

Activité : La légende de Sissa

Premières Spécialité Mathématiques

11 Mars 2024

L'origine du jeu d'échecs a donné lieu à diverses légendes et mythes (le consensus scientifique est que le jeu a vu le jour en Inde au VI^e siècle). L'une de ces légendes est celle attribuée au sage Sissa. Il y est raconté que pour récompenser ce sage à l'origine de la création du jeu, son roi lui a offert de choisir sa récompense. Sissa formula alors la requête suivante :

Il suffit de poser des grains de riz sur chaque case d'un échiquier : 1 grain de riz sur la 1^{re} case ; 2 sur la 2^e ; 4 sur la 3^e ; 8 sur la 4^e ; et ainsi de suite...

- a) Combien y a-t-il de cases en tout sur un échiquier de jeu d'échecs ?
- b) Soit u_n la quantité de grain de riz sur la n^e case. Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique, en précisant son premier terme et sa raison.
- c) En déduire une expression de u_n en fonction de n .
- d) Justifier que la quantité totale de riz correspondant à la récompense de Sissa est donnée par

$$S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63}$$

- e) Justifier que $2S = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63} + 2^{64}$
- f) En déduire que $S - 2S = 1 - 2^{64}$, puis en déduire la valeur exacte de S .
- g) Sachant qu'un grain de riz mesure 5.2 mm, si l'on pose bout à bout tout le riz de la récompense de Sissa, quelle longueur obtient-on ? Comparer cette longueur à la distance Terre-Soleil.