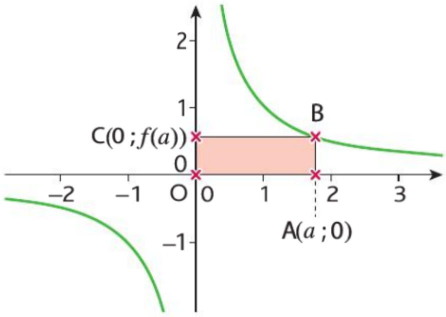
Fonction inverse, sa dérivée et ses variations

Définir géométriquement la fonction inverse et utiliser le taux de variation pour exprimer sa dérivée



Dans un repère orthonormé du plan, on a construit un rectangle OABC d'aire 1, avec les points de coordonnées suivantes : $O(0\,;0)$, $A(a\,;0)$, $C(0\,;f(a))$ et $B(a\,;\,f(a))$ où a est un réel non nul et f une fonction à déterminer.

1 **a.** Montrer que : si $a > 0$, alors $a \times f(a) = 1$.

b. On admet que cette égalité reste vraie lorsque $a < 0$.
Est-elle aussi vérifiée si $a = 0$?

c. En déduire une expression de la fonction f et son domaine de définition.

2 Soit a et h deux nombres réels non nuls et f la fonction définie ci-dessus.

a. Démontrer que : $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = -\dfrac{1}{a(a+h)}$.

b. Lorsque h tend vers 0, en déduire l'expression de $f'(a)$ en fonction de a.

3 On vient de démontrer que pour tout réel x non nul : $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.
En déduire les variations de la fonction f.