

Fonction Exponentielle

Premières Spécialité Mathématiques

1 Définition de la fonction exponentielle

Définition 1. La fonction exponentielle, notée \exp , est l'unique fonction définie sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} , dérivable sur \mathbb{R} , solution de l'équation différentielle

$$f' = f$$

avec condition initiale $f(0) = 1$.

Remarque.

- « **solution** » : La fonction \exp est définie et dérivable sur \mathbb{R} , et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \exp'(x) = \exp(x) \\ \exp(0) = 1 \end{cases}$$

- « **unique** » : si une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur \mathbb{R} vérifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

alors $f = \exp$.

Exemple. a) Soit $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2 - 3x + \exp(x)$. Justifier que g est dérivable sur \mathbb{R} , puis calculer sa dérivée.

b) Soit $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \exp(-5x + 2)$. Justifier que h est dérivable sur \mathbb{R} , puis calculer sa dérivée.

2 Propriétés algébriques de l'exponentielle

Théorème 1. Soit x, y deux réels. Alors

$$\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

Remarque. La fonction exponentielle transforme les sommes en produit.

Démonstration. Soit y un nombre réel quelconque fixé. On pose $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (on admet que $\exp(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).

$$x \longmapsto \frac{\exp(x + y)}{\exp(x)}$$

$\exp(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- Justifier que g est dérivable sur \mathbb{R} et montrer que sa dérivée est nulle.
- À l'aide de $g(0)$, en déduire la valeur de $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- En conclure que $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$

□

Corollaire 1. Soit x, y deux réels. Alors,

$$\begin{cases} \exp(x) \times \exp(-x) = 1 \\ \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \\ \exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)} \end{cases}$$

Démonstration. On prouve $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$ en admettant les deux identités précédentes.

□