Contrôle : Probabilités conditionnelles, indépendance

Première Spécialité Mathématiques

15 Janvier 2024

Exercice 1 : Arbre pondéré (5 points)

Un prof de maths prépare deux contrôles pour ses élèves : le contrôle de Décembre et le contrôle de Janvier. Il y a une probabilité de 60% qu'il inclut en décembre un exercice de géométrie :

— Si c'est le cas, alors il inclura un exercice de géométrie en Janvier avec une probabilité de 12%.
— Si ce n'est pas le cas, alors il inclura un exercice de géométrie en Janvier avec une probabilité de 45%.

On note D « Le contrôle de décembre comporte un exercice de géométrie » et J « Le contrôle de janvier comporte un exercice de géométrie ».

(a) (1 point) Dessiner un arbre pondéré présentant la situation.
(b) (1 point) Dire en français à quoi correspond la probabilité $P_D(J)$, puis donner sa valeur.
(c) (1 point) Dire en français à quoi correspond l'événement $D \cap J$, puis calculer $P(D \cap J)$.
(d) (1 point) Calculer $P(J)$.
(e) (1 point) Dire en français à quoi correspond l'événement $D \cup J$, puis calculer $P(D \cup J)$.

Exercice 2 : Football (5 points)

On considère les 23 joueurs vainqueurs de la coupe du monde de Football, et on regarde leur poste et s'ils jouaient en France ou à l'étranger durant la saison 2017-2018.

	France	Étranger	Total
Gardien	2	1	3
Défenseur	3	5	8
Milieu	1	5	6
Attaquant	3	3	6
Total	9	14	23

On tire un joueur au hasard. On définit les événements suivants :

— G « Le joueur est gardien »
— D « Le joueur est défenseur »
— M « Le joueur est milieu »
— A « Le joueur est attaquant »
— F « Le joueur a joué en France durant la saison 2017-2018 »

(a) (1 point) Calculer $P(G)$ et $P(F)$.
(b) (1 point) Calculer $P_M(F)$, $P_F(M)$ et $P_F(A)$.
(c) (1 point) Calculer $P_G(\overline{F})$ et $P_{\overline{F}}(D)$.
(d) (1 point) Trouver une probabilité conditionnelle valant $\dfrac{5}{8}$.
(e) (1 point) Calculer $P_{G \cup D}(F)$ et $P_{\overline{F}}(M \cup A)$.

Exercice 3 : Formule de Bayes (5 points)

(a) (1 point) Soit une expérience aléatoire d'univers Ω, et A et B deux événements d'Ω. On suppose de plus que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. Rappeler l'expression de $P_A(B)$ en fonction de $P(A \cap B)$ et de $P(A)$.
(b) (2 points) En déduire que $P_B(A) = \dfrac{P(A)}{P(B)} P_A(B)$ (Théorème de Bayes).

(c) (2 points) Soit une urne opaque contenant deux boules rouges et trois boules vertes. On tire deux boules successivement sans remise. On note A « la première boule est verte » et B la deuxième boule est verte.

   i. (1 point) Calculer $P(B)$.

   ii. (1 point) En déduire $P_B(A)$ à l'aide du théorème de Bayes.

Exercice 4 : Urnes (5 points)

Une urne contient 3 boules : 1 rouge, 1 verte et une bleue. On vide l'urne après tirages successifs des boules (sans remise). On considère les événements suivants :

— A « La boule rouge est tirée avant la boule bleue » ;

— B « La boule rouge est tirée lors du premier tirage » ;

— C « La boule rouge est tirée lors du deuxième tirage » ;

(a) (1 point) Déterminer les probabilités de ces trois événements.

(b) (2 points) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

(c) (2 points) Les événements A et C sont-ils indépendants ?