel. Alors la multiplication de $\overrightarrow{u}$ par k est un vecteur, noté $k\overrightarrow{u}$, vérifiant :*

- *$k\overrightarrow{u}$ est de même direction que $\overrightarrow{u}$.*
- *Si $k > 0$, alors $k\overrightarrow{u}$ est de même sens que $\overrightarrow{u}$. Si $k < 0$, alors $k\overrightarrow{u}$ est de sens opposé à $\overrightarrow{u}$.*
- *La norme de $k\overrightarrow{u}$ est donnée par $|k|$ multiplié par la norme de $\overrightarrow{u}$.*

Exemple. *Placer sur ce repére les vecteurs $2\overrightarrow{u}$ et $-3\overrightarrow{u}$.*



Proposition 7. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs, et k et k' deux nombres réels. Alors,*

- $k\overrightarrow{u} + k'\overrightarrow{u} = (k + k')\overrightarrow{u}$
- $k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v} = k(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$
- $k\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$
- $0\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

Exemple. *Soient A, B et I trois points tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Montrer que I est le milieu de $[AB]$.*

4.2 Vecteurs colinéaires et applications

Définition 9. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. Ces deux vecteurs sont dits* ***colinéaires*** *si et seulement s'ils ont la même direction.*

Proposition 8. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. Alors, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$.*

Remarque.

- *Pour prouver que deux vecteurs sont colinéaires, il faut donc prouver que l'un est le* ***multiple*** *de l'autre.*
- *Le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est donc colinéaire à tous les vecteurs.*

Proposition 9. *Soient A, B, C et D quatre points plan. Alors les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.*

Proposition 10. *Soient A, B et C trois points du plan. Alors les point A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.*