Chapitre 2 : Étude de fonctions polynomiales du second degré

Premières Spécialité Mathématiques

1 Rappel : Fonctions affines

Définition 1. *Une **fonction affine** est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$f(x) = ax + b$$

avec $a \neq 0$ et b deux réels.
*Le réel a est appelé **coefficient directeur** de f.*
*Le réel b est appelé **ordonnée à l'origine** de f.*

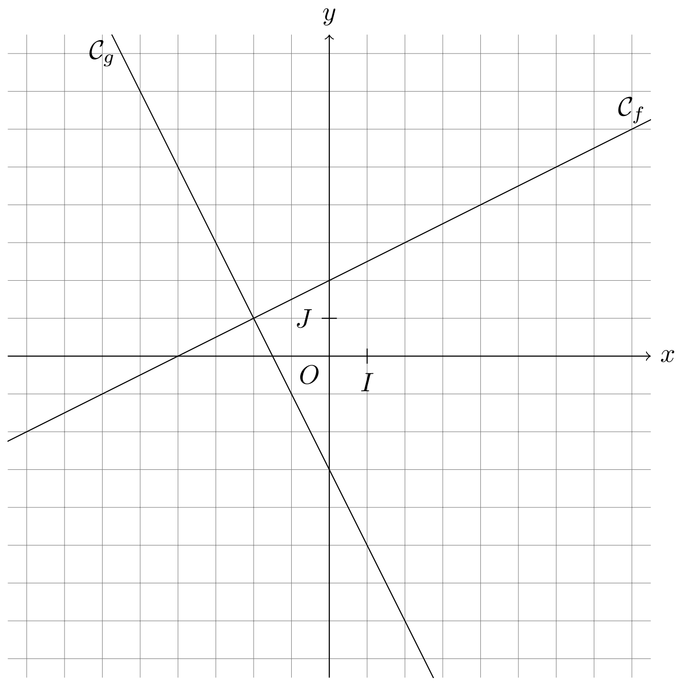
Remarque. *Quand $b = 0$, c'est-à-dire quand $f(x) = ax$, on dit que la fonction est **linéaire**.*

Proposition 1. *Soit $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine avec $a \neq 0$ et b deux nombres réels ; et $(O; I; J)$ un repère orthonormée. Alors, la courbe représentative de f dans ce repère est une droite.*

Proposition 2. *Soit $(O; I; J)$ un repère orthonormée, et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est une droite. Alors, f est une fonction affine telle que $f(x) = ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ où :*

- *son coefficient directeur a est donnée par la pente de la droite ;*
- *son ordonnée à l'origine b est l'ordonnée du point de la droite d'abscisse 0.*

Exercice 1. *Sur le repère $(0; I; J)$ ci-contre, on a tracé la courbe représentative de deux fonctions affines f et g.*



En déduire l'expression algébrique de f et g.

Proposition 3. *Soit $f : x \mapsto ax+b$ une fonction affine, et $x_1 < x_2$ deux réels distincts. Alors,*

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \qquad \text{et} \qquad b = f(x_1) - ax_1$$

Proposition 4. *Soit $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine.*

- *Si $a < 0$, alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.*
- *Si $a > 0$, alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.*

Méthode 1. *Pour dresser le tableau de signes d'une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$, il faut :*

1. *Déterminer l'antécédant de 0 de f, autrement dit, trouver x tel que $ax+b = 0$;*
2. *Le tableau de signes s'obtient en suivant la variation de la fonction, autrement dit, cela dépend du signe de a*

Exercice 2. *Dresser le tableau de signes des fonctions trouvées dans l'exercice 1.*

2 Fonction polynomiale du second degré

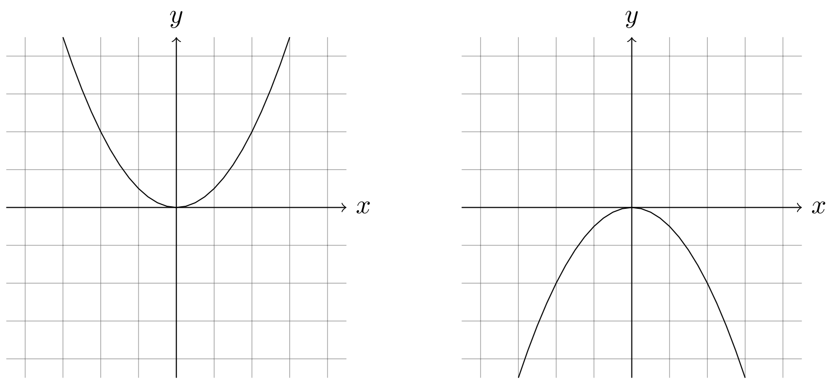
Définition 2. *Une **fonction polynomiale du second degré** est une fonction f définie sur les réels qui à tout nombre x associe un réel $f(x)$ de la forme :*

$$ax^2 + bx + c$$

où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

Remarque. *L'hypothèse $a \neq 0$ est essentielle, sinon la fonction est polynomiale de degré au plus 1.*

On trace la courbe représentative de deux fonctions polynomiales du second degré : une avec $a > 0$ et une avec $a < 0$.



Définition 3. *Soit f une fonction polynomiale de degré 2. Sa courbe représentative est appelée une **parabole**.*

Proposition 5. *Soit f une fonction polynomiale de degré 2. telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$. Alors :*

- *Si $a > 0$, il existe une valeur de x, notée x_m telle que f est décroissante sur $]-\infty; x_m]$ et croissante sur $[x_m; +\infty[$*
- *Si $a < 0$, il existe une valeur de x, notée x_M telle que f est croissante sur $]-\infty; x_M]$ et décroissante sur $[x_M; +\infty[$*

Remarque.

- *Dans le cas $a > 0$, les* « branches de la paraboles sont tournées vers le haut ». *Dans le cas contraire ($a < 0$), elles sont* « tournées vers le bas ».
- *Dans le cas $a > 0$, f admet un unique minimum, et ce minimum est atteint en x_m. Dans le cas contraire ($a < 0$), f admet un maximum, et ce maximum est atteint en x_M.*

3 Recherche de l'extremum

3.1 Forme canonique

Proposition 6. *Soit f une fonction polynomiale du second degré telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$. Alors il existe α et β tel que*

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

Remarque. *Dans ce cas, $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.*

Exemple. *Soit l'expression polynomiale du second degré $-x^2 + 2x - 5$. Déterminer sa forme canonique.*

Méthode 2 (Par identification)**.**

Méthode 3 (En utilisant les développements limités)**.**

3.2 Extremum

Proposition 7. *Soit une fonction polynomiale du second degré* $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$. *On suppose que* $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ *pour tout* x *réel. Alors,* f *admet un extremum qu'il atteint en* α *et ayant pour valeur* β.

Remarque. *Comme dit précédemment, si* $a > 0$, *alors* f *admet un minimum qu'il attent en* $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$. *Sinon, si* $a < 0$, *alors* f *admet un maximum qu'il atteint en* $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$. *Dans les deux cas, cet extremum vaut* $\beta = f(\alpha)$.

Exemple. *Soit la fonction polynomiale* $g : x \mapsto 4x^2 + 32x - 5$.

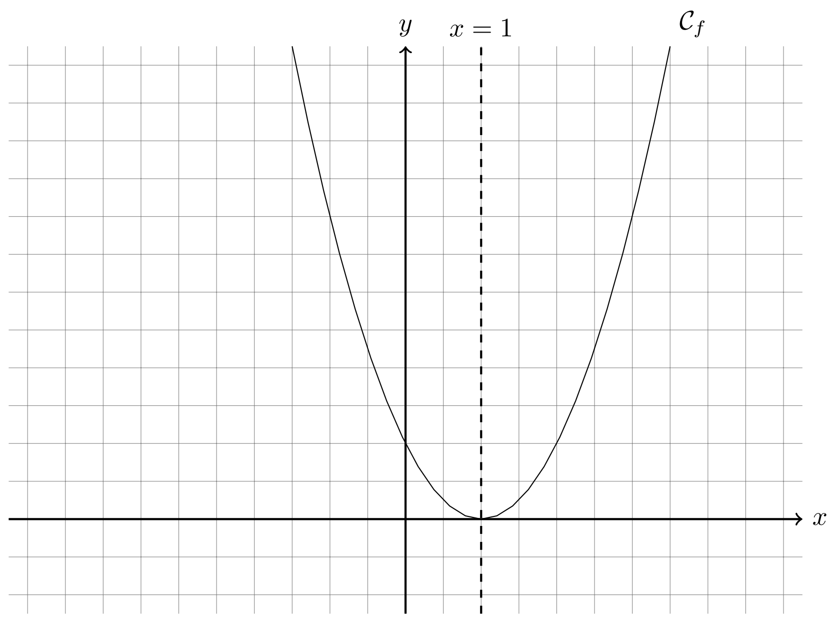
a) *Cette fonction admet-elle un minimum ou un maximum ?*

b) *En quelle valeur cet extremum est-il atteint ?*

c) *Que vaut cet extremum ?*

Proposition 8. *Soit* $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ *une fonction polynomiale du second degré. On suppose que* $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$. *Alors la courbe représentative* $\mathcal{C}_f$ *est une parabole admettant comme axe de symétrie la droite* $x = \alpha$.

Exemple. *Soit* $f : x \mapsto x^2 - 2x + 1$. *Alors* f *admet un minimum (car* $a > 0$*) atteint en* $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-2}{2} = 1$. *Alors* $\mathcal{C}_f$ *admet la droite* $x = 1$ *comme axe de symétrie.*



y
x = 1
C_f
x

4 Racines

4.1 Définition

Définition 4. *Soit f une fonction. On appelle* ***racine*** *de la fonction f un nombre r tel que $f(r) = 0$.*

Exemple. *Vérifier que $r_1 = 1$ et $r_2 = -3$ sont deux racines de la fonction $f : x \mapsto 2x^2 + 4x - 6$.*

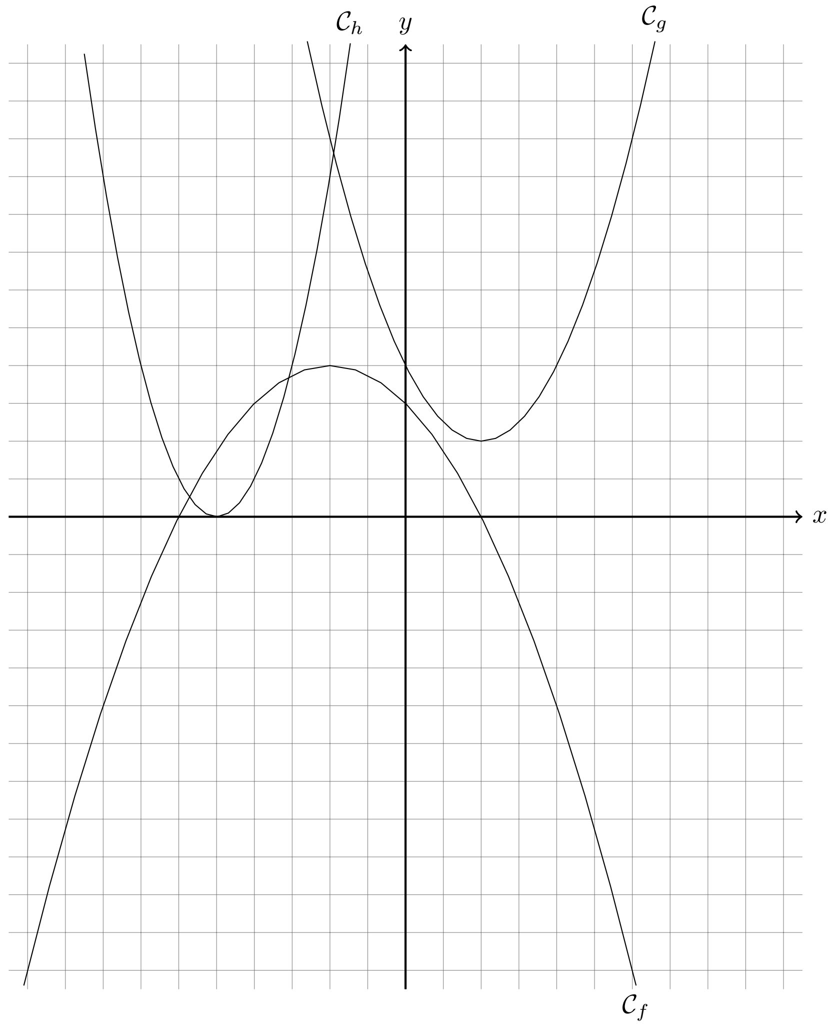
Proposition 9. *Soit $f : ax^2+bx+c$ une fonction polynomiale du second degré. Alors, seuls trois cas sont à considérer :*

a) f n'admet aucune racine réelle, c'est-à-dire que pour tout réel x, on a $f(x) \neq 0$.

b) f admet une unique racine notée r. Dans ce cas, f peut être factorisée en $f(x) = a(x-r)^2$ pour tout x.

c) f admet deux racines, notées r_1 et r_2. Dans ce cas, f peut être factorisée en $f(x) = a(x-r_1)(x-r_2)$ pour tout x.

Exemple. *Soient trois fonctions polynomiales du second degré f, g et h, dont les courbes $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ sont représentées ci-après. Combien de racines ont chacune de ces fonctions ?*


$\mathcal{C}_h$
y
$\mathcal{C}_g$
x
$\mathcal{C}_f$

4.2 Signe

Proposition 10. *Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynomiale du second degré. Alors :*

a) Si f n'admet pas de racine, alors f est du même signe que a sur $\mathbb{R}$.

b) Si f admet une unique racine r, alors f est du même signe que a sur $]-\infty; r[$ et sur $]r; +\infty[$.

c) Si f admet deux racines distinctes $r_1 < r_2$, alors f est du même signe que a sur $]-\infty; r_1[$ et sur $]r_2; +\infty[$, et est du signe opposé à a sur $]r_1; r_2[$

Remarque. *Une phrase pour retenir cette proposition :*

*Une fonction polynomiale du second degré est du même signe que a à **l'extérieur** de ses racines, et est de signe opposé à a à **l'intérieur** de ses racines.*

Exemple. *En reprenant l'exemple précédent, donner le tableau de signes des fonctions f, g et h.*

4.3 Calcul des racines

4.3.1 En identifiant une racine évidente

Soit $f(x) = -x^2 + 6x$ pour $x \in \mathbb{R}$. Alors, l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions évidentes : 0 et 6. Comme f est une fonction polynomiale du second degré, alors on sait que ce sont les seules solutions réelles possibles.

4.3.2 En utilisant une identité remarquable

Soit $f(x) = 2x^2 - 128$ pour $x \in \mathbb{R}$. Alors, la troisième identité remarquable nous donne un factorisation de $f(x) = 2(x - 8)(x + 8)$. Donc les deux racines distinctes de la fonction polynomiale du second degré f sont 8 et -8.

4.3.3 Avec le produit et la somme des racines

Proposition 11. *Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynomiale du second degré. Si r_1 et r_2 sont les deux racines (possiblement confondues) de f, alors*

$$r_1 + r_2 = \frac{-b}{a} \qquad r_1 \times r_2 = \frac{c}{a}$$

Exemple. *Soit $f(x) = x^2 + x - 20$. On remarque que 4 est une racine de f. En déduire une autre racine de f, puis une factorisation de f.*

4.3.4 Avec le discriminant

Définition 5. *Soit $f : x \mapsto ax^2+bx+c$ une fonction polynomiale du second degré. Alors on appelle* ***discriminant de f****, noté Δ, la quantité*

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

theorem 1. *Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynomiale de second degré, et Δ son discriminant. Alors :*

a) Si $\Delta < 0$, alors f n'admet pas de racine réelle.

b) Si $\Delta = 0$, alors f admet une unique racine réelle r, telle que

$$r = -\frac{b}{2a}$$

c) Si $\Delta > 0$, alors f admet deux racines réelles distinctes $r_1 < r_2$, telles que

$$r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Démonstration