4 Variations de fonctions dérivables

Proposition 4. *Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.*

- *La fonction f est* ***croissante*** *sur I si et seulement si f' est* ***positive*** *sur I.*
- *La fonction f est* ***décroissante*** *sur I si et seulement si f' est* ***négative*** *sur I.*
- *La fonction f est* ***constante*** *sur I si et seulement si f' est* ***nulle*** *sur I*

Remarque.

- *Cela correspond à l'intuition grâce à laquelle la dérivée a été construite, c'est-à-dire que $f'(x)$ est la pente de la tangente à la courbe représentative de f en le point $(x; f(x))$.*
- *Ce sont des équivalences. Si la fonction est croissante, alors sa dérivée est positive. Si la dérivée d'une fonction est positive, alors cette fonction est croissante.*

Exemple. *Soit $f : x \mapsto x^2 - 2x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.*

a) *Donner l'expression de la dérivée de f.* ....

b) *Étudier le signe de f' à l'aide d'un tableau de signe.*

x	$-\infty$ $\cdots$ $+\infty$
Signe de f'	

c) *En déduire le tableau de variations de f.*

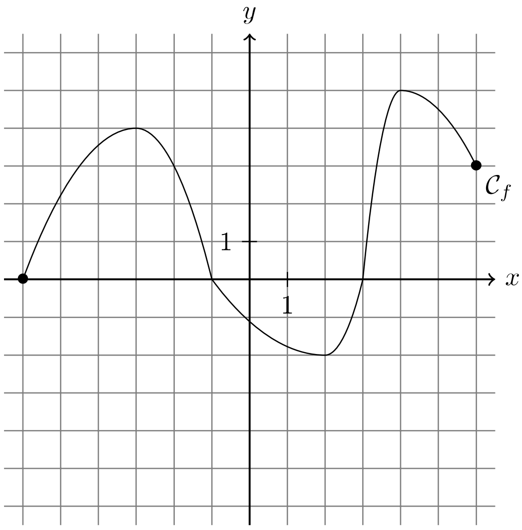
x	$-\infty$ $\cdots$ $+\infty$
Variations de f	

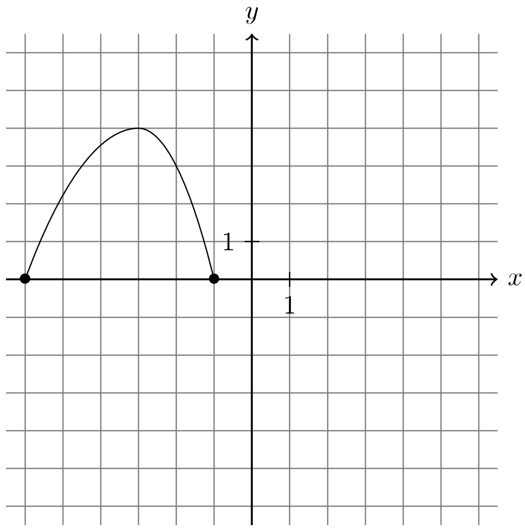
5 Extremums de fonctions dérivables

Définition 3. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et $a \in I$. On dit que f atteint un* ***extremum local*** *en a s'il existe un intervalle (non restreint à un point) J tel que : $a \in J$; $J \subseteq I$ et la restriction de f sur J atteint un extremum en a.*

Remarque. *Autrement dit, $f(a)$ est un extremum local de f sur I si l'image de a est supérieure ou inférieure à l'image de ses voisins « proches ».*

Exemple. *Soit f une fonction définie sur $[-6; 6]$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est représentée sur le repère suivant (en bas à gauche) :*





a) *Quel est le maximum et le minimum de f ? En quelles valeurs sont-elles atteintes ?*

b) *On a représenté sur le repère à droite la restriction de f sur l'intervalle $[-6; -1]$. En déduire que en quel abscisse f admet un extremum local.*

Proposition 5. *Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle* ***ouvert*** *I, et soit $a \in I$. Si f atteint un extremum local en a, alors*

$$f'(a) = 0$$

Remarque.

- ***L'hypothèse d'intervalle ouvert est importante*** *: cette proposition devient fausse sinon. Par exemple, la fonction carrée $f : x \mapsto x^2$ restreinte sur $[1; 2]$ admet un extremum en 1, mais sa dérivée en 1 est non-nulle.*
- ***La réciproque de cette proposition est fausse*** *: ce n'est pas forcément parce que $f'(a) = 0$ que f atteint un extremum local en a. Par exemple, si $f : x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$, on a bien $f'(0) = 0$, et pourtant $f(0) = 0$ n'est ni un minimum ou un maximum local.*
- *Cette proposition donne néanmoins une liste des candidats envisageables pour lex extremums d'une fonction dérivable sur un intervalle I : il suffit de chercher parmi les points a tels que $f'(a) = 0$. C'est ce qu'on appelle une* ***condition nécessaire****.*