Probabilités conditionnelles

Terminale STMG1

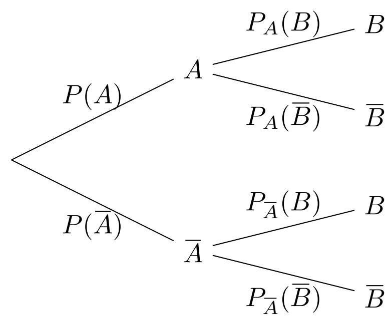
1 Rappels de vocabulaire

On considère comme exemple d'expérience aléatoire le lancer d'un dé équilibré à 6 faces dont on observe le résultat.

- L'univers d'une expérience aléatoire, noté Ω, est l'ensemble de toutes les issues possibles $\rightarrow \Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ dans le cas du lancer de dé.
- Un événement est une partie de Ω, c'est ce dont on va évaluer la probabilité $\rightarrow A$« Obtenir un pair »est un événement, de probabilité $P(A) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.
- Ω est aussi un événement appelé **événement certain**, avec $P(\Omega) = 1$
- Si A et B sont deux événements, alors la réalisation de A **ou bien** de B est modélisée par l'**union** $A \cup B$ $\rightarrow$ l'union de A« Obtenir 2 »et de B« Obtenir 4 »est $A \cup B$« obtenir 2 ou 4 ».
- Si A et B sont deux événements, alors la réalisation de A **et** de B est modélisée par l'**intersection** $A \cap B$ $\rightarrow$ l'intersection de A« Obtenir un pair »et de B« Obtenir un 2 ou un 3 »est $A \cap B$« Obtenir un 2 »

2 Représentation d'expérience aléatoire

Exemple. *Soit une expérience aléatoire d'univers* Ω, *et deux événements* A *et* B *d'*Ω. *Alors, l'arbre pondéré suivant donne le moyen de calculer certaines probabilités.*



Proposition 1.

- *Une branche de la racine à une extrémité correspond à l'intersection des événements correspondants. Pour calculer la probabilité de cette intersection, il faut multiplier les probabilités sur la branche.*
- *La somme de toutes les probabilités issues d'un même noeud vaut* 1.
- *La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités de toutes les branches contenant cet événement.*

Exercice 1. *Soit une urne contenant* 4 *boules rouges et* 1 *boule noire. On tire une boule au hasard dans l'urne. Sans la remettre à l'intérieur, on en tire ensuite une autre. On note* R_1 *l'événement ≪ la première boule tirée est rouge ≫, et* R_2 *l'événement ≪ la deuxième boule tirée est rouge ≫*

a) Représenter l'expérience aléatoire décrite par un arbre.

b) Calculer la probabilité $P(R_1 \cap R_2)$.

c) Calculer la probabilité $P(R_2)$.

3 Probabilités conditionnelles

Définition 1. *Soit une expérience aléatoire d'univers* Ω*, et* A, B *deux événements de* Ω*. On suppose de plus que* $P(A) \neq 0$*. Alors, la* ***probabilité de*** B ***sachant*** A*, noté* $P_A(B)$*, est la probabilité que* B *se réalise tout en sachant que* A *s'est déjà réalisé.*

Proposition 2. *Soit une expérience aléatoire d'univers* Ω*, et* A, B *deux événements de* Ω*. On suppose de plus que* $P(A) \neq 0$*. Alors, on a la formule*

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Proposition 3 (Formule des probabilités composées)**.** *Soit une expérience aléatoire d'univers* Ω*, et* A, B *deux événements de* Ω*. On suppose de plus que* $P(A) \neq 0$*. Alors,*

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$$

Remarque. *Cette formule correspond à la multiplication des poids d'****une branche*** *dans un arbre pondéré de probabilités.*

Proposition 4 (Formule des probabilités totales)**.** *Soit une expérience aléatoire d'univers* Ω*, et* A *et* B *deux événements de* Ω*. Alors,*

$$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)$$

Remarque. *Cette formule correspond à la somme des probabilités de* ***chaque branche*** *réalisant l'événement* B *dans un arbre pondéré de probabilités.*

Exemple. *Il y a dans une urne trois boules rouges et deux boules noires. On tire deux boules successivement, sans remise. On pose* A *l'événement ≪ la première boule est rouge ≫et* B *l'événement ≪ la deuxième boule est rouge ≫.*

a) Donner $P_A(B)$ *à l'aide du contexte.*

b) Calculer $P(A \cap B)$*.*

c) Calculer $P(B)$*.*

4 Indépendance

Définition 2. *Soit une expérience aléatoire d'univers Ω. On considère A, B deux événements de Ω. On dit que A et B sont* ***indépendants*** *si et seulement si*

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Proposition 5. *Soit une expérience aléatoire d'univers Ω. On considère A, B deux événements de Ω. On suppose de plus que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. Alors, A et B sont indépendants si et seulement si*

$$P_A(B) = P(B) \text{ ou } P_B(A) = P(A)$$

Remarque. ***Deux événements sont indépendants si le fait de savoir la réalisation de l'un n'a pas d'influence sur la réalisation de l'autre.***

Exemple. *On lance deux fois une pièce équilibrée, les événements A ≪ le premier lancer a donné face ≫et B ≪ le deuxième lancer a donné pile ≫sont-ils indépendants ?*

On lance un dé rouge et un dé bleu, et on regarde le résultat des deux dés. On pose les événements suivants :

— A *≪ le dé rouge renvoie 2 ≫*

— B *≪ la somme des deux dés vaut 5 ≫*

— C *≪ la somme des deux dés vaut 7 ≫*

a) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

b) Les événements A et C sont-ils indépendants ?

5 Résumé des formules en probabilités

Soient A et B deux événements d'une expérience aléatoire d'univer Ω.

— $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

— $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$ (quand $P(A) \neq 0$)

— $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ (quand A et B sont indépendants)

— $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

— $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (quand A et B sont disjoints).