

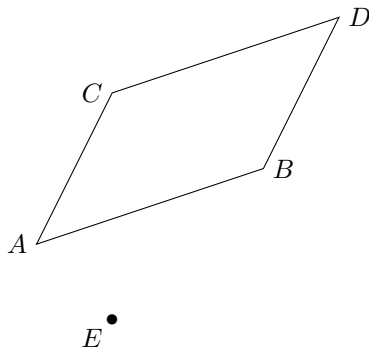
# Vecteurs et translations du plan

Seconde 9

## 1 Définition

**Définition 1.** Soient  $A$  et  $B$  deux points du plan. La **translation transformant  $A$  en  $B$**  est une transformation géométrique qui à chaque point  $C$  associe un point  $D$  tel que  $ABDC$  est un parallélogramme (éventuellement aplati).

Exemple.



La translation correspond à l'idée de « glissement » sans rotation. La translation transformant  $A$  en  $B$  envoie n'importe quel point  $C$  dans la même direction, le même sens et la même longueur que si l'on partait de  $A$  pour arriver en  $B$ .

Tracer l'image de  $E$  par la translation transformant  $A$  en  $B$ .

**Remarque.** Une translation dépend donc uniquement d'une direction (car  $(AB)$  et  $(DC)$  sont parallèles), d'un sens (car on s'intéresse à  $ABDC$  et non pas  $ABCD$ ) et d'une longueur (car les longueurs  $AB$  et  $DC$  sont les mêmes). Ces trois caractéristiques sont regroupées derrière la notion de vecteur.

**Définition 2.** Un **vecteur** est un objet géométrique caractérisé par trois informations :

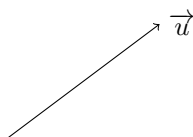
- Une direction
- Un sens
- Une longueur (que l'on appelle **norme**)

**Définition 3.** Soient deux points  $A$  et  $B$ . Le vecteur caractérisant la translation transformant  $A$  en  $B$  est noté  $\overrightarrow{AB}$ .

**Remarque.**

- La translation transformant  $A$  en  $B$  sera plutôt appelée **translation de vecteur  $\overrightarrow{AB}$** .
- Parmi les caractéristiques définissant un vecteur, il n'y a pas la **position** du vecteur dans le plan.

**Exemple.** On représente un vecteur quelconque  $\vec{u}$  à l'aide d'une flèche dans le plan.



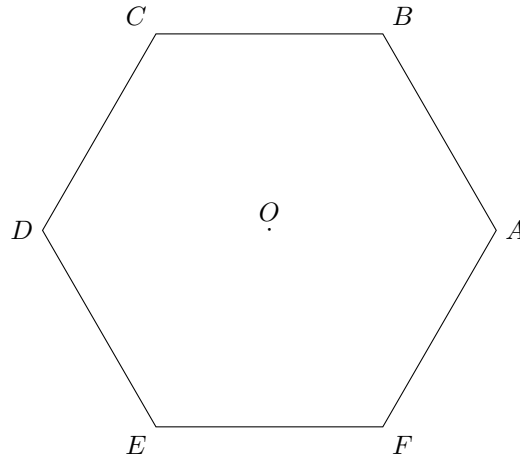
Le vecteur nul est un cas particulier de vecteur de norme nulle. Un tel vecteur n'a **ni direction, ni sens**.

## 2 Opérations sur les vecteurs

### 2.1 Égalité entre vecteurs

**Définition 4.** Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont la même direction, le même sens et la même norme.

**Exemple.** Soit l'hexagone régulier  $ABCDEF$  de centre  $O$ .



- a) Représenter le vecteur  $\overrightarrow{BC}$ .
- b) Représenter deux autres vecteurs égaux à  $\overrightarrow{BC}$ .
- c) Représenter le représentant de  $\overrightarrow{DC}$  ayant pour **origine**  $F$ .
- d) Représenter le représentant de  $\overrightarrow{BA}$  ayant pour **extrémité**  $F$ .

### 2.2 Opposé d'un vecteur

**Définition 5.** Soit  $\vec{u}$  un vecteur. Alors l'opposé de  $\vec{u}$ , noté  $-\vec{u}$ , est le vecteur ayant la même direction que  $\vec{u}$ , la même norme que  $\vec{u}$ , mais le sens **opposé** au vecteur  $\vec{u}$ .

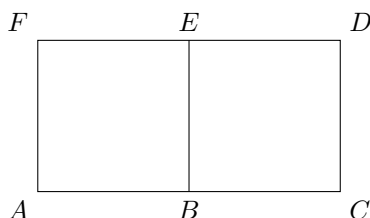
**Proposition 1.** Soient  $A$  et  $B$  deux points du plan. Alors  $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ .

## 2.3 Addition de vecteurs

**Définition 6.** Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs. Alors la **somme de  $\vec{u}$  et de  $\vec{v}$** , notée  $\vec{u} + \vec{v}$ , est le vecteur associé à la translation résultant de l'enchaînement de la translation de vecteur  $\vec{u}$  suivie de la translation de vecteur  $\vec{v}$ .

**Remarque.** Autrement dit,  $\vec{u} + \vec{v}$  décrit le glissement obtenu si l'on parcourt le trajet donné par  $\vec{u}$  puis celui parcouru par  $\vec{v}$ .

**Exemple.** Les quadrilatères  $ABEF$  et  $BCDE$  sont des carrés.



Tracer sur la figure les vecteurs suivants :

- a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$
- b)  $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DC}$
- c)  $\overrightarrow{FA} + (-\overrightarrow{DE}) + \overrightarrow{BE}$

**Proposition 2** (Relation de Chasles). Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points quelconques du plan. Alors,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

**Proposition 3.** Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs du plan. Alors,

- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$  ( $\vec{0}$  est le vecteur nul)
- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$

### 3 Vecteurs et configurations géométriques

#### 3.1 Parallélogrammes

**Définition 7** (Rappels). Un quadrilatère  $ABCD$  est un parallélogramme si et seulement si :

- Les côtés opposés sont parallèles 2 à 2 :  $(AB) \parallel (CD)$  et  $(BC) \parallel (AD)$ .
- Les côtés opposés sont de même longueur 2 à 2 :  $AB = CD$  et  $BC = AD$ .
- Deux côtés opposés sont parallèles et de même longueur :  $((AB) \parallel (CD) \text{ et } AB = CD)$  ou  $((BC) \parallel (AD) \text{ et } BC = AD)$
- Les diagonales  $[AC]$  et  $[BD]$  se coupent en leur milieu.

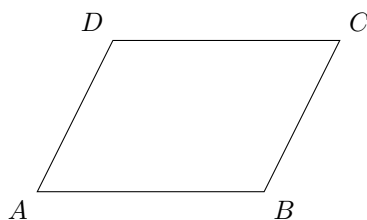
**Proposition 4.** Soit un quadrilatère  $ABCD$ . Alors  $ABCD$  est un parallélogramme si et seulement si  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ .

**Remarque.** Attention, il ne faut *pas* vérifier  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ .

**Proposition 5.** Soit un parallélogramme  $ABCD$ . Alors,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$

**Exemple.** Soit  $ABCD$  un parallélogramme.



- Placer sur la figure  $E$ , le point symétrique de  $A$  par rapport à  $B$ . Placer sur la figure  $F$ , le point symétrique de  $A$  par rapport à  $D$ .
- Placer le point  $G$  tel que  $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$ .
- Donner la nature du quadrilatère  $AEGF$ .