

5 Calcul de sommes

5.1 Sommes arithmétiques

Proposition 7. Soit n un nombre entier naturel. Alors,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration.

□

Proposition 8. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r , et N un entier naturel. Alors,

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_N = (N+1)u_0 + \frac{N(N+1)r}{2}$$

Démonstration.

□

Exemple. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = 3$. Calculer $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{15}$ (somme des 16 premiers termes).

5.2 Sommes géométriques

Proposition 9. Soit n un nombre entier naturel, et $q \neq 1$ un réel. Alors,

$$1 + q^1 + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

Démonstration.

□

Proposition 10. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$, et N un entier naturel. Alors,

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_N = u_0 \frac{q^{N+1} - 1}{q - 1}$$

Démonstration.

□

Exemple. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 2$. Calculer $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{19}$ (somme des 20 premiers termes).