

# Analyse

## Devoir Maison 2

Quentin Januel

20 avril 2018

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $f(x) = |x|^{\pi/4} \sin(x)$ .

1.  $|x|^{\pi/4}$  n'a de sens que si  $|x| \in \mathbb{R}^+$ , ce qui ne pose donc pas de problème.  
Le reste est clairement défini pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Sur  $\mathbb{R}^*$ ,  $f(x) = e^{\pi/4 \ln |x|} \sin(x)$ . Pouvant être décomposée en produits et compositions de fonctions continues, elle est donc continue sur  $\mathbb{R}^*$ . Aussi,

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= 0 \end{aligned}$$

$f$  est donc également continue en 0 et par conséquent continue sur  $\mathbb{R}$ .

$$f(-x) = |-x|^{\pi/4} \sin(-x) = -|x|^{\pi/4} \sin(x) = -f(x)$$

La fonction  $f$  est donc impaire.

2. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$  une suite réelle définie telle que  
 $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = f(\pi(n + 1/2))$ .

Posons ensuite

$$\begin{aligned} a_n &= u_{2n} = e^{\pi/4 \ln n} \\ b_n &= u_{2n+1} = -e^{\pi/4 \ln n} \end{aligned}$$

Les fonctions exponentielle et logarithme népérien étant toutes deux croissantes, on a donc

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n &= +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n &= -\infty \end{aligned}$$

Si une suite admet une limite  $l \in \overline{\mathbb{R}}$ , alors toute sous-suite de cette suite admet  $l$  pour limite.

Par contraposée, puisque  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont deux sous-suites admettant deux limites différentes, la suite  $u_n$  n'admet pas de limite.

Ainsi on a

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \notin \mathbb{R} \iff \forall l \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon_l > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n > N, |u_n - l| > \varepsilon_l \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq +\infty \iff \exists A > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n > N, u_n < A \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq -\infty \iff \exists A < 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n > N, u_n > A \end{cases}$$

Or, pour tout  $n \in \mathbb{N}, n < \pi(n + 1/2)$  et donc

$$n > N \implies \pi(n + 1/2) > N$$

En prenant  $x = \pi(n + 1/2)$ , on a

$$\begin{cases} \forall l \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon_l > 0, \forall N \in \mathbb{R}, \exists x > N, |f(x) - l| > \varepsilon_l \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \notin \mathbb{R} \\ \exists A > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists x > N, f(x) < A \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq +\infty \\ \exists A < 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists x > N, f(x) > A \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq -\infty \end{cases}$$

et ainsi,  $f$  n'admet pas de limite en  $+\infty$ .

3.

$$f(x) = \begin{cases} e^{\pi/4 \ln(x)} \sin(x) & \text{si } x > 0 \\ e^{\pi/4 \ln(-x)} \sin(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Pouvant être décomposée en produits et compositions de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}^*$ ,  $f$  est donc dérivable sur ce même intervalle.

$$\begin{aligned} \implies f'(x) &= \begin{cases} e^{\pi/4 \ln(x)} \cos(x) + \frac{\pi/4}{x} e^{\pi/4 \ln(x)} \sin(x) & \text{si } x > 0 \\ e^{\pi/4 \ln(-x)} \cos(x) + \frac{\pi/4}{-x} e^{\pi/4 \ln(-x)} \sin(x) & \text{si } x < 0 \end{cases} \\ \iff \forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) &= e^{\pi/4 \ln|x|} (\cos(x) + \frac{\pi \sin x}{4|x|}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|^{\pi/4} \sin(h) - |0|^{\pi/4} \sin(0)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|^{\pi/4} \sin(h)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} |h|^{\pi/4} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} \text{ (car les deux limites convergent)} \\
&= 0 \times 1 = 0
\end{aligned}$$

Au final, on a donc

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ e^{\pi/4 \ln |x|} (\cos(x) + \frac{\pi \sin x}{4|x|}) & \text{sinon} \end{cases}$$

4. Soit  $g$  une fonction définie est bornée aux voisinage d'un point  $a \in \mathbb{R}$ .

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 0 \iff \forall \varepsilon_0 > 0, \exists \mu_0 > 0, |x - a| < \mu_0 \implies |h(x)| < \varepsilon_0$$

$$g \text{ est bornée au voisinage de } a \iff \exists \mu_1 > 0, \exists B > 0, |x - a| < \mu_1 \implies |g(x)| < B$$

Soit  $\varepsilon_1 > 0$ , posons  $\mu = \max(\mu_0, \mu_1)$  et  $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_1}{B}$ .

On a alors :

$$|x - a| < \mu \implies |x - a| < \mu_0 \implies |h(x)| < \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_1}{B}$$

et

$$|x - a| < \mu \implies |x - a| < \mu_1 \implies |g(x)| < B$$

Ainsi  $|h(x)||g(x)| < \varepsilon_1 \iff |h(x)g(x)| < \varepsilon_1$  et donc

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x)g(x) = 0$$

(en l'occurrence, puisque  $x - a$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $a$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} (x - a)g(x) = 0$ )

Soit  $g(x) = \cos(x) + \frac{\pi \sin x}{4|x|}$  et  $h(x) = e^{\pi/4 \ln |x|}$  définies pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$

$g$  est bornée au voisinage de 0 et  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$ .

On a donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x)h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$$

Or  $f'(0) = 0$  donc la fonction  $f'$  est bien continue en 0, ce qui prouve que la fonction  $f$  est de classe  $C^1$ .

5. (a)  $f$  est impaire donc sa dérivée est paire.

Puisque  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f'(-x)$ , il est donc évidemment que si  $f'(x) = 0$  alors  $f'(-x) = 0$ .

(b) Sur l'intervalle  $]0; \pi]$ ,  $f'(x) = e^{\pi/4 \ln x} (\cos x + \frac{\pi \sin x}{4x})$ .

Puisque la fonction exponentielle ne s'annule jamais,

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff \cos x + \frac{\pi \sin x}{4x} = 0 \\ &\iff \pi \sin x + 4x \cos x = 0 \end{aligned}$$

(c) Posons  $g \in \mathbb{R}^{[0; \pi]}$  telle que

$$\begin{aligned} g(x) &= \pi \sin x + 4x \cos x \\ \implies g'(x) &= \pi \cos x + 4 \cos x - 4x \sin x \\ &= (\pi + 4) \cos x - 4x \sin x \end{aligned}$$

Lorsque  $x$  varie entre  $\pi/2$  et  $\pi$ ,  $\cos x$  varie entre 0 et  $-1$  et est donc négatif, il en va donc de même pour  $(\pi + 4) \cos x$ .

Quant à  $\sin x$ , il varie entre 1 et 0 et est donc positif, impliquant

que  $-4x \sin x$  est négatif.

Ainsi, leur somme soit  $g'(x)$  est négative sur l'intervalle  $]\pi/2; \pi]$  et donc  $g$  est décroissante sur ce même intervalle.

Avec un raisonnement similaire, on en déduit que  $g$  est croissante sur  $]0; \pi/2]$ .

Or  $g(\pi/2) = \pi > 0$  et  $g(\pi) = -4\pi < 0$ .

De plus  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$ .

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $g(x) = 0$  n'a pas de solution sur  $]0; \pi/2]$  et possède une unique solution  $x_0$  sur  $]\pi/2; \pi]$ .

L'équation  $\pi \sin x + 4x \cos x = 0$  possède donc une unique solution  $x_0$  sur  $]0; \pi]$ .

(d) On sait déjà que  $g(\pi/2) > 0$ .

Puisque  $g(3\pi/4) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} - \frac{3\pi}{\sqrt{2}} < 0$ , on peut donc dire (toujours grâce au TVI) que  $x_0$  se situe dans l'intervalle  $]\pi/2; 3\pi/4[$ .

(e) Puisque  $x_0 \in ]\pi/2; 3\pi/4[$ , on sait que  $z_0 \in \tan(]\pi/2; 3\pi/4[-\pi/2)$

$$\begin{aligned} \implies z_0 &\in [\tan(\pi/2 - \pi/2); \tan(3\pi/4 - \pi/2)] = [\tan(0); \tan(\pi/4)] \\ &= [0; 1] \end{aligned}$$

On sait que

$$\begin{aligned} \pi \sin x_0 + 4x_0 \cos x_0 &= 0 \\ \implies \pi \tan x_0 + 4x_0 &= 0 \\ \implies \tan x_0 &= \frac{-4x_0}{\pi} \\ \implies x_0 &= \arctan\left(\frac{-4x_0}{\pi}\right) \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} z_0 &= \tan(x_0 - \pi/2) \\ &= \frac{-1}{\tan x_0} \\ &= \frac{\pi}{4x_0} \end{aligned}$$

Et puisque

$$\begin{aligned} z_0 &= \tan(x_0 - \pi/2) \\ \implies x_0 - \pi/2 &= \arctan z_0 \\ \implies x_0 &= \pi/2 + \arctan z_0 \end{aligned}$$

On peut finalement conclure que

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{\pi}{4x_0} \\ &= \frac{\pi}{4(\pi/2 + \arctan z_0)} \\ &= \frac{\pi}{2\pi + 4\arctan z_0} \end{aligned}$$

(f) blabla f

(g) blabla g

(h) blabla h

6. blabla 6