2 Sens de variation d'une suite

Définition 4. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite numérique.*

- *On dit que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* ***croissante*** *si et seulement si pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a* $u_n \leq u_{n+1}$.
- *On dit que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* ***strictement croissante*** *si et seulement si pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a* $u_n < u_{n+1}$.
- *On dit que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* ***décroissante*** *si et seulement si pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a* $u_{n+1} \leq u_n$.
- *On dit que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* ***strictement décroissante*** *si et seulement si pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a* $u_{n+1} < u_n$.

Proposition 1. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite numérique.*

- *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante si et seulement si, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$.
- *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement croissante si et seulement si, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$.
- *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante si et seulement si, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
- *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante si et seulement si, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$.

Proposition 2. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite numérique. On suppose que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

- *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante si et seulement si, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.
- *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement croissante si et seulement si, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.
- *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante si et seulement si, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$.
- *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante si et seulement si, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

Exemple. *Étudier les variations des suites suivantes :*

a) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_n = 8 + 4n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

b) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $v_0 = 64$ *et* $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{2}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

c) $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $w_n = \dfrac{n}{n+1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

d) $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $z_n = (-1)^n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

3 Suites arithmétiques

Définition 5. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite numérique. On dit que la suite est* ***arithmétique*** *si et seulement il existe* $r \in \mathbb{R}$ *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Dans ce cas, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est la suite arithmétique de* ***premier terme*** u_0 *et de* ***raison*** r.

Remarque. *Le calcul des termes d'une suite arithmétique de raison* $r \in \mathbb{R}$ *peut être schématisé comme suit :*

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} u_3 \xrightarrow{+r} u_4 \xrightarrow{+r} \cdots$$

Exemple. *Calculer les termes* u_1, u_2 *et* u_3 *pour chaque définition suivante :*

a) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est la suite arithmétique de premier terme* 0 *et de raison* 1 *:*

b) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est la suite arithmétique de premier terme* 1 *et de raison* 2 *:*

c) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est la suite arithmétique de premier terme* 10 *et de raison* $-\frac{1}{2}$ *:*

Proposition 3 (Variation d'une suite arithmétique)**.** *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite arithmétique de raison* $r \in \mathbb{R}$.

- *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante si et seulement si* $r \geq 0$.
- *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante si et seulement si* $r \leq 0$.

Remarque. *Dans le cas particulier où* $r = 0$, *on dit que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* ***constante****.*

Proposition 4 (Formule explicite d'une suite arithmétique)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on observe*

$$u_n = u_0 + n \times r$$

Remarque. *On peut résumer cette formule à l'aide du schéma suivant :*

$$\begin{tikzcd} u_0 \arrow[r, dash, "+r"] \arrow[rrrr, bend right, "+4\times r"'] & u_1 \arrow[r, dash, "+r"] & u_2 \arrow[r, dash, "+r"] & u_3 \arrow[r, dash, "+r"] & u_4 \arrow[r, "+r"] & \cdots \end{tikzcd}$$

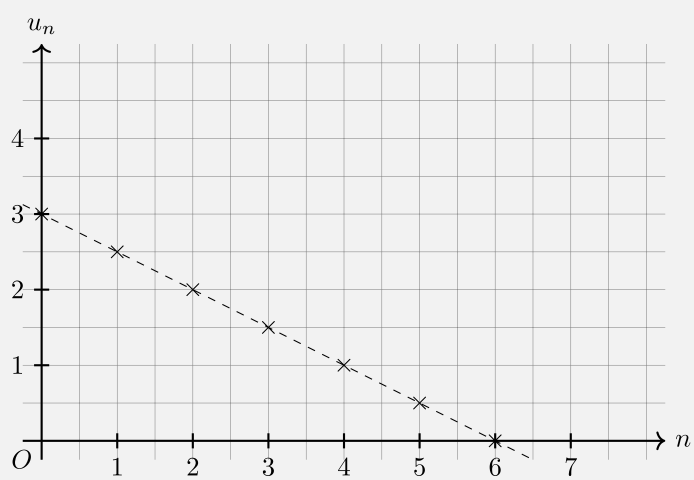
Exemple. *Pour chacune des définitions suivantes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, calculer u_{10} :*

a) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite arithmétique de premier terme 6 et de raison 5 :

b) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite arithmétique de premier terme 0 et de raison -2 :

c) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{5}$:

Proposition 5. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique, alors les points de sa représentation graphique sont alignés sur la droite d'équation $y = rx + u_0$:*



On dit que les suites arithmétiques permettent de modéliser des ***évolutions linéaires****.*

4 Suites géométriques

Définition 6. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On dit que la suite est* ***géométrique*** *si et seulement il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que*

$$u_{n+1} = u_n \times q$$

Dans ce cas, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de ***premier terme*** *u_0 et de* ***raison*** *q.*

Remarque. *Le calcul des termes d'une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ peut être schématisé comme suit :*

$$u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \xrightarrow{\times q} u_3 \xrightarrow{\times q} u_4 \xrightarrow{\times q} \cdots$$

Exemple. *Calculer les termes u_1, u_2 et u_3 pour chaque définition suivante :*

a) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2 :

b) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme 64 et de raison $\dfrac{1}{2}$:

c) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme 1000 et de raison $-0,1$:

Proposition 6 (Variation d'une suite géométrique)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$.* ***On suppose que son premier terme u_0 est non nul.***

- *Si $q > 1$:*
  - *Si $u_0 > 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.*
  - *Si $u_0 < 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.*
- *Si $0 < q < 1$:*
  - *Si $u_0 > 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.*
  - *Si $u_0 < 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.*
- *Si $q = 0$ ou $q = 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir du terme u_1.*
- *Si $q < 0$, alors la suite n'est pas* ***monotone*** *(elle n'est ni croissante, ni décroissante).*

Proposition 7 (Formule explicite d'une suite géométrique)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on observe*

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Remarque. *On peut résumer cette formule à l'aide du schéma suivant :*

$$\begin{tikzcd}
u_0 \arrow[r, "\times q"] \arrow[rrrr, bend right, "\times q^4"'] & u_1 \arrow[r, "\times q"] & u_2 \arrow[r, "\times q"] & u_3 \arrow[r, "\times q"] & u_4 \arrow[r, "\times q"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Exemple. *Pour chacune des définitions suivantes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, calculer u_{10} :*

a) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme 1 et de raison -2 :

b) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme $5^{10} = 9\,765\,625$ et de raison $\dfrac{1}{5}$:

Définition 7. *Les suites géométriques permettent de modéliser des évolutions dites **exponentielles**.*