

### 3 Nombres rationnels

#### 3.1 Ensembles

##### Définition 7.

- On note  $\mathbb{D}$  l'ensemble des **nombres décimaux**, c'est-à-dire l'ensemble des nombres dont l'écriture décimale est finie (nombre fini de chiffres après la virgule).
- On note  $\mathbb{Q}$  l'ensemble des **nombres rationnels**, c'est-à-dire l'ensemble des nombres pouvant s'écrire sous la forme d'une fraction d'entiers

$$\frac{a}{b}$$

avec  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $b \in \mathbb{N}$  et  $b \neq 0$ .

**Exemple.** Les nombres suivants sont des nombres décimaux :  $1,23$  ;  $2$  ;  $-3,4$  ...

Les nombres suivants sont des nombres rationnels :  $1,23$  ;  $\frac{4}{2}$  ;  $\frac{1}{3}$  ...

**Proposition 6.** Tout nombre  $x \in \mathbb{D}$  est de la forme

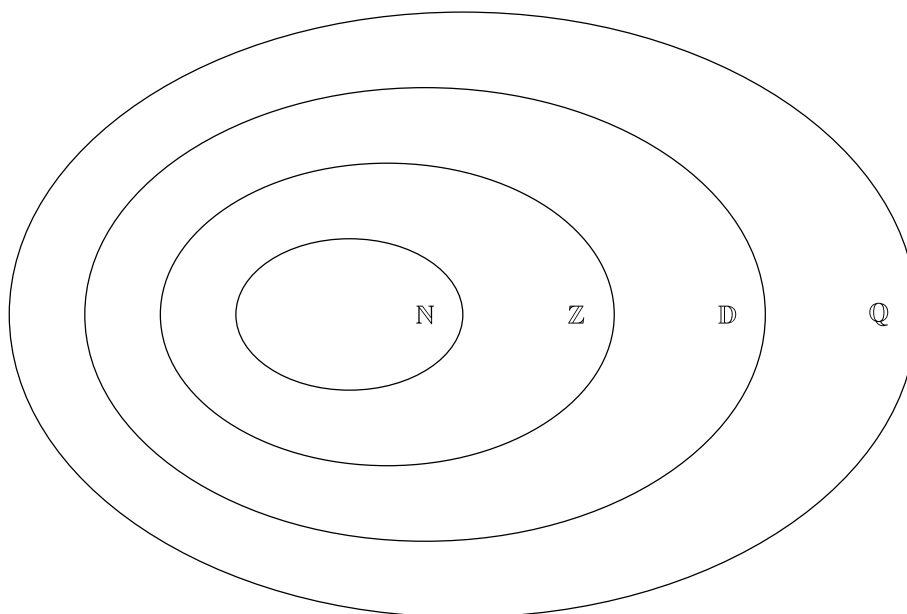
$$x = \frac{a}{10^k}$$

tel que  $a \in \mathbb{Z}$  et  $k \in \mathbb{N}$ .

##### Remarque.

- Cette proposition nous permet d'affirmer que tout nombre décimal est un nombre rationnel. Cela s'écrit  $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{Q}$ .
- Tout entier relatif est un nombre décimal. On en déduit que tout entier relatif est un nombre rationnel. En effet, si  $x \in \mathbb{Z}$ , alors  $x = \frac{x}{1} = \frac{x}{10^0}$ .

**Exemple.** Compléter le schéma suivant en mettant chaque nombre dans l'ensemble le plus petit le contenant :  $2$  ;  $-4,3$  ;  $\frac{1}{7}$  ;  $\frac{-10}{2}$  ;  $21,333\dots$  ;  $0$  ;  $\frac{10}{25}$ .



### 3.2 Formes irréductibles

**Proposition 7.** Soit  $x \in \mathbb{Q}$ . Alors  $x$  est de la forme

$$x = \frac{a}{b}$$

avec  $a$  et  $b$  deux entiers dont le seul diviseur positif en commun est 1. On dit que cette fraction est **irréductible**.

**Exemple.**

- a) La fraction  $\frac{67}{15}$  est-elle irréductible ? .....
- b) La fraction  $\frac{789}{456}$  est-elle irréductible ? .....

**Proposition 8.** Soit  $x$  un nombre rationnel dont la forme irréductible est donnée par  $\frac{a}{b}$ . Si la décomposition en facteurs premier de  $b$  ne fait qu'apparaître des 2 et des 5, alors  $x$  est un nombre décimal.

**Exemple.**

- a)  $\frac{3}{50}$  est-il décimal ? .....
- b)  $\frac{8}{12}$  est-il décimal ? .....
- c)  $\frac{45}{12}$  est-il décimal ? .....

**Proposition 9.**  $\frac{1}{3}$  n'est pas décimal.

*Démonstration.* La démonstration suivante n'utilise pas la proposition 8.

□