

# Suites arithmétiques

Terminale STMG 2

## 1 Termes d'une suite arithmétique

**Définition 1** (Rappel). Une suite arithmétique est une suite numérique  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par son **premier terme**  $u_0$  et un nombre  $r$  appelé la **raison**, tel que chaque terme  $u_n$  pour  $n > 0$  est obtenu en ajoutant  $r$  au terme précédent :

$$u_n = u_{n-1} + r$$

**Exemple.** • La suite

$$0; 2; 4; 6; 8; 10; \dots$$

est la suite de premier terme 0 et de raison 2.

$$0 \xrightarrow{+2} 2 \xrightarrow{+2} 4 \xrightarrow{+2} 6 \xrightarrow{+2} 8 \xrightarrow{+2} 10$$

• La suite

$$10; 9; 8; 7; 6; 5; \dots$$

est la suite de premier terme 10 et de raison  $-1$ .

• La suite  $1; 2; 4; 7; 11; \dots$  n'est pas une suite arithmétique. En effet,

$$1 \xrightarrow{+1} 2 \xrightarrow{+2} 4 \xrightarrow{+3} 7 \xrightarrow{+4} 11$$

**Remarque.** Une suite arithmétique est constante (tous ses termes sont égaux) si et seulement si sa raison est égale à 0.

**Proposition 1.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique de raison  $r$ . Alors, son  $n^{\text{e}}$  terme est donné par la formule

$$u_0 + n \times r$$

**Exemple.**

- a) Donner le 5<sup>e</sup> terme de la suite arithmétique de premier terme 3, 5 et de raison 3 : .....  
b) Donner le 10<sup>e</sup> terme de la suite arithmétique de premier terme 12 et de raison  $-5$  : .....

En résumé, il y a deux types d'écriture pour le  $n^{\text{e}}$  terme d'une suite arithmétique :

- La formule de récurrence  $u_n = u_{n-1} + r$ . Pour vérifier qu'une suite est arithmétique, on vérifie qu'on obtient chaque terme en ajoutant  $r$  au terme précédent.
- La formule explicite  $u_n = u_0 + n \times r$ . On l'utilise une fois qu'on sait qu'une suite arithmétique, pour calculer directement le  $n^{\text{e}}$  terme.

## 2 Étude d'une suite arithmétique

### 2.1 Variation d'une suite arithmétique

**Proposition 2.**

- Une suite arithmétique de raison  $r$  est **croissante** si et seulement si  $r$  est positive.
- Une suite arithmétique de raison  $r$  est **décroissante** si et seulement si  $r$  est négative.

**Exemple.** La suite arithmétique

2; 5; 8; 11; ...

est ..... car sa raison vaut .....

La suite arithmétique

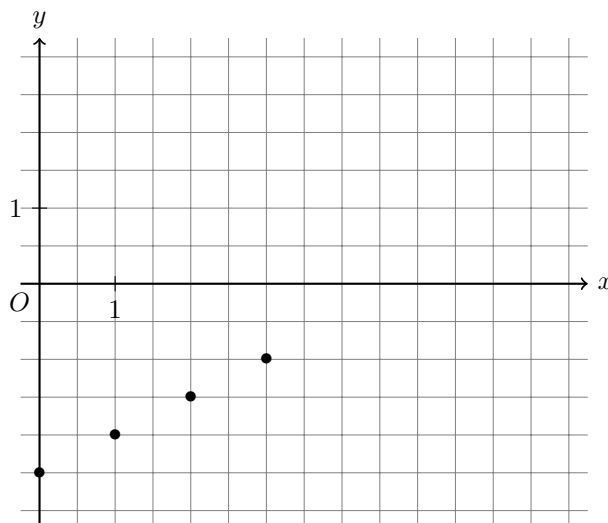
4; -2; -8; ...

est ..... car sa raison vaut .....

### 2.2 Représentation graphique

**Proposition 3.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique de raison  $n$ . Alors les points  $(0, u_0)$ ,  $(1, u_1)$ ,  $(2, u_2)$ , ... sont alignés.

**Exemple.**



On a représenté ici les premiers termes d'une suite arithmétique  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

- Quel est le premier terme  $u_0$  de cette suite ? .....
- Quelle est la raison  $r$  de cette suite ? .....
- Placer les points correspondants aux termes suivants de cette suite.
- À partir de quel terme (quel  $n$  ?) la suite devient positive ? .....

**Remarque.** Un phénomène représenté par une suite arithmétique suit une évolution dite **linéaire**.

### 3 Moyenne arithmétique

**Définition 2.** La moyenne arithmétique entre deux nombres  $a$  et  $b$  est donnée par

$$\frac{a + b}{2}$$

**Exemple.** Calculer la moyenne arithmétique des couples de nombres suivants :

- a) 10 et 12 : .....
- b)  $-4$  et 8 : .....
- c) 0 et 0,5 : .....
- d) 1, 3 et 1, 7 : .....

**Proposition 4.** Soit une suite arithmétique  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Alors chaque terme  $u_n$  est la moyenne arithmétique du terme précédent et du terme suivant.

$$u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$$

## 4 Somme des premiers termes d'une suite arithmétique

**Définition 3.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite. Pour parler de la somme  $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_N$ , on utilise la notation suivante :

$$\sum_{n=0}^N u_n$$

**Proposition 5.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique, et  $N$  un nombre entier. Alors,  $\sum_{n=0}^N u_n = (N+1) \frac{u_0 + u_N}{2}$ .

**Remarque.** En français, cette formule donnerait

$$(\text{Nombre de termes à ajouter}) \times \frac{\text{Premier terme} + \text{Dernier terme}}{2}$$

**Exemple.** Calculer les sommes suivantes :

- a)  $u_0 + u_1 + \dots + u_5$  pour  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de premier terme 6 et de raison 5.
- b)  $\sum_{n=0}^{10} v_n$  pour  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique de premier terme 27 et de raison  $-3$ .
- c)  $\sum_{n=0}^{42} w_n$  pour  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique de premier terme 15 et de raison 10.