Produit scalaire, orthogonalité

Première Spécialité Mathématiques

1 Première définition du produit scalaire

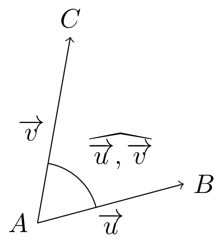
Lorsque que la notion de vecteur a été définie, l'objectif était d'avoir un objet géométrique capable de se comporter comme un nombre. Ainsi, on a défini en classe de seconde l'*addition*, la *soustraction* de vecteurs, ainsi que la multiplication d'un vecteur par un *scalaire*.

L'objectif est de définir une nouvelle opération sur les vecteurs qui se comporte comme une *multiplication entre deux vecteurs*.

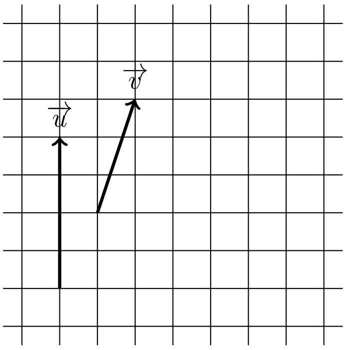
On se place sur le plan.

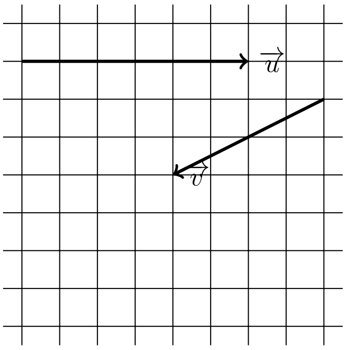
Définition 1. *Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur. Alors, la norme de $\overrightarrow{u}$ (sa « longueur ») est notée $\|\overrightarrow{u}\|$.*

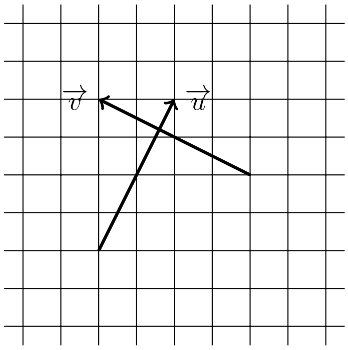
Définition 2. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls. On pose A, B, C trois points du plan tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$. On note $\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}$ l'angle $\widehat{BAC}$.*



Exemple. *Pour chaque couple de vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ suivants, construire trois points A, B et C tels que $\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}} = \widehat{BAC}$.*







Définition 3 (Produit scalaire)**.** *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. On appelle* ***produit scalaire*** *de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$, noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$, le nombre :*

- 0 *si $\overrightarrow{u}$ est nul ou $\overrightarrow{v}$ est nul.*
- $\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right)$ *dans le cas contraire.*