

Suites arithmétiques

Terminale STMG 2

1 Termes d'une suite arithmétique

Définition 1 (Rappel). Une suite arithmétique est une suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par son **premier terme** u_0 et un nombre r appelé la **raison**, tel que chaque terme u_n pour $n > 0$ est obtenu en ajoutant r au terme précédent :

$$u_n = u_{n-1} + r$$

Exemple. • La suite

$$0; 2; 4; 6; 8; 10; \dots$$

est la suite de premier terme 0 et de raison 2.

$$0 \xrightarrow{+2} 2 \xrightarrow{+2} 4 \xrightarrow{+2} 6 \xrightarrow{+2} 8 \xrightarrow{+2} 10$$

• La suite

$$10; 9; 8; 7; 6; 5; \dots$$

est la suite de premier terme 10 et de raison -1 .

• La suite $1; 2; 4; 7; 11; \dots$ n'est pas une suite arithmétique. En effet,

$$1 \xrightarrow{+1} 2 \xrightarrow{+2} 4 \xrightarrow{+3} 7 \xrightarrow{+4} 11$$

Remarque. Une suite arithmétique est constante (tous ses termes sont égaux) si et seulement si sa raison est égale à 0.

Proposition 1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r . Alors, son n^{e} terme est donné par la formule

$$u_0 + n \times r$$

Exemple.

- a) Donner le 5^e terme de la suite arithmétique de premier terme 3, 5 et de raison 3 :
b) Donner le 10^e terme de la suite arithmétique de premier terme 12 et de raison -5 :

En résumé, il y a deux types d'écriture pour le n^{e} terme d'une suite arithmétique :

- La formule de récurrence $u_n = u_{n-1} + r$. Pour vérifier qu'une suite est arithmétique, on vérifie qu'on obtient chaque terme en ajoutant r au terme précédent.
- La formule explicite $u_n = u_0 + n \times r$. On l'utilise une fois qu'on sait qu'une suite arithmétique, pour calculer directement le n^{e} terme.

2 Étude d'une suite arithmétique

2.1 Variation d'une suite arithmétique

Proposition 2.

- Une suite arithmétique de raison r est **croissante** si et seulement si r est positive.
- Une suite arithmétique de raison r est **décroissante** si et seulement si r est négative.

Exemple. La suite arithmétique

2; 5; 8; 11; ...

est car sa raison vaut

La suite arithmétique

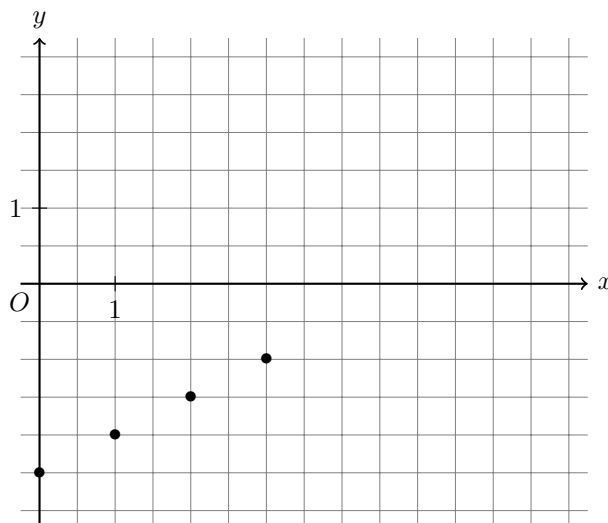
4; -2; -8; ...

est car sa raison vaut

2.2 Représentation graphique

Proposition 3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison n . Alors les points $(0, u_0)$, $(1, u_1)$, $(2, u_2)$, ... sont alignés.

Exemple.



On a représenté ici les premiers termes d'une suite arithmétique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- Quel est le premier terme u_0 de cette suite ?
- Quelle est la raison r de cette suite ?
- Placer les points correspondants aux termes suivants de cette suite.
- À partir de quel terme (quel n ?) la suite devient positive ?

Remarque. Un phénomène représenté par une suite arithmétique suit une évolution dite **linéaire**.

3 Moyenne arithmétique

Définition 2. La moyenne arithmétique entre deux nombres a et b est donnée par

$$\frac{a + b}{2}$$

Exemple. Calculer la moyenne arithmétique des couples de nombres suivants :

- a) 10 et 12 :
- b) -4 et 8 :
- c) 0 et 0,5 :
- d) 1, 3 et 1, 7 :

Proposition 4. Soit une suite arithmétique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Alors chaque terme u_n est la moyenne arithmétique du terme précédent et du terme suivant.

$$u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$$