Statistiques : Proportions, Évolutions

Seconde 3

1 Proportions et pourcentages

1.1 Populations

Définition 1. *En statistiques, on étudie des* ***populations****, c'est-à-dire des ensembles d'éléments appelés* ***individus****.*

Exemple. *Les ensembles suivants sont des populations pouvant faire l'objet d'études statistiques.*

— *Le sport préféré des habitants de Villeneuve-Le-Roi ;*

— *Les initiales des élèves d'un lycée ;*

— *Le poids de pièces de métal fabriquées par une machine.*

—

—

Définition 2. *On appelle* ***sous-population*** *d'une population P une partie des individus de P.*

Exemple. *On donne des exemples de sous-population correspondant aux populations données ci-dessus :*

— *Les sports collectifs ;*

— *Les initiales commençant par des voyelles ;*

— *Les pièces pesant plus de $3.8\,\mathrm{kg}$;*

—

—

1.2 Proportions

Définition 3. *On conidère une population P de N individus et une sous-population S de P de n individus. Alors la **proportion** de S par rapport à P, notée p, est donné par*

$$p = \frac{n}{N}$$

Remarque.

$$Proportion = \frac{Cas\ Particuliers}{Population\ Totale}$$

Exercice. *On vide une trousse de tous ses stylos (il y en a 15), et on compte le nombre de stylos rouges (il y en a 3).*

a) *Quelle est la population étudiée ? Et la sous-population ?*

b) *Quelle est la proportion de stylos rouges dans cette trousse ?*

Remarque. *Une proportion p peut-être exprimée sous la forme de **pourcentage**, il suffit de la multiplier par 100.*

Exemple. *On considère les 56 animaux d'un zoo : il y a 28 lions, 12 zèbres et 16 alligators.*

a) *Quelle est la population étudiée ?*

b) *Quelles sont les différentes sous-populations à l'étude ?*

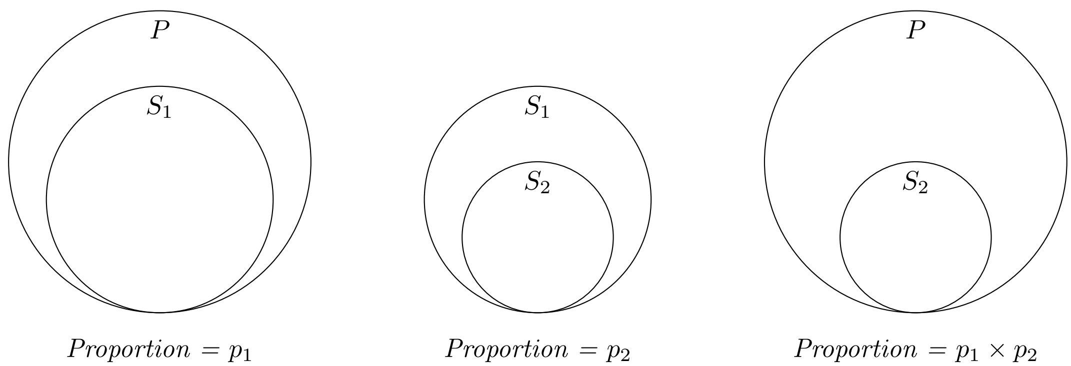
c) *Donner la proportion de lions (p_L), de zèbres (p_Z) et d'alligators (p_A) **en pourcentage**.*

1.3 Proportions de proportions

Exercice. *Dans un stade de* 1600 *spectateurs,* 40% *sont venus supporter l'équipe bleue. Parmi les supporteurs de l'équipe bleue, seul* 60% *d'entre eux ont acheté une boisson. Combien de spectateurs sont à la fois supporteur de l'équipe bleue et ont acheté une boisson ?*

> **Proposition 1.** *Soit P une population, S_1 une sous-population de P, et S_2 une sous-population de S_1. Alors, S_2 est une sous-population de P.*
> *De plus, si on note p_1 la proportion de S_1 par rapport à P et p_2 la proportion de S_2 par rapport à S_1, alors la proportion de S_2 par rapport à P est donnée par*
>
> $$p = p_1 \times p_2$$

Remarque. *a) La situation peut-être schématisée ainsi :*



b) ***Attention si les proportions sont données en pourcentages !*** *Dans ce cas, si l'on a p_1% et p_2%, la proportion de proportions correspondante est*

$$\frac{p_1}{100} \times \frac{p_2}{100}$$

Exemple. *Dans un autre stade (**dont on ignore le nombre de spectateurs**),* 40% *sont venus supporter l'équipe bleue. Parmi les supporteurs de l'équipe bleue, seul* 60% *d'entre eux ont acheté une boisson.* ***Quelle est la proportion de spectateurs étant à la fois supporteur de l'équipe bleue et ayant acheté une boisson****?*

2 Évolution

2.1 Variation absolue, variation relative

On considère une quantité qui varie entre V_d sa valeur de départ et V_f sa valeur finale.

Définition 4.

- *La **variation absolue** de la quantité est donnée par* $V_f - V_d$.
- *La **variation relative** de la quantité, aussi appelée **taux d'évolution**, est donnée par* $\dfrac{V_f - V_d}{V_d}$.

Remarque.

- *La variation absolue possède la même unité que la quantité étudiée, tandis que la variation relative ne possède pas d'unité.*
- *Quand la variation absolue ou relative est positive, c'est que la quantité a augmenté. Quand la variation absolue ou relative est négative, c'est que la quantité a diminué.*
- *Le **taux d'évolution** peut être donné en pourcentage : il suffit de multiplier le taux d'évolution par* 100.

Exemple. *Je possédais* $V_d = 50$ *ce mois-ci, et je possèderai* $V_f = 75$ *le mois prochain. Donner la variation absolue et le taux d'évolution concernant ce changement de budget.*

Proposition 2. *Soit* $t = \dfrac{V_f - V_d}{V_d}$ *le taux d'évolution. Alors* $V_f = (1+t)V_d$.
Autrement dit, il faut multiplier V_d *par* $(1+t)$ *pour faire évoluer cette quantité vers* V_f.

Définition 5. *Le nombre* $1+t$*, où* t *est le taux d'évolution, est appelé **Coefficient Multiplicateur**.*

Exemple. *La température de la classe est initialement* $V_d = 20\,^\circ\mathrm{C}$. *Elle augmente de* 25%. *Calculer le coefficient multiplicateur associé et donner la température finale.*

2.2 Évolutions successives

Exemple. *Le prix de l'électricité augmente de* 5% *tous les ans pendant deux ans. De quel pourcentage a augmenté le prix de l'électricité après deux ans ?*

$$\begin{tikzcd} 100 \arrow[r, "+5\%"] \arrow[rr, bend right, "+10,25\%"'] & 105 \arrow[r, "+5\%"] & 110,25 \end{tikzcd}$$

Proposition 3. *La succession de deux évolutions, respectivement de taux* t_1 *et* t_2*, a pour coefficient multiplicateur :*

$$CM_t = CM_1 \times CM_2 = (1 + t_1) \times (1 + t_2)$$

Alors, le taux d'évolution ***global*** *associé à cette succession est donné par* $t = CM_t - 1$.

Exemple. *Le prix du gaz, quant à lui, a augmenté de* $t_1 = 20\%$ *la première année puis a diminué de* $t_2 = -40\%$ *la deuxième année.*

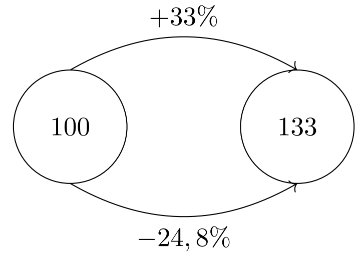
a) Donner les coefficients multiplicateurs CM_1 *et* CM_2 *associés à* t_1 *et à* t_2.

b) En déduire le coefficient multiplicateur CM_t *de la succession d'évolutions.*

c) En déduire le taux d'évolution global t.

2.3 Évolution réciproque

Exemple. *Un article est soldé de* 33% *en 2024. Mais, en 2025, on souhaite augmenter son prix d'un certain pourcentage afin d'obtenir son prix initial. Quel est ce pourcentage ?*



Proposition 4. *Soit un taux d'évolution t, décrivant l'évolution depuis une valeur V_d vers une valeur V_f. Son coefficient multiplicateur est noté CM.*
Alors, pour calculer le taux de l'évolution de V_f vers V_d, on calcule son coefficient multiplicateur

$$CM_r = \frac{1}{CM}$$

*Alors le taux d'évolution **réciproque** est donné par*

$$t_r = CM_r - 1$$

Exemple. *Un autre article est augmenté de $t = +60\%$. On se demande par quel pourcentage solder cet article pour qu'il retrouve son prix d'origine.*

a) Calculer le coefficient multiplicateur CM associé à ce taux d'évolution.

*b) En déduire le coefficient multiplicateur **réciproque** CM_r.*

c) En déduire le taux d'évolution réciproque t_r.