Dérivation globale

Premières Spécialité Mathématiques

1 Fonction dérivée

Remarque. *On rappelle qu'une fonction f définie sur un intervalle I est dite* ***dérivable en*** *$a \in I$ si et seulement si le taux de variation*

$$T_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

admet une limite finie quand h tend vers 0. La valeur de cette limite $\lim_{h \to 0} T_a(h)$ est alors appelé ***nombre dérivé de f en*** *a et est noté $f'(a)$.*

En résumé, la notion de dérivation est un processus dépendant de f qui à tout nombre a associe, quand c'est possible, un autre nombre $f'(a)$. Il s'agit donc d'une ***fonction****.*

Définition 1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est* ***dérivable sur*** *I si pour tout nombre $a \in I$, la fonction f est dérivable en a. Dans ce cas, on pose f' la fonction définie sur I qui à tout $x \in I$ associe le nombre dérivé $f'(x)$.*

Exemple. *Soit* $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$.

En justifiant son existence, calculer le nombre dérivé de f en a, avec $a \in \mathbb{R}$ quelconque. En déduire que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et donner l'expression de la fonction dérivée $f'(x)$

Proposition 1.

1. *Soit $c \in \mathbb{R}$. La fonction constante définie sur $\mathbb{R}$ $f : x \mapsto c$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est $f' : x \mapsto 0$.*
2. *La fonction identité définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est $f' : x \mapsto 1$.*
3. *La fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est $f' : x \mapsto 2x$.*
4. *La fonction puissance $n \in \mathbb{N}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^n$ est déribale sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est $f' : x \mapsto nx^{n-1}$*
5. *La fonction inverse définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$, et sa dérivée est $f' : x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$.*
6. *La fonction racine carrée définie sur $[0; +\infty[$ par $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$, et sa dérivée est $f' : x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.*

Remarque.

- *Avant de dériver une fonction, il faut s'assurer qu'elle est bien dérivable.*
- *La fonction racine carrée est dérivable sur $]0; +\infty[$* ***(ouvert en 0)****, tandis qu'elle sur définie sur $[0; +\infty[$* ***(fermé en 0)****. En effet, la fonction n'est pas dérivable en 0.*

Démonstration. On démontre que $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$. □

2 Opération algébriques

Proposition 2. *Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I* ***ouvert****.*

- *La fonction somme de u et v définie sur I par $s(x) = u(x) + v(x)$ est dérivable sur I, et sa dérivée vérifie, pour tout $x \in I$, $s'(x) = u'(x) + v'(x)$. $((u + v)' = u' + v')$*
- *Le produit p d'une fonction u définie sur I par une constante $k \in \mathbb{R}$, définie par $p(x) = k \times u(x)$, est dérivable sur I, et sa dérivée vérifie, pour tout $x \in I$, $p'(x) = ku'(x)$.*
- *La fonction produit de u et v définie sur I par $p(x) = u(x) \times v(x)$ est dérivable sur I, et sa dérivée vérifie, pour tout $x \in I$, $p'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. $((uv)' = u'v + uv')$*
- *Si la fonction v ne s'annule pas sur l'intervalle I, alors la fonction inverse de v définie sur I par $i(x) = \dfrac{1}{v(x)}$ est dérivable sur I, et sa dérivée vérifie, pour tout $x \in I$, $i'(x) = -\dfrac{v'}{v^2(x)}$. $\left(\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}\right)$*
- *Si la fonction v ne s'annule pas sur l'intervalle I, alors la fonction quotient de u et de v définie sur I par $q(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ est dérivable sur I, et sa dérivée vérifie, pour tout $x \in I$, $q'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$. $\left(\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}\right)$*

Remarque. *On résume cette proposition sous la forme d'un tableau :*

Forme de f	*Dérivée f'*	*Remarques*
$u + v$	$u' + v'$	
ku	ku'	
uv	$u'v + uv'$	
uv	$u'v + uv'$	
$\dfrac{1}{v}$	$-\dfrac{v'}{v^2}$	*v ne s'annule pas*
$\dfrac{u}{v}$	$-\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	*v ne s'annule pas*

Exemple. *Soient u et v deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :*

$$\begin{cases} u(x) = x^2 - 5x & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^* \\ v(x) = \sqrt{x} + 1 & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

a) Les fonctions u et v sont-elles dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$? Donner l'expression de leur dérivée.

b) En déduire la dérivée de la somme, du produit et du quotient de u et v.

3 Composition de fonctions

Définition 2. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On pose aussi a et b deux nombres réels. Enfin, on pose J l'intervalle des réels x tels que $ax + b \in I$.*
Alors on appelle la fonction g définie pour tout $x \in J$ par

$$g(x) = f(ax + b)$$

*la **fonction composée** de f par la fonction $x \mapsto ax + b$.*

Proposition 3. *Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, a et b deux réels et J l'intervalle des x vérifiant $ax+b \in I$. Alors la fonction composée de f par $x \mapsto ax+b$, c'est-à-dire la fonction définie pour tout $x \in J$ par $g(x) = f(ax + b)$ est dérivable sur J, et sa dérivée vaut pour tout $x \in J$,*

$$g'(x) = af'(ax + b)$$

Exemple. *Soit la fonction g définie sur un certain intervalle J par la formule*

$$g(x) = \sqrt{3x - 2} \text{ pour tout } x \in J$$

*a) Identifier le plus grand intervalle **ouvert** J sur lequel cette fonction est définie.*

b) De quelles fonctions g est-elle la composée ?

c) En déduire que g est dérivable sur J, et calculer sa dérivée.

4 Variations de fonctions dérivables

Proposition 4. *Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.*

- *La fonction f est* ***croissante*** *sur I si et seulement si f' est* ***positive*** *sur I.*
- *La fonction f est* ***décroissante*** *sur I si et seulement si f' est* ***négative*** *sur I.*
- *La fonction f est* ***constante*** *sur I si et seulement si f' est* ***nulle*** *sur I*

Remarque.
- *Cela correspond à l'intuition grâce à laquelle la dérivée a été construite, c'est-à-dire que $f'(x)$ est la pente de la tangente à la courbe représentative de f en le point $(x; f(x))$.*
- *Ce sont des équivalences. Si la fonction est croissante, alors sa dérivée est positive. Si la dérivée d'une fonction est positive, alors cette fonction est croissante.*

Exemple. *Soit $f : x \mapsto x^2 - 2x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.*

a) Donner l'expression de la dérivée de f.

b) Étudier le signe de f' à l'aide d'un tableau de signe.

x	$-\infty$ $\cdots$ $+\infty$
Signe de f'	

c) En déduire le tableau de variations de f.

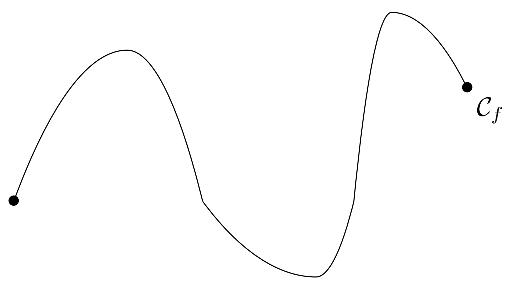
x	$-\infty$ $\cdots$ $+\infty$
Variations de f	

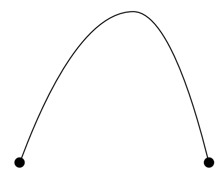
5 Extremums de fonctions dérivables

Définition 3. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et $a \in I$. On dit que f atteint un* ***extremum local*** *en a s'il existe un intervalle (non restreint à un point) J tel que : $a \in J$; $J \subseteq I$ et la restriction de f sur J atteint un extremum en a.*

Remarque. *Autrement dit, $f(a)$ est un extremum local de f sur I si l'image de a est supérieure ou inférieure à l'image de ses voisins « proches ».*

Exemple. *Soit f une fonction définie sur $[-6; 6]$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est représentée sur le repère suivant (en bas à gauche) :*





a) Quel est le maximum et le minimum de f ? En quelles valeurs sont-elles atteintes ?

b) On a représenté sur le repère à droite la restriction de f sur l'intervalle $[-6; -1]$. En déduire que en quel abscisse f admet un extremum local.

Proposition 5. *Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle* ***ouvert*** *I, et soit $a \in I$. Si f atteint un extremum local en a, alors*

$$f'(a) = 0$$

Remarque.

— ***L'hypothèse d'intervalle ouvert est importante*** *: cette proposition devient fausse sinon. Par exemple, la fonction carrée $f : x \mapsto x^2$ restreinte sur $[1; 2]$ admet un extremum en 1, mais sa dérivée en 1 est non-nulle.*

— ***La réciproque de cette proposition est fausse*** *: ce n'est pas forcément parce que $f'(a) = 0$ que f atteint un extremum local en a. Par exemple, si $f : x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$, on a bien $f'(0) = 0$, et pourtant $f(0) = 0$ n'est ni un minimum ou un maximum local.*

— *Cette proposition donne néanmoins une liste des candidats envisageables pour lex extremums d'une fonction dérivable sur un intervalle I : il suffit de chercher parmi les points a tels que $f'(a) = 0$. C'est ce qu'on appelle une* ***condition nécessaire****.*