Chapitre 2 : Second degré

Premières Spécialité Mathématiques

1 Définition

Définition 1. *Une **fonction polynomiale du second degré** est une fonction f définie sur les réels qui à tout nombre x associe un réel $f(x)$ de la forme :*

$$ax^2 + bx + c$$

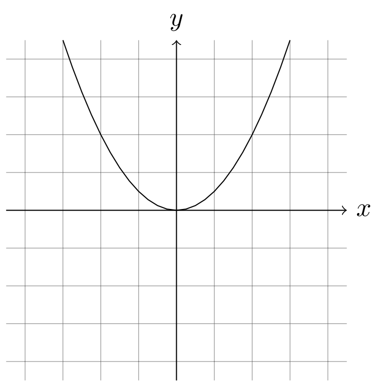
où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

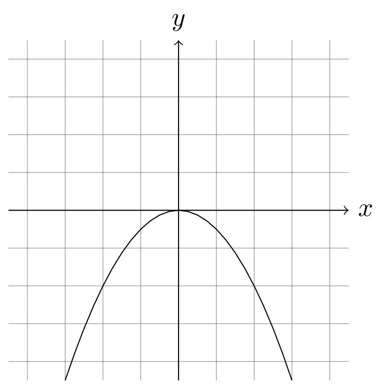
Remarque. *L'hypothèse $a \neq 0$ est essentielle, sinon la fonction est polynomiale de degré au plus 1.*

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les fonctions polynomiales du second degré : l'allure de leur courbe représentative, leur extremum, leurs racines…

2 Allure du graphique

On trace la courbe représentative de deux fonctions polynomiales du second degré : une avec $a > 0$ et une avec $a < 0$.





Définition 2. *Soit f une fonction polynomiale de degré 2. Sa courbe représentative est appelée une **parabole**.*

Proposition 1. *Soit f une fonction polynomiale de degré 2. telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$. Alors :*

- *Si $a > 0$, il existe une valeur de x, notée x_m telle que f est décroissante sur $]-\infty; x_m]$ et croissante sur $[x_m; +\infty[$*
- *Si $a < 0$, il existe une valeur de x, notée x_M telle que f est croissante sur $]-\infty; x_M]$ et décroissante sur $[x_M; +\infty[$*

Remarque.

- *Dans le cas $a > 0$, les* « branches de la paraboles sont tournées vers le haut ». *Dans le cas contraire ($a < 0$), elles sont* « tournées vers le bas ».
- *Dans le cas $a > 0$, f admet un unique minimum, et ce minimum est atteint en x_m. Dans le cas contraire ($a < 0$), f admet un maximum, et ce maximum est atteint en x_M.*

3 Recherche de l'extremum

3.1 Forme canonique

Proposition 2. *Soit f une fonction polynomiale du second degré telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$. Alors il existe α et β tel que*

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

Remarque. *Dans ce cas, $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.*

Exemple. *Soit l'expression polynomiale du second degré $-x^2 + 2x - 5$. Déterminer sa forme canonique.*

Méthode 1 *Par identification :*

Méthode 2 *En utilisant les « presque » identités remarquables :*

3.2 Extremum

Proposition 3. *Soit une fonction polynomiale du second degré* $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$. *On suppose que* $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ *pour tout* x *réel. Alors,* f *admet un extremum qu'il atteint en* α *et ayant pour valeur* β.

Remarque. *Comme dit précédemment, si* $a > 0$*, alors* f *admet un minimum qu'il attent en* $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$. *Sinon, si* $a < 0$*, alors* f *admet un maximum qu'il atteint en* $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$. *Dans les deux cas, cet extremum vaut* $\beta = f(\alpha)$.

Exemple. *Soit la fonction polynomiale* $g : x \mapsto 4x^2 + 32x - 5$.

a) *Cette fonction admet-elle un minimum ou un maximum ?*

b) *En quelle valeur cet extremum est-il atteint ?*

c) *Que vaut cet extremum ?*

Proposition 4. *Soit* $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ *une fonction polynomiale du second degré. On suppose que* $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$. *Alors la courbe représentative* $\mathcal{C}_f$ *est une parabole admettant comme axe de symétrie la droite* $x = \alpha$.