Probabilités conditionnelles et indépendance d'événements

Première Spécialité Mathématiques

1 Introduction : Vocabulaire des probabilités

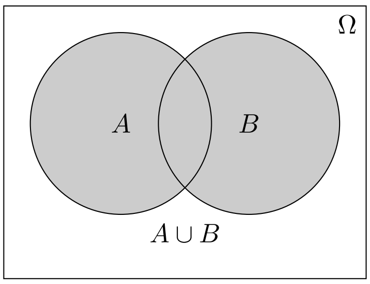
Un joueur ou une joueuse lance deux dés à six faces équilibrés, et observe la somme des valeurs obtenues.

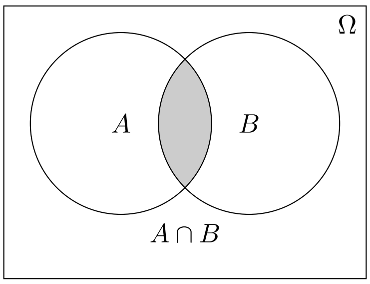
Définition 1.

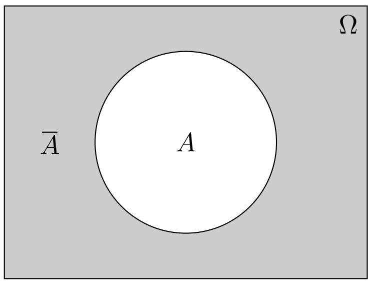
- *Une telle situation où le résultats possibles sont connus, mais où l'issue n'est a priori pas décidée à l'avance est nommée* ***Expérience aléatoire****.*
- *L'ensemble des* ***issues*** *possible de cette expérience est nommé l'****univers****, habituellement noté* Ω. (*Ici, un univers envisageable pour cette expérience est* $\Omega = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$)
- *Un sous-ensemble de l'univers* Ω *est appelé* ***événement****.* (*Par exemple, l'événement correspondant à obtenir une somme paire serait* $A = \{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$)

Définition 2. *Soient* A *et* B *deux événements d'une expérience aléatoire d'univers* Ω.

- *Si* $A = \Omega$, A *est appelé* ***événement certain****.* (*Par exemple, obtenir un nombre inférieur à* 13 *à l'aide de deux dés est un événement certain*)
- *Si* $A = \emptyset$ (*l'ensemble vide*), *alors* A *est appelé* ***événement impossible****.* (*Par exemple, obtenir* 1 *à l'aide de deux dés est un événement impossible*)
- *L'****union*** *des événements* A *et* B, *noté* $A \cup B$, *se lisant « A* ***union*** *B », est l'événement réalisant les issues de* A ***ou*** *celles de* B. (*Par exemple, si* $A = \{4; 10\}$ *et* $B = \{10; 12\}$, *alors leur union est donnée* $A \cup B = \{4; 10; 12\}$)
- *L'****intersection*** *des événements* A *et* B *noté* $A \cap B$, *se lisant « A* ***inter*** *B, est l'évenement réalisant à la fois les issues de* A ***et*** *celles de* B. (*Par exemple, si* $A = \{4; 10\}$ *et* $B = \{10; 12\}$, *alors leur intersection est donnée par* $A \cap B = \{10\}$)
- *Le complémentaire de l'événement* A *noté* $\overline{A}$, *se lisant « A* ***barre*** *», est l'événement réalisant toutes les issues qui ne sont pas réalisées par* A. (*Par exemple, le complémentaire de l'évenement correspondant à obtenir une somme paire serait l'événement correspondant à obtenir une somme impaire*)







Exemple. *Proposer deux événements* A *et* B *dont l'intersection et l'union sont non-vide.*

Définition 3. *Soient A et B deux événements d'une expérience aléatoire d'univers Ω. Alors A et B sont **disjoints** si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.*

Définition 4. *Soit une expérience aléatoire d'univers Ω. Une **probabilité** sur Ω associe à tout événement A un nombre réel $P(A)$ compris entre 0 et 1, et vérifie deux propriétés :*

- $P(\Omega) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ *si les événements A et B sont disjoints.*

Exemple. *Si A est l'événement consistant à obtenir 7 aux dés, alors*

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

Définition 5. ***Établir la loi de probabilité** d'une expérience aléatoire d'univers Ω consiste à associer à chaque issue $w \in \Omega$ sa probabilité $P(\{w\})$.*

Remarque. *Ainsi, si la loi de probabilité est connue, la probabilité d'un événement $P(A)$ est donnée par la somme de toutes les probabilités des issues réalisant A.*

Exemple. *On donne la loi de probabilité concernant la somme de deux dés.*

$w \in \Omega$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(\{w\})$	$1/36$	$1/18$	$1/12$	$1/9$	$5/36$	$1/6$	$5/36$	$1/9$	$1/12$	$1/18$	$1/36$

a) *Vérifier que la somme des probabilités vaut 1.*

b) *En déduire la probabilité de l'événement B « La somme des dé est paire ».*

Définition 6. *Soit une expérience aléatoire d'univers Ω, et P une probabilité sur Ω. On est en **situation d'équiprobabilité** si la loi de probabilité de P associe la même valeur à toutes les issues.*

Exemple.

- *Regarder le résultat du lancer d'un unique dé équilibré est une expérience aléatoire en situation d'équiprobabilité.*
- *Regarder la somme du résultat de deux dé équilibrés n'est pas une expérience aléatoire en situation d'équiprobabilité.*

Proposition 1. *Soit une expérience aléatoire d'univers Ω non vide, **en situation d'équiprobabilité**, et soit A un événement d'Ω. Alors la probabilité de A est donnée par*

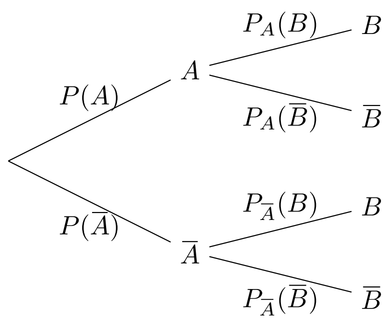
$$P(A) = \frac{\textit{Nombre d'éléments de } A}{\textit{Nombre d'éléments de } \Omega}$$

Comment calculer la probabilité d'un événement quand nous ne sommes pas dans une situation d'équiprobabilité ?

2 Représentation d'expérience aléatoire

2.1 Arbres pondérés

Exemple. *Soit une expérience aléatoire d'univers Ω, et deux événements A et B d'Ω. Alors, l'arbre pondéré suivant permet donne le moyen de calculer certains probabilités.*



Proposition 2.

- *Une branche de la racine à une extrémité correspond à l'intersection des événements correspondants. Pour calculer la probabilité de cette intersection, il faut multiplier les probabilités sur la branche.*
- *La somme de toutes les probabilités issues d'un même noeud vaut* 1.
- *La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités de toutes les branches contenant cet événement.*

2.2 Tableau

Certaines expériences aléatoires se prêtent bien à l'utilisation de tableaux à double entrée.

Exemple. *La somme du résultat du lancer de deux dés est un bon exemple, car il peut être résumé comme ceci :*

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Puisque toutes les cases correspondent à des situations équiprobables, il devient très facile de calculer la probabilité d'obtenir la somme de votre choix.

3 Théorie des probabilités

Nous allons chercher à comprendre les règles de calculs donnés par l'arbre pondéré.

3.1 Probabilités conditionnelles

Définition 7. *Soit une expérience aléatoire d'univers Ω, et A et B deux événenements de Ω. On suppose de plus que $P(A) \neq 0$.*
Alors, la ***probabilité de** A **sachant** B, notée $P_A(B)$, est la probabilité que B se réalise* ***sachant*** *que A s'est déjà réalisé.*

Exemple. *Une usine produit des vis et des clous. Certaines pièces ont une défaut de fabrication. On prend une pièce produite par cette usine au hasard.*

On note V « La pièce choisie est une vis » et D« La pièce choisie a un défaut de fabrication ». Dans chacune des situations suivantes, donner la probabilité correspondante (en choisissant bien la bonne notation)

a) *Il y a 4% de vis présentant un défaut de fabrication parmi toutes les pièces produites par l'usine.*

b) *Il y a 2% de vis présentant un défaut de fabrication parmi les vis produites par l'usine.*

Proposition 3 (Formule des probabilités composées)**.** *Soit A et B deux événements de Ω tels que $P(A) \neq 0$. Alors*

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

Remarque. *Il s'agit de la règle de calcul de la probabilité d'une branche dans un arbre pondéré.*

Proposition 4. *Soit A et B deux événements de Ω tels que $P(A) \neq 0$. Alors*

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Exemple. *On tire une bille au hasard dans un sac. Chaque bille est grosse ou petite, et chaque bille est rouge ou verte. On note R « La bille est rouge », et G « la bille est grosse ». Alors le tableau suivant donne la répartition du sac.*

	R	$\overline{R}$	*Total*
G	12	8	20
$\overline{G}$	7	13	20
Total	19	21	40

a) *Quelle est la probabilité d'obtenir une grosse bille rouge ?*

b) *Quelle est la probabilité d'obtenir une petite bille, sachant que la bille tirée est verte ?*

3.2 Partition de l'univers

Définition 8. *Soit une expérience aléatoire d'univers Ω. On dit que des événements A_1, A_2, ...A_n forment une* ***partition de*** Ω *si et seulement si*

$$\begin{cases} A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega \\ A_1,\ A_2\ ...A_n \textit{ sont disjoints deux à deux} \end{cases}$$

Remarque.

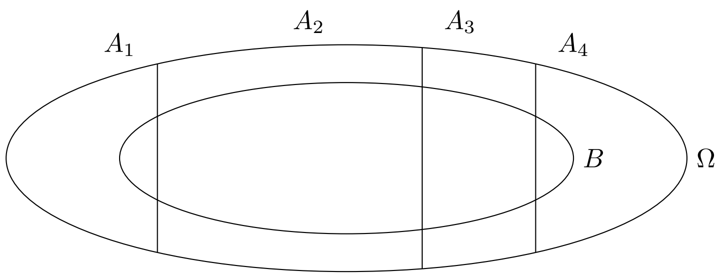
- *Créer une partition de Ω, c'est regrouper chaque issue de Ω dans un unique paquet.*
- *Soit A un événement de Ω, alors A et $\overline{A}$ forment une partition de Ω.*

Exemple. *On considère le lancer d'un seul dé équilibré. Alors si A« le résultat est pair », B« le résultat est 1 » et C « le résultat est impair supérieur ou égal à 3 », on en déduit que A, B et C forment une partition de l'univers de l'expérience.*

Proposition 5 (formule des probabilités totales)**.** *Soit B un évenement, et A_1, A_2, ..., A_n une partition de Ω. Alors,*

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_n)$$

Remarque. *Le schéma suivant permet de visualiser la situation.*



Remarque. *La formule des probabilité totale correspond à la méthode de calcul de la probabilité de plusieurs branches d'un arbre pondéré.*

À chaque hauteur de l'arbre, il faut donc s'assurer que tous les événements originaires d'une même branche forment une partition de l'univers Ω.

4 Indépendance

Définition 9. *Soit une expérience aléatoire d'univers Ω, et P une probabilité sur Ω.*
Soit A et B deux événements de Ω. Alors, A et B sont dits ***indépendants*** *si et seulement si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.*

Exemple. *On lance deux dés : un dé rouge et un dé bleu. On pose les événements A « le dé rouge renvoie un résultat pair », et B « le dé bleu renvoie un résulat supérieur ou égal à 4 ». Les événements A et B sont-ils indépendants ?*

Proposition 6. *Soit A et B deux événements, tels $P(A) \neq 0$. Alors, si A et B sont indépendants, on a*

$$P_A(B) = P(B)$$

Remarque. *Quand deux événements sont indépendants, cela signifie que la réalisation de l'un n'a pas d'influence sur la réalisation de l'autre.*

À ne pas confondre avec des événements ***incompatibles*** $(P(A \cap B) = 0)$.

Démonstration.

□

Proposition 7. *Soit A et B deux événenements indépendants de Ω. Alors $\overline{A}$ et B sont indépendants.*

Démonstration.

□