Expériences aléatoires et Probabilités : Univers fini

Seconde 9

1 Vocabulaire des probabilités

1.1 Univers

Définition 1. *Une* ***expérience aléatoire*** *est une expérience...*
- *dont les résultats* ***possibles*** *sont connus;*
- *mais dont le résultat* ***obtenu*** *n'est pas prévisible.*

Exemple. *Les exemples suivants sont des expériences aléatoires :*
1. *On lance un dé équilibré à six faces, et on regarde le nombre obtenu.*
2. *On tire une carte dans un jeu de 52 cartes, et on regarde la couleur (**Coeur**,**Carreau**,**Pique**,**Trèfle**) obtenue.*

Définition 2.
- *L'un des résultats possible d'une expérience aléatoire est appelé* ***issue****.*
- *L'****univers*** *d'une expérience aléatoire est l'ensemble de ses issues.*

Exemple. *Pour définir l'univers (fini) d'une expérience aléatoire, on met entre accolades toutes ses issues. On appelle cet univers Ω qui se lit "Oméga".*
1. *L'univers de l'experience 1 est* $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
2. *L'univers de l'experience 2 est* $\Omega = \{$***Coeur***; ***Carreau***; ***Pique***; ***Trèfle***$\}$

Exercice 1. *Donner l'univers des expériences aléatoire suivantes.*

a) *On demande à un ou une élève du lycée s'il préfère les chats ou les chiens.*

b) *Un ou une camarade de classe choisit un nombre pair entre* 1 *et* 11.

c) *On lance deux dés équilibrés et on regarde la somme des résultats obtenus.*

1.2 Événements

Définition 3. *Un **événement** d'une expérience aléatoire est un ensemble contenant tout ou partie des issues de l'expérience aléatoire.*

Exemple.

1. *Soit $A = \{1; 3; 5\}$. C'est un événement de l'expérience 1 (lancer de dé) : il correspond à "Obtenir un impair".*
2. *Soit $B = \{$**Pique**; **Trèfle**$\}$. C'est un événement de l'expérience 2 (tirage d'une carte) : il correspond à "La carte tirée est noire".*

Remarque.

— *Un événement **certain** est un événement qui contient toutes les issues de l'expérience.*

— *Un événement **impossible** est un événement qui ne contient aucun élément. On le note $\emptyset$.*

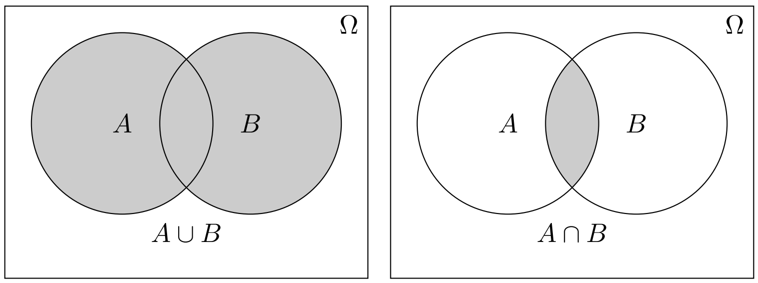
Exercice 2. *Compléter le tableau suivant :*

Expérience aléatoire	*Univers* Ω	*Événement A*	*Issues de A*
On lance un dé équilibré à 6 *faces et on observe le résultat.*	$\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$	*Le nombre obtenu est pair.*	$\{2; 4; 6\}$
On lance une pièce équilibrée.	$\{Pile; Face\}$	*On tombe sur Pile.*	
On choisit un animal au hasard dans un zoo.	$\{Lion; Singe; Perroquet\}$	*L'animal choisi a des plumes.*	
On choisit un jour de la semaine au hasard.		*On a sélectionné un jour du week-end.*	$\{Samedi; Dimanche\}$
On lance deux dés équilibrés, et on soustrait le plus grand résultat par le plus petit.		*La différence obtenue est* 6.	
On lance deux pièces équilibrées.	$\{(P, P); (F, F), (P, F), (F, P)\}$	*Les deux pièces sont sur le même côté.*	

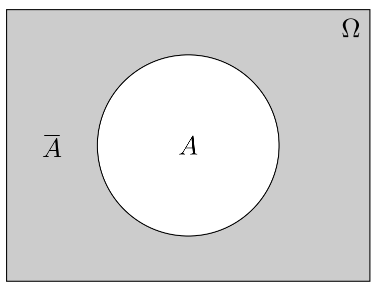
2 Combinaison d'événements

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω, et deux événements A et B.

Définition 4.
- *La **réunion** de A et de B, notée $A \cup B$, est l'événement contenant toutes les issues de A ainsi que celles de B.*
- *L'**intersection** de A et B, notée $A \cap B$, est l'événement contenant les issues présentes à la fois dans A et dans B*



Définition 5. *Le **complémentaire** de A, noté $\overline{A}$, est l'ensemble des élément de Ω qui ne sont pas des éléments de A.*



Exemple. *On lance un dé à 6 faces et on observe le résultat. Compléter le tableau ci-après.*

A	B	$A \cup B$	$A \cap B$	$\overline{A}$
On obtient un nombre pair	*On obtient un nombre supérieur ou égal à 4*	$\{2;4;5;6\}$	$\{4;6\}$	$\{1;3;5\}$
On obtient un multiple de 3	*On obtient un nombre inférieur à 2*			
On obtient un 4	*On obtient un 3*			

Remarque.
- *En français, $A \cup B$ représente "l'événement A OU l'événement B s'est réalisé."*
- *En français, $A \cap B$ représente "l'événement A ET l'événement B se sont réalisés."*
- *En français, $\overline{A}$ représente "l'événement A ne s'est pas réalisé."*

3 Probabilités sur un univers fini

3.1 Loi de probabilité

Définition 6. *Soit une expérience aléatoire dont l'univers est* ***fini*** *: il est de la forme*

$$\Omega = \{e_1; e_2; \ldots; e_n\}, \text{ avec } n \geq 1.$$

Une ***loi de probabilité*** *sur Ω est l'association de chaque issue e_i à un nombre p_i compris entre 0 et 1 inclus. De plus, la somme de tous ces nombres doit être égale à 1.*

Exemple. *On lance un dé équilibré et on observe le résultat. Les deux associations ci-dessous sont des lois de probabilité.*

Ω	1	2	3	4	5	6
Probabilités	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

car $0+0+0+0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

Ω	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

car $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=1$.

Exercice 3. *Compléter le tableau suivant afin de définir une loi de probabilité sur Ω. Cette loi de probabilité devra avantager les nombres impairs.*

Ω	1	2	3	4	5	6
Probabilité						

Définition 7. *On dit qu'une expérience aléatoire est en* ***situation d'équiprobabilité*** *si toutes les issues ont la même probabilité.*

Exemple. *Les expériences aléatoires suivantes sont en situation d'équiprobabilité :*

— *Le lancer d'un dé équilibré.*

— *Le lancer d'une pièce équilibrée.*

— *Le tirage d'une carte dans un jeu de 52 cartes mélangé.*

— *Le tirage d'un jeton parmi des jetons indiscernables au toucher dans une urne opaque.*

Définition 8. *Soit A un événement. La probabilité de A, notée $P(A)$, est la somme des probabilités des issues contenues par A.*

Exemple. *Pour la loi de probabilité donnée par l'exercice précédent, quelle est la probabilité de l'événement A"Obtenir un nombre pair"?*

Remarque.

$$P(\emptyset) = 0$$
$$P(\Omega) = 1$$

3.2 Calcul de Probabilités en situation d'équiprobabilité

Proposition 1. *Dans une expérience aléatoire d'univers* Ω *en situation d'équiprobabilité, la probabilité de* A *est donnée par*

$$P(A) = \frac{\textit{Nombre d'issues dans } A}{\textit{Nombre d'issues dans } \Omega}$$

Exemple. ***a)*** *On lance un dé équilibré. Quelle est la probabilité d'obtenir un multiple de* 3 *?*

b) *On lance deux dé équilibrés, un rouge et un bleu. Quelle est la probabilité que le dé rouge soit pair, et le dé bleu impair ?*

c) *On met dans un sac trois boules rouges, une boule bleue et une boule verte. Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?*

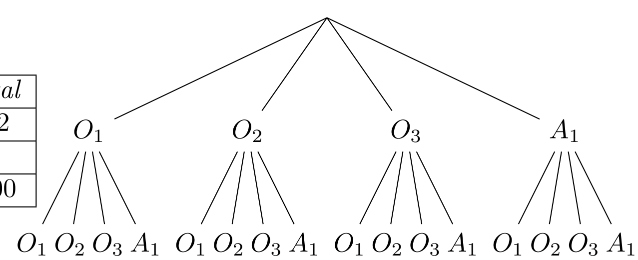
d) *On tire une carte au hasard dans un jeu de* 52 *cartes mélangé. Quelle est la probabilité de tirer une "tête"(Valet, Dame, Roi) ?*

Dans une situation d'équiprobabilité, il faut donc énumérer les cas favorables, puis diviser par le nombre de cas au total.

Exemple. *On tire au sort une personne dans un lycée de* 1000 *personnes. Sachant qu'il y a* 242 *secondes,* 534 *premières,* 632 *filles dont* 320 *en terminale et* 76 *en première, compléter le tableau suivant et donner la probabilité de tomber sur un garçon en seconde.*

	Secondes	*Premières*	*Terminale*	*Total*
Filles		76	320	632
Garçons				
Total	242	534		1000

Exemple. *Dans un sac opaque contenant trois pièces d'or (O_1, O_2 et O_3) et une pièce d'argent (A_1), on tire deux pièces successivement et avec remise. En repassant sur les branches favorables, calculer la probabilité d'obtenir deux pièces d'or suite aux deux tirages.*

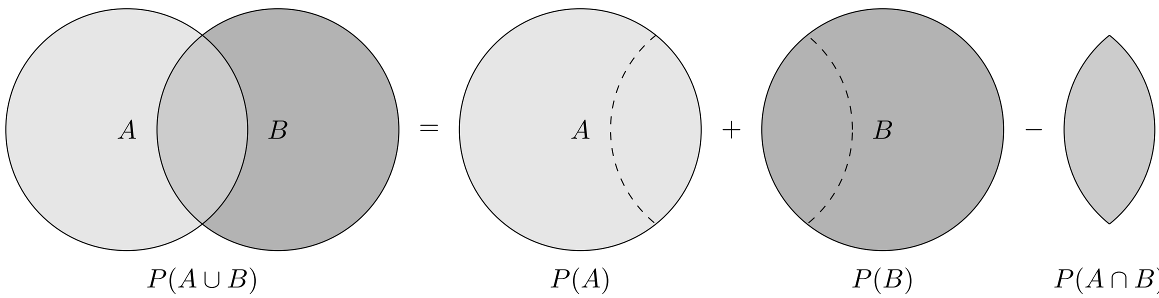


3.3 Calcul de probabilités de combinaisons d'événements

Proposition 2. *Soit une expérience aléatoire d'univers fini Ω, et deux événements A et B. Alors,*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Remarque. *La figure suivante permet d'illustrer une idée de la démonstration de cette formule.*



Définition 9. *Soit une expérience aléatoire d'univers fini Ω, et deux événements A et B. Ces deux événements sont dits* ***incompatibles*** *si et seulement s'ils n'ont pas d'issues en commun. Autrement dit, si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.*

Proposition 3. *Avec deux événements incompatibles A et B, la formule précédente devient*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)\,.$$

Exemple. *Dans une classe de seconde de 30 élèves, 20 ont un prénom qui commence par "A", et 7 font du Basket. Dans cette même classe, 5 élèves dont le prénom commence par A font aussi du basket. On tire au sort un des élèves.*

a) *On note A l'événement "Le prénom de l'élève choisi commence par A". Calculer $P(A)$.*

b) *On note B l'événement "L'élève choisi fait du Basket". Calculer $P(B)$.*

c) *Décrire en français l'événement $A \cup B$, puis calculer $P(A \cup B)$.*

Proposition 4. *Soit une expérience aléatoire d'univers fini Ω, et A un événement. Alors,*

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)\,.$$

Exemple. *En reprenant l'expérience aléatoire précédente, combien d'élèves de cette classe ne font pas de basket ? En déduire la probabilité $P(\overline{B})$.*