

Fonction Exponentielle de base $a > 0$

Maths Spécifiques

18 Mars 2024

Rappels :

1. Puissance de a par un entier positif.
2. Puissance de a par un entier négatif.

1 Le cas d'une puissance fractionnaire

Soit $a > 0$, on souhaite définir une notion de puissance fractionnaire, c'est-à-dire

$$a^{p/q},$$

où p est un entier relatif, et q un entier naturel non nul. On souhaite que cette notion de puissance respecte les propriétés déjà vues pour les puissances, comme $a^k \times a^{k'} = a^{k+k'}$.

1. Justifier que notre définition de $a^{p/q}$ devrait être égal à $(a^p)^{1/q}$.

On peut donc concentrer nos recherches à donner une définition à $a^{1/q}$. Testons pour $q = 2$.

2. Que signifie la notion de racine carrée, *en français* ?
3. Justifier que $a^{1/2}$ correspond à la racine carrée de a , c'est-à-dire \sqrt{a} .
4. Que pourrait bien signifier la notion de racine q^e de a , notée $\sqrt[q]{a}$, *en français* ?
5. Vérifier que cette notion correspond bien à la définition que l'on souhaite donner à $a^{1/q}$.

On donne donc la définition suivante pour la puissance $\frac{1}{q}$ d'un nombre :

Définition 1. Le nombre $a^{1/q}$ est le nombre tel que si on le multipliait q fois par lui-même, on obtiendrait a . Il correspond donc à la racine q^e de a , notée aussi $\sqrt[q]{a}$.

$$a^{1/q} = \sqrt[q]{a}.$$

2 Le cas d'une puissance réelle

On souhaite aller encore plus loin et définir la puissance de $a > 0$ par tout nombre *réel*. Par exemple, quelle définition donner à $2^{\sqrt{2}}$?

6. Montrer que $(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = 1$. En déduire que $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$.

7. Une première approximation grossière de $\sqrt{2}$ est $\sqrt{2} = \frac{3}{2}$. En utilisant cette égalité dans $1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$, en déduire une autre fraction permettant d'approcher $\sqrt{2}$.

En continuant, on obtient ainsi une suite de fractions approchant de plus en plus $\sqrt{2} : \frac{3}{2} ; \frac{7}{5} ; \frac{17}{12} \dots$

8. Utiliser ces fractions pour calculer une valeur approchée de $2^{\sqrt{2}}$ sur votre calculatrice.

On pourrait continuer longtemps. Plus les fractions sont précises, moins le résultat bougera. Ce comportement nous permet de déduire une définition pour $2^{\sqrt{2}}$: c'est la valeur que l'on obtient en continuant ce processus à l'infini.

3 Conclusion

On a travaillé sur un moyen de parler de la puissance *réelle* d'un nombre $a > 0$. Maintenant que nous sommes convaincu que c'est possible, il nous est possible de définir une fonction qui à tout nombre réel x renvoie a^x . C'est ce qu'on appelle la *fonction exponentielle de base a*.

Définition 2. Soit $a > 0$. La fonction exponentielle de base a est la fonction

$$\begin{array}{ccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto a^x \end{array} .$$