4.3 Valeur absolue, distance

Définition 11. *Soit x un nombre réel. La* ***valeur absolue*** *de x, notée $|x|$, est un nombre donné par :*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemple. *Calculer les valeurs absolues suivantes :*

a) $|7| =$ ……………………

b) $|-8| =$ ……………………

c) $|3,7| =$ ……………………

d) $|-6,575757\ldots| =$ ……………………

e) $|\pi| =$ ……………………

f) $\left|-\sqrt{5}\right| =$ ……………………

Remarque. *La valeur absolue d'un nombre est ce même nombre,* ***éventuellement débarassé du signe moins****.*

Définition 12. *Soient a et b deux nombres réels. La* ***distance*** *entre a et b est donnée par la grandeur $|a-b|$.*

Remarque. *Cette notion de distance est équivalente à la longueur du segment entre les points correspondant à a et b sur la droite des réels.*

Proposition 12. *Soit x un nombre réel, et n un entier naturel. Alors il existe $d \in \mathbb{D}$ tel que*

$$|x-d| \leq 10^{-n}$$

Remarque. *Le nombre d est appelé* ***approximation de*** *x jusqu'à la n^e décimale.*

Exemple. *Donner l'approximation correspondante aux nombres suivants, jusqu'à la n^e décimale :*

a) $x = 7,333\ldots$ *et* $n = 2$ *:* $d = 7,33$

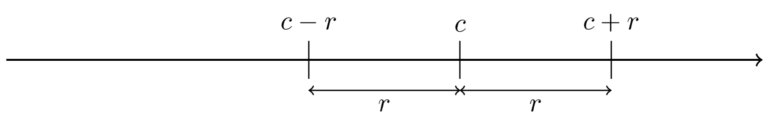
b) $x = \pi$ *et* $n = 5$ *:* $d =$ ……………………

c) $x = \dfrac{12}{7}$ *et* $n = 3$ *:* $d =$ ……………………

Proposition 13. *Soit c un nombre réel et r un nombre réel* ***positif****. Alors, l'ensemble des nombres x vérifiant $|x-c| \leq r$ est donné par l'intervalle*

$$[c-r; c+r]$$

Remarque. *En français, l'inégalité $|x-c| \leq r$ signifie que « la distance entre x et c est inférieure à r ». Cela se traduit de la façon suivante sur la droite des réels.*



Exemple. *Donner l'ensemble S des solutions de toutes les inéquations suivantes d'inconnue x :*

a) $|x-6| \leq 3$ *;* $S =$ ……………………

b) $\left|x + \dfrac{3}{4}\right| \leq 1$ *;* $S =$ ……………………