Fonction Exponentielle

Premières Spécialité Mathématiques

1 Définition de la fonction exponentielle

Définition 1. *La fonction exponentielle, notée* exp*, est l'unique fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}$*, dérivable sur* $\mathbb{R}$*, solution de l'équation différentielle*

$$f' = f$$

avec condition initiale $f(0) = 1$.

Remarque.

- « ***solution*** » *: La fonction* exp *est définie et dérivable sur* $\mathbb{R}$*, et, pour tout* $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \exp'(x) = \exp(x) \\ \exp(0) = 1 \end{cases}$$

.

- « ***unique*** » *: si une fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dérivable sur* $\mathbb{R}$ *vérifie que pour tout* $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

alors $f = \exp$.

Exemple. a) *Soit* $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - 3x + \exp(x) \end{array}$*. Justifier que* g *est dérivable sur* $\mathbb{R}$*, puis calculer sa dérivée.*

b) *Soit* $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(-5x + 2) \end{array}$*. Justifier que* h *est dérivable sur* $\mathbb{R}$*, puis calculer sa dérivée.*

2 Propriétés algébriques de l'exponentielle

Théorème 1. *Soit x, y deux réels. Alors*

$$\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

Remarque. ***La fonction exponentielle transforme les sommes en produit.***

Démonstration. Soit y un nombre réel quelconque fixé. On pose $g\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)} \end{array}$ (on admet que $\exp(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).

a) Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que sa dérivée est nulle.

b) À l'aide de $g(0)$, en déduire la valeur de $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c) En conclure que $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$

□

Corollaire 1. *Soit x, y deux réels. Alors,*

$$\begin{cases} \exp(x) \times \exp(-x) = 1 \\ \exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)} \\ \exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)} \end{cases}$$

Démonstration. On prouve $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$ en admettant les deux identités précédentes.

□

Définition 2. *Soit a un réel. Alors la suite $(\exp(n \times a))_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite géométrique** de premier terme 1 et de raison $\exp(a)$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\exp(na) = \exp(a)^n$$

Démonstration. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \exp(na)$. Étudier u_{n+1} en fonction de u_n, puis déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

□

En particulier, on va s'intéresser à $a = 1$.

Définition 3. *Le nombre $e = \exp(1)$ est appelé **constante de Néper**, et vaut approximativement $2.718...$*

Par extension de la fonction puissance aux réels, la fonction exponentielle est notée, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

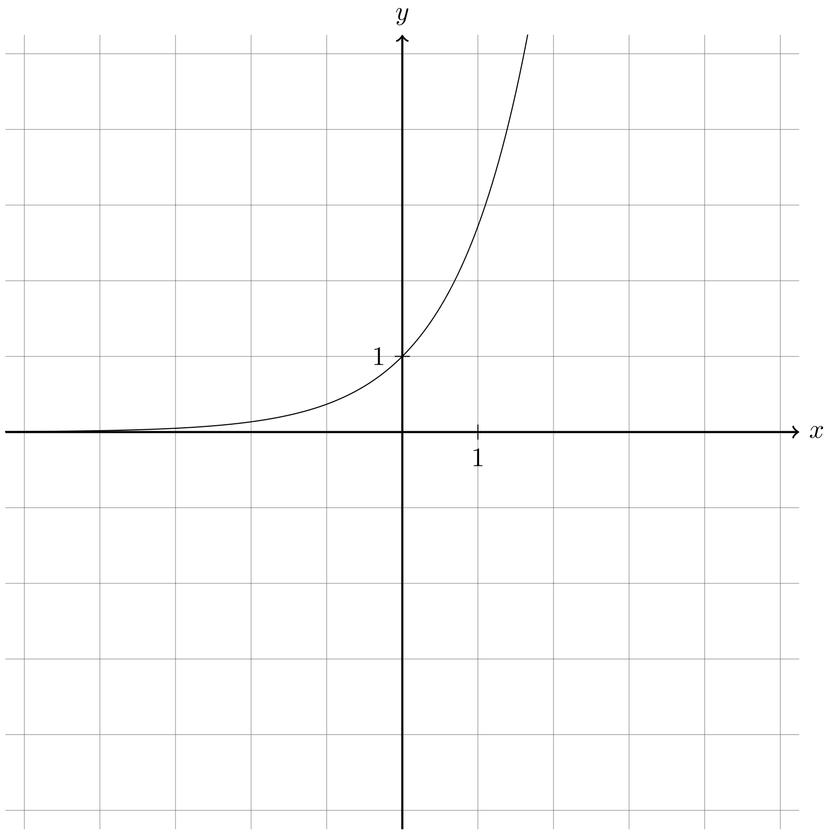
$$\exp(x) = e^x$$

Remarque. *La raison pour laquelle la notation e^x a été adoptée est pour correspondre avec les propriétés algébriques associées aux puissances :*

$$\begin{cases} e^{x+y} = e^x e^y \\ e^{-x} = \dfrac{1}{e^x} \\ e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y} \\ e^{nx} = (e^x)^n \quad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

3 Étude de la fonction exponentielle

On représente sur ce repère la courbe représentative de la fonction exponentielle.



Proposition 1. *La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$: pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\exp(x) > 0$$

Proposition 2. *Le fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:*

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variation de exp		1	

Proposition 3. *Soit x et y deux nombres réels. Alors,*

$$\begin{cases} \exp(x) = \exp(y) & \Leftrightarrow x = y \\ \exp(x) < \exp(y) & \Leftrightarrow x < y \end{cases}$$

Exemple. *Résoudre $\exp(x^2 - 1) = 1$ est équivalent à résoudre $\exp(x^2 - 1) = \exp(0)$, et donc est équivalent à résoudre $x^2 - 1 = 0$.*