

Produit scalaire, orthogonalité

Première Spécialité Mathématiques

1 Première définition du produit scalaire

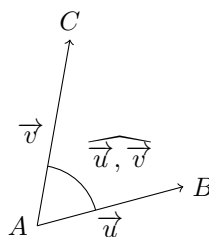
Lorsque que la notion de vecteur a été définie, l'objectif était d'avoir un objet géométrique capable de se comporter comme un nombre. Ainsi, on a défini en classe de seconde l'*addition*, la *soustraction* de vecteurs, ainsi que la multiplication d'un vecteur par un *scalaire*.

L'objectif est de définir une nouvelle opération sur les vecteurs qui se comporte comme une *multiplication* entre deux vecteurs.

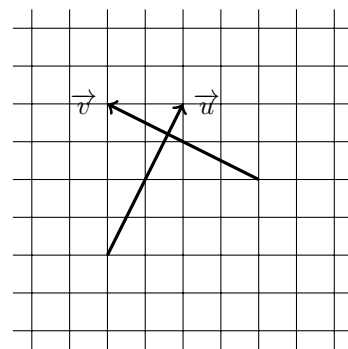
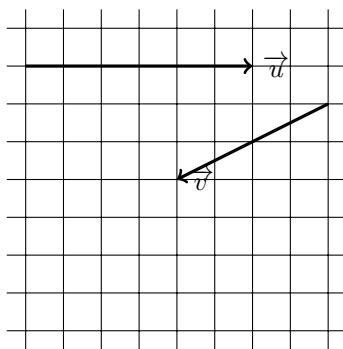
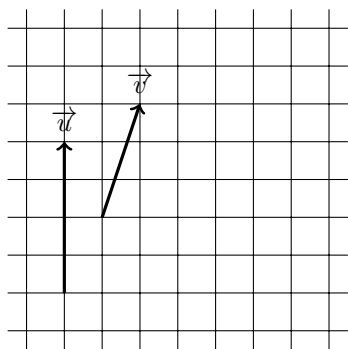
On se place sur le plan.

Définition 1. Soit \vec{u} un vecteur. Alors, la norme de \vec{u} (sa « longueur ») est notée $\|\vec{u}\|$.

Définition 2. Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls. On pose A, B, C trois points du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. On note $\widehat{\vec{u}, \vec{v}}$ l'angle \widehat{BAC} .



Exemple. Pour chaque couple de vecteurs \vec{u} et \vec{v} suivants, construire trois points A, B et C tels que $\widehat{\vec{u}, \vec{v}} = \widehat{BAC}$.



Définition 3 (Produit scalaire). Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs. On appelle **produit scalaire** de \vec{u} et de \vec{v} , noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, le nombre :

- 0 si \vec{u} est nul ou \vec{v} est nul.
- $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ dans le cas contraire.

2 Premières propriétés

2.1 Propriétés algébriques

Proposition 1. Soient \vec{u} , \vec{v} deux vecteurs du plan, ainsi que $k \in \mathbb{R}$.

1. On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$. (Le produit scalaire est symétrique)
2. On a $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$.

Remarque. Attention à l'usage de \cdot et de \times : l'un concerne deux vecteurs, et l'autre deux nombres.

Exemple. Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\widehat{\vec{u}; \vec{v}} = 30^\circ$. Calculer les produits scalaires suivants.

- a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dots\dots\dots$
- b) $\vec{u} \cdot \vec{u} = \dots\dots\dots$
- c) $\vec{v} \cdot (2\vec{u}) = \dots\dots\dots$
- d) $(-4\vec{u}) \cdot (3\vec{v}) = \dots\dots\dots$

2.2 Propriétés géométriques

Proposition 2. Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs.

- Si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires de même sens, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$;
- Si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires de sens opposés, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$;

Définition 4. Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs. Alors ces deux vecteurs sont dit **orthogonaux** si l'un des deux vecteurs est nul ; ou si l'angle $\widehat{\vec{u}; \vec{v}} = 90^\circ$.

Proposition 3. Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs. Alors, \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Remarque. • Cette proposition est facile à démontrer avec notre définition, mais sera surtout utile avec les définitions suivantes.

- Le vecteur nul est donc orthogonal à tous les vecteurs.

2.3 Définition avec le projeté orthogonal

Définition 5 (Rappel). Soit M un point du plan et (d) une droite. Le **projeté orthogonal** de M par rapport à la droite (d) est l'unique point M' appartenant à la droite (d) et tel que les droites (MM') et (d) sont perpendiculaires.

Proposition 4. Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls. On pose A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. De plus, on pose H le projeté orthogonal de C par rapport à la droite AB . Alors,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} AB \times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de même sens;} \\ -AB \times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de sens opposés.} \end{cases}$$

3 Produit scalaire en géométrie repérée

On munit le plan d'un repère orthonormé (O, I, J) . Les coordonnées d'un vecteur \vec{u} d'abscisse x et d'ordonnée y sont notées

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

3.1 Bilinéarité du produit scalaire

Proposition 5. Soient trois vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} . Alors,

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

Remarque. Ce résultat correspond donc à la distributivité du produit scalaire sur l'addition de vecteurs.

Exemple. Soient trois vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} de norme 1 tels que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\vec{u} \cdot \vec{w} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Que vaut $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$?

3.2 Définition en géométrie repérée

Proposition 6. Soient deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$. Alors, le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est égal à

$$x_u \times x_v + y_u \times y_v$$

Exemple. Calculer le produit scalaire des vecteurs \vec{u} et \vec{v} suivants

- a) $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dots\dots\dots$ c) $\vec{u} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dots\dots\dots$
 b) $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dots\dots\dots$ d) $\vec{u} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix}$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dots\dots\dots$

3.3 Produit scalaire et norme

Proposition 7. Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur. Alors,

$$\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2$$

Proposition 8 (Identités remarquables). Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs. Alors

$$\begin{cases} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \|\vec{v}\|^2 \\ \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \|\vec{v}\|^2 \\ (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) &= \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \end{cases}$$

Proposition 9. Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs. Alors,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

4 Résumé

4.1 Définition du produit scalaire

- Définition utilisant l'angle des deux vecteurs;
- Définition utilisant le projeté orthogonal;
- Définition utilisant les coordonnées;
- Définition utilisant la norme des vecteurs.

4.2 Propriétés du produit scalaire

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$;
- $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$

4.3 Lien avec la norme

- Calcul de la norme au carré d'un vecteur.
- Identités remarquables