Probabilités conditionnelles et indépendance d'événements

Première Spécialité Mathématiques

1 Introduction : Vocabulaire des probabilités

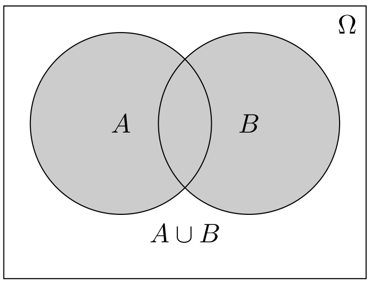
Un joueur ou une joueuse lance deux dés à six faces équilibrés, et observe la somme des valeurs obtenues.

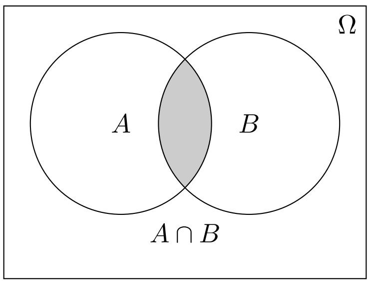
Définition 1.

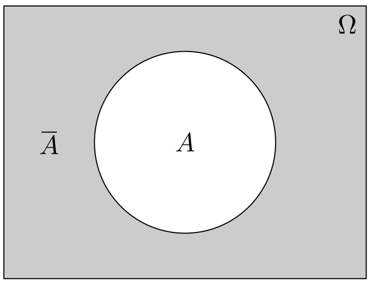
- *Une telle situation où le résultats possibles sont connus, mais où l'issue n'est a priori pas décidée à l'avance est nommée **Expérience aléatoire**.*
- *L'ensemble des **issues** possible de cette expérience est nommé l'**univers**, habituellement noté Ω. (Ici, un univers envisageable pour cette expérience est $\Omega = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$)*
- *Un sous-ensemble de l'univers Ω est appelé **événement**. (Par exemple, l'événement correspondant à obtenir une somme paire serait $A = \{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$)*

Définition 2. *Soient A et B deux événements d'une expérience aléatoire d'univers Ω.*

- *Si $A = \Omega$, A est appelé **événement certain**. (Par exemple, obtenir un nombre inférieur à 13 à l'aide de deux dés est un événement certain)*
- *Si $A = \emptyset$ (l'ensemble vide), alors A est appelé **événement impossible**. (Par exemple, obtenir 1 à l'aide de deux dés est un événement impossible)*
- *L'**union** des événements A et B, noté $A \cup B$, se lisant « A **union** B », est l'événement réalisant les issues de A **ou** celles de B. (Par exemple, si $A = \{4; 10\}$ et $B = \{10; 12\}$, alors leur union est donnée $A \cup B = \{4; 10; 12\}$)*
- *L'**intersection** des événements A et B noté $A \cap B$, se lisant « A **inter** B, est l'évenement réalisant à la fois les issues de A **et** celles de B. (Par exemple, si $A = \{4; 10\}$ et $B = \{10; 12\}$, alors leur intersection est donnée par $A \cap B = \{10\}$)*
- *Le complémentaire de l'événement A noté $\overline{A}$, se lisant « A **barre** », est l'événement réalisant toutes les issues qui ne sont pas réalisées par A. (Par exemple, le complémentaire de l'évenement correspondant à obtenir une somme paire serait l'événement correspondant à obtenir une somme impaire)*







Exemple. *Proposer deux événements A et B dont l'intersection et l'union sont non-vide.*

Définition 3. *Soient A et B deux événements d'une expérience aléatoire d'univers Ω. Alors A et B sont* ***disjoints*** *si et seulement si $A \cup B = \emptyset$.*

Définition 4. *Soit une expérience aléatoire d'univers Ω. Une* ***probabilité*** *sur Ω associe à tout événement A un nombre réel $P(A)$ compris entre 0 et 1, et vérifie deux propriétés :*

- $P(\Omega) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ *si les événements A et B sont disjoints.*

Exemple. *Si A est l'événement consistant à obtenir 7 aux dés, alors*

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

Définition 5. ***Établir la loi de probabilité*** *d'une expérience aléatoire d'univers Ω consiste à associer à chaque issue $w \in \Omega$ sa probabilité $P(\{w\})$.*

Remarque. *Ainsi, si la loi de probabilité est connue, la probabilité d'un événement $P(A)$ est donnée par la somme de toutes les probabilités des issues réalisant A.*

Exemple. *On donne la loi de probabilité concernant la somme de deux dés.*

$w \in \Omega$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(\{w\})$	$1/36$	$1/18$	$1/12$	$1/9$	$5/36$	$1/6$	$5/36$	$1/9$	$1/12$	$1/18$	$1/36$

a) *Vérifier que la somme des probabilités vaut 1.*

b) *En déduire la probabilité de l'événement B « La somme des dé est paire ».*

Définition 6. *Soit une expérience aléatoire d'univers Ω, et P une probabilité sur Ω. On est en* ***situation d'équiprobabilité*** *si la loi de probabilité de P associe la même valeur à toutes les issues.*

Exemple.

- *Regarder le résultat du lancer d'un unique dé équilibré est une expérience aléatoire en situation d'équiprobabilité.*
- *Regarder la somme du résultat de deux dé équilibrés n'est pas une expérience aléatoire en situation d'équiprobabilité.*

Proposition 1. *Soit une expérience aléatoire d'univers Ω non vide,* ***en situation d'équiprobabilité****, et soit A un événement d'Ω. Alors la probabilité de A est donnée par*

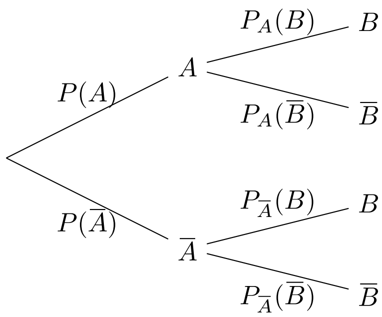
$$P(A) = \frac{\textit{Nombre d'éléments de } A}{\textit{Nombre d'éléments de } \Omega}$$

Comment calculer la probabilité d'un événement quand nous ne sommes pas dans une situation d'équiprobabilité ?

2 Représentation d'expérience aléatoire

2.1 Arbres pondérés

Exemple. *Soit une expérience aléatoire d'univers* Ω*, et deux événements* A *et* B *d'*Ω*. Alors, l'arbre pondéré suivant permet donne le moyen de calculer certains probabilités.*



Proposition 2.

- *Une branche de la racine à une extrémité correspond à l'intersection des événements correspondants. Pour calculer la probabilité de cette intersection, il faut multiplier les probabilités sur la branche.*
- *La somme de toutes les probabilités issues d'un même noeud vaut* 1*.*
- *La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités de toutes les branches contenant cet événement.*