

Dérivation Locale

Première Spécialité Mathématiques

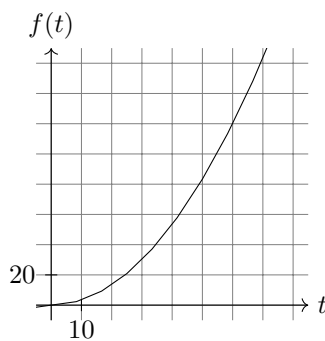
1 Taux de variation

Définition 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On prend $a < b \in I$. On appelle **taux de variation de f entre a et b** la grandeur

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

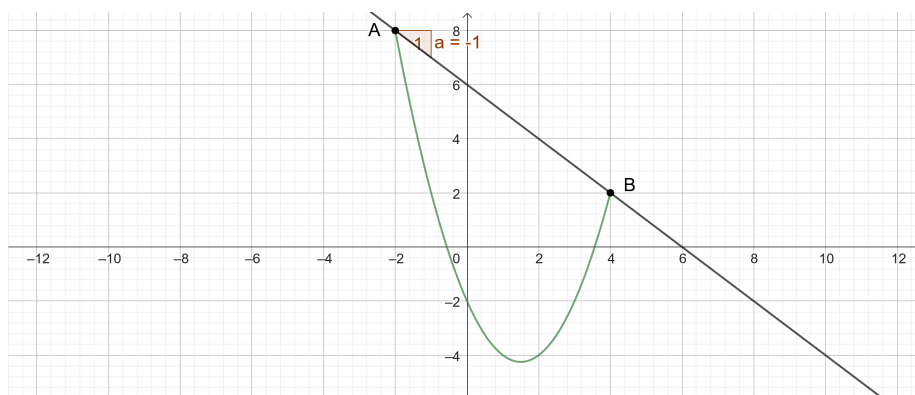
Exemple. Une voiture bleue roule pendant une heure. Soit $f(t)$ la distance parcourue en km en fonction du temps t en min.

- a) Quel est l'intervalle de définition de f ?
- b) Calculer le taux de variation de f entre 0 et 60. Comment interpréter votre résultat ?



- c) On a représenté la courbe de la fonction f sur le repère ci-dessus. Tracer la courbe représentant le trajet d'une voiture rouge, roulant à la vitesse constante de 120 km h^{-1} .

Proposition 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I , et $a < b \in I$. Si on se place sur un repère orthonormé, et que l'on considère les points $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$, alors le taux de variation de f entre a et b correspond à la pente de la droite entre A et B .



Remarque. Le taux de variation d'une fonction entre a et b répond à la question suivante : **Pour chaque abscisse parcourus entre a et b , de combien d'ordonnées sommes-nous montés ou descendus ?**

Proposition 2. Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Soit $J \subseteq I$ un intervalle.

- Si f est croissante sur J , alors pour tout $a < b \in J$, le taux de variation de f entre a et b est positif.
- Si f est décroissante sur J , alors pour tout $a < b \in J$, le taux de variation de f entre a et b est négatif.

Remarque. **Les réciproques sont fausses** : un taux de variation de f entre a et b positif n'implique pas que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[a; b]$.

Exemple. Soit $f: x \mapsto (x - 1)^2 - 2$ définie sur $[-2; 3]$.

- a) Donner un intervalle I sur lequel f est croissante, et un intervalle J sur lequel f est décroissante.
- b) Choisir deux valeurs dans chacun des intervalles, et calculer les taux de variations de f entre ces deux valeurs.
- c) Calculer le taux de variation entre -2 et 2 . Que peut-on en déduire ?

2 Dérivée locale

2.1 Limite finie en 0

Soit $Q(h)$ une quantité dépendant d'une variable h .

Définition 2. On dit que $Q(h)$ *admet une limite finie en 0* quand il existe un nombre q tel que $Q(h)$ s'approche de plus en plus de q à mesure que h s'approche de plus en plus de 0. Dans ce cas, ce nombre q est appelé **limite de $Q(h)$ en 0**, et est noté

$$\lim_{h \rightarrow 0} Q(h)$$

Exemple. Pour chaque quantité $Q(h)$ suivante, remplir le tableau de valeur suivant, et en déduire si $Q(h)$ admet une limite finie en 0, et le cas échéant, donner $\lim_{h \rightarrow 0} Q(h)$.

a) $Q(h) = 1 + h$

b) $Q(h) = \frac{1}{h}$

| h | 1 | 0,1 | 0,01 | 0,001 | 0,0001 |
|--------|---|-----|------|-------|--------|
| $Q(h)$ | | | | | |

| h | 1 | 0,1 | 0,01 | 0,001 | 0,0001 |
|--------|---|-----|------|-------|--------|
| $Q(h)$ | | | | | |

Remarque. Il est donc tout à fait possible pour $Q(h)$ de ne pas admettre de limite finie en 0. Toute notion dépendant donc d'une limite finie doit être manipulée avec précaution.

2.2 Nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On fixe $a \in I$. Soit $h \neq 0$ un nombre tel que $a + h \in I$. Alors le taux de variation de f entre a et $a + h$ est donné par

$$T_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Remarque. Par définition, on ne peut pas remplacer h par 0, donc $T_a(0)$ n'est pas défini. Par contre, on peut s'intéresser à son éventuelle limite finie en 0

Définition 3. On dit que f **est dérivable en** a quand $T_a(h)$ admet une limite finie en 0. Dans ce cas, on appelle **nombre dérivé de f en** a la limite en 0 de $T_a(h)$, et on le note $f'(a)$. En résumé, quand f est dérivable en a , alors son nombre dérivé est donné par

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Exemple. Soit $f : x \mapsto 2x + 1$ définie sur \mathbb{R} .

- a) Soit $a = 2$. Écrire le taux de variation $T_a(h)$ de f entre a et $a + h$, et simplifier l'expression.
- b) La fonction f est-elle dérivable en 2 ?
- c) En déduire le nombre dérivé de f en 2.

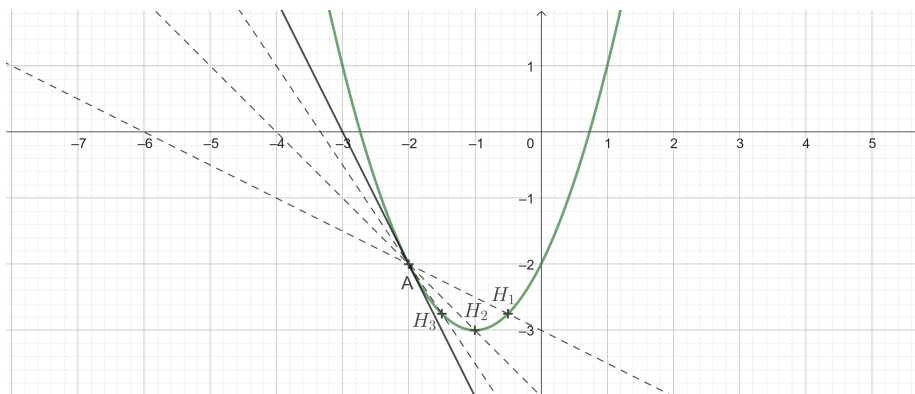
3 Interprétation géométrique

Soit f une fonction définie sur I . On fixe $a \in I$. On s'intéresse aux droites sécantes à la courbe représentative \mathcal{C}_f de f passant par les points $A(a; f(a))$ et $H(a+h; f(a+h))$, pour h suffisamment petit pour que $a+h \in I$.

Remarque. La pente de cette droite sécante est donnée par le taux de variation

$$T_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Au fur et à mesure que H se rapproche de A , cette sécante se rapproche d'une certaine droite, dont la pente est donnée par $f'(a)$.



Définition 4. On dit que f admet une **tangente en** a quand elle est dérivable en a . Dans ce cas, la **tangente en** a de f est la droite passant par le point $A(a; f(a))$ et de pente $f'(a)$.

Remarque. La tangente de f en a , quand elle existe, peut être comprise comme une droite qui « frôle » la courbe en a .

Proposition 3. L'équation de la tangente de f en a , quand elle existe, est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Exemple. Soit $f: x \mapsto x^2 - 4$ définie sur \mathbb{R} .

- La fonction f est-elle dérivable en 3 ? En déduire son nombre dérivé en 3.
- En déduire l'équation de la tangente de f en 3.