

# Chapitre 1 : Étude de fonctions polynomiales du second degré

Premières Spécialité Mathématiques

## 1 Rappel : Fonctions affines

**Définition 1.** Une **fonction affine** est une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f(x) = ax + b$$

avec  $a \neq 0$  et  $b$  deux réels.

Le réel  $a$  est appelé **coefficent directeur** de  $f$ .

Le réel  $b$  est appelé **ordonnée à l'origine** de  $f$ .

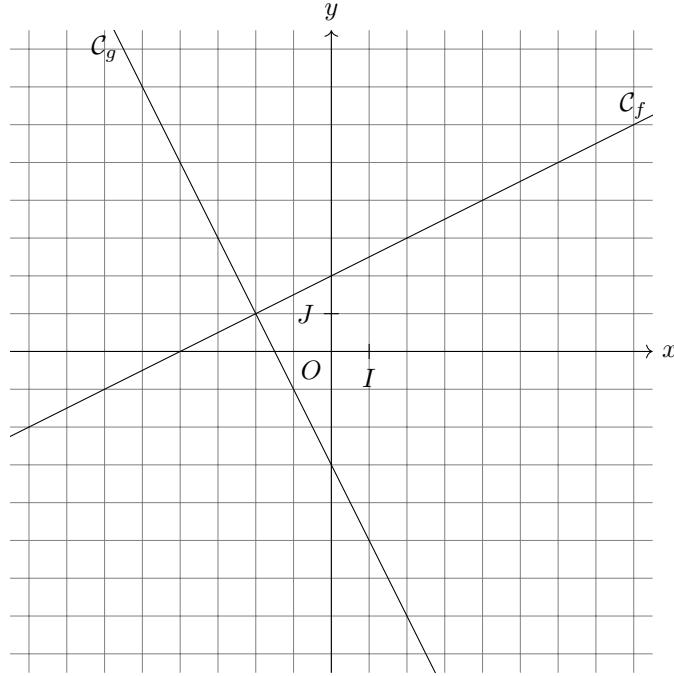
**Remarque.** Quand  $b = 0$ , c'est-à-dire quand  $f(x) = ax$ , on dit que la fonction est **linéaire**.

**Proposition 1.** Soit  $f : x \mapsto ax + b$  une fonction affine avec  $a \neq 0$  et  $b$  deux nombres réels ; et  $(O; I; J)$  un repère orthonormée. Alors, la courbe représentative de  $f$  dans ce repère est une droite.

**Proposition 2.** Soit  $(O; I; J)$  un repère orthonormée, et  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  dont la courbe représentative est une droite. Alors,  $f$  est une fonction affine telle que  $f(x) = ax + b$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  où :

- son coefficient directeur  $a$  est donnée par la pente de la droite ;
- son ordonnée à l'origine  $b$  est l'ordonnée du point de la droite d'abscisse 0.

**Exercice 1.** Sur le repère  $(0; I; J)$  ci-contre, on a tracé la courbe représentative de deux fonctions affines  $f$  et  $g$ .



En déduire l'expression algébrique de  $f$  et  $g$ .

**Proposition 3.** Soit  $f : x \mapsto ax + b$  une fonction affine, et  $x_1 < x_2$  deux réels distincts. Alors,

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \text{et} \quad b = f(x_1) - ax_1$$

**Proposition 4.** Soit  $f : x \mapsto ax + b$  une fonction affine.

- Si  $a < 0$ , alors  $f$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$ .
- Si  $a > 0$ , alors  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .

**Méthode 1.** Pour dresser le tableau de signes d'une fonction affine  $f : x \mapsto ax + b$ , il faut :

1. Déterminer l'antécédant de 0 de  $f$ , autrement dit, trouver  $x$  tel que  $ax + b = 0$  ;
2. Le tableau de signes s'obtient en suivant la variation de la fonction, autrement dit, cela dépend du signe de  $a$

**Exercice 2.** Dresser le tableau de signes des fonctions trouvées dans l'exercice 1.

## 2 Fonction polynomiale du second degré

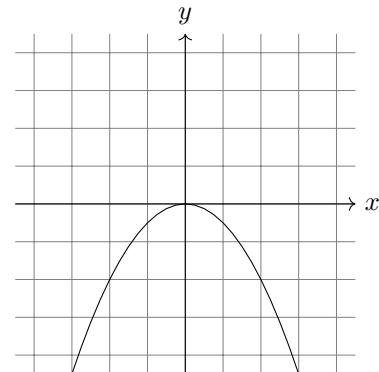
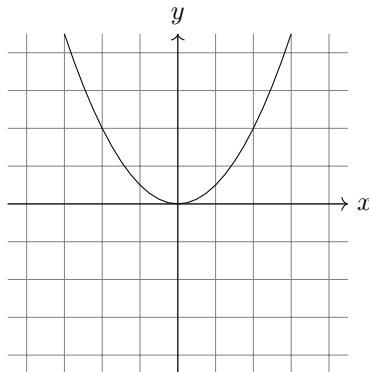
**Définition 2.** Une **fonction polynomiale du second degré** est une fonction  $f$  définie sur les réels qui à tout nombre  $x$  associe un réel  $f(x)$  de la forme :

$$ax^2 + bx + c$$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des réels avec  $a \neq 0$ .

**Remarque.** L'hypothèse  $a \neq 0$  est essentielle, sinon la fonction est polynomiale de degré au plus 1.

On trace la courbe représentative de deux fonctions polynomiales du second degré : une avec  $a > 0$  et une avec  $a < 0$ .



**Définition 3.** Soit  $f$  une fonction polynomiale de degré 2. Sa courbe représentative est appelée une **parabole**.

**Proposition 5.** Soit  $f$  une fonction polynomiale de degré 2, telle que  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Alors :

- Si  $a > 0$ , il existe une valeur de  $x$ , notée  $x_m$  telle que  $f$  est décroissante sur  $]-\infty; x_m]$  et croissante sur  $[x_m; +\infty[$
- Si  $a < 0$ , il existe une valeur de  $x$ , notée  $x_M$  telle que  $f$  est croissante sur  $]-\infty; x_M]$  et décroissante sur  $[x_M; +\infty[$

**Remarque.**

- Dans le cas  $a > 0$ , les « branches de la paraboles sont tournées vers le haut ». Dans le cas contraire ( $a < 0$ ), elles sont « tournées vers le bas ».
- Dans le cas  $a > 0$ ,  $f$  admet un unique minimum, et ce minimum est atteint en  $x_m$ . Dans le cas contraire ( $a < 0$ ),  $f$  admet un maximum, et ce maximum est atteint en  $x_M$ .

### 3 Recherche de l'extremum

#### 3.1 Forme canonique

**Proposition 6.** Soit  $f$  une fonction polynomiale du second degré telle que  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Alors il existe  $\alpha$  et  $\beta$  tel que

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

**Remarque.** Dans ce cas,  $\alpha = \frac{-b}{2a}$  et  $\beta = f(\alpha)$ .

**Exemple.** Soit l'expression polynomiale du second degré  $-x^2 + 2x - 5$ . Déterminer sa forme canonique.

**Méthode 2** (Par identification).

**Méthode 3** (En utilisant une identité remarquable « limitée »).

### 3.2 Extremum

**Proposition 7.** Soit une fonction polynomiale du second degré  $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ . On suppose que  $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$  pour tout  $x$  réel. Alors,  $f$  admet un extremum qu'il atteint en  $\alpha$  et ayant pour valeur  $\beta$ .

**Remarque.** Comme dit précédemment, si  $a > 0$ , alors  $f$  admet un minimum qu'il atteint en  $\alpha = \frac{-b}{2a}$ . Sinon, si  $a < 0$ , alors  $f$  admet un maximum qu'il atteint en  $\alpha = \frac{-b}{2a}$ . Dans les deux cas, cet extremum vaut  $\beta = f(\alpha)$ .

**Exemple.** Soit la fonction polynomiale  $g : x \mapsto 4x^2 + 32x - 5$ .

- Cette fonction admet-elle un minimum ou un maximum ?
- En quelle valeur cet extremum est-il atteint ?
- Que vaut cet extremum ?

**Proposition 8.** Soit  $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$  une fonction polynomiale du second degré. On suppose que  $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ . Alors la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  est une parabole admettant comme axe de symétrie la droite  $x = \alpha$ .

**Exemple.** Soit  $f : x \mapsto x^2 - 2x + 1$ . Alors  $f$  admet un minimum (car  $a > 0$ ) atteint en  $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2} = 1$ . Alors  $\mathcal{C}_f$  admet la droite  $x = 1$  comme axe de symétrie.

