

Chapitre 4 : Généralités sur les fonctions

Seconde 3

1 Définitions

Définition 1. Une **fonction** est un objet mathématique capable d'associer un **unique** résultat à tout objet d'un ensemble appelé **ensemble de définition**.

Exemple. On définit plusieurs fonctions dont l'ensemble de définition est l'ensemble des élèves de la seconde 3 :

- f est la fonction qui à un élève de la seconde 3 associe sa date d'anniversaire.
- g est la fonction qui à un élève de la seconde 3 associe sa couleur préférée.
- h est la fonction qui à un élève de la seconde 3 associe l'initiale d'un des membres de sa famille.
(Attention ! A-t-on vraiment défini une fonction ici ?)
- p est la fonction qui à un élève de la seconde 3 associe
- q est la fonction qui à un élève de la seconde 3 associe

Remarque. On s'intéresse majoritairement en mathématiques aux fonctions numériques. Les ensembles de définitions sont des ensembles de nombres, et le résultat renvoyé par les fonctions est toujours un nombre réel.

Définition 2. Une **fonction numérique à valeurs réelles** est une fonction f définie de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccc} f: & I & \rightarrow \mathbb{R} \\ & x & \mapsto f(x) \end{array}$$

avec I son **ensemble de définition**.

Remarque.

- La plupart du temps, on aura $I = \mathbb{R}$, I est un intervalle ou I est une réunion d'intervalles.
- On aura toujours \mathbb{R} à droite de la flèche du haut : on dit que l'**ensemble d'arrivée** est \mathbb{R} .
- La flèche du bas se lit de la manière suivante : au nombre x , on renvoie le nombre $f(x)$

Définition 3. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. On pose b vérifiant l'égalité

$$b = f(a).$$

Alors,

- a est **un antécédent** de b par la fonction f .
- b est **l'image** de a par la fonction f .

Exemple. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto 2x + 1$$

a) Donner l'image de 3 par f :

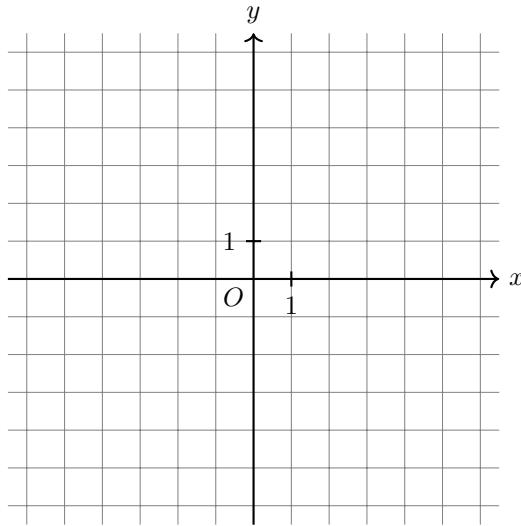
b) Donner un antécédent de 7 par f :

2 Courbe représentative

Définition 4. Un repère orthonormé est un repère formé par deux axes tels que :

- Les deux axes sont perpendiculaires (on dit que le repère est **orthogonal**)
- Les deux axes sont gradués et ont des graduations de longueurs égales (on dit que le repère est **normé**)

Exemple. On représente traditionnellement un repère orthonormé de la manière suivante :



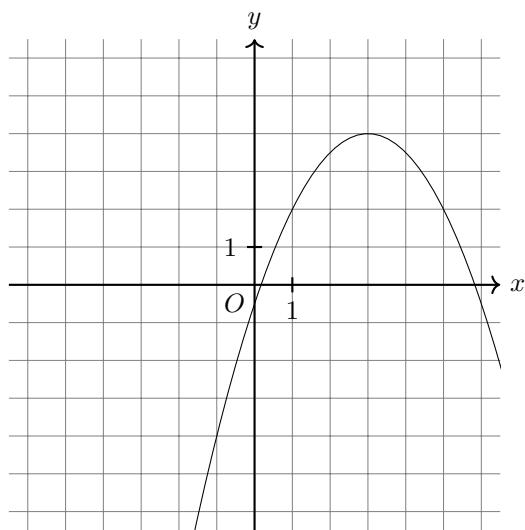
- L'axe horizontal est appelé **axe des abscisses**.
- L'axe vertical est appelé **axe des ordonnées**.
- Le point d'abscisse 0 et d'ordonnée 0 (de coordonnées (0;0)) est appelé **origine du repère**.

Définition 5. Soit f une fonction définie sur un ensemble de définition I . On se place sur un repère orthonormé. Alors, la **courbe représentative** de f , notée C_f , est l'ensemble des points du repère de coordonnées $(x; y)$ vérifiant

$$y = f(x)$$

Remarque. La courbe représentative d'une fonction permet donc de représenter la fonction, c'est-à-dire de représenter la transformation d'un antécédent en une image par la fonction f . Chaque point de la courbe de coordonnées $(x; y)$ représente une telle transformation : l'abscisse x du point joue le rôle de l'antécédent, et l'ordonnée y du point joue le rôle de l'image.

Exemple. Soit f une fonction dont la courbe représentative est donnée sur le repère orthonormé suivant. Donner l'image de 3 par f :

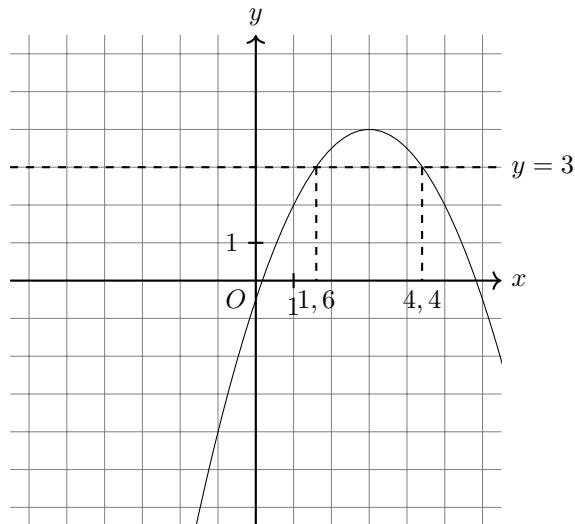


La courbe représentative d'une fonction f procure de nombreuses informations concernant f .

2.1 Calcul des antécédents de f

Pour chercher un antécédent (ou tous les antécédents) d'un nombre a par f , on trace une droite horizontale d'équation $y = a$:

Exemple.

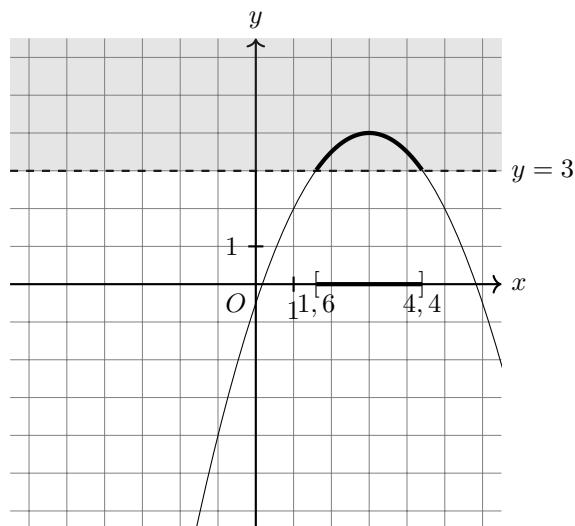


On a résolu ici l'équation $f(x) = 3$: l'ensemble \mathcal{S} des solutions est donné par $\mathcal{S} = \{1, 6; 4, 4\}$.

2.2 Résolution d'inéquation $f(x) \geq a$

Dans ce cas, on cherche les zones où la courbe est **au-dessus** de la droite horizontale d'équation $y = a$.

Exemple.



Ici, on a résolu l'inéquation $f(x) \geq 3$: l'ensemble des solutions \mathcal{S} de cette inéquation est donné par l'intervalle $[1, 6; 4, 4]$.

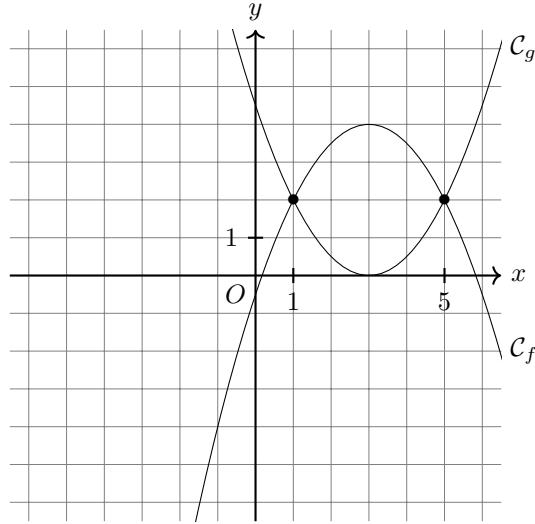
Remarque.

- Le sens des crochets est toujours dépendant des cas d'égalités.
- La même méthode marche pour $f(x) > a$; $f(x) \leq a$ et $f(x) < a$.
- Si la courbe est au-dessus de la droite à plusieurs endroit, alors on « joint » les différents intervalles-solutions à l'aide du symbole \cup (qui se lit « **union** »). Par exemple, $[0; 1] \cup]4, 5; 9]$ est une union d'intervalles.

2.3 Résolution d'équation $f(x) = g(x)$

Cette information est donnée par les points d'intersection des courbes représentatives des fonctions f et g

Exemple.

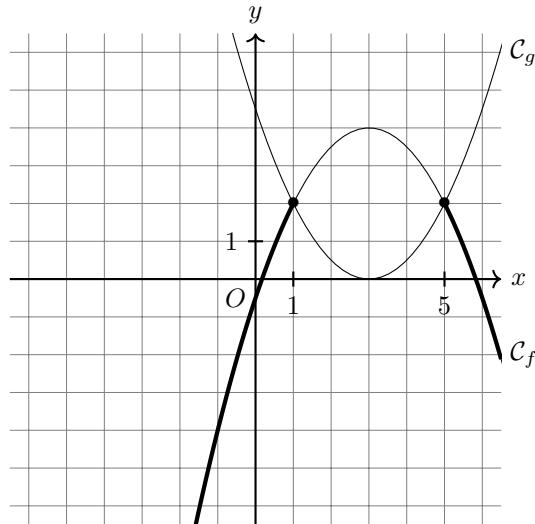


L'ensemble des solutions de $f(x) = g(x)$ est donné par $\mathcal{S} = \{1; 5\}$.

2.4 Résolution d'inéquation $f(x) < g(x)$

Cette information est donnée par la position relative entre les deux courbes représentatives.

Exemple.



L'ensemble \mathcal{S} des solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ est donné par la réunion d'intervalles $] -\infty; 1[\cup]5; +\infty[$.

3 Fonctions croissantes et décroissantes

Définition 6. Soit f une fonction à valeurs réelles, et I un intervalle sur lequel f est définie.

- On dit que f est **croissante sur I** , si pour tout $x < y \in I$, on a $f(x) \leq f(y)$.
- On dit que f est **strictement croissante sur I** , si pour tout $x < y \in I$, on a $f(x) < f(y)$.
- On dit que f est **décroissante sur I** , si pour tout $x < y \in I$, on a $f(x) \geq f(y)$.
- On dit que f est **strictement décroissante sur I** , si pour tout $x < y \in I$, on a $f(x) > f(y)$.
- On dit que f est **constante sur I** , si pour tout $x < y \in I$, on a $f(x) = f(y)$

Remarque.

- Si l'intervalle I est clair suivant le contexte, alors on peut dire qu'une fonction est croissante ou décroissante sans préciser l'intervalle I .
- On dit qu'une fonction croissante (ou strictement croissante) **conserve l'ordre**, tandis qu'une fonction décroissante (ou strictement décroissante) **inverse l'ordre**.

Définition 7. Soit f une fonction à valeurs réelles, et I un intervalle sur lequel f est définie.

- On dit que f est **monotone sur I** si f est croissante sur I ou si f est décroissante sur I .
- On dit que f est **strictement monotone sur I** si f est strictement croissante sur I ou si f est strictement décroissante sur I .

Remarque. Pour déterminer qu'une fonction n'est pas monotone sur un intervalle I , il suffit de trouver trois réels $x < y < z \in I$ tels que $f(x)$, $f(y)$ et $f(z)$ ne soient pas dans le même ordre (*Ni* $f(x) \leq f(y) \leq f(z)$, *ni* $f(x) \geq f(y) \geq f(z)$).

Exemple. Soit une fonction f définie sur l'intervalle $[-4; 6]$ dont la courbe représentative \mathcal{C}_f est donnée ci-dessous.

a) Comparer $f(-2)$ et $f(0)$. L'ordre entre -2 et 0 est-il conservé par f ?

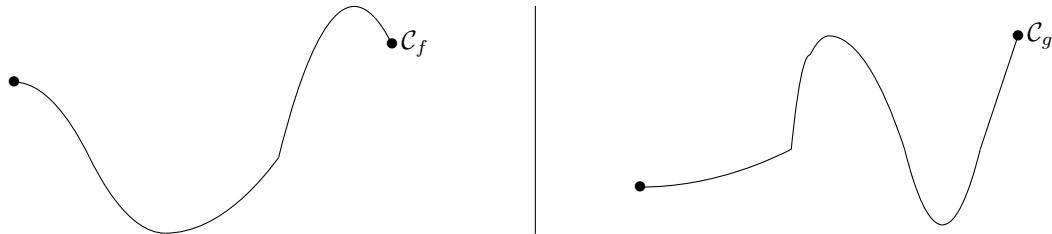
b) La fonction f est-elle décroissante sur $[-2; 0]$?

c) Donner un intervalle I tel que f est croissante sur I :

d) Donner un intervalle J tel que la fonction n'est pas monotone sur J :

4 Tableaux

Soient f et g deux fonctions définies sur $[-5; 5]$ dont les courbes représentatives sont données ci-contre.



4.1 Tableau de valeurs

Définition 8. Le tableau de valeurs associe plusieurs antécédents (ligne x) à leurs images (ligne $f(x)$).

Exemple.

x	-5	-3	2	4	5
$f(x)$	2	0	0	4	3

x	-5	-1	0	2	3
$g(x)$					

4.2 Tableau de variation

Définition 9. Le tableau de variation répertorie les plus grands intervalles sur lesquels les fonctions sont monotones.

Exemple.

x	-5	-1	4	5
Variations de f	2	-2	4	3

x	-5	5
Variations de g		

4.3 Tableau de signe

Définition 10. Le tableau de signe d'une fonction f répertorie les intervalles solutions de $f(x) \geq 0$ (où la fonction est **positive**) et $f(x) \leq 0$ (où la fonction est **négative**).

Exemple.

x	−5	−3	2	5		x	−5	5
<i>Signe de f</i>	+	0	−	0	+		<i>Signe de g</i>	

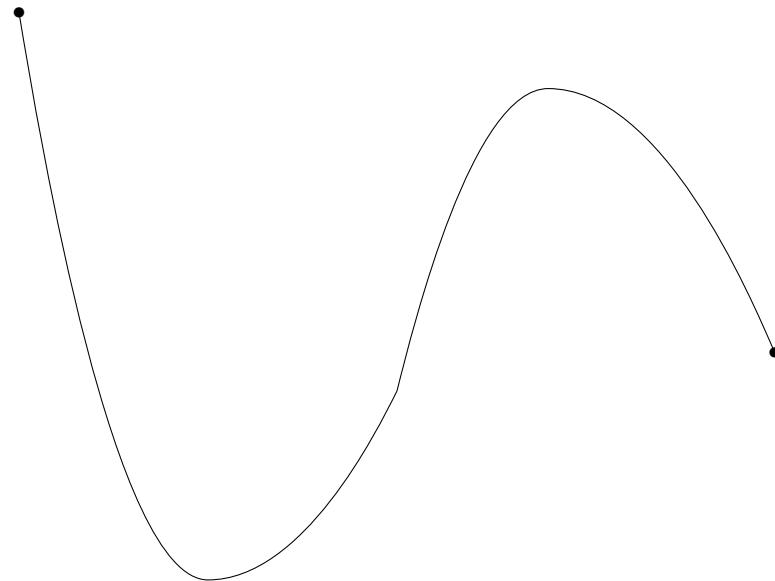
5 Extremum de fonction

Définition 11. Soit f une fonction définie sur un intervalle I , et b un nombre réel.

- On dit que b est un **maximum de f sur I** , si pour tout $x \in I$, on a $f(x) \leq b$; et qu'il existe $a \in I$ tel que $f(a) = b$. On dit alors que le maximum b de f sur I est atteint en a .
- On dit que b est un **minimum de f sur I** , si pour tout $x \in I$, on a $f(x) \geq b$; et qu'il existe $a \in I$ tel que $f(a) = b$. On dit alors que le minimum b de f sur I est atteint en a .

Remarque. Le maximum d'une fonction sur I est donc la plus grande image possible sur I , tandis que le minimum est la plus petite image possible sur I .

Exemple. Soit une fonction f dont la courbe représentative est donnée ci-après :



a) Compléter le tableau de variation de f .

x	
Variation de f	

b) Déterminer le maximum de cette fonction ? En quelle valeur ce maximum est-il atteint ?

c) Déterminer le minimum de cette fonction ? En quelle valeur ce minimum est-il atteint ?