

Produit scalaire, orthogonalité

Première Spécialité Mathématiques

1 Première définition du produit scalaire

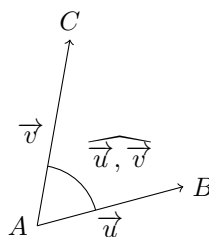
Lorsque que la notion de vecteur a été définie, l'objectif était d'avoir un objet géométrique capable de se comporter comme un nombre. Ainsi, on a défini en classe de seconde l'addition, la soustraction de vecteurs, ainsi que la multiplication d'un vecteur par un scalaire.

L'objectif est de définir une nouvelle opération sur les vecteurs qui se comporte comme une multiplication entre deux vecteurs.

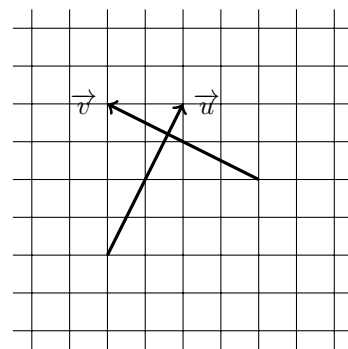
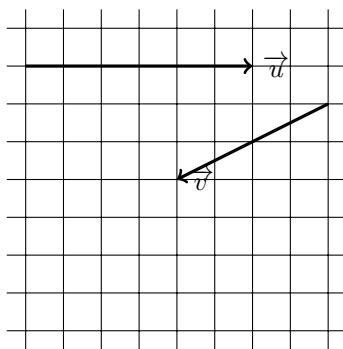
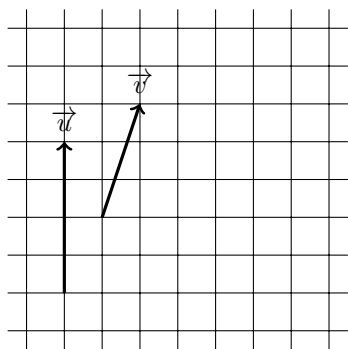
On se place sur le plan.

Définition 1. Soit \vec{u} un vecteur. Alors, la norme de \vec{u} (sa « longueur ») est notée $\|\vec{u}\|$.

Définition 2. Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls. On pose A, B, C trois points du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. On note $\widehat{\vec{u}, \vec{v}}$ l'angle \widehat{BAC} .



Exemple. Pour chaque couple de vecteurs \vec{u} et \vec{v} suivants, construire trois points A, B et C tels que $\widehat{\vec{u}, \vec{v}} = \widehat{BAC}$.



Définition 3 (Produit scalaire). Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs. On appelle **produit scalaire** de \vec{u} et de \vec{v} , noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, le nombre :

- 0 si \vec{u} est nul ou \vec{v} est nul.
- $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ dans le cas contraire.

2 Premières propriétés

2.1 Propriétés algébriques

Proposition 1. Soient \vec{u} , \vec{v} deux vecteurs du plan, ainsi que $k \in \mathbb{R}$.

1. On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$. (Le produit scalaire est symétrique)
2. On a $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$.

Remarque. Attention à l'usage de \cdot et de \times : l'un concerne deux vecteurs, et l'autre deux nombres.

Exemple. Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\widehat{\vec{u}; \vec{v}} = 30^\circ$. Calculer les produits scalaires suivants.

- a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dots\dots\dots$
- b) $\vec{u} \cdot \vec{u} = \dots\dots\dots$
- c) $\vec{v} \cdot (2\vec{u}) = \dots\dots\dots$
- d) $(-4\vec{u}) \cdot (3\vec{v}) = \dots\dots\dots$

2.2 Propriétés géométriques

Proposition 2. Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs.

- Si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires de même sens, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$;
- Si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires de sens opposés, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$;

Définition 4. Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs. Alors ces deux vecteurs sont dit **orthogonaux** si l'un des deux vecteurs est nul ; ou si l'angle $\widehat{\vec{u}; \vec{v}}$.

Proposition 3. Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs. Alors, \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Remarque. • Cette proposition est facile à démontrer avec notre définition, mais sera surtout utile avec les définitions suivantes.

- Le vecteur nul est donc orthogonal à tous les vecteurs.

2.3 Définition avec le projeté orthogonal

Définition 5 (Rappel). Soit M un point du plan et (d) une droite. Le **projeté orthogonal** de M par rapport à la droite (d) est l'unique point M' appartenant à la droite (d) et tel que les droites (MM') et (d) sont perpendiculaires.

Proposition 4. Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls. On pose A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. De plus, on pose H le projeté orthogonal de C par rapport à la droite AB . Alors,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} AB \times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de même sens ;} \\ -AB \times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de sens opposés.} \end{cases}$$