Démonstration de la forme canonique

Quentin Canu

11 Septembre 2025

Proposition 1. *Soit f une fonction polynomiale du second degré telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$ pour tout x réel. Alors, il existe α et β deux nombres réels tel que*

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

Démonstration. On rappelle d'abord le résultat suivant : soient p et q deux nombres réels, alors $(p-q)^2 - q^2 = p^2 - 2pq$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On remarque dans la formule recherchée que le coefficient a est le même. On factorise donc par a :

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

On multiplie ≪ en haut et en bas ≫la fraction par -2 :

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(x^2 + \frac{-2b}{-2a}x\right) + c \\ &= a\left(x^2 - 2\left(\frac{-b}{2a}\right)x\right) + c \end{aligned}$$

On pose $p = x$ et $q = \dfrac{-b}{2a}$. Alors, en utilisant le résultat du début de la démonstration :

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{-b}{2a}\right)^2\right) + c \\ &= a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 - a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + c \end{aligned}$$

On conclut en posant $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = -a\left(\dfrac{-b}{2a}\right)^2 + c$ □