

Dérivation globale

Premières Spécialité Mathématiques

1 Fonction dérivée

Remarque. On rappelle qu'une fonction f définie sur un intervalle I est dite **dérivable en $a \in I$** si et seulement si le taux de variation

$$T_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

admet une limite finie quand h tend vers 0. La valeur de cette limite $\lim_{h \rightarrow 0} T_a(h)$ est alors appelé **nombre dérivé de f en a** et est noté $f'(a)$.

En résumé, la notion de dérivation est un processus dépendant de f qui à tout nombre a associe, quand c'est possible, un autre nombre $f'(a)$. Il s'agit donc d'une **fonction**.

Définition 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que f est **dérivable sur I** si pour tout nombre $a \in I$, la fonction f est dérivable en a . Dans ce cas, on pose f' la fonction définie sur I qui à tout $x \in I$ associe le nombre dérivé $f'(x)$.

Exemple. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
 $x \mapsto x^2$

En justifiant son existence, calculer le nombre dérivé de f en a , avec $a \in \mathbb{R}$ quelconque. En déduire que la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} , et donner l'expression de la fonction dérivée $f'(x)$

Proposition 1.

1. Soit $c \in \mathbb{R}$. La fonction constante définie sur \mathbb{R} $f : x \mapsto c$ est dérivable sur \mathbb{R} , et sa dérivée est $f' : x \mapsto 0$.
2. La fonction identité définie sur \mathbb{R} par $f : x \mapsto x$ est dérivable sur \mathbb{R} , et sa dérivée est $f' : x \mapsto 1$.
3. La fonction carré définie sur \mathbb{R} par $f : x \mapsto x^2$ est dérivable sur \mathbb{R} , et sa dérivée est $f' : x \mapsto 2x$.
4. La fonction puissance $n \in \mathbb{N}$ définie sur \mathbb{R} par $f : x \mapsto x^n$ est dérivable sur \mathbb{R} , et sa dérivée est $f' : x \mapsto nx^{n-1}$
5. La fonction inverse définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$, et sa dérivée est $f' : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$.
6. La fonction racine carrée définie sur $[0; +\infty[$ par $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$, et sa dérivée est $f' : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Remarque.

- Avant de dériver une fonction, il faut s'assurer qu'elle est bien dérivable.
- La fonction racine carrée est dérivable sur $]0; +\infty[$ (**ouvert en 0**), tandis qu'elle est définie sur $[0; +\infty[$ (**fermé en 0**). En effet, la fonction n'est pas dérivable en 0.

Démonstration. On démontre que $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$. □

2 Opération algébriques

Proposition 2. Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I ouvert.

- La fonction somme de u et v définie sur I par $s(x) = u(x) + v(x)$ est dérivable sur I , et sa dérivée vérifie, pour tout $x \in I$, $s'(x) = u'(x) + v'(x)$. $((u + v)' = u' + v')$
- Le produit p d'une fonction u définie sur I par une constante $k \in \mathbb{R}$, définie par $p(x) = k \times u(x)$, est dérivable sur I , et sa dérivée vérifie, pour tout $x \in I$, $p'(x) = ku'(x)$.
- La fonction produit de u et v définie sur I par $p(x) = u(x) \times v(x)$ est dérivable sur I , et sa dérivée vérifie, pour tout $x \in I$, $p'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. $((uv)' = u'v + uv')$
- Si la fonction v ne s'annule pas sur l'intervalle I , alors la fonction inverse de v définie sur I par $i(x) = \frac{1}{v(x)}$ est dérivable sur I , et sa dérivée vérifie, pour tout $x \in I$, $i'(x) = -\frac{v'}{v^2(x)}$.

$$\left(\left(\frac{1}{v} \right)' = -\frac{v'}{v^2} \right)$$
- Si la fonction v ne s'annule pas sur l'intervalle I , alors la fonction quotient de u et de v définie sur I par $q(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ est dérivable sur I , et sa dérivée vérifie, pour tout $x \in I$,

$$q'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \cdot \left(\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \right)$$

Remarque. On résume cette proposition sous la forme d'un tableau :

Forme de f	Dérivée f'	Remarques
$u + v$	$u' + v'$	
ku	ku'	
uv	$u'v + uv'$	
uv	$u'v + uv'$	
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	v ne s'annule pas
$\frac{u}{v}$	$-\frac{u'v - uv'}{v^2}$	v ne s'annule pas

Exemple. Soient u et v deux fonctions définies sur \mathbb{R}_+^* par :

$$\begin{cases} u(x) = x^2 - 5x & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^* \\ v(x) = \sqrt{x} + 1 & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

a) Les fonctions u et v sont-elles dérivables sur \mathbb{R}_+^* ? Donner l'expression de leur dérivée.

b) En déduire la dérivée de la somme, du produit et du quotient de u et v .

3 Composition de fonctions

Définition 2. Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On pose aussi a et b deux nombres réels. Enfin, on pose J l'intervalle des réels x tels que $ax + b \in I$. Alors on appelle la fonction g définie pour tout $x \in J$ par

$$g(x) = f(ax + b)$$

la **fonction composée** de f par la fonction $x \mapsto ax + b$.

Proposition 3. Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I , a et b deux réels et J l'intervalle des x vérifiant $ax + b \in I$. Alors la fonction composée de f par $x \mapsto ax + b$, c'est-à-dire la fonction définie pour tout $x \in J$ par $g(x) = f(ax + b)$ est dérivable sur J , et sa dérivée vaut pour tout $x \in J$,

$$g'(x) = af'(ax + b)$$

Exemple. Soit la fonction g définie sur un certain intervalle J par la formule

$$g(x) = \sqrt{3x - 2} \text{ pour tout } x \in J$$

a) Identifier le plus grand intervalle **ouvert** J sur lequel cette fonction est définie.

b) De quelles fonctions g est-elle la composée ?

c) En déduire que g est dérivable sur J , et calculer sa dérivée.

4 Variations de fonctions dérivables

Proposition 4. Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

- La fonction f est **croissante** sur I si et seulement si f' est **positive** sur I .
- La fonction f est **décroissante** sur I si et seulement si f' est **négative** sur I .
- La fonction f est **constante** sur I si et seulement si f' est **nulle** sur I

Remarque. — Cela correspond à l'intuition grâce à laquelle la dérivée a été construite, c'est-à-dire que $f'(x)$ est la pente de la tangente à la courbe représentative de f en le point $(x; f(x))$.

- Ce sont des équivalences. Si la fonction est croissante, alors sa dérivée est positive. Si la dérivée d'une fonction est positive, alors cette fonction est croissante.

Exemple. Soit $f : x \mapsto x^2 - 2x + 1$ définie sur \mathbb{R} .

- a) Donner l'expression de la dérivée de f .
- b) Étudier le signe de f' à l'aide d'un tableau de signe.

x	$-\infty$	\dots	$+\infty$
<i>Signe de f'</i>			

- c) En déduire le tableau de variations de f .

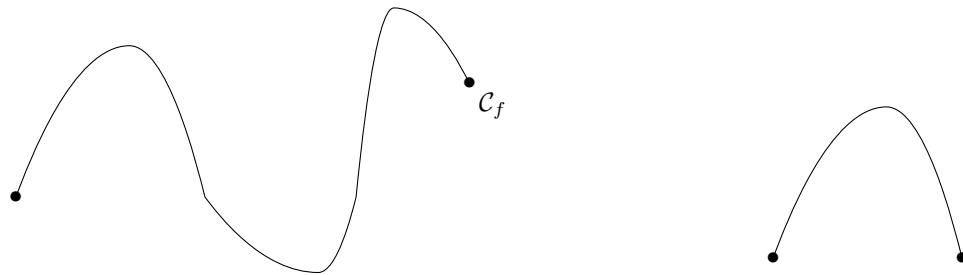
x	$-\infty$	\dots	$+\infty$
<i>Variations de f</i>			

5 Extremums de fonctions dérivables

Définition 3. Soit f une fonction définie sur un intervalle I , et $a \in I$. On dit que f atteint un **extremum local** en a s'il existe un intervalle (non restreint à un point) J tel que : $a \in J ; J \subseteq I$ et la restriction de f sur J atteint un extremum en a .

Remarque. Autrement dit, $f(a)$ est un extremum local de f sur I si l'image de a est supérieure ou inférieure à l'image de ses voisins « proches ».

Exemple. Soit f une fonction définie sur $[-6; 6]$ dont la courbe représentative \mathcal{C}_f est représentée sur le repère suivant (en bas à gauche) :



- Quel est le maximum et le minimum de f ? En quelles valeurs sont-elles atteintes?
- On a représenté sur le repère à droite la restriction de f sur l'intervalle $[-6; -1]$. En déduire que en quel abscisse f admet un extremum local.

Proposition 5. Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle **ouvert** I , et soit $a \in I$. Si f atteint un extremum local en a , alors

$$f'(a) = 0$$

Remarque.

- *L'hypothèse d'intervalle ouvert est importante* : cette proposition devient fausse sinon. Par exemple, la fonction carrée $f: x \mapsto x^2$ restreinte sur $[1; 2]$ admet un extremum en 1, mais sa dérivée en 1 est non-nulle.
- *La réciproque de cette proposition est fausse* : ce n'est pas forcément parce que $f'(a) = 0$ que f atteint un extremum local en a . Par exemple, si $f: x \mapsto x^3$ sur \mathbb{R} , on a bien $f'(0) = 0$, et pourtant $f(0) = 0$ n'est ni un minimum ou un maximum local.
- *Cette proposition donne néanmoins une liste des candidats envisageables pour les extrema d'une fonction dérivable sur un intervalle I* : il suffit de chercher parmi les points a tels que $f'(a) = 0$. C'est ce qu'on appelle une **condition nécessaire**.