

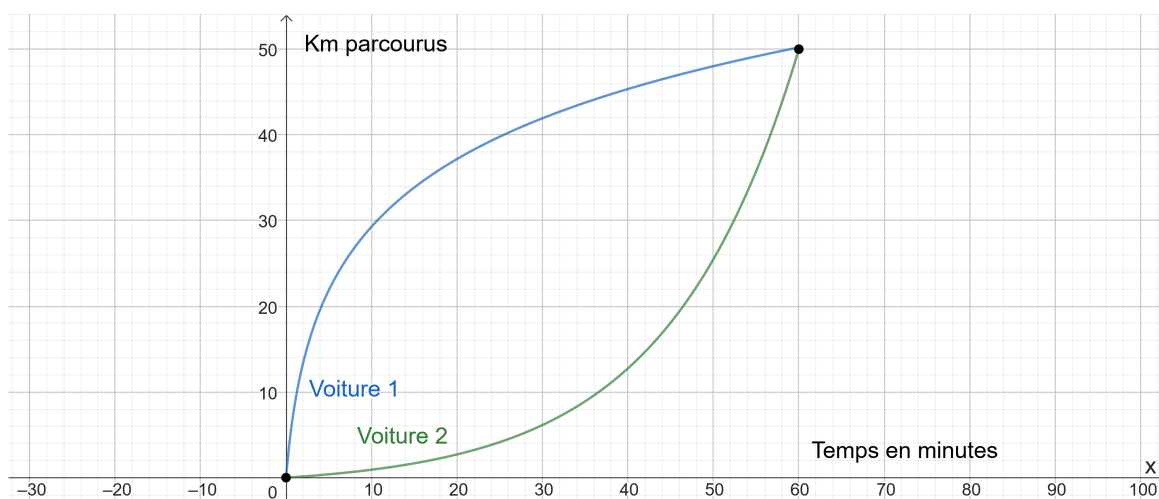
Variation instantanée, Variation globale

Maths Spécifiques

1 Variation instantanée

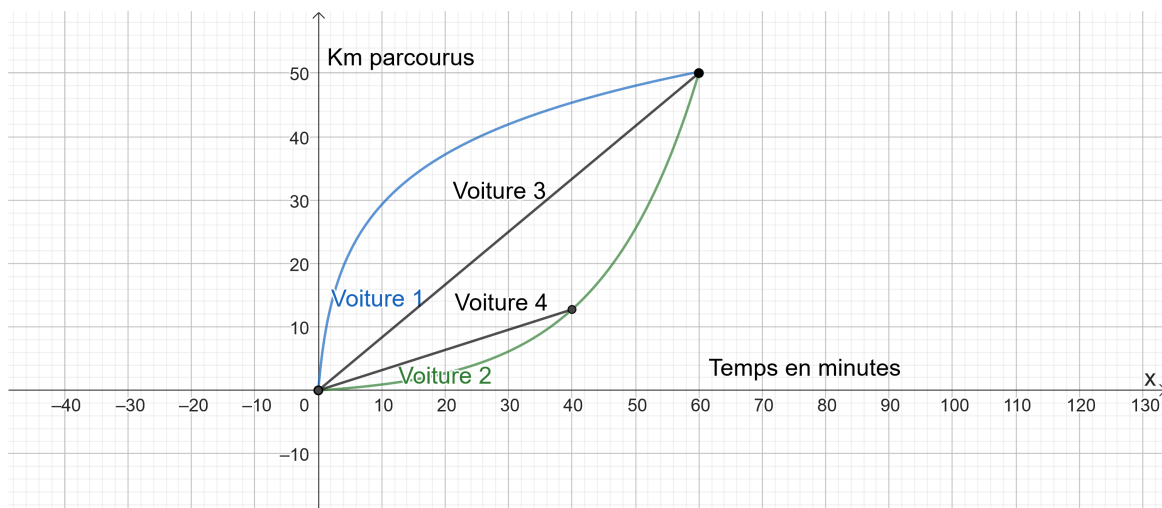
1.1 Introduction

Deux voitures parcourent le même trajet sur la même route. Elles partent en même temps et mettent toutes deux le même temps pour arriver à destination. Les deux courbes ci-dessous représentent les kilomètres parcourus en fonction du temps.



- Exercice.**
- Quelle est la distance du trajet ? En combien de temps ces deux voitures ont-elles parcouru ce trajet ?
 - Quelle voiture allait plus vite sur les 30 premières minutes ? Pourquoi ?
 - Admettons qu'une troisième voiture parcourt le trajet, mais garde la même vitesse du début à la fin. Quelle est cette vitesse en km h^{-1} ?
 - Combien de kilomètres a parcouru la voiture 1 au bout de 30 minutes ? Même question pour la voiture 2.
 - Admettons qu'une quatrième voiture roule 30 minutes et parcourt la même distance que la voiture 2 au terme de ces 30 minutes, mais en gardant une vitesse constante durant tout le trajet. Quelle est cette vitesse ?

On trace les trajets des voitures 3 et 4 des questions précédentes. Leur vitesse constante est donnée par la pente de la droite correspondante.

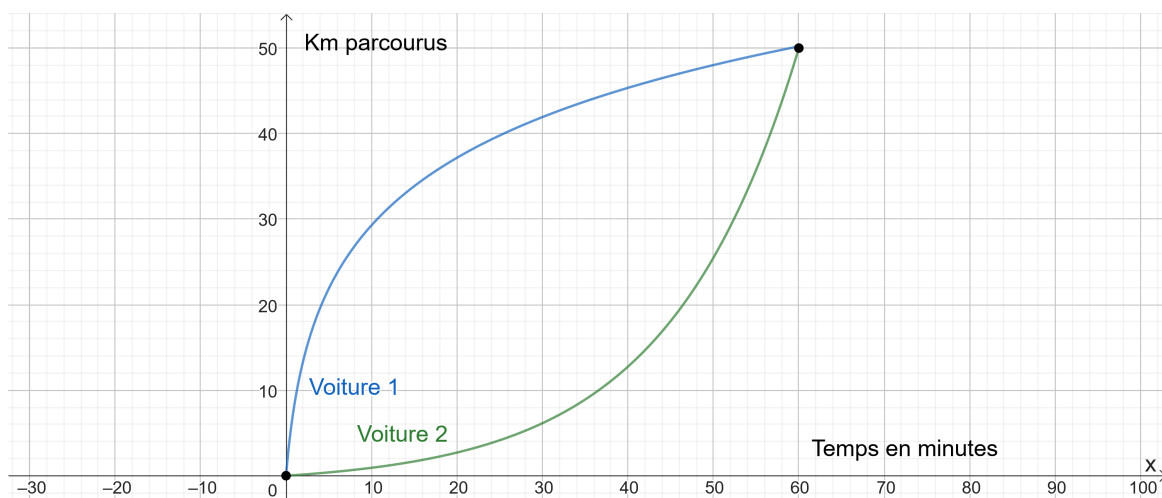


S'il est facile d'estimer la vitesse d'une voiture dont la vitesse est constante, il est plus difficile de le faire dans le cas où une voiture a une vitesse variable. Pourtant, les compteurs de nos voitures estiment facilement la vitesse à laquelle nous roulons.

Exercice. Sur le schéma suivant, faire figurer le trajet d'une voiture...

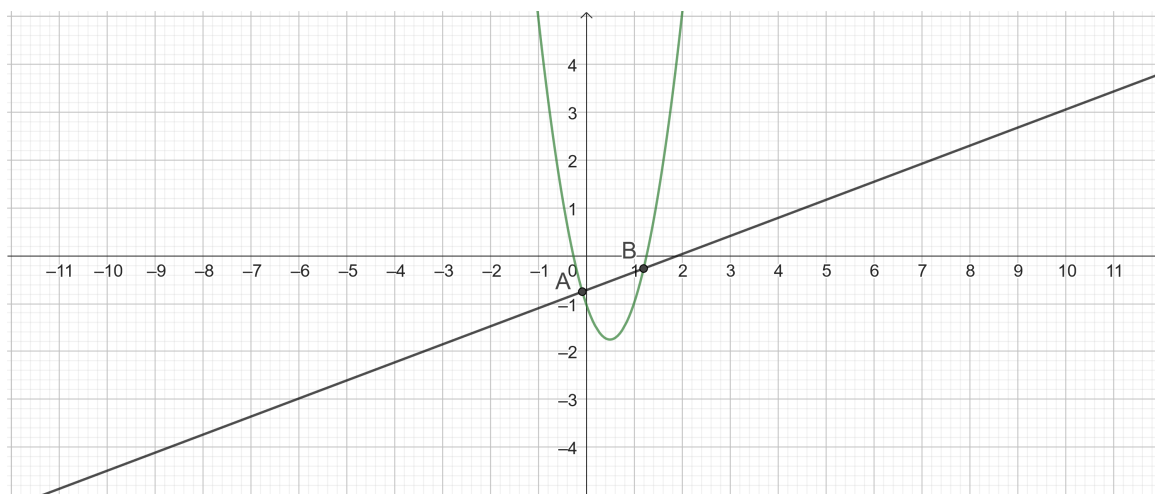
- Arrivant au bout de la 20^e minute au même kilométrage que la voiture 2
- Arrivant au bout de la 40^e minute au même kilométrage que la voiture 2
- Et roulant à vitesse constante entre la 20^e et la 40^e minute.

Quelle est la vitesse de la voiture entre 20 et 40 minutes ?



1.2 Variation instantanée

Définition 1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dont la courbe représentative est donnée C_f . Une droite est appelée sécante à C_f si elle coupe deux points distincts de la courbe.



Remarque. • Une sécante à C_f ne peut pas être verticale.

- Étant donné une sécante à C_f , il existe une fonction affine $x \mapsto ax + b$ dont la courbe représentative est exactement cette sécante.

Exercice. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, et une sécante d à C_f .

- Justifier que d passe par deux points de la forme $(x_1; f(x_1))$ et $(x_2; f(x_2))$ avec $x_1, x_2 \in I$.
- Soit $g : x \mapsto ax + b$ une fonction affine dont la courbe représentative est d . Justifier que sa pente vaut

$$a = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

On suppose que $A(x_1; f(x_1))$ est fixé. Plus $B(x_2; f(x_2))$ est proche de A , plus la sécante à C_f passant par A et B se rapproche d'une position limite. Cette droite limite est appelée *tangente* à la courbe C_f passant par A .

Remarque. Quand elle existe, la tangente à la courbe C_f est unique.

Définition 2. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, et $a \in I$. On appelle nombre dérivé de f en a la pente de la tangente à C_f passant par $A(a; f(a))$.

Remarque. Pour calculer le nombre dérivé de f en a , on regarde vers quelle valeur le taux d'accroissement

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x}$$

se dirige quand x se rapproche de a .

2 Variation globale

2.1 Fonction dérivée

Définition 3. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et admettant un nombre dérivé sur tout a appartenant à I . On dit que f est dérivable sur I .

Définition 4. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable sur I . Alors on note f' la fonction définie sur I qui à tout nombre a dans I associe le nombre dérivé de f en a .

Remarque. • Pour parler de la fonction dérivée de f , il faut avoir préalablement dit que f est dérivable.

Exemple. 1. Soit $f: x \mapsto \frac{1}{2}x + 1$ définie sur \mathbb{R} . La fonction f admet un nombre dérivé en a , pour n'importe quel a appartenant à \mathbb{R} . Ce nombre dérivé est toujours $\frac{1}{2}$. On en déduit que la fonction dérivée de f , f' , est la fonction telle que pour tout a

$$f'(a) = \frac{1}{2}.$$

2. Soit $g: x \mapsto x^2$ définie sur \mathbb{R} . La fonction g admet un nombre dérivé en a , pour n'importe quel a appartenant à \mathbb{R} . On en déduit que g est dérivable sur \mathbb{R} . La fonction dérivée de g , g' , est la fonction définie sur \mathbb{R} et telle que

$$g'(x) = 2x$$

Proposition 1. Soit f une fonction définie sur I et dérivable sur I . Soit J un intervalle inclus dans I . Alors,

- f est croissante sur J si et seulement si f' est positive sur J .
- f est décroissante sur J si et seulement si f' est négative sur J .

Exemple. a) Soit $g: x \mapsto x^2$ définie sur \mathbb{R} . Pour quelles valeurs de x a-t-on $g'(x) \geq 0$? Et $g'(x) \leq 0$?

b) Compléter le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de g'		0	
Variations de g			