

A dark blue vertical bar runs down the left side of the page. A blue arrow points to the right from this bar, containing the date.

30/12/2016

# Projet (Monte Carlo)

Several thin, curved lines in dark blue and light grey originate from the bottom left corner and sweep upwards and to the right.

Donatien Bonniau  
Quentin Coïc

## Table des matières

Introduction .....	2
I-Méthode par le schéma d'Euler .....	3
1)Méthode de Monte-Carlo classique.....	3
2)Méthode antithétique .....	4
3)Méthode de variable de contrôle.....	4
4)Méthode de fonction d'importance .....	5
II-Méthode par un schéma sans biais .....	10
1)Méthode de Monte-Carlo classique.....	10
2)Méthode de stratification.....	10
III-Synthèse et perspectives .....	14



## Introduction

Le but de ce projet est d'estimer  $V := \mathbb{E}[g(X_T)]$  où  $g(X_T) := (e^{X_T} - K)_+$  et où  $X$  est un processus défini par une équation différentielle stochastique de la forme

$$X_t = x_0 + \int_0^t \mu(X_s) ds + \int_0^t \sigma dW_s$$

avec  $\mu(x) := 0.1(\sqrt{e^x} - 1) - 1/8$  et  $W = (W_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien standard.

Nous abordons ce problème à travers deux méthodes. Une première par le schéma d'Euler qui donne une estimation biaisée et une autre par un schéma sans biais.

**NB :** Les résultats présentés sont obtenus en utilisant  $N = 10^6$  échantillons pour chaque méthode. De plus, on prendra une précision à  $10^{-5}$  près.

## I-Méthode par le schéma d'Euler

Dans cette méthode nous procédons à une discrétisation du temps et nous estimons  $X_T$  via la formule de récurrence

$$X_{t_{k+1}}^\Delta := X_{t_k}^\Delta + u(X_{t_k}^\Delta)\Delta + \sigma(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})$$

et on cherche donc à estimer par la méthode de Monte-Carlo  $V_\Delta := \mathbb{E}[g(X_T^\Delta)]$ .

On remarque en itérant la formule qu'on a

$$X_T^\Delta := X_{t_0}^\Delta + \Delta \left( \sum_{i=0}^9 \mu(X_{t_k}^\Delta) \right) + \sigma W_T$$

Ce qui correspond bien à une discrétisation de l'équation différentielle stochastique si on fixe  $X_{t_0}^\Delta = x_0 = 0$ .

$\int_0^T \mu(X_s) ds$  est déterminée en divisant l'aire à calculer en un grand nombre de rectangle de largeur  $\Delta$  et de hauteur  $\mu(X_{t_k}^\Delta)$ .

$\int_0^T \sigma dW_s$  est quant à elle approximée par  $\sigma W_T$ .

Cependant, comme  $X_T^\Delta$  est une approximation de  $X_T$ , la méthode fournit une estimation biaisée de  $V$ .

### 1) Méthode de Monte-Carlo classique

On cherche à estimer  $V_\Delta = \mathbb{E}[g(X_T^\Delta)]$  par une méthode de Monte Carlo classique. Pour ce faire on calcule  $V_\Delta \approx \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N g(X_{T,i}^\Delta)$ .

Voici nos résultats :

Estimateur	Ecart-type	Borne inférieur	Borne supérieur	Erreur
0.20466	0.41497	0.20384	0.20547	0.00081

Ces valeurs serviront de référence pour comparer avec les autres méthodes.

## 2) Méthode antithétique

Nous avons précédemment obtenu une estimation de  $V_\Delta$ , nous allons maintenant essayer d'obtenir une nouvelle estimation mais cette fois via une méthode de réduction de variance afin de réduire l'erreur obtenue précédemment.

Pour ce faire, nous allons tout d'abord utiliser une méthode antithétique.

En effet, on sait que le mouvement brownien  $(W_0, \dots, W_n)$  est égale en loi à  $(-W_0, \dots, -W_n)$

$A(X_T^\Delta)$  et  $X_T^\Delta$  ont donc la même loi avec  $A(X_T^\Delta) = X_{t_0}^\Delta + \Delta(\sum_{i=0}^n \mu(X_{t_k}^\Delta)) - \sigma W_T$

Nous allons calculer  $V_\Delta \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{g(X_{T,i}^\Delta) + g(A(X_{T,i}^\Delta))}{2}$

On prendra comme nombre d'échantillons le même nombre que précédemment et non pas la moitié comme cela est fait habituellement pour prendre en compte le coût d'appel de la fonction  $g$ . En effet, la fonction  $g$  étant particulièrement simple, elle est très peu coûteuse à appeler. La tâche la plus coûteuse à effectuer sera la génération des mouvements brownien.

Il n'est ici pas pertinent de réduire le nombre d'échantillons si l'on veut comparer la méthode de Monte Carlo classique avec la méthode antithétique.

Voici nos résultats :

Estimateur	Ecart-type	Borne inférieur	Borne supérieur	Erreur
0.19614	0.24485	0.19566	0.19662	0.00048

Comme on peut le voir, nous avons bien réussi à réduire l'écart-type (et donc l'erreur) grâce à cette méthode. Cependant nous avons obtenu un estimateur peu fiable puisque sa valeur est désormais inférieure à 0.20. Cette méthode est donc assez peu satisfaisante puisque l'estimateur obtenu est faussé.

## 3) Méthode de variable de contrôle

Nous allons utiliser une méthode de variable de contrôle pour estimer  $V_\Delta$ .

Le principe de la méthode de variable de contrôle est d'exploiter l'erreur d'estimation d'une quantité connu pour améliorer l'estimation d'une quantité inconnue ( $V = E[g(X_T)]$ ).

Pour ce faire on va ici calculer  $E[\tilde{Y}]$  avec  $\tilde{Y} = g(X_T) - b(f(X_T) - m)$  où  $m = E[f(X_T)]$

On choisira ici  $f(X_T) = g(\sigma W_T)$  ce qui nous donne

$$\tilde{Y} = g(X_T) - b(g(\sigma W_T) - m) \text{ et } m = \mathbb{E}[g(\sigma W_T)]$$

Le  $b$  choisi sera le  $b$  optimal qui minimisera la variance de l'estimateur. Ce  $b$  optimal est de la forme

$$b^* = \frac{\text{Cov}(g(X_T), f(X_T))}{\text{Var}(f(X_T))} \text{ ce qui donne } b^* = \frac{\text{Cov}(g(X_T), g(\sigma W_T))}{\text{Var}(g(\sigma W_T))}$$

On va maintenant chercher à calculer  $m$ . On sait que  $\sigma W_T$  suit une loi  $\mathcal{N}(0, \sigma^2 T)$ .

On sait d'après le TP 3 que si  $X$  suit une loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  alors

$$\mathbb{E}[g(X)] = e^{\frac{\sigma^2}{2} + \mu} \phi\left(-\frac{\log(K) - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right) - K \phi\left(\frac{\log(K) - \mu}{\sigma}\right)$$

Dans notre cas, on a  $\mu = 0$  et  $\sigma^2 = \sigma^2 T$  ce qui nous donne

$$m = \mathbb{E}[g(\sigma W_T)] = e^{\frac{\sigma^2 T}{2}} \phi\left(-\frac{\log(K) - \sigma^2 T}{\sqrt{\sigma^2 T}}\right) - K \phi\left(\frac{\log(K)}{\sqrt{\sigma^2 T}}\right)$$

Par le même raisonnement que pour la méthode antithétique on va utiliser  $N$  échantillons et non pas  $N/2$  (la fonction  $g(\sigma W_T)$  étant ici encore très peu coûteuse).

Nous avons par la suite procédé de deux façons différentes : l'une en utilisant une petite partie de nos échantillons pour générer un  $b$  optimal de façon à ce qu'il soit indépendant des fonctions  $f$  et  $g$ , l'autre en déterminant le  $b$  optimal après avoir calculé nos échantillons.

	Estimateur	Ecart type	Borne inférieure	Borne supérieure	Erreur (à $10^{-6}$ près)
<b>b généré à priori</b>	0.20475	0.04721	0.20461	0.20488	0.000135
<b>b généré à posteriori</b>	0.20480	0.04726	0.20470	0.20489	0.000095

Nous pouvons remarquer que dans les deux cas, les valeurs obtenues sont similaires. L'estimateur par la méthode de variable de contrôle est proche de l'estimateur classique (0.20466). L'écart-type est fortement réduit par rapport à une méthode classique (divisé environ par 8). L'erreur est quant à elle très satisfaisante, elle est de l'ordre de  $10^{-5}$ , elle a été divisée par 9 par rapport à l'erreur classique.

#### 4) Méthode de fonction d'importance

Une autre technique de réduction de variance afin de diminuer la largeur de notre intervalle de confiance est d'utiliser une méthode de fonction d'importance. Cela consiste, si nous cherchons à estimer  $\mathbb{E}[F(X)]$  où  $X$  a pour densité  $f$  à multiplier et diviser  $F(X)$  par une densité  $h$  qui est strictement positive quand  $f$  l'est. On a alors,

$$\mathbb{E}[F(X)] = \mathbb{E}\left[\frac{F(Z)f(Z)}{h(Z)}\right]$$

où  $Z$  a pour densité  $h$ . On cherche alors parmi une famille de densités  $(h(\cdot))_\theta$  le paramètre  $\theta$  qui minimise la variance de la quantité  $\frac{F(Z)f(Z)}{h(Z)}$  en espérant qu'elle soit plus petite que celle de  $F(X)$ .

Dans le cadre de notre projet, l'approximation de  $X_T, X_T^\Delta$  ne dépend aléatoirement que de 10 incréments du mouvement brownien  $W$  de même écart temporel  $\Delta = \frac{1}{10}$  donc suivant tous une loi gaussienne centrée de variance  $\Delta$  et également indépendants deux à deux. En effet, on a,

$$X_T^\Delta = x_0 + \Delta \sum_{i=0}^9 \mu(X_{t_i}^\Delta) + \sigma \sum_{i=0}^9 (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \text{ où } t_i = k\Delta \forall i = 0, \dots, 10$$

On peut donc comme vu en cours utiliser comme fonction d'importance, la densité d'un vecteur gaussien  $Z$  de moyenne  $\theta \in \mathbb{R}^{10}$  et de matrice de covariance  $\Delta I_{10}$ . En notant  $\alpha = \frac{\theta}{\Delta}$  on a alors,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g(X_T^\Delta)] &= \mathbb{E}[F(\Delta W_1, \dots, \Delta W_{10})] = \mathbb{E}\left[F(Z_1, \dots, Z_{10}) \exp\left(-\sum_{i=1}^{10} \alpha_i Z_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{10} \alpha_i^2 \Delta\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[F(\Delta W_1 + \alpha_1 \Delta, \dots, \Delta W_{10} + \alpha_{10} \Delta) \exp\left(-\sum_{i=1}^{10} \alpha_i \Delta W_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{10} \alpha_i^2 \Delta\right)\right] \end{aligned}$$

où  $\Delta W_i = W_{t_i} - W_{t_{i-1}} \forall i = 1, \dots, 10$  et  $F(\Delta W_1, \dots, \Delta W_{10}) = g(f(\Delta W_1, \dots, \Delta W_{10}))$  avec  $f(\Delta W_1, \dots, \Delta W_{10}) = X_T^\Delta$

Pour commencer, nous avons codé un premier algorithme permettant de calculer un estimateur de  $V_\Delta$  via des simulations i.i.d. de notre nouvelle quantité par la méthode de Monte-Carlo avec un  $\alpha$  choisi arbitrairement et dont toutes les coordonnées sont identiques. En faisant varier la valeur prise, cela nous permet dans un premier temps de repérer où pourrait se situer la meilleure valeur quand les coordonnées sont identiques. Voici nos résultats :

$\alpha$	Estimateur	Ecart-type	Borne inférieure IC	Borne supérieure IC	Erreur
0.5	0.20451	0.22834	0.20406	0.20496	0.00045
1	0.20461	0.13222	0.20435	0.20487	0.00026
1.5	0.20487	0.10393	0.20467	0.20507	0.00020
2	0.20466	0.15149	0.20436	0.20496	0.00030
2.5	0.20448	0.25891	0.20397	0.20498	0.00051

On peut d'abord observer que pour toutes ces valeurs de  $\alpha$ , l'estimateur par la méthode de fonction d'importance est proche de l'estimateur classique (0.20466) et que l'écart-type et par conséquent l'erreur sont plus petits (0.41497 et 0.00081 pour la méthode classique). On peut également s'attendre à une variance optimale pour  $\alpha$  proche de 1.5.

Pour vérifier cette dernière supposition, nous avons implémenté l'algorithme du gradient stochastique (utilisable car notre problème de minimisation sur  $\alpha$ , coordonnées identiques ou non est convexe comme on l'a vu en cours) en imposant une valeur unique pour toutes les coordonnées de  $\alpha$ . Cela nous permet en partant de  $\alpha_0 = 0$  de calculer par récurrence une suite

$(\alpha_n)_{n \geq 1}$  convergeant vers la valeur optimale ainsi que de calculer un nouvel estimateur mis à jour à chaque étape avec la nouvelle valeur de  $\alpha$ .

Remarque : Nous avons utilisé la suite  $(\gamma_n)_{n \geq 1} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$  qui vérifie les conditions demandées.

Pour 10 lancements de cet algorithme, nous trouvons (à  $10^{-2}$  près pour  $\alpha$ ) :

$\alpha$ optimal	Estimateur	Ecart-type	Borne inférieure IC	Borne supérieure IC	Erreur
1.07	0.19707	0.13977	0.19679	0.19734	0.00027
1.32	0.19534	0.12156	0.19510	0.19558	0.00024
1.07	0.19710	0.13791	0.19683	0.19737	0.00027
1.07	0.19714	0.13996	0.19687	0.19742	0.00027
1.20	0.19629	0.12751	0.19604	0.19654	0.00025
1.40	0.19462	0.12101	0.19438	0.19485	0.00024
1.15	0.19619	0.13099	0.19593	0.19644	0.00026
1.05	0.19740	0.14158	0.19712	0.19767	0.00028
1.14	0.19653	0.13179	0.19627	0.19679	0.00026
1.01	0.19747	0.14633	0.19718	0.19776	0.00029
<b>1.15</b>	<b>0.19651</b>	<b>0.13384</b>	<b>0.19625</b>	<b>0.19678</b>	<b>0.00026</b>

où la dernière ligne correspond à la moyenne des résultats. On observe que notre nouvel estimateur semble moins fiable du fait de son écart à l'estimateur classique et que l'écart-type est toujours meilleur que le classique mais moins bon que celui trouvé plus haut pour  $\alpha = 1.5$ . Nous avons ensuite testé la valeur moyenne de  $\alpha$  (1.15) sur notre premier algorithme afin de juger de son optimalité. Nous avons :

Estimateur	Ecart-type	Borne inférieure IC	Borne supérieure IC	Erreur
0.20464	0.11590	0.20441	0.20487	0.00023

On peut donc voir que notre  $\alpha$  optimal moyen donne une erreur supérieure mais proche de la meilleure valeur trouvée arbitrairement. Du fait de la dispersion assez importante de nos 10 valeurs, on peut considérer que pour notre nombre de simulations (peut-être trop faible) la convergence n'est pas encore assez précise et donc le  $\alpha$  moyen n'est pas encore assez précisément représentatif de la valeur optimale mais nous n'en sommes pas très loin.

Pour terminer cette partie, nous avons implémenté une nouvelle fois l'algorithme du gradient stochastique mais sans imposer que les coordonnées soient identiques. Nous trouvons :

Estimateur	Ecart-type	Borne inférieure IC	Borne supérieure IC	Erreur
0.20228	0.28462	0.20172	0.20284	0.00056

$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$	$\alpha_7$	$\alpha_8$	$\alpha_9$	$\alpha_{10}$
0.31	0.44	0.43	0.28	0.31	0.33	0.27	0.43	0.18	0.43



Pour cette version, l'estimateur est plus proche du classique mais l'erreur même si toujours meilleur que la classique s'est dégradée par rapport au cas où les coordonnées sont identiques. On peut d'ailleurs observer que les coordonnées optimales sont assez éloignées de la valeur qu'on avait trouvée précédemment en imposant des coordonnées identiques. Nous avons alors encore testé ces coordonnées sur le premier algorithme en le modifiant légèrement afin de pouvoir mettre des  $\alpha_i$  différents. Nous obtenons :

<b>Estimateur</b>	<b>Ecart-type</b>	<b>Borne inférieure IC</b>	<b>Borne supérieure IC</b>	<b>Erreur</b>
0.20482	0.27627	0.20427	0.20536	0.00054

Comme on pouvait le redouter, les valeurs obtenues ne sont pas du tout satisfaisantes. L'erreur est bien supérieure à celle obtenue avec contrainte. De plus les coordonnées que l'on obtient par l'algorithme du gradient stochastique semblent converger vers une valeur proche de 0.30 ce qui comme on l'a vu plus haut donnerait une erreur non optimale. On ne peut donc pas penser comme précédemment que la convergence n'est pas encore assez précise pour notre nombre de simulations. Peut-être pouvons-nous alors penser à une mauvaise implémentation de l'algorithme en dimension supérieure.



## II-Méthode par un schéma sans biais

Dans cette deuxième partie, la méthode utilisée donnera une estimation de  $V$  non biaisée. Cette fois-ci la discrétisation du temps est déterminée par une suite  $(\tau_k)_{k \geq 1}$  i.i.d. de variables aléatoires de loi exponentielle de paramètre  $\beta$  et indépendante du mouvement brownien  $W$ . Les  $T_k$  sont donc définis par  $T_k := (\sum_{i=1}^k \tau_i) \wedge T$ . Ceux-ci nous permettent alors de calculer des incréments du mouvement brownien puis une suite  $(\hat{X}_{T_k})$  définie par récurrence. Enfin, on peut calculer une quantité  $\psi$  pour laquelle il a été montré que  $V = \mathbb{E}[\psi]$ .

### 1) Méthode de Monte-Carlo classique

Pour commencer nous avons estimé  $V := \mathbb{E}[\psi]$  par une méthode de Monte-Carlo classique avec des simulations i.i.d. de  $\psi$  en testant plusieurs valeurs pour le paramètre  $\beta$ . Nous obtenons :

$\beta$	Estimateur	Ecart-type	Borne inférieure IC	Borne supérieure IC	Erreur
0.1	0.20638	0.45054	0.20549	0.20726	0.00088
0.5	0.20497	0.53638	0.20392	0.20602	0.00105
1	0.20687	0.71245	0.20548	0.20827	0.00140
2.5	0.20899	1.55813	0.20594	0.21205	0.00305
5	0.20850	5.56366	0.19760	0.21941	0.01090

On remarque d'abord que l'estimateur est bien stable par rapport à  $\beta$  et qu'il est proche de celui obtenu par la méthode classique dans le schéma d'Euler (0.20466). Cependant, on s'aperçoit que l'erreur est fortement dépendante de la valeur de  $\beta$ . Pour  $\beta = 0.1$ , l'erreur est du même ordre même si moins bonne que celle de la méthode classique du schéma d'Euler (0.00081). Puis, en faisant augmenter  $\beta$  on observe que l'erreur croît également et très rapidement. Cela pourrait s'expliquer par le fait que les variables exponentielles utilisées sont de moyenne  $\frac{1}{\beta}$  et donc avec  $T = 1$  on va avoir pour  $\beta = 0.1$ ,  $N_T$  qui va plus souvent être nul (ou du moins petit) et donc à chaque fois que ce sera le cas, on aura  $\psi = e^{\beta T} g(\hat{X}_T)$  où  $\hat{X}_T = x_0 + \mu(x_0)T + \sigma W_T$ .  $\psi$  ne dépend alors que d'une variable aléatoire (ou de peu de variables aléatoires si  $N_T$  est petit). Ainsi, la dispersion des simulations de  $\psi$  sera probablement moins importante que lorsque  $\beta$  est plus grand et donc que l'on a plus souvent de plus grandes valeurs de  $N_T$  et donc plus de  $T_k$  et par conséquent de  $\Delta W_k$  qui interviennent dans le calcul de  $\psi$ . Par ailleurs, plus de variables à simuler va également impliquer plus de temps de calcul. Il pourrait donc être judicieux de ne pas considérer des valeurs de  $\beta$  trop grandes.

### 2) Méthode de stratification

Ensuite, afin de réduire l'erreur nous avons mis en place une méthode de stratification. Cela consiste si on cherche à estimer  $\mathbb{E}[f(X)]$  à trouver  $h(X)$  et une partition  $(A_k)_{1 \leq k \leq K}$  telles que l'on sait simuler  $L(f(X)/h(X) \in A_k)$  et que l'on connaît  $p_k := \mathbb{P}(h(X) \in A_k)$ . On a alors,

$$\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{k=1}^K p_k \mathbb{E}[f(X)/h(X) \in A_k]$$

On alloue donc une proportion  $q_k := \frac{n_k}{N}$  du nombre total de simulations à chaque strate et la variance de notre nouvel estimateur est égale à  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^K \frac{p_k^2}{q_k} \sigma_k^2$  où  $\sigma_k^2$  est la variance dans la strate. On a vu en cours deux types d'allocations, d'abord l'allocation proportionnelle ( $q_k = p_k$ ) pour

laquelle on a vu que la variance de l'estimateur par stratification était moins grande que celle de l'estimateur classique et l'allocation optimale qui minimise la variance du nouvel estimateur et dont on a vu qu'elle vérifie  $q_k = \frac{p_k \sigma_k}{\sum_{i=0}^K p_i \sigma_i}$ .

Dans le cadre de notre projet, on sait par l'énoncé que la loi conditionnelle de  $(T_1, \dots, T_n)$  sachant  $N_T = n$  est identique à la loi de la statistique d'ordre  $(U_{(1)}, \dots, U_{(n)})$  de  $n$  variables i.i.d.  $(U_1, \dots, U_n)$  de loi  $U[0, T]$  et que  $N_T$  suit une loi de poisson de paramètre  $\beta T$ . Ainsi, en conditionnant par rapport à  $N_T = n$ , la variable  $\psi$  ne dépend aléatoirement plus que de  $(T_1, \dots, T_n)$  (qui détermine les  $\Delta W_k$  à simuler) et donc dans chaque strate on aura qu'à simuler une statistique d'ordre  $(U_{(1)}, \dots, U_{(n)})$  qui jouera alors le rôle de  $(T_1, \dots, T_n)$  pour simuler les incréments du brownien et calculer  $\psi$ . Reste maintenant à déterminer la partition. En effet, on ne peut pas créer un algorithme avec un nombre infini de strates correspondant à chaque valeur de  $N_T$  dans  $\mathbb{N}$ . Pour régler cela, nous avons codé une boucle while en partant de  $n = 0$  afin de déterminer à partir de quelle valeur la quantité  $\mathbb{P}(N_T = n)N$  où  $N$  est le nombre total de simulations, devient  $< 1$  car cette quantité correspond à l'allocation proportionnelle de chaque strate et on s'arrête donc lorsque l'allocation ne permet plus d'avoir au moins une simulation. Cependant, on ne peut alors pas prendre  $\beta$  trop grand puisque sinon cette quantité sera déjà  $< 1$  dès  $n = 0$  mais cela reste finalement cohérent avec ce qu'on a vu plus haut pour la méthode classique. Voici donc nos résultats lorsque l'on utilise une allocation proportionnelle :

$\beta$	Estimateur	Ecart-type	Borne inférieure IC	Borne supérieure IC	Erreur
0.1	0.20639	0.45320	0.20550	0.20728	0.00089
0.5	0.20570	0.60373	0.20451	0.20688	0.00118
1	0.20557	0.66125	0.20427	0.20686	0.00130
2.5	0.20674	1.40219	0.20399	0.20949	0.00275
5	0.20209	4.85338	0.19258	0.21161	0.00951

On observe d'abord que l'estimateur est toujours stable selon  $\beta$  et proche de l'estimateur classique. En ce qui concerne l'erreur, pour  $\beta = 0.1$  c'est très similaire au cas classique et pour les valeurs supérieures du paramètre on peut relever une légère amélioration mais toujours une forte croissance en fonction de  $\beta$ . Mais cela pourrait finalement s'expliquer de la même manière qu'avant. En effet, dès lors que  $\beta$  n'est pas trop grand et donc que  $\mathbb{P}(N_T = 0)N$  est  $\geq 1$ , plus le paramètre va augmenter, plus le nombre de strates que l'on va considérer va augmenter également. On peut alors invoquer un argument similaire au cas classique puisque dans les strates où  $n$  est grand on aura alors plus variables qui interviendront dans le calcul de  $\psi$  et donc probablement plus de dispersion (et plus de temps de calcul). De plus, lorsque  $\beta$  augmente,  $\mathbb{P}(N_T = n)$  augmente aussi pour les plus grandes valeurs de  $n$  et donc le nombre de simulations dans les « grandes » strates sera plus important.

Pour terminer cette partie nous avons utilisé une allocation optimale en prenant le même nombre de strates que pour l'allocation proportionnelle. Nous avons d'abord estimé les allocations optimales avec 1000 simulations par strate. Puis, nous avons estimé  $V$  avec  $10^6 - (1000 * \text{nombre de strates})$  simulations afin de respecter le nombre total de simulations. Nous obtenons :

$\beta$	Estimateur	Ecart-type	Borne inférieure IC	Borne supérieure IC	Erreur
0.1	0.20591	0.44673	0.20503	0.20679	0.00088
0.5	0.20580	0.45064	0.20492	0.20669	0.00089
1	0.20501	0.44714	0.20413	0.20589	0.00088
2.5	0.20528	0.45167	0.20439	0.20617	0.00089
5	0.20576	0.45331	0.20486	0.20665	0.00090

On observe d'abord que l'estimateur est très stable selon  $\beta$  et proche de l'estimateur classique. Pour l'erreur, elle est toujours au même niveau qu'avant pour  $\beta = 0.1$  mais maintenant elle reste stable lorsque  $\beta$  augmente. On a pris le même nombre de strates que pour l'allocation proportionnelle, on pourrait donc potentiellement avoir le même problème. Cependant, contrairement au cas précédent l'allocation optimale nous permet de donner un poids moins important concernant le nombre de simulations pour les plus « grandes » strates. Ainsi, même si le nombre de strates augmente avec  $\beta$ , les plus « grandes » strates ne gagnent pas pour autant en considération (nombre de simulations) et donc ne peuvent pas causer le tort qu'on leur prêtait précédemment.

Pour conclure cette partie, la méthode par schéma sans biais (cas classique) aura pour avantage de nous donner une estimation cette fois-ci non biaisée de  $V$  et une erreur relativement similaire au cas classique du schéma d'Euler pour un paramètre  $\beta$  assez petit. En revanche, les techniques de réduction de variance utilisées (stratifications proportionnelle et optimale) n'auront pas réussi leur mission si ce n'est de stabiliser l'erreur selon  $\beta$  pour la stratification optimale. Peut-être alors qu'une meilleure manière de déterminer le nombre de strates pour l'allocation optimale permettrait de réduire l'erreur en plus de la stabiliser par rapport à  $\beta$ .



### III-Synthèse et perspectives

Comparons à présent les différents résultats obtenus. Nous ne prenons pour les méthodes à paramètre que les meilleurs résultats. C'est-à-dire,  $\alpha = 1.5$  dans le cas où toutes les coordonnées sont identiques pour la fonction d'importance et  $\beta = 0.1$  pour le schéma sans biais. Pour la méthode de variable de contrôle, nous prenons le cas où  $b^*$  est généré a posteriori.

Méthode	Estimateur	Ecart-type	Borne inférieure IC	Borne supérieure IC	Erreur
<b>Schéma d'Euler</b>					
Classique	0.20466	0.41497	0.20384	0.20547	0.00081
Antithétique	0.19614	0.24485	0.195660	0.196620	0.00048
Variable de contrôle	0.20480	0.04726	0.20470	0.20489	0,000095
Fonction d'importance	0.20487	0.10393	0.20467	0.20507	0.00020
<b>Schéma sans biais</b>					
Classique	0.20638	0.45054	0.20549	0.20726	0.00088
Allocation proportionnelle	0.20639	0.45320	0.20550	0.20728	0.00089
Allocation optimale	0.20591	0.44673	0.20503	0.20679	0.00088

On peut remarquer pour le schéma d'Euler que la méthode de réduction de variance ayant été la plus efficace et de loin est celle de la variable de contrôle. En effet, la valeur de son estimateur est très proche de l'estimateur classique et l'erreur a été divisé par 9 ! La fonction d'importance a quant à elle très bien fonctionné également pour son meilleur paramètre mais à un degré moindre pour la réduction de l'erreur (divisée par 4). En revanche, la méthode antithétique n'a réduit que de moitié l'erreur et la qualité de son estimateur est très discutable. De façon générale, pour le schéma d'Euler, nous avons réussi à réduire l'erreur pour chacune des méthodes utilisées quitte à avoir un estimateur peu fiable (méthode antithétique).

En ce qui concerne le schéma sans biais, on peut observer que l'estimateur reste toujours fiable pour chacune des méthodes de réduction de variance utilisées mais nous n'avons clairement pas réussi à réduire l'erreur.

Enfin, pour comparer les deux schémas, on peut soulever une similarité entre les deux estimateurs classiques et une erreur du même ordre dans les deux cas bien que légèrement supérieure pour le schéma sans biais. Cependant, on a pu constater qu'il était bien plus aisé de réduire l'erreur pour le schéma d'Euler. Ainsi, si le deuxième schéma a pour avantage de nous donner une estimation non biaisée de  $V$ , il semble compliqué de contrôler l'erreur par des méthodes de réduction de variance contrairement au premier schéma où l'estimation de  $V$  obtenue est biaisée.

Pour aller plus loin, nous avons d'abord essayé de mettre en place une méthode de stratification pour l'estimation par le schéma d'Euler. Comme on l'a vu,  $X_T^\Delta$  ne dépend aléatoirement que de 10 incréments du mouvement brownien  $W$ . En effet,

$$X_T^\Delta = x_0 + \Delta \sum_{i=0}^9 \mu(X_{t_i}^\Delta) + \sigma \sum_{i=0}^9 (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) = x_0 + \Delta \sum_{i=0}^9 \mu(X_{t_i}^\Delta) + \sigma \sum_{i=1}^{10} \Delta W_i$$

où  $\Delta W_i = W_{t_{i+1}} - W_{t_i} \forall i = 1, \dots, 10$ .

Nous avons alors conditionné  $g(X_T^\Delta)$  par rapport au dernier incrément  $\Delta W_{10}$ . Cette variable aléatoire comme les autres incréments suit une loi gaussienne centrée et de variance  $\Delta$ . Nous avons donc pris pour partition

$$A_k = ]F^{-1}\left(\frac{k}{K}\right), F^{-1}\left(\frac{k+1}{K}\right)] \forall k = 0, \dots, K-1$$

où  $K$  est le nombre de strates qu'on prendra à 10 et  $F$  la fonction de répartition d'une gaussienne centrée et de variance  $\Delta$ .

Pour simuler la loi conditionnelle  $L((\Delta W_1, \dots, \Delta W_{10})/\Delta W_{10} \in A_k)$ , comme les incréments sont indépendants, nous avons simulé les 9 premiers incréments de manière habituelle dans chaque strate. Puis, nous avons simulé le dernier incrément dans chaque strate grâce à la formule vue en cours,

$$\Delta W_{10}^{(k)} = F^{-1}\left(F(a_k) + U(F(a_{k+1}) - F(a_k))\right) = F^{-1}\left(\frac{k}{K} + \frac{U}{k}\right) \forall k = 0, \dots, K-1 \text{ et où } U \sim U[0,1]$$

On peut également noter que  $\mathbb{P}(\Delta W_{10} \in A_k) = \frac{1}{K} \forall k = 0, \dots, K-1$ .

Voici nos résultats pour l'allocation proportionnelle et l'allocation optimale :

Allocation	Estimateur	Ecart-type	Borne inférieure IC	Borne supérieure IC	Erreur
Proportionnelle	0.20431	0.40286	0.20352	0.20510	0.00079
Optimale	0.20436	0.38844	0.20359	0.20512	0.00076

Dans les deux cas, la valeur de l'estimateur est très proche de la méthode classique. En ce qui concerne l'erreur, elle est inférieure dans les deux cas et légèrement plus pour l'allocation optimale ce qui est cohérent avec les résultats du cours. Cependant, la diminution est extrêmement légère et bien plus faible que pour toutes les autres méthodes de réduction de variance testées dans le schéma d'Euler. Peut-être alors que changer la stratification pour conditionner par rapport à  $W_T$  et/ou combiner cette méthode à une variable de contrôle (méthode qui a été la plus efficace) comme celle que nous avons utilisée précédemment pourraient améliorer les résultats obtenus.

Nous avons ensuite mis en place une méthode de variable de contrôle (méthode la plus efficace pour le schéma d'Euler) pour le schéma sans biais. Nous avons utilisé la variable de contrôle  $e^{\beta T} g(\tilde{X}_T) \mathbf{1}_{N_T > 0}$  où  $\tilde{X}_T = \sigma W_T$ .  $N_T$  est une variable aléatoire qui dépend aléatoirement de la suite aléatoire  $(T_k)$  qui elle-même dépend aléatoirement de la suite i.i.d. exponentielle de paramètre  $\beta$



qui est indépendante du mouvement brownien  $W$ . Ainsi,  $N_T$  est indépendante de  $W_T$  et donc de  $\tilde{X}_T$ . On a alors,

$$m := \mathbb{E}[e^{\beta T} g(\tilde{X}_T) 1_{N_T > 0}] = e^{\beta T} \mathbb{E}[g(\tilde{X}_T)] \mathbb{P}(N_T > 0)$$

où  $N_T$  suit une loi de poisson de paramètre  $\beta T$  et où  $\mathbb{E}[g(\tilde{X}_T)]$  a déjà été calculé explicitement dans la partie sur le schéma d'Euler.  $m$  est donc connu explicitement et on peut donc appliquer la méthode de variable de contrôle pour différentes valeurs de  $\beta$ . Nous obtenons :

$\beta$	Estimateur	Ecart-type	Borne inférieure IC	Borne supérieure IC	Erreur
0.1	0.20624	0.45144	0.20536	0.20713	0.00088
0.5	0.20523	0.53730	0.20418	0.20628	0.00105
1	0.20457	0.70184	0.20319	0.20595	0.00138
2.5	0.20371	1.52624	0.20072	0.20671	0.00299
5	0.20173	5.37097	0.19120	0.21226	0.01053

Les valeurs de l'estimateur semblent toujours assez stables par rapport à  $\beta$  et relativement proches de celles obtenues par la méthode classique. Le problème de croissance de l'erreur quand  $\beta$  augmente est toujours le même. Cela peut paraître logique étant donné qu'il n'est absolument pas évident de voir en quoi la variable de contrôle pourrait influencer sur le problème que nous avons soulevé (plus souvent plus de variables intervenant dans le calcul de  $\psi$  et donc probablement plus de dispersion quand  $\beta$  est grand). En revanche, nous nous attendions au moins à une diminution de l'erreur pour chaque valeur de  $\beta$ . Or, toutes les erreurs sont très similaires à celles du cas classique. Peut-être alors qu'en modifiant la variable de contrôle utilisée et/ou en combinant cette méthode à la stratification optimale arriverions-nous à obtenir de meilleurs résultats en plus de stabiliser l'erreur par rapport à  $\beta$ .