Suites géométriques

Terminale STMG1

1 Définition

Définition 1. *Soit $a \in \mathbb{R}_+$ et $q \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle **suite géométrique à termes positifs** de premier terme a et de raison q une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} u_0 & = a \\ u_{n+1} & = u_n \times q \end{cases}$$

Remarque.

- *De la même manière qu'une suite arithmétique consiste à ajouter la même quantité à chaque étape, une suite géométrique consiste à multiplier par une même quantité à chaque étape.*
- *Ici, on impose que la raison soit strictement positive ($\in \mathbb{R}_+^*$).*

Exemple. *Compléter les schémas suivants décrivant des suites géométriques :*

a) $a = 5$ *et* $q = 2$

$$5 \rightarrow 10 \rightarrow 20 \rightarrow 40 \rightarrow 80$$

b) $a = 64$ *et* $q = 0.5$

$$64 \rightarrow \bigcirc \rightarrow \bigcirc \rightarrow \bigcirc \rightarrow \bigcirc$$

c) $a = 1234$ *et* $q = 0.1$

$$1234 \rightarrow \bigcirc \rightarrow \bigcirc \rightarrow \bigcirc \rightarrow \bigcirc$$

Définition 2 (Formule explicite)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme $u_0 = a$ et de raison $q \in \mathbb{R}_+^*$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$u_n = a \times q^n$$

Exemple. *Pour chacun des exemples précédents, donner directement u_{10}.*

2 Étude d'une suite géométrique

Proposition 1. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite géométrique à termes positifs de raison* $q > 0$.

- *Si* $q < 1$, *alors* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante.*
- *Si* $q > 1$, *alors* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante.*
- *Si* $q = 1$, *alors* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est constante.*

Exemple. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite géométrique de premier terme* $u_0 = 4$ *et de raison* q. *Donner une valeur* q_1 *à* q *pour que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *soit croissante, puis une valeur* q_2 *à* q *pour que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *soit décroissante. Tester vos choix en observant les premiers termes de la suite.*

3 Moyenne géométrique

Définition 3. *Soit* x *et* y *deux nombres positifs. Alors la* ***moyenne géométrique*** *de* x *et* y *est donnée par*

$$\sqrt{xy}$$

Proposition 2. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite géométrique à termes positifs. Alors, pour tout* $n > 1$, *on a*

$$u_n = \sqrt{u_{n-1}u_{n+1}}$$

Exemple. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite géométrique à termes positifs, telle que* $u_9 = 5$ *et* $u_{11} = 320$. *Calculer* u_{10}, *puis en déduire la raison de cette suite.*

4 Somme géométrique

Définition 4. *Soit un entier naturel n et un réel q. La somme $1 + q + q^2 + \cdots + q^n$ est appelée* ***somme géométrique de raison*** *q et est notée*

$$\sum_{i=0}^{n} q^i$$

Proposition 3. *Soit un entier naturel n et un réel q* ***différent de*** *1. Alors, la somme géométrique de raison q vaut*

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

Remarque. *Si $q = 1$, alors $\sum_{i=0}^{n} q^i = n$.*

Exemple. *Calculer les sommes géométriques suivantes :*

a) $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^8 = \sum_{i=0}^{9} 2^i$

b) $1 - 3 + (-3)^2 + \cdots + (-3)^1 2 = \sum_{i=0}^{1} 2(-3)^i$

Proposition 4. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$, et N un entier naturel. Alors la somme des N premiers termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donnée par :*

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_N = \sum_{i=0}^{N} u_i = u_0 \frac{q^{N+1} - 1}{q - 1}$$