Analyse
Devoir Maison 2

Quentin Januel

21 avril 2018

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = |x|^{\pi/4} \sin(x)$.

1. $|x|^{\pi/4}$ n'a de sens que si $|x| \in \mathbb{R}^+$, ce qui ne pose donc pas de problème. Le reste est clairement défini pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   Sur $\mathbb{R}^*$, $f(x) = e^{\pi/4 \ln|x|} \sin(x)$. Pouvant être décomposée en produits et compositions de fonctions continues, elle est donc continue sur $\mathbb{R}^*$. Aussi,

   $$f(0) = 0$$
   $$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

   f est donc également continue en 0 et par conséquent continue sur $\mathbb{R}$.

   $f(-x) = |-x|^{\pi/4} \sin(-x) = -|x|^{\pi/4} \sin(x) = -f(x)$
   La fonction f est donc impaire.

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ une suite réelle définie telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = f(\pi(n + 1/2))$.

   Posons ensuite

   $$a_n = u_{2n} = e^{\pi/4 \ln n}$$
   $$b_n = u_{2n+1} = -e^{\pi/4 \ln n}$$

   Les fonctions exponentielle et logarithme népérien étant toutes deux croissantes, on a donc

   $$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$$
   $$\lim_{n \to +\infty} b_n = -\infty$$

   Si une suite admet une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors toute sous-suite de cette suite admet l pour limite.
   Par contraposée, puisque $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux sous-suites admettant deux limites différentes, la suite u_n n'admet pas de limite.

Ainsi on a

$$\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} u_n \notin \mathbb{R} \iff \forall l \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon_l > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n > N, |u_n - l| > \varepsilon_l \\ \lim_{n\to+\infty} u_n \neq +\infty \iff \exists A > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n > N, u_n < A \\ \lim_{n\to+\infty} u_n \neq -\infty \iff \exists A < 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n > N, u_n > A \end{cases}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}, n < \pi(n+1/2)$ et donc

$$n > N \implies \pi(n+1/2) > N$$

En prennant $x = \pi(n+1/2)$, on a

$$\begin{cases} \forall l \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon_l > 0, \forall N \in \mathbb{R}, \exists x > N, |f(x) - l| > \varepsilon_l \iff \lim_{x\to+\infty} f(x) \notin \mathbb{R} \\ \exists A > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists x > N, f(x) < A \iff \lim_{x\to+\infty} f(x) \neq +\infty \\ \exists A < 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists x > N, f(x) > A \iff \lim_{x\to+\infty} f(x) \neq -\infty \end{cases}$$

et ainsi, f n'admet pas de limite en $+\infty$.

3.

$$f(x) = \begin{cases} e^{\pi/4 \ln(x)} \sin(x) & \text{si } x > 0 \\ e^{\pi/4 \ln(-x)} \sin(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Pouvant être décomposée en produits et compositions de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$, f y est donc dérivable.

$$\implies f'(x) = \begin{cases} e^{\pi/4 \ln(x)} \cos(x) + \frac{\pi/4}{x} e^{\pi/4 \ln(x)} \sin(x) & \text{si } x > 0 \\ e^{\pi/4 \ln(-x)} \cos(x) + \frac{\pi/4}{-x} e^{\pi/4 \ln(-x)} \sin(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = e^{\pi/4 \ln|x|}(\cos(x) + \frac{\pi \sin x}{4|x|})$$

$$\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{|h|^{\pi/4}\sin(h) - |0|^{\pi/4}\sin(0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{|h|^{\pi/4}\sin(h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} |h|^{\pi/4} \times \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} (\text{car les deux limites convergent}) \\
&= 0 \times 1 = 0
\end{aligned}$$

Au final, on a donc

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ e^{\pi/4 \ln|x|}(\cos(x) + \frac{\pi \sin x}{4|x|}) & \text{sinon} \end{cases}$$

4. Soit g une fonction définie est bornée aux voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$, et h une fonction qui tend vers 0 quand x tend vers a.

   $$\lim_{x\to a} h(x) = 0 \iff \forall \varepsilon_0 > 0, \exists \mu_0 > 0, |x-a| < \mu_0 \implies |h(x)| < \varepsilon_0$$

   g est bornée au voisinage de $a \iff \exists \mu_1 > 0, \exists B > 0, |x-a| < \mu_1 \implies |g(x)| < B$

   Soit $\varepsilon_1 > 0$, posons $\mu = \max(\mu_0, \mu_1)$ et $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_1}{B}$.

   On a alors :

   $$|x-a| < \mu \implies |x-a| < \mu_0 \implies |h(x)| < \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_1}{B}$$

   et

   $$|x-a| < \mu \implies |x-a| < \mu_1 \implies |g(x)| < B$$

Ainsi $|h(x)||g(x)| < \varepsilon_1 \Longleftrightarrow |h(x)g(x)| < \varepsilon_1$ et donc

$$\lim_{x \to a} h(x)g(x) = 0$$

(en l'occurrence, puisque $x - a$ tend vers 0 quand x tend vers a, alors $\lim_{x \to a}(x - a)g(x) = 0$)

Soit $g(x) = \cos(x) + \frac{\pi \sin x}{4|x|}$ et $h(x) = e^{\pi/4 \ln|x|}$ définies pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

g est bornée au voisinage de 0 et $\lim_{x \to 0} h(x) = 0$.

On a donc

$$\lim_{x \to 0} g(x)h(x) = \lim_{x \to 0} f'(x) = 0$$

Or $f'(0) = 0$ donc la fonction f' est bien continue en 0, ce qui par ailleurs montre que la fonction f est de classe C^1.

5. (a) f est impaire donc sa dérivée est paire.
   Puisque $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f'(-x)$, il est donc évidemment que si $f'(x) = 0$ alors $f'(-x) = 0$.

   (b) Sur l'intervalle $]0; \pi]$, $f'(x) = e^{\pi/4 \ln x}(\cos x + \frac{\pi \sin x}{4x})$.
   Puisque la fonction exponentielle ne s'annule jamais,

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \Longleftrightarrow & \cos x + \frac{\pi \sin x}{4x} = 0 \\ \Longleftrightarrow & \pi \sin x + 4x \cos x = 0 \end{aligned}$$

   (c) Posons $g \in \mathbb{R}^{]0;\pi]}$ telle que

$$\begin{aligned} g(x) =& \pi \sin x + 4x \cos x \\ \Longrightarrow \quad g'(x) =& \pi \cos x + 4 \cos x - 4x \sin x \\ =& (\pi + 4) \cos x - 4x \sin x \end{aligned}$$

Lorsque x varie entre $\pi/2$ et π, $\cos x$ varie entre 0 et -1 et est donc négatif, il en va donc de même pour $(\pi + 4)\cos x$.
Quant à $\sin x$, il varie entre 1 et 0 et est donc positif, impliquant que $-4x \sin x$ est négatif.

Ainsi, leur somme soit $g'(x)$ est négative sur l'intervalle $]\pi/2; \pi]$ et donc g est décroissante sur ce même intervalle.

De plus, pour tout $x \in]0; \pi/2[, g(x) = \pi \sin x + 4x \cos x > 0$. Il n'y a donc pas de racine de g sur cet intervalle.

Or $g(\pi/2) = \pi > 0$ et $g(\pi) = -4\pi < 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution x_0 sur $]\pi/2; \pi]$.

L'équation $\pi \sin x + 4x \cos x = 0$ possède donc une unique solution x_0 sur $]0; \pi]$.

(d) On sait déjà que $g(\pi/2) > 0$.
Puisque $g(3\pi/4) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} - \frac{3\pi}{\sqrt{2}} < 0$, on peut donc dire (toujours grâce au TVI) que x_0 se situe dans l'intervalle $]\pi/2; 3\pi/4[$.

(e) Puisque $x_0 \in]\pi/2; 3\pi/4[$, on sait que $z_0 \in tan(]\pi/2; 3\pi/4[-\pi/2)$

$$\begin{aligned}\implies z_0 \in [tan(\pi/2 - \pi/2); tan(3\pi/4 - \pi/2)] &= [tan(0); tan(\pi/4)] \\ &= [0; 1]\end{aligned}$$

On sait que

$$\begin{aligned}&\pi \sin x_0 + 4x_0 \cos x_0 = 0 \\ \implies &\pi \tan x_0 + 4x_0 = 0 \\ \implies &\tan x_0 = \frac{-4x_0}{\pi}\end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} z_0 =& \tan(x_0 - \pi/2) \\ =& \frac{-1}{\tan x_0} \\ =& \frac{\pi}{4x_0} \end{aligned}$$

Et puisque

$$\begin{aligned} & z_0 = \tan(x_0 - \pi/2) \\ \Longrightarrow\ & x_0 - \pi/2 = \arctan z_0 \\ \Longrightarrow\ & x_0 = \pi/2 + \arctan z_0 \end{aligned}$$

On peut finalement conclure que

$$\begin{aligned} z_0 =& \frac{\pi}{4x_0} \\ =& \frac{\pi}{4(\pi/2 + \arctan z_0)} \\ =& \frac{\pi}{2\pi + 4\arctan z_0} \end{aligned}$$

(f) On pose $h(z) = \frac{\pi}{2\pi + 4\arctan z}$
On a donc

$$\begin{aligned} h'(z) =& -\frac{\pi\frac{1}{1+z^2}}{(\pi + 2\arctan z)^2} \\ =& -\frac{\pi}{(1+z^2)(\pi + 2\arctan z)^2} \end{aligned}$$

Les fonctions arctangente et carré sont croissantes sur $[0; 1]$, s'en suit que la fonction h' est croissante sur $[0; 1]$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
h'([0;1]) =& [h'(0);h'(1)] \\
=& [-\frac{\pi}{(1+0^2)(\pi+2\text{arctan}0)^2}; -\frac{\pi}{(1+1^2)(\pi+2\text{arctan}1)^2}] \\
=& [-\frac{\pi}{(\pi+2\times 0)^2}; -\frac{\pi}{2(\pi+2\frac{\pi}{4})^2}] \\
=& [-\frac{\pi}{\pi^2}; -\frac{\pi}{2(\pi\frac{3}{2})^2}] \\
=& [-\frac{1}{\pi}; -\frac{\pi}{\pi^2\frac{9}{2}}] \\
=& [-\frac{1}{\pi}; -\frac{2}{9\pi}]
\end{aligned}$$

On en déduit que $\sup_I |h'| = 1/\pi$, or $1/\pi < 1$ donc la fonction h est contractante de rapport $1/\pi$ sur I.

La fonction h est décroissante sur $[0;1]$, ainsi

$$\begin{aligned}
h(I) =& [h(1);h(0)] \\
=& [\frac{\pi}{2\pi+4\text{arctan}1}; \frac{\pi}{2\pi+4\text{arctan}0}] \\
=& [\frac{\pi}{2\pi+\pi}; \frac{\pi}{2\pi}] \\
=& [\frac{1}{3}; \frac{1}{2}] \subset I
\end{aligned}$$

(g) La fonction h réunit toutes les conditions nécessaires à l'application du théorème du point fixe de Banach.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1/2 \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases}$$

admet donc z_0 pour limite en $+\infty$.

Par ailleurs, $|u_n - z_0| \leq 1/\pi^n |u_0 - z_0| \leq \frac{1}{2\pi^n}$ car $|u_0 - z_0| \leq 1/2$.

On aura donc une valeur de z_0 à 0.01 près pour tout n satisfaisant $\frac{1}{2\pi^n} \leq 0.01$.
4 est le premier entier satisfaisant cette propriété. On sait donc que u_4 donne une valeur approchée de z_0 à 0.01 près.

$$u_4 = h(h(h(h(1/2)))) \approx 0.40$$

(h) Nous pouvons finalement approximer x_0 :

$$x_0 = \pi/2 + \arctan z_0 \approx \pi/2 + \arctan(0.40) \approx 1.95$$

6. On sait que f' est positive sur $]0; x_0[$ et négative sur $]x_0; \pi[$.
Elle s'annule en 0, x_0 et π.

Ainsi, la fonction f est croissante sur $[0; x_0]$ et décroissante sur $[x_0; \pi]$.

7.
$$f(x_0) \approx f(1.95) = |1.95|^{\pi/4} \sin(1.95) \approx 1.57$$

De par la parité de f, on a