Calcul Littéral

Seconde 3

1 Introduction : Lire un cours de maths

En mathématiques, un cours est composé de **définitions**, de résultats (comme des **propositions**, des **propriétés** ou des **théorèmes**), de **remarques** ainsi que d'**exemples** ou **exercices**.

Les définitions décrivent ce que sont les objets.

> Une **définition** permet l'introduction d'un concept nouveau en mathématiques. Il utilise des définitions déjà connues pour construire quelque chose de nouveau.
>
> ---
>
> **Il faut connaitre ses définitions pour comprendre les énoncés des exercices.**

Les propositions, les propriétés et les théorèmes décrivent ce que font les objets.

> Une **proposition**, une **propriété** ou un **théorème** est un **résultat** à propos des objets définis plus tôt. Ce résultat est vrai parce qu'il a été démontré.
>
> ---
>
> **Il faut connaître les résultat du cours pour pouvoir résoudre les exercices.**

Exemple.

— *Un triangle rectangle est un triangle dont l'un des angles est droit. C'est une **définition**.*

— *Le **Théorème de Pythagore** est un résultat à propos des triangles rectangles. Il nous en apprend un peu plus sur l'objet « triangle rectangle ».*

> Dans un cours, il y a aussi des remarques pour bien aider à comprendre, il ne faut pas les négliger.

2 Expressions et égalité

2.1 Expressions

Définition 1. *Une **expression algébrique** est composée de nombres et d'opérations mathématiques* $(+, -, \times, \dots)$.

Les expressions servent à écrire des formules. Les nombres sont soit connus (on utilise la plupart du temps des chiffres pour les écrire), soit indéterminés (on utilise des lettres pour les désigner).

Remarque. *On ignore les divisions (/) pour le moment : on préfèrera travailler avec les expressions fractionnaires plus tard.*

Exemple.

— *L'expression* $2x + 5$ *signifie que le nombre indéterminé* x *est multiplié par* 2*, et que l'on ajoute* 5 *au résultat.*

— *La formule* πr^2 *permet de calculer l'aire d'un disque de rayon* r*. Ici,* r *est indéterminé (car cette formule marche pour n'importe quel disque quelque soit son rayon), et* π *est une constante (c'est la même quantité quoiqu'il arrive).*

Exercice 1. *Pour chacune des situations suivantes, donner l'expression correspondante :*

a) *On achète une orange à 10€ et trois pommes qui coûtent* p*€ chacune. Quel est le prix total* P *?* $P = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

b) *On considère un rectangle de longueur* 12 *et de largeur* l*. Que vaut son aire* A *?* $A = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

c) *Le marié envoie* n *dragées à ses* 47 *invités, et la mariée en envoie* m *à ses* 35 *invités. Soudain, il réalise qu'il a oublié ses parents, et il envoie un paquet de* 100 *dragées pour se faire pardonner. Combien de dragées ont été envoyées en tout ?* ....

d) *Dans un jeu de société, il y chaque joueur possède deux dés transparents ainsi qu'autant de dés noirs qu'il y a de joueurs dans ce jeu. On suppose qu'il y a* m *joueurs, combien y a-t-il de dés en tout ?* ....

2.2 Egalité : Substitution

Proposition 1. *Soient deux nombres x et y tels que $x = y$. Alors toute expression comportant x peut-être transformée en la même expression en remplaçant les x par y. On parle de **substitution**.*

Exemple. *On suppose que $x = y$. Alors l'expression $2x+1$ peut-être transformé en $2y + 1$.*

Remarque. *On pourrait aussi substituer $2y + 1$ en $2x + 1$: **Une égalité marche dans les deux sens***

On peut aussi faire des substitutions à partir d'expressions plus avancées.

Méthode 1 (Substitution d'expression sans se tromper avec les parenthèses)**.**

On suppose $x = a + 5$, comment transformer l'expression $x^2 + 3x$?

1. On souhaite transformer x, on met tous les x entre parenthèses : $(x)^2+3(x)$
2. On efface x : $()^2 + 3()$
3. On remplace par $a + 5$: $(a + 5)^2 + 3(a + 5)$

Exercice 2. *En utilisant les égalités données, transformer l'expression correspondante :*

a) $e = f$: $84e + 62$ *devient* ....

b) $x = 2z + 4y$: $-x^2 + 5z$ *devient* ....

c) $l + L = P$: $\sqrt{l + L} + \dfrac{1}{l + L}$ *devient* ....

d) $a = b + d$ *et* $b = c + d$: $5a + 2e$ *devient* ....

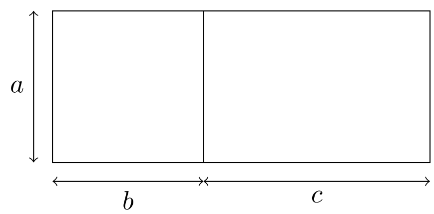
e) $2c + 3a = n - 5u$: $2(2c + 3a)^2 - 3(n - 5u)^2$ *devient* ....

3 Développement et factorisation

Définition 2. — *Une expression littérale est sous forme* développée *si elle correspond à une* ***somme*** *de termes.*

— *Une expression littérale est sous forme* factorisée *si elle correspond à un* ***produit*** *de facteurs.*

Exemple. *L'aire du rectangle suivant*



peut être calculée de deux façons.

— *En* ***multipliant*** *sa largeur (a) et sa longueur ($b+c$) :*

$$a(b+c)$$

— *En* ***ajoutant*** *les aires des deux rectangles :*

$$ab+bc$$

3.1 Développement

Pour développer un produit, on utilise la distributivité de la multiplication sur l'addition.

$$a(b+c) = ab + ac$$

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Pour développer un produit de sommes, on « distribue »chaque terme de la somme de gauche vers chaque terme de la somme de droite.

Exemple. *Développer chacune des expressions suivantes. On fera apparaître les traits de construction de la distributivité.*

a) $4x(2y+5z) =$ ....

b) $3x(-10x+2) =$ ....

c) $-(-4a+2b) =$ ....

d) $(17x-5)(12x+7) =$ ....

e) $(l+L)(l-L) =$ ....

3.2 Factorisation

Pour factoriser une somme, on peut chercher dans chaque terme de la somme un **facteur commun**.

$$\underline{a}b + \underline{a}c = \underline{a}(b + c)$$

Exemple. *Factoriser les expressions suivantes :*

a) $5a + 10b =$ ....

b) $-8y^2 + y =$ ....

c) $21x - 28x^2 =$ ....

d) $35p - 42q =$ ....

e) $x(3x - 2) + 10(3x - 2) =$ ....

4 Identités remarquables

Proposition 2. *Soient a et b deux nombre réels quelconques. Alors,*

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Exemple. *Développer les expression suivantes :*

a) $(c - 1)(c + 1) =$ ....

b) $(x + 4)^2 =$ ....

c) $(x - 4)^2 =$ ....

Exemple. *Factoriser l'expression suivante.*
$y^2 - 64 =$ ....

5 Expressions Fractionnaires

Définition 3 (Expression fractionnaire)**.**

$$\textit{Expression Fractionnaire} = \frac{\textit{Numérateur}}{\textit{Dénominateur} \neq 0}$$

Exemple. *Les expressions* $\frac{3}{4}$; $\frac{x}{3-x}$ *et* $\frac{a+b}{c-d}$ *sont des expressions fractionnaires.*

L'expression $\frac{x^2-1}{0}$ *ne l'est pas à cause du* 0*.*

5.1 Simplification de fractions

Exemple. *Simplifier les fractions suivantes :*

a) $\frac{35}{42} =$ ....

b) $\frac{10a^2(1+b)}{5a(2+b)} =$ ....

c) $\frac{a^2+2a+1}{a^2-1} =$ ....

d) $\frac{49-x^2}{x^2-14x+49} =$ ....

5.2 Dénominateurs communs

Proposition 3 (Formule universelle)**.** *Soient* $\frac{a}{b}$ *et* $\frac{c}{d}$ *deux expressions fractionnaires. Alors les expressions fractionnaires*

$$\frac{ad}{bd} \text{ et } \frac{bc}{bd}$$

ont le même dénominateur.

Remarque. *Cette formule est à utiliser* ***en dernier recours****, si vous ne voyez pas comment mettre deux expressions fractionnaires au même dénominateur.*

Exemple. *Simplifier les expressions suivantes :*

a) $\frac{2}{3} + \frac{13}{6} =$ ....

b) $\frac{9}{15} - \frac{35}{25} =$ ....

c) $\frac{3}{p(q-1)} + \frac{5}{(q-1)} =$ ....

d) $\frac{y+1}{y-2} - \frac{y-3}{y^2-4y+4} =$ ....

5.3 Égalité d'expressions fractionnaires

Remarque. *Pour comparer deux expressions fractionnaires* $\frac{a}{b}$ *et* $\frac{c}{d}$ *:*

1. *On les mets au même dénominateur, et on compare les numérateurs ;*
2. *On vérifie que* $ad = bc$.