2 Opération algébriques

Proposition 2. *Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I **ouvert**.*

- *La fonction somme de u et v définie sur I par $s(x) = u(x) + v(x)$ est dérivable sur I, et sa dérivée vérifie, pour tout $x \in I$, $s'(x) = u'(x) + v'(x)$. $((u+v)' = u' + v')$*
- *La fonction produit de u et v définie sur I par $p(x) = u(x) \times v(x)$ est dérivable sur I, et sa dérivée vérifie, pour tout $x \in I$, $p'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. $((uv)' = u'v + uv')$*
- *En particulier, le produit p d'une fonction u définie sur I par une constante $a \in \mathbb{R}$, définie par $p(x) = a \times u(x)$, est dérivable sur I, et sa dérivée vérifie, pour tout $x \in I$, $p'(x) = au'(x)$.*
- *Si la fonction v ne s'annule pas sur l'intervalle I, alors la fonction inverse de v définie sur I par $i(x) = \dfrac{1}{v(x)}$ est dérivable sur I, et sa dérivée vérifie, pour tout $x \in I$, $i'(x) = -\dfrac{v'}{v^2(x)}$. $\left(\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}\right)$*
- *Si la fonction v ne s'annule pas sur l'intervalle I, alors la fonction quotient de u et de v définie sur I par $q(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ est dérivable sur I, et sa dérivée vérifie, pour tout $x \in I$, $q'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$. $\left(\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}\right)$*

Exemple. *Soient u et v deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :*

$$\begin{cases} u(x) = x^2 - 5x & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^* \\ v(x) = \sqrt{x} + 1 & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

a) *Les fonctions u et v sont-elles dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$? Donner l'expression de leur dérivée.*

b) *En déduire la dérivée de la somme, du produit et du quotient de u et v.*

3 Composition de fonctions

Définition 2. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On pose aussi a et b deux nombres réels. Enfin, on pose J l'intervalle des réels x tels que $ax + b \in I$.*
Alors on appelle la fonction g définie pour tout $x \in J$ par

$$g(x) = f(ax + b)$$

*la **fonction composée** de f par la fonction $x \mapsto ax + b$.*

Proposition 3. *Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, a et b deux réels et J l'intervalle des x vérifiant $ax + b \in I$. Alors la fonction composée de f par $x \mapsto ax + b$, c'est-à-dire la fonction définie pour tout $x \in J$ par $g(x) = f(ax + b)$ est dérivable sur J, et sa dérivée vaut pour tout $x \in J$,*

$$g'(x) = af'(ax + b)$$

Exemple. *Soit la fonction g définie sur un certain intervalle J par la formule*

$$g(x) = \sqrt{3x - 2} \text{ pour tout } x \in J$$

a) *Identifier le plus grand intervalle **ouvert** J sur lequel cette fonction est définie.*

b) *De quelles fonctions g est-elle la composée ?*

c) *En déduire que g est dérivable sur J, et calculer sa dérivée.*