

Suites géométriques

Terminale STMG1

1 Définition

Définition 1. Soit $a \in \mathbb{R}_+$ et $q \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle **suite géométrique à termes positifs** de premier terme a et de raison q une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence suivante :

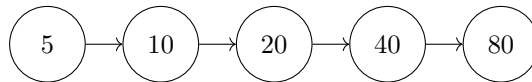
$$\begin{cases} u_0 &= a \\ u_{n+1} &= u_n \times q \end{cases}$$

Remarque.

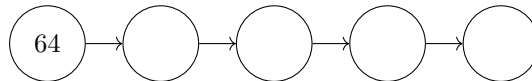
- De la même manière qu'une suite arithmétique consiste à ajouter la même quantité à chaque étape, une suite géométrique consiste à multiplier par une même quantité à chaque étape.
- Ici, on impose que la raison soit strictement positive ($\in \mathbb{R}_+^*$).

Exemple. Compléter les schémas suivants décrivant des suites géométriques :

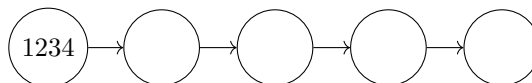
a) $a = 5$ et $q = 2$



b) $a = 64$ et $q = 0.5$



c) $a = 1234$ et $q = 0.1$



Définition 2 (Formule explicite). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme $u_0 = a$ et de raison $q \in \mathbb{R}_+^*$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n = a \times q^n$$

Exemple. Pour chacun des exemples précédents, donner directement u_{10} .

2 Étude d'une suite géométrique

Proposition 1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique à termes positifs de raison $q > 0$.

- Si $q < 1$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- Si $q > 1$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
- Si $q = 1$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

Exemple. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison q . Donner une valeur q_1 à q pour que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit croissante, puis une valeur q_2 à q pour que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit décroissante. Tester vos choix en observant les premiers termes de la suite.

3 Moyenne géométrique

Définition 3. Soit x et y deux nombres positifs. Alors la **moyenne géométrique** de x et y est donnée par

$$\sqrt{xy}$$

Proposition 2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique à termes positifs. Alors, pour tout $n > 1$, on a

$$u_n = \sqrt{u_{n-1}u_{n+1}}$$

Exemple. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique à termes positifs, telle que $u_9 = 5$ et $u_{11} = 320$. Calculer u_{10} , puis en déduire la raison de cette suite.

4 Somme géométrique

Définition 4. Soit un entier naturel n et un réel q . La somme $1 + q + q^2 + \cdots + q^n$ est appelée *somme géométrique de raison q* et est notée

$$\sum_{i=0}^n q^i$$

Proposition 3. Soit un entier naturel n et un réel q **différent de 1**. Alors, la somme géométrique de raison q vaut

$$\sum_{i=0}^n q^i = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

Remarque. Si $q = 1$, alors $\sum_{i=0}^n q^i = n$.

Exemple. Calculer les sommes géométriques suivantes :

a) $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^8 = \sum_{i=0}^9 2^i$

b) $1 - 3 + (-3)^2 + \cdots + (-3)^{12} = \sum_{i=0}^{12} 2(-3)^i$

Proposition 4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$, et N un entier naturel. Alors la somme des N premiers termes de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donnée par :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_N = \sum_{i=0}^N u_i = u_0 \frac{q^{N+1} - 1}{q - 1}$$