3 Produit scalaire en géométrie repérée

On munit le plan d'un repère orthonormée (O, I, J). Les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ d'abscisse x et d'ordonnée y sont notées

$$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

3.1 Bilinéarité du produit scalaire

Proposition 5. *Soient trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$. Alors,*

$$\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$$

Remarque. *Ce résultat correspond donc à la distributivité du produit scalaire sur l'addition de vecteurs.*

Exemple. *Soient trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ de norme 1 tels que $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Que vaut $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$?*

....

3.2 Définition en géométrie repérée

Proposition 6. *Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$. Alors, le produit scalaire $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ est égal à*

$$x_u \times x_v + y_u \times y_v$$

Exemple. *Calculer le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ suivants*

a) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$: $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} =$ ....

b) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$: $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} =$ ....

c) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$: $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} =$ ....

d) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix}$: $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} =$ ....

3.3 Produit scalaire et norme

Proposition 7. *Soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur. Alors,*

$$\|\overrightarrow{u}\|^2 = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = x^2 + y^2$$

Proposition 8 (Identités remarquables)**.** *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. Alors*

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 & = \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) + \|\overrightarrow{v}\|^2 \\ \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 & = \|\overrightarrow{u}\|^2 - 2(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) + \|\overrightarrow{v}\|^2 \\ (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) & = \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2 \end{cases}$$

Proposition 9. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. Alors,*

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2) = \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u - v}\|^2)$$