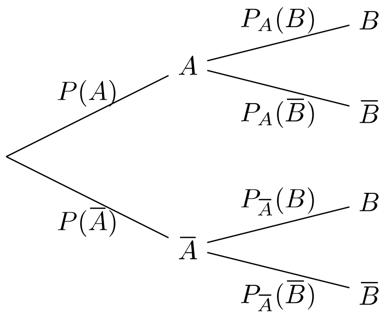
2 Représentation d'expérience aléatoire

2.1 Arbres pondérés

Exemple. *Soit une expérience aléatoire d'univers Ω, et deux événements A et B d'Ω. Alors, l'arbre pondéré suivant permet donne le moyen de calculer certains probabilités.*



Proposition 2.

- *Une branche de la racine à une extrémité correspond à l'intersection des événements correspondants. Pour calculer la probabilité de cette intersection, il faut multiplier les probabilités sur la branche.*
- *La somme de toutes les probabilités issues d'un même noeud vaut* 1.
- *La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités de toutes les branches contenant cet événement.*

2.2 Tableau

Certaines expériences aléatoires se prêtent bien à l'utilisation de tableaux à double entrée.

Exemple. *La somme du résultat du lancer de deux dés est un bon exemple, car il peut être résumé comme ceci :*

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Puisque toutes les cases correspondent à des situations équiprobables, il devient très facile de calculer la probabilité d'obtenir la somme de votre choix.

3 Théorie des probabilités

Nous allons chercher à comprendre les règles de calculs donnés par l'arbre pondéré.

3.1 Probabilités conditionnelles

Définition 7. *Soit une expérience aléatoire d'univers Ω, et A et B deux événenements de Ω. On suppose de plus que $P(A) \neq 0$.*
Alors, la ***probabilité de** A **sachant** B, notée $P_A(B)$, est la probabilité que B se réalise **sachant** que A s'est déjà réalisé.*

Exemple. *Une usine produit des vis et des clous. Certaines pièces ont une défaut de fabrication. On prend une pièce produite par cette usine au hasard.*

On note V « La pièce choisie est une vis » et D« La pièce choisie a un défaut de fabrication ». Dans chacune des situations suivantes, donner la probabilité correspondante (en choisissant bien la bonne notation)

a) *Il y a 4% de vis présentant un défaut de fabrication parmi toutes les pièces produites par l'usine.*

b) *Il y a 2% de vis présentant un défaut de fabrication parmi les vis produites par l'usine.*

Proposition 3 (Formule des probabilités composées)**.** *Soit A et B deux événements de Ω tels que $P(A) \neq 0$. Alors*

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

Remarque. *Il s'agit de la règle de calcul de la probabilité d'une branche dans un arbre pondéré.*

Proposition 4. *Soit A et B deux événements de Ω tels que $P(A) \neq 0$. Alors*

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Exemple. *On tire une bille au hasard dans un sac. Chaque bille est grosse ou petite, et chaque bille est rouge ou verte. On note R « La bille est rouge », et G « la bille est grosse ». Alors le tableau suivant donne la répartition du sac.*

	R	$\overline{R}$	Total
G	12	8	20
$\overline{G}$	7	13	20
Total	19	21	40

a) *Quelle est la probabilité d'obtenir une grosse bille rouge ?*

b) *Quelle est la probabilité d'obtenir une petite bille, sachant que la bille tirée est verte ?*

3.2 Partition de l'univers

Définition 8. *Soit une expérience aléatoire d'univers Ω. On dit que des événements A_1, A_2, ...A_n forment une* ***partition de*** Ω *si et seulement si*

$$\begin{cases} A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega \\ A_1,\ A_2\ ...A_n \text{ sont disjoints deux à deux} \end{cases}$$

Remarque.

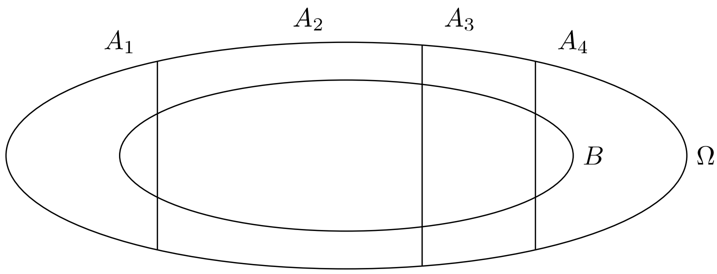
- *Créer une partition de Ω, c'est regrouper chaque issue de Ω dans un unique paquet.*
- *Soit A un événement de Ω, alors A et $\overline{A}$ forment une partition de Ω.*

Exemple. *On considère le lancer d'un seul dé équilibré. Alors si A« le résultat est pair », B« le résultat est 1 » et C « le résultat est impair supérieur ou égal à 3 », on en déduit que A, B et C forment une partition de l'univers de l'expérience.*

Proposition 5 (formule des probabilités totales)**.** *Soit B un évenement, et A_1, A_2, ..., A_n une partition de Ω. Alors,*

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_n)$$

Remarque. *Le schéma suivant permet de visualiser la situation.*



Remarque. *La formule des probabilité totale correspond à la méthode de calcul de la probabilité de plusieurs branches d'un arbre pondéré.*

À chaque hauteur de l'arbre, il faut donc s'assurer que tous les événements originaires d'une même branche forment une partition de l'univers Ω.