Chapitre 3 : Équations et inéquations du second degré

Première Spécialité Mathématiques

1 Racines

1.1 Définition

Définition 1. *Soit f une fonction. On appelle* ***racine*** *de la fonction f un nombre r tel que $f(r) = 0$.*

Exercice. *Vérifier que $r_1 = 1$ et $r_2 = -3$ sont deux racines de la fonction $f : x \mapsto 2x^2 + 4x - 6$.*

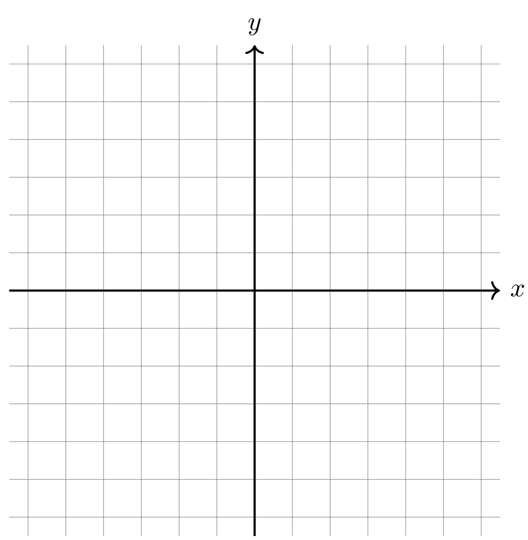
Proposition 1. *Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynomiale du second degré. Alors, seuls trois cas sont à considérer :*

a) f n'admet aucune racine réelle, c'est-à-dire que pour tout réel x, on a $f(x) \neq 0$.

b) f admet une unique racine notée r. Dans ce cas, f peut être factorisée en $f(x) = a(x - r)^2$ pour tout x.

c) f admet deux racines, notées r_1 et r_2. Dans ce cas, f peut être factorisée en $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$ pour tout x.

Exercice. *Sur le repère suivant, tracer la courbe représentative de trois fonctions polynomiale du second degré correspondant à chacun des cas exposés dans la proposition précédente.*



1.2 Calcul des racines

1.2.1 En identifiant une racine évidente

Exercice. *Soit* $f(x) = -x^2 + 6x$ *pour* $x \in \mathbb{R}$. *Cette fonction possède-t-elle des racines évidentes ? Essayer avec des entiers comme* $0; 1; -1; \ldots$.

1.2.2 En utilisant une identité remarquable

Exercice. *Soit* $f(x) = 2x^2 - 128$ *pour* $x \in \mathbb{R}$.

a) Factoriser $f(x)$ *par* 2.

b) À l'aide d'une identité remarquable bien choisie, factoriser $f(x)$.

c) En déduire les racines de $f(x)$.

1.2.3 Avec le produit et la somme des racines

Proposition 2. *Soit* $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ *une fonction polynomiale du second degré. Si* r_1 *et* r_2 *sont les deux racines (possiblement confondues) de* f, *alors*

$$r_1 + r_2 = \frac{-b}{a} \qquad r_1 \times r_2 = \frac{c}{a}$$

Exemple. *Soit* $f(x) = x^2 + x - 20$. *On remarque que* 4 *est une racine de* f. *En déduire une autre racine de* f, *puis une factorisation de* f.

1.3 Discriminant

Définition 2. *Soit* $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ *une fonction polynomiale du second degré. Alors on appelle* ***discriminant de f****, noté* Δ*, la quantité*

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

theorem 1. *Soit* $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ *une fonction polynomiale de second degré, et* Δ *son discriminant. Alors :*

a) Si $\Delta < 0$*, alors* f *n'admet pas de racine réelle.*

b) Si $\Delta = 0$*, alors* f *admet une unique racine réelle* r*, telle que*

$$r = -\frac{b}{2a}$$

c) Si $\Delta > 0$*, alors* f *admet deux racines réelles distinctes* $r_1 < r_2$*, telles que*

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Démonstration

2 Signe

Proposition 3. *Soit* $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ *une fonction polynomiale du second degré. Alors :*

a) Si f *n'admet pas de racine, alors* f *est du même signe que* a *sur* $\mathbb{R}$*.*

b) Si f *admet une unique racine* r*, alors* f *est du même signe que* a *sur* $]-\infty; r[$ *et sur* $]r; +\infty[$*.*

c) Si f *admet deux racines distinctes* $r_1 < r_2$*, alors* f *est du même signe que* a *sur* $]-\infty; r_1[$ *et sur* $]r_2; +\infty[$*, et est du signe opposé à* a *sur* $]r_1; r_2[$

Remarque. *Une phrase pour retenir cette proposition :*

Une fonction polynomiale du second degré est du même signe que a *à* ***l'extérieur*** *de ses racines, et est de signe opposé à* a *à* ***l'intérieur*** *de ses racines.*

Exemple. *En reprenant l'exemple précédent, donner le tableau de signes des fonctions* f*,* g *et* h*.*