

# Suites géométriques

Terminale STMG1

## 1 Définition

**Définition 1.** Soit  $a \in \mathbb{R}_+$  et  $q \in \mathbb{R}_+^*$ . On appelle **suite géométrique à termes positifs** de premier terme  $a$  et de raison  $q$  une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par la relation de récurrence suivante :

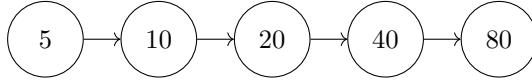
$$\begin{cases} u_0 &= a \\ u_{n+1} &= u_n \times q \end{cases}$$

**Remarque.**

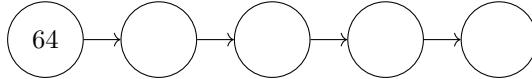
- De la même manière qu'une suite arithmétique consiste à ajouter la même quantité à chaque étape, une suite géométrique consiste à multiplier par une même quantité à chaque étape.
- Ici, on impose que la raison soit strictement positive ( $\in \mathbb{R}_+^*$ ).

**Exemple.** Compléter les schémas suivants décrivant des suites géométriques :

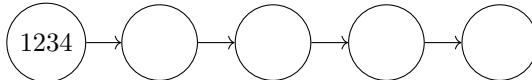
a)  $a = 5$  et  $q = 2$



b)  $a = 64$  et  $q = 0.5$



c)  $a = 1234$  et  $q = 0.1$



**Définition 2** (Formule explicite). Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite géométrique de premier terme  $u_0 = a$  et de raison  $q \in \mathbb{R}_+^*$ . Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$u_n = a \times q^n$$

**Exemple.** Pour chacun des exemples précédents, donner directement  $u_{10}$ .

## 2 Étude d'une suite géométrique

**Proposition 1.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite géométrique à termes positifs de raison  $q > 0$ .

- Si  $q < 1$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.
- Si  $q > 1$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.
- Si  $q = 1$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante.

**Exemple.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite géométrique de premier terme  $u_0 = 4$  et de raison  $q$ . Donner une valeur  $q_1$  à  $q$  pour que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  soit croissante, puis une valeur  $q_2$  à  $q$  pour que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  soit décroissante. Tester vos choix en observant les premiers termes de la suite.

## 3 Moyenne géométrique

**Définition 3.** Soit  $x$  et  $y$  deux nombres positifs. Alors la **moyenne géométrique** de  $x$  et  $y$  est donnée par

$$\sqrt{xy}$$

**Proposition 2.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite géométrique à termes positifs. Alors, pour tout  $n > 1$ , on a

$$u_n = \sqrt{u_{n-1} u_{n+1}}$$

**Exemple.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite géométrique à termes positifs, telle que  $u_9 = 5$  et  $u_{11} = 320$ . Calculer  $u_{10}$ , puis en déduire la raison de cette suite.

## 4 Somme géométrique

**Définition 4.** Soit un entier naturel  $n$  et un réel  $q$ . La somme  $1 + q + q^2 + \cdots + q^n$  est appelée **somme géométrique de raison  $q$**  et est notée

$$\sum_{i=0}^n q^i$$

**Proposition 3.** Soit un entier naturel  $n$  et un réel  $q$  **different de 1**. Alors, la somme géométrique de raison  $q$  vaut

$$\sum_{i=0}^n q^i = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

**Remarque.** Si  $q = 1$ , alors  $\sum_{i=0}^n q^i = n$ .

**Exemple.** Calculer les sommes géométriques suivantes :

a)  $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^8 = \sum_{i=0}^9 2^i$

b)  $1 - 3 + (-3)^2 + \cdots + (-3)^1 2 = \sum_{i=0}^1 2(-3)^i$

**Proposition 4.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite géométrique de raison  $q \neq 1$ , et  $N$  un entier naturel. Alors la somme des  $N$  premiers termes de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donnée par :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_N = \sum_{i=0}^N u_i = u_0 \frac{q^{N+1} - 1}{q - 1}$$