Mathématiques pour la 3D

Présenté par :
Bart GEORGE
EISTI
ING3 – Option Visual Computing

Objectifs de ce cours

- Partie théorique
  - S'initier aux fondements mathématiques pour le calcul et le rendu de scènes 3D
  - S'initier à l'algorithmique géométrique
- Partie pratique
  - Développer un mini-moteur 3D permettant
    - L'affichage de formes polygonales en 3D
    - L'application de transformations basiques (translation, rotation, agrandissement) sur ces figures
    - Quelque chose en "plus", en rapport avec l'algorithmique géométrique (collisions, niveaux de détail...)

Sources pour ce cours

- Fletcher Dunn & Ian Parberry : *3D Math Primer for Graphics and Game Development* (Worldware, 2002, 2ème éd. CRC Press 2011)
- Eric Lengyel : *Mathematics for 3D Game Programming and Computer Graphics* (3ème éd. Cengage Learning 2012)
- Jason Gregory : *Game Engine Architecture* (AK Peters, 2009, 2ème éd. CRC Press 2014)
- Cours de Rémi Ronfard, INRIA : https://team.inria.fr/imagine/remi-ronfard/remi-ronfard-teaching/

Première partie

Vecteurs, matrices,
Transformations linéaires et affines

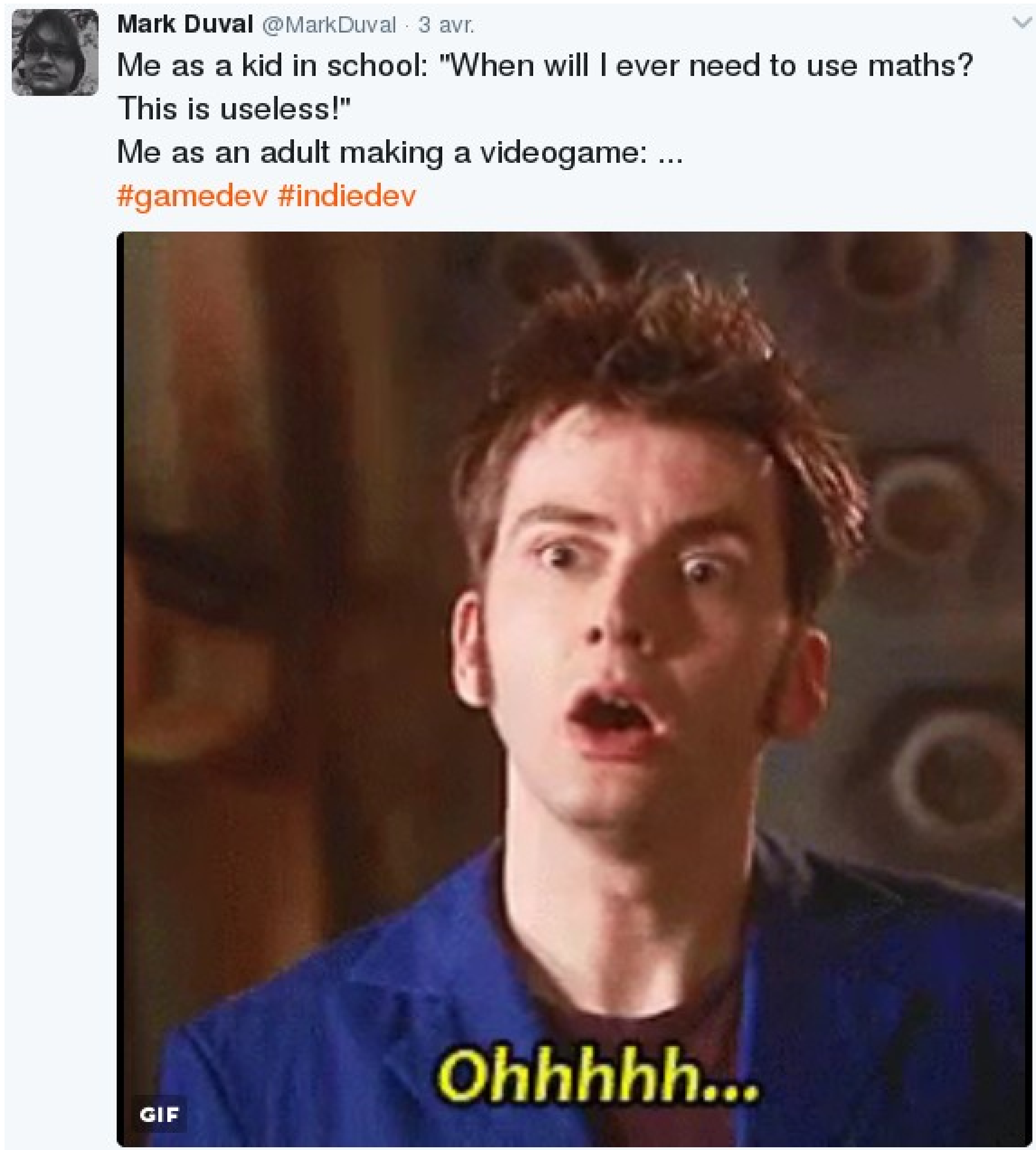
Plan

- Introduction
- Vecteurs
- Matrices
- Matrices et transformations linéaires
- Matrices et transformations avancées

Plan

- Introduction
  - De quoi a-t-on besoin ?
  - Système de coordonnées
  - Travailler avec plusieurs espaces de coordonnées
- Vecteurs
- Matrices
- Matrices et transformations linéaires
- Matrices et transformations avancées

Mathématiques pour la 3D



Mathématiques pour la 3D

- Un jeu, ou n'importe quelle application utilisant la 3D, utilise un modèle mathématique d'un monde virtuel simulé en temps réel
- Toutes les branches des mathématiques sont sollicitées en programmation 3D
- Nous allons nous intéresser plus particulièrement à 2 branches
  - L'algèbre linéaire (scalaires, vecteurs, matrices...)
    - C'est ce que l'on fait "voir" et manipuler à l'ordinateur
  - La géométrie (représentation, transformation...)
    - C'est ce que l'utilisateur voit à l'écran

De quoi a-t-on besoin ?

- Les logiciels 3D sont constitués d'objets représentés en 3 dimensions, ce qui nécessite
  - De mesurer avec précision leur position, de leur orientation et de leurs dimensions
  - De les animer dans le monde 3D
  - De les transformer en pixels pour les afficher à l'écran
- Ces objets 3D sont presque toujours consitutés de triangles, dont les sommets sont représentés par des **points**
  - Point : emplacement dans un espace à N dimensions
  - Il faut donc trouver un moyen de les représenter

Système de coordonnées

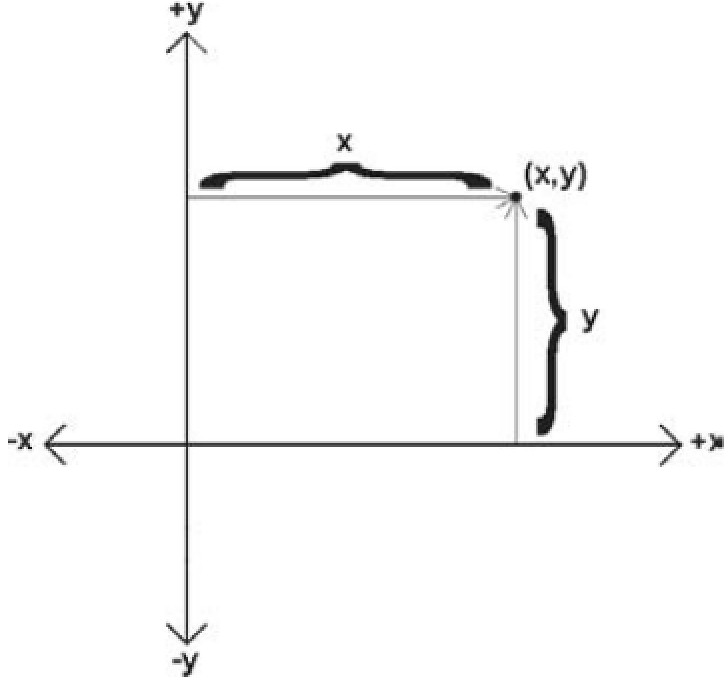
- Permet, dans un espace à N dimensions, de faire correspondre à chaque point M de cet espace un N-uplet de **scalaires.**
- Choisir un système de coordonnées, c'est donc choisir un référentiel qui nous permettra
  - De positionner (ou **repérer**) un point M dans l'espace
  - D'effectuer les différentes opérations sur M et les autres points présents dans le même espace.
- Différents systèmes pour différents usages
  - Coordonnées **cartésiennes** (les plus utilisées)
  - Coordonnées polaires (sphériques, cylindriques...)

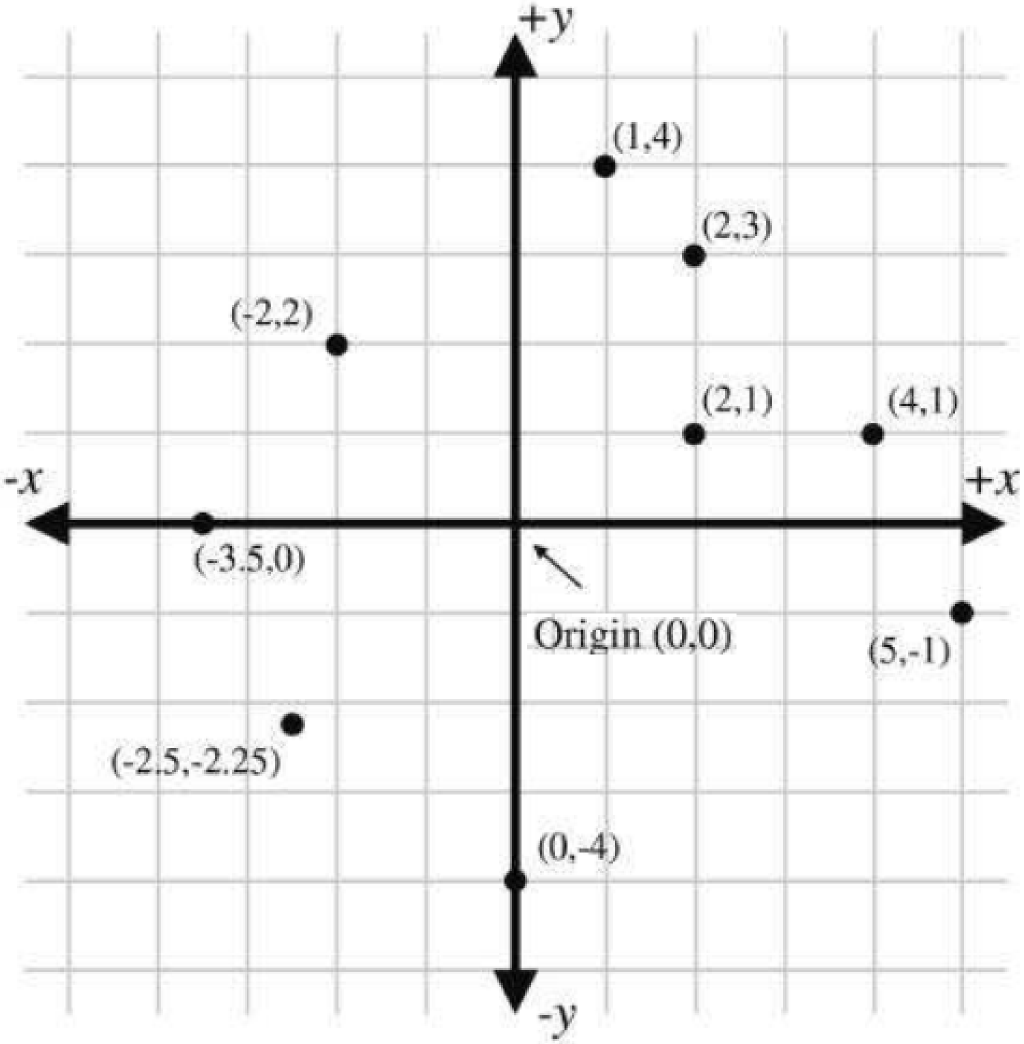
Système de coordonnées

- Coordonnées cartésiennes
  - Un point spécial, le **centre** ou **l'origine**, dont les coordonnées sont toutes à zéro
  - Des **axes** (2 pour la 2D, 3 pour la 3D) perpendiculaires entre eux, qui passent par l'origine
  - Chaque coordonnée d'un point correspond à sa distance par rapport à l'origine, selon un axe précis
  - Notation
    - En 2D, l'axe horizontal est x, l'axe vertical est y (en général)
    - En 3D, on rajoute l'axe des z, mais la position de ces axes varie d'un moteur à l'autre, d'une bibliothèque à l'autre

Système de coordonnées

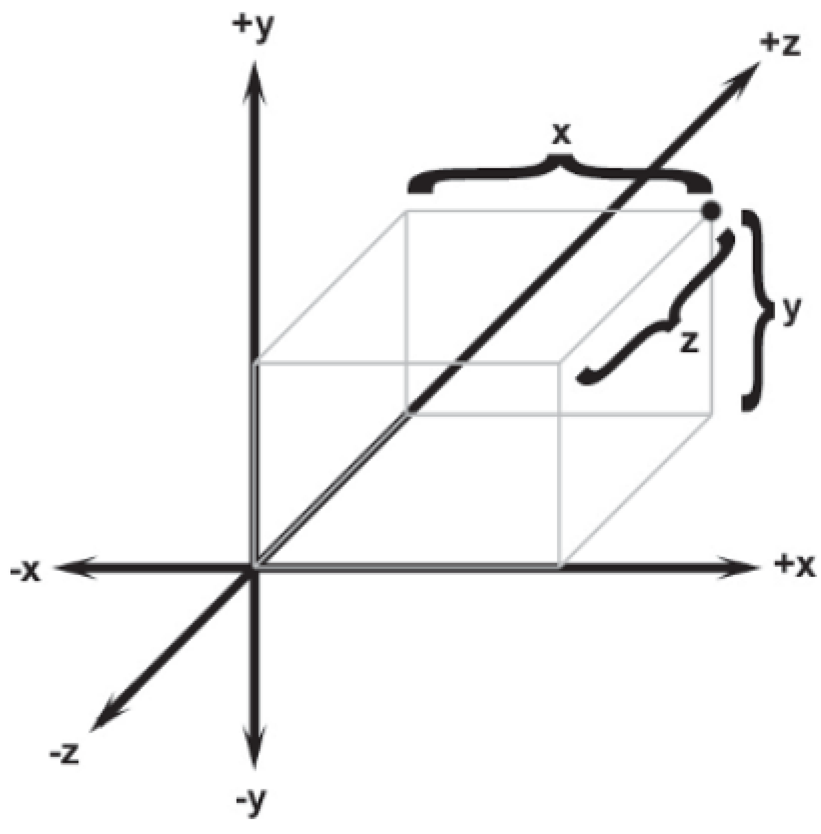
- Coordonnées cartésiennes (2D)

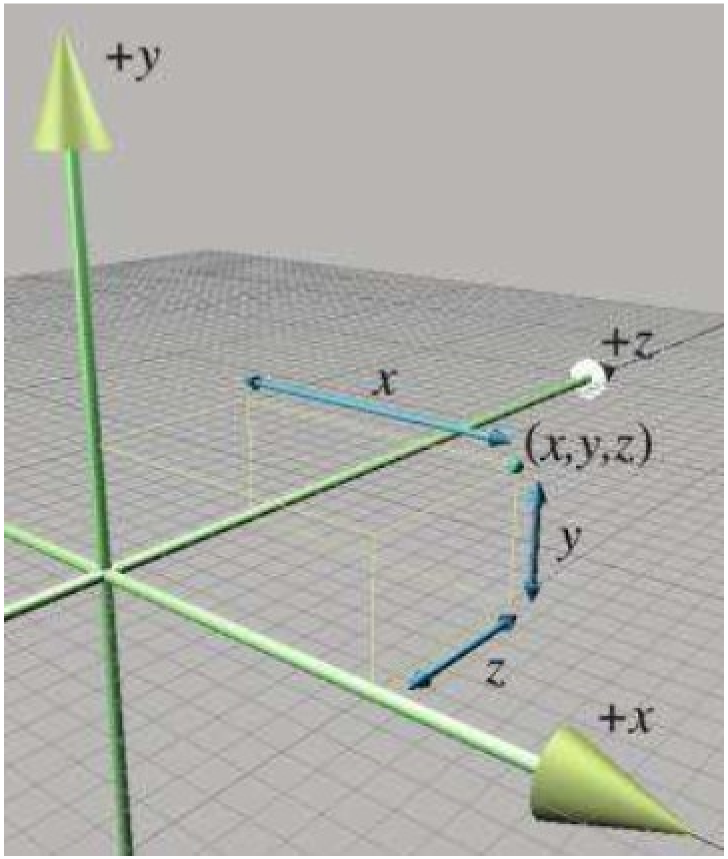




Système de coordonnées

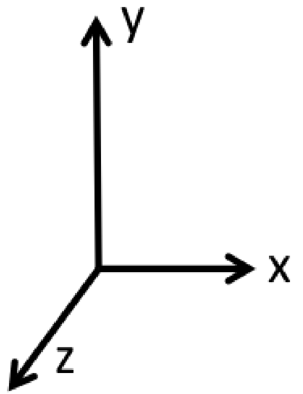
- Coordonnées cartésiennes (3D)

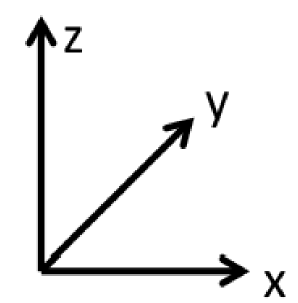


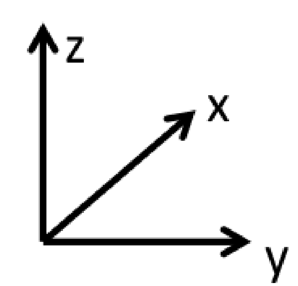


Système de coordonnées

- Coordonnées cartésiennes (3D)
  - Différents moteurs utilisent différents systèmes
  - En général, on tombe sur le système utilisé par OpenGL
    - Axe des *x* parallèle au sol
    - Axe des *y* perpendiculaire au plan horizontal
    - C'est ce système qu'on va utiliser pour notre cours

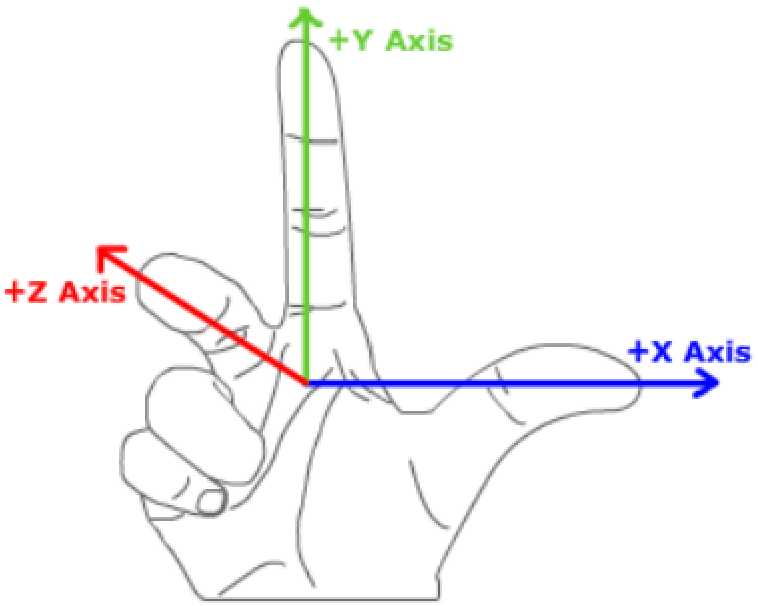


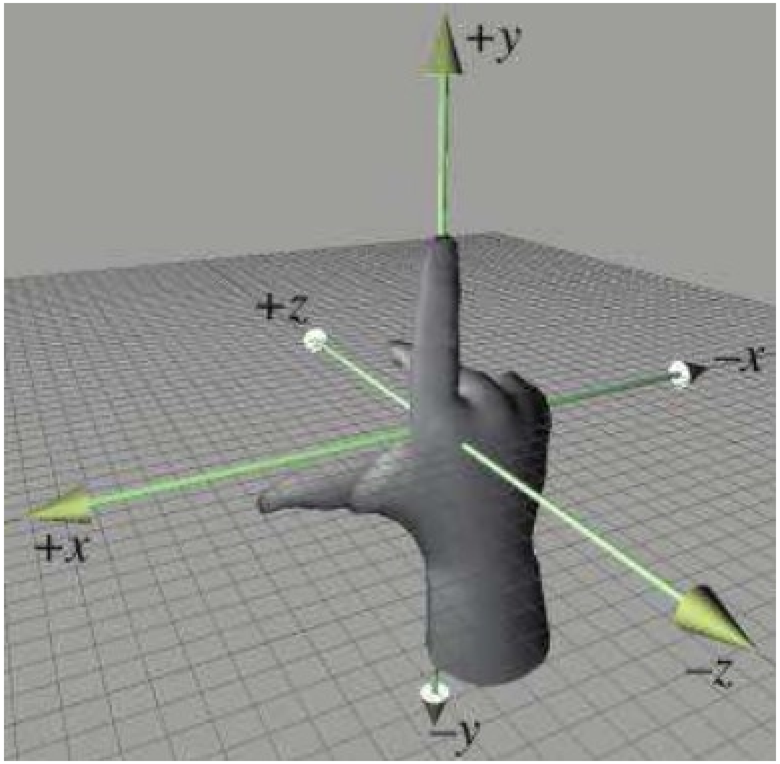




Système de coordonnées

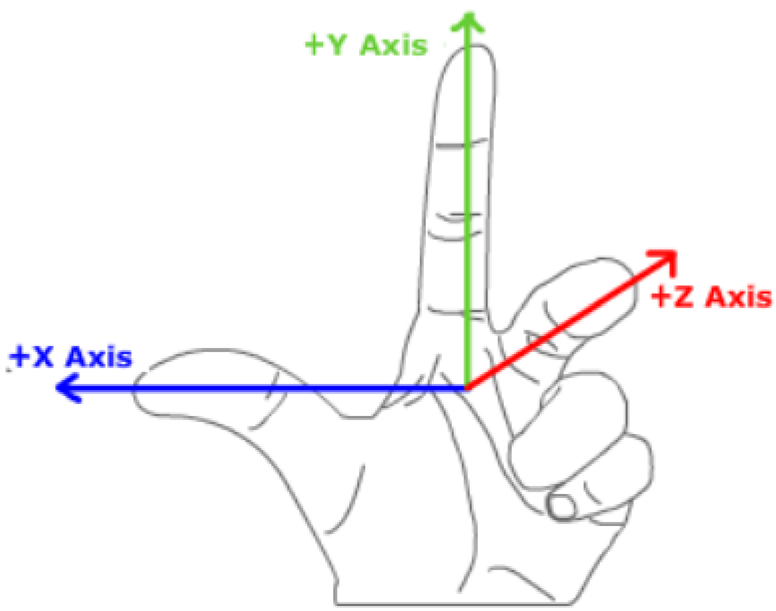
- Coordonnées cartésiennes (3D)
  - La base peut être directe (repère "main droite") ...

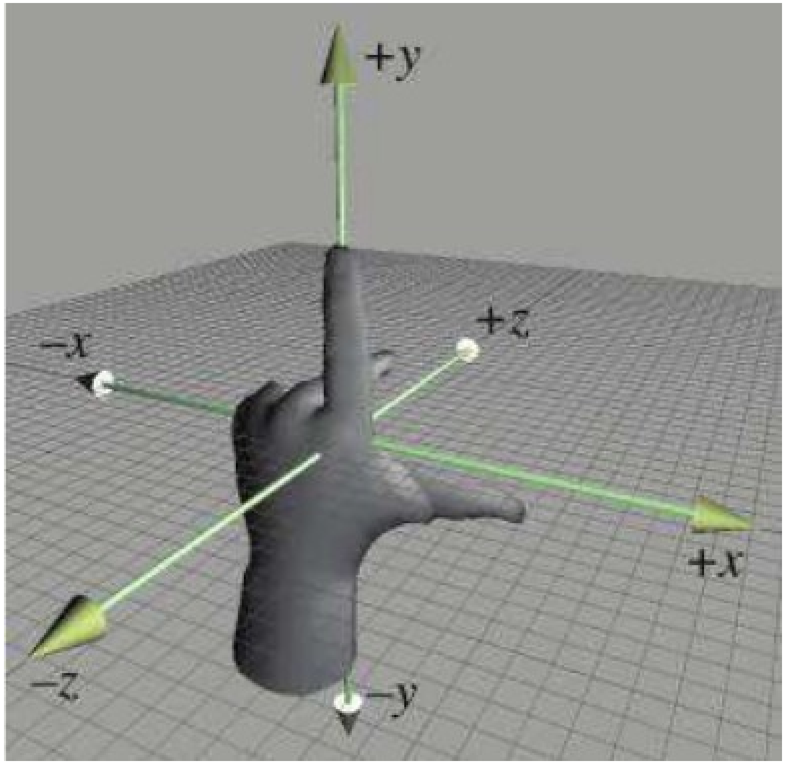




Système de coordonnées

- Coordonnées cartésiennes (3D)
  - ... ou indirecte (repère "main gauche")





Travailler avec plusieurs espaces de coordonnées

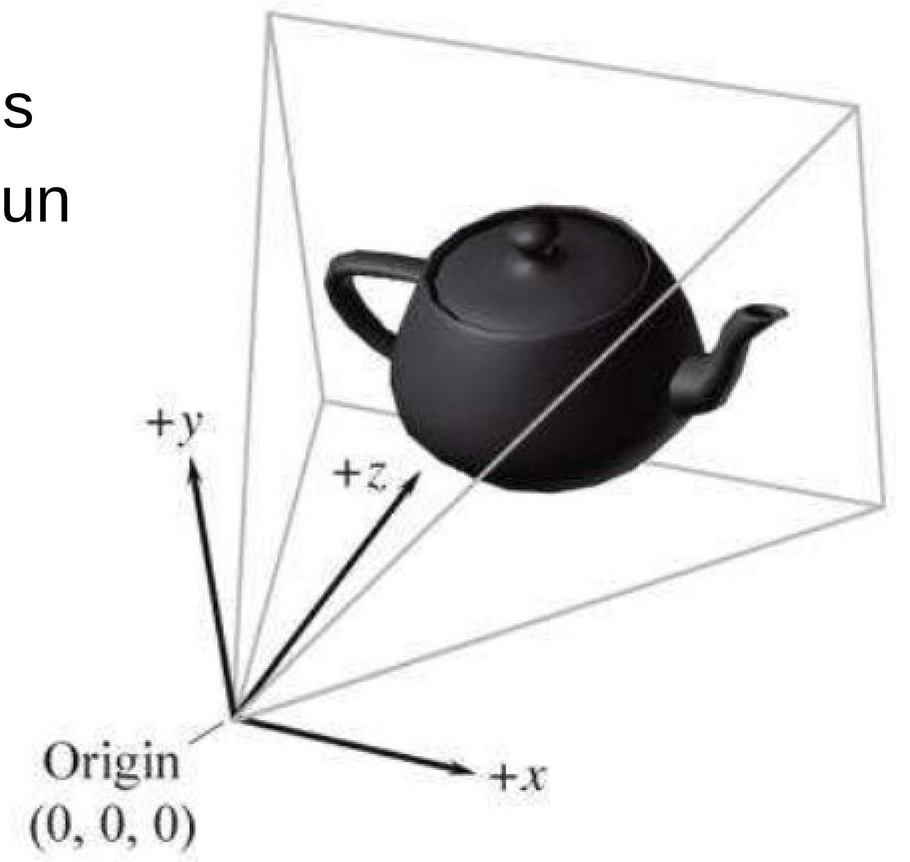
- Pourquoi plusieurs espaces et pas un seul système de coordonnées universel ?
  - Certaines informations ne sont disponibles, ou pertinentes, que dans un contexte précis
    - Dans l'espace, tout objet a une position
    - Dans le contexte d'une caméra, les seuls objets intéressants sont ceux qui sont dans le champ de vision
  - Transformations "globales" ou "locales"
    - Rotation d'un objet autour de lui-même ou de l'origine ?
    - Exemple : mouvement des planètes
  - Dans la pratique, "transformer" un objet, c'est lui faire changer d'espace de coordonnées

Travailler avec plusieurs espaces de coordonnées

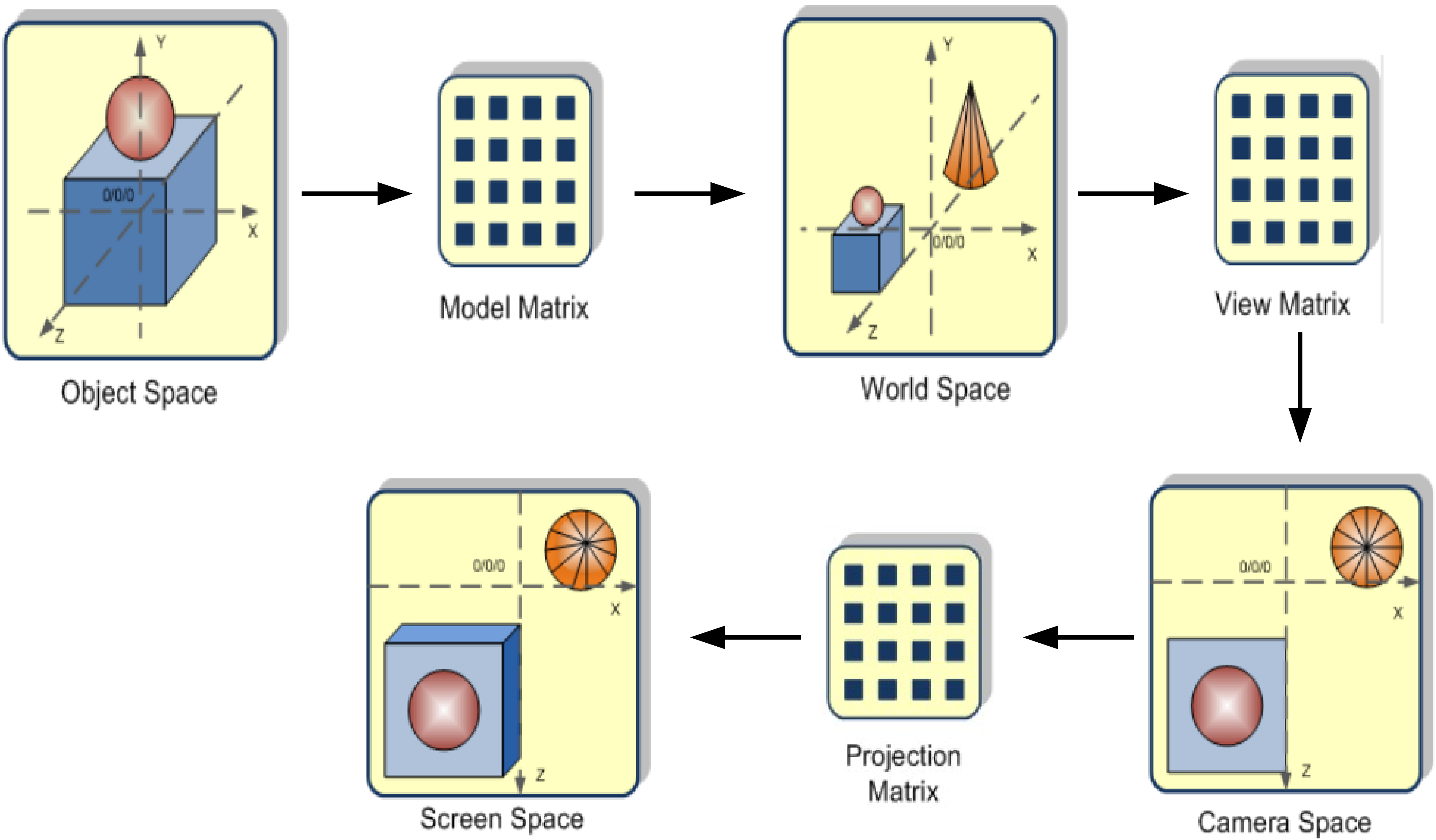
- Espaces de coordonnées intéressants
  - L'espace "global" ou "universel" (*"world space"*)
    - Contient tous les objets, tous les autres espaces
    - Une position dans ce monde global est dite "absolue"
    - "Nord", "sud"... dont des directions pertinentes globalement
  - L'espace "objet" (*"object space"*)
    - Quand un objet bouge, il emporte son système de coordonnées avec lui
    - "Gauche", "droite"... sont des directions appropriées
    - On l'appelle aussi *"modeling space"* parce que les coordonnées d'un modèle 3D sont exprimées localement

Travailler avec plusieurs espaces de coordonnées

- Espaces de coordonnées intéressants
  - Espace "caméra" (3D)
    - Permet de positionner les objets du point de vue d'un observateur
  - Espace "écran" (2D)
    - Ce que voit l'utilisateur
    - On passe de l'espace "caméra" à l'espace "écran" par projection



Travailler avec plusieurs espaces de coordonnées



Plan

- Introduction
- Vecteurs
  - Définition mathématique (ou algébrique)
  - Définition géométrique
  - Points et vecteurs
  - Opérations sur les vecteurs
- Matrices
- Matrices et transformations linéaires
- Matrices et transformations avancées

Vecteurs

- Importance du déplacement dans la 3D
  - Déplacement d'objets, de la caméra, de l'avatar...
  - Ces déplacements sont représentés par des vecteurs
- Définition mathématique (ou algébrique)
  - Vecteur : collection de scalaires ou **composantes**
    - Cf. la classe "vector" en C++ ou en Java
    - Le nombre de composantes est appelé **dimension**
  - Notation
    - Italique pour une variable scalaire, gras pour un vecteur
    - Scalaires entourés de crochets
    - Notion de vecteur **ligne** ou vecteur **colonne** (plus tard)

Vecteurs

- Définition mathématique (ou algébrique)
  - Exemples :
    - Vecteur ligne de dimension 3 : **v** = [1 2 3]
    - Vecteurs colonnes :

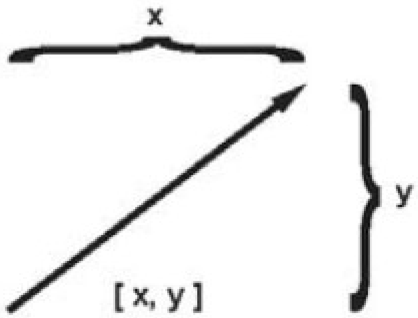
$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} a_1 &= a_x = 1 \\ a_2 &= a_y = 2 \end{aligned}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} b_1 &= b_x = 3 \\ b_2 &= b_y = 4 \\ b_3 &= b_z = 5 \end{aligned}$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} c_1 &= c_x = 6 \\ c_2 &= c_y = 7 \\ c_3 &= c_z = 8 \\ c_4 &= c_w = 9 \end{aligned}$$

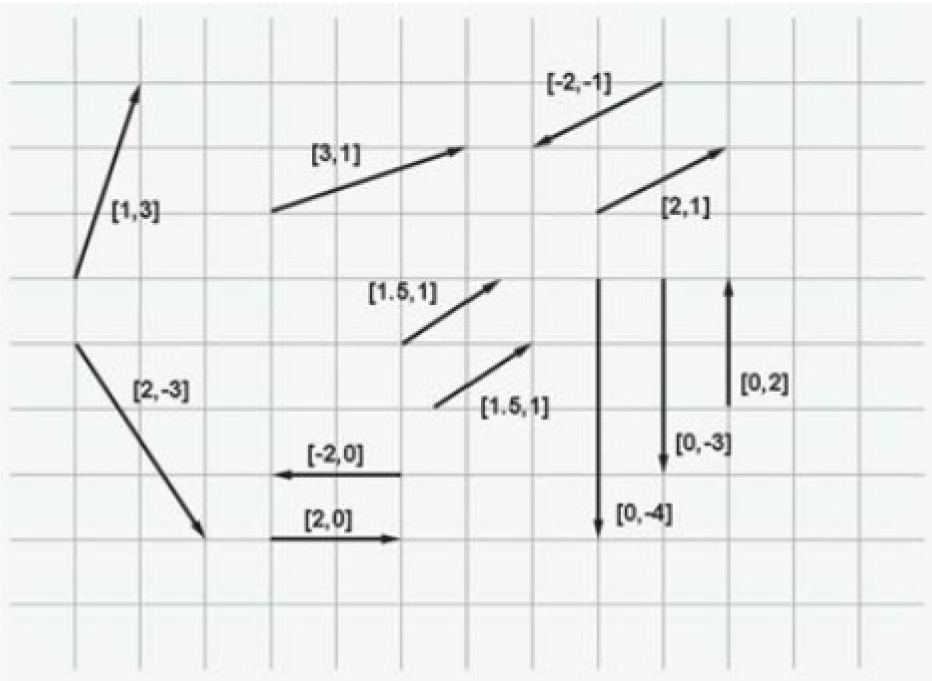
Vecteurs

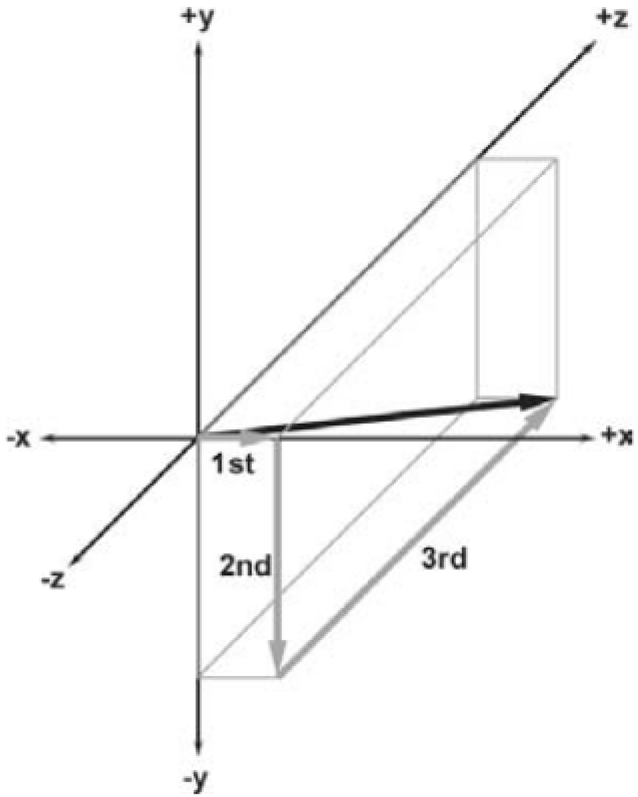
- Définition géométrique
  - Vecteur : segment orienté qui possède une **magnitude** et une **direction**
    - Magnitude : longueur du vecteur
    - Direction : là où pointe le vecteur
  - Représenté par une flèche
  - Symbolise un **déplacement** dans l'espace
    - Un vecteur n'a pas de position en soi
    - Les composantes qui constituent le vecteur représentent chacune un déplacement sur une dimension
    - Par conséquent, un vecteur peut être vu comme une séquence de déplacements



Vecteurs

- Définition géométrique
  - Exemples
    - Réprésentation géométrique de vecteurs 2D
    - Réprésentation géométrique du vecteur 3D [1, -3, 4]



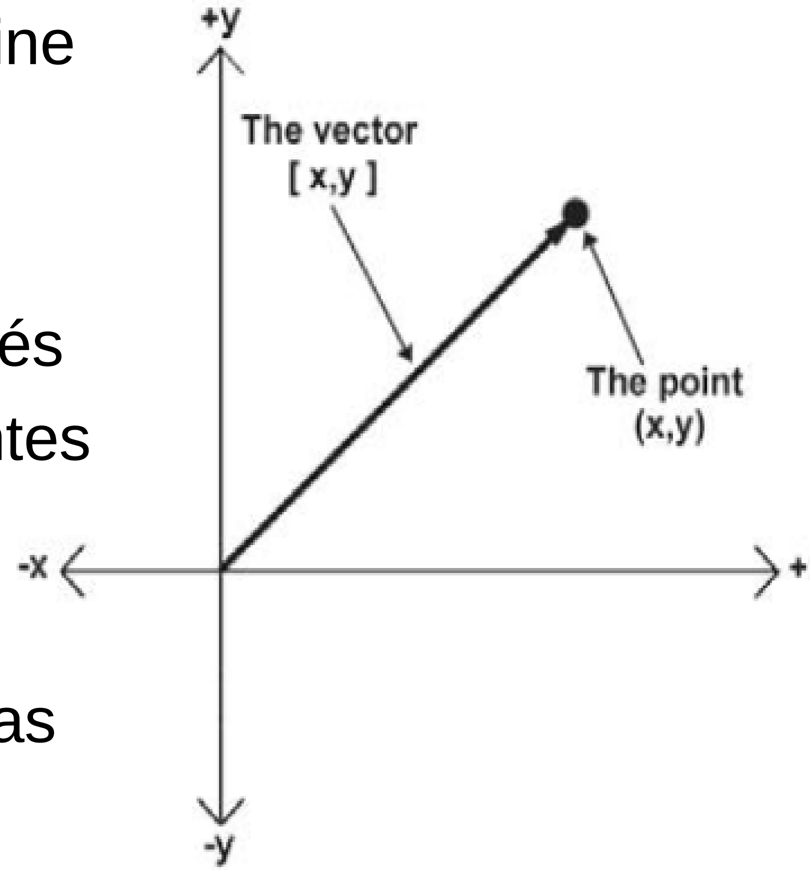


Points et vecteurs

- Un point spécifie une position dans l'espace
  - Par abus de langage, on dit que c'est une position "absolue", alors qu'elle est en fait "relative" à l'origine du système de coordonnées
- Un vecteur spécifie un déplacement
  - Le plus souvent, depuis un point (la queue) jusqu'à un autre point (la tête)
  - On peut donc dire qu'un vecteur représente une position "relative" à ces deux points

Points et vecteurs

- Relation entre points et vecteurs
  - Un vecteur peut représenter la position relative de n'importe quel point du système de coordonnées
    - La queue doit être fixée à l'origine
    - On parle de **vecteur position**
  - Attention à la confusion !
    - Point et vecteur sont deux entités complémentaires, mais différentes
    - Les programmeurs ont parfois tendance à mélanger les deux
    - Les déplacements ne se font pas toujours par rapport à l'origine



Opérations sur les vecteurs

- Nous allons nous pencher sur les opérations de base dont nous aurons besoin dans la représentation de scènes 3D
- Nous allons les considérer de deux points de vue complémentaires
  - Règles d'opération en algèbre linéaire
  - Interprétation géométrique

Opérations sur les vecteurs

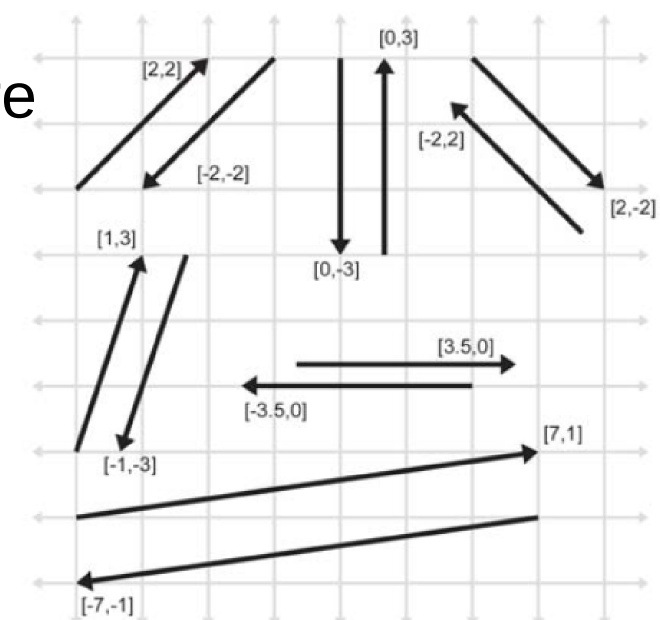
- Vecteur nul
  - Élément neutre pour l'addition de vecteurs
  - Point de vue algébrique
    - Collection de scalaires nuls : $\mathbf{0} = [0, 0, 0, ..., 0]$
  - Point de vue géométrique
    - C'est l'unique vecteur dont la magnitude est de zéro
    - C'est l'unique vecteur qui n'a pas de direction
    - On le représente comme un point (alors que ce n'en est pas exactement un)
    - De même que le scalaire *0* signifie "pas de quantité", le vecteur nul **0** signifie "pas de direction"

Opérations sur les vecteurs

- Négation d'un vecteur
  - Point de vue algébrique
    - Pour obtenir la négation d'un vecteur, on fait la négation de toutes ses composantes

$$-\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_{n-1} \\ -a_n \end{bmatrix}$$

  - Point de vue géométrique
    - La négation d'un vecteur est un autre vecteur de magnitude identique, mais de direction opposée

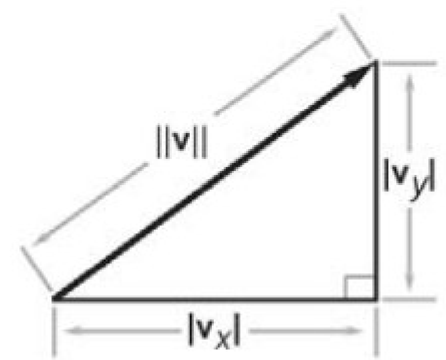


Opérations sur les vecteurs

- Calcul de la magnitude d'un vecteur
  - Aussi appelée **longueur** ou **norme** du vecteur
  - Notation : double barre verticale
    - Représente la "valeur absolue" d'un vecteur (comme la simple barre verticale pour les scalaires)
  - Point de vue algébrique

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i{}^2} = \sqrt{v_1{}^2 + v_2{}^2 + \cdots + v_{n-1}{}^2 + v_n{}^2}$$

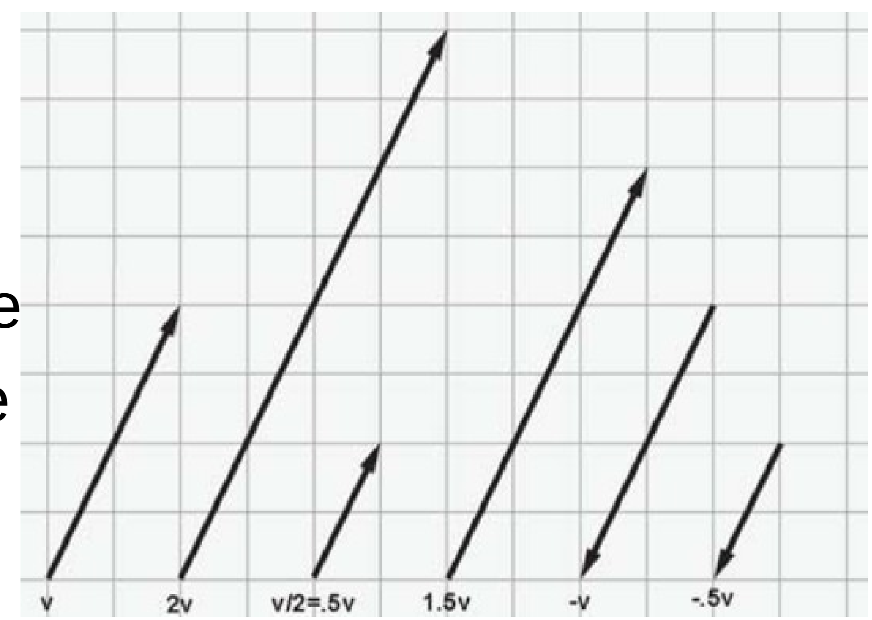
  - Point de vue géométrique
    - Théorème de Pythagore
    - Note : les racines carrées sont coûteuses en calcul machine. Il vaut mieux utiliser les carrés autant que possible



Opérations sur les vecteurs

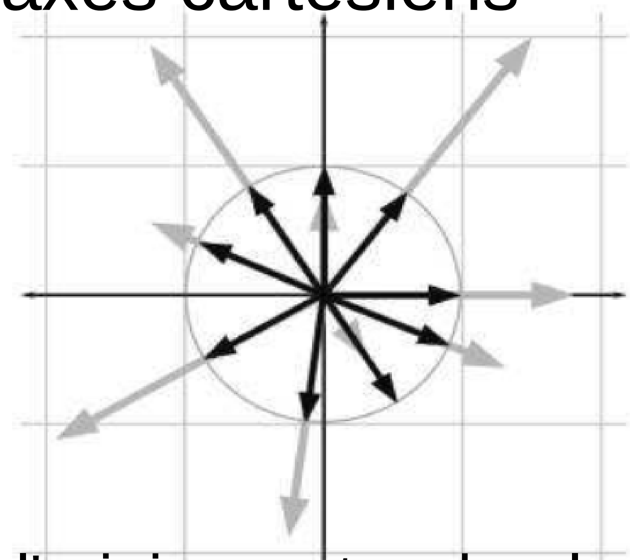
- Multiplication d'un vecteur par un scalaire
  - Point de vue algébrique
    - On multiplie chacune des composantes par le scalaire
    - Possibilité de diviser le vecteur par un scalaire non-nul
  - Point de vue géométrique
    - On obtient un vecteur parallèle avec une magnitude différente et une direction, soit égale, soit opposée

$$k\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} k = \begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_{n-1} \\ ka_n \end{bmatrix}$$



Opérations sur les vecteurs

- Normalisation d'un vecteur
  - Parfois, on a juste besoin de s'occuper de la direction
    - Vecteur **unitaire** (ou **normalisé**) : vecteur de magnitude 1
  - On a aussi besoin, en 3D, de 3 vecteurs unitaires orthogonaux correspondant aux 3 axes cartésiens
    - Ce sont les **vecteurs de base**
  - Point de vue algébrique $\hat{\mathbf{v}} = \dfrac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$
    - Pour normaliser un vecteur (non-nul) on le divise par sa magnitude
  - Point de vue géométrique
    - En 2D, un vecteur unitaire partant de l'origine va toucher la surface d'un cercle unitaire de rayon 1 (en 3D, une sphère)



Opérations sur les vecteurs

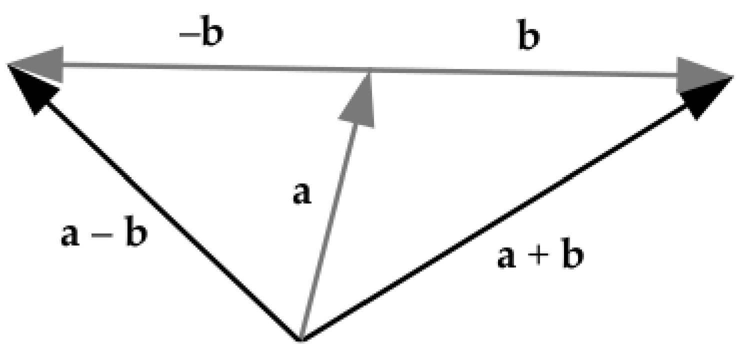
- Addition et soustraction de vecteurs
  - Les vecteurs doivent être de même dimension
  - Point de vue algébrique
    - On additionne/soustrait les composantes une à une

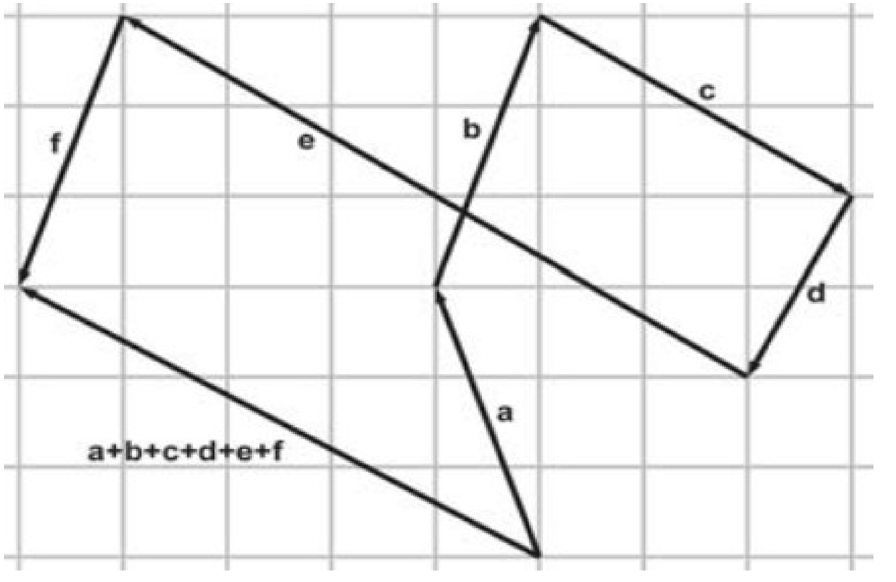
$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} + b_{n-1} \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$

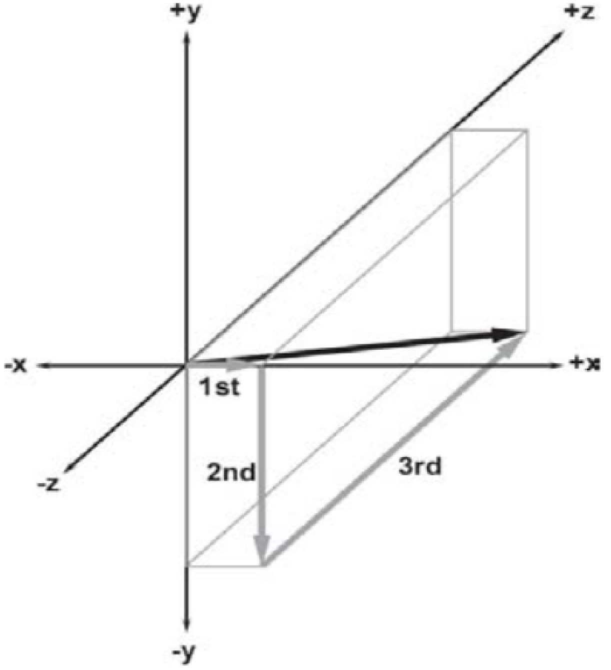
  - Point de vue géométrique
    - Règle triangulaire
      - Avec une séquence d'additions/soustractions de plusieurs vecteurs, on forme un polygone
      - Attention, l'addition est commutative, mais pas la soustraction
    - Un vecteur est bel et bien une séquence de déplacements
      - Somme de vecteurs alignés chacun sur un axe
      - Somme des 3 vecteurs de base multipliés chacun par un scalaire

Opérations sur les vecteurs

- Addition et soustraction de vecteurs



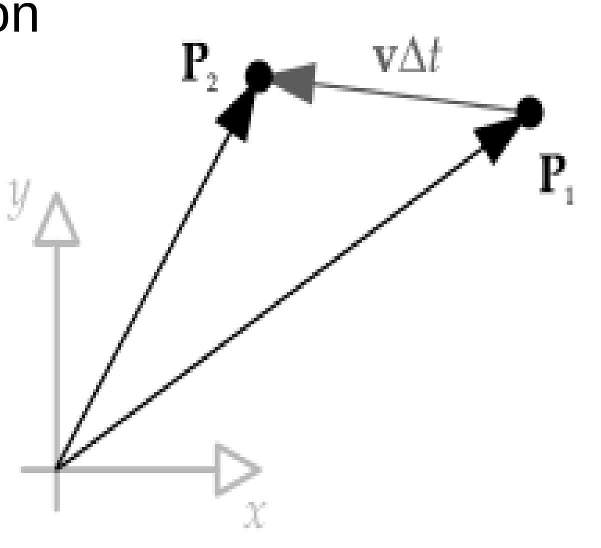




$$\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

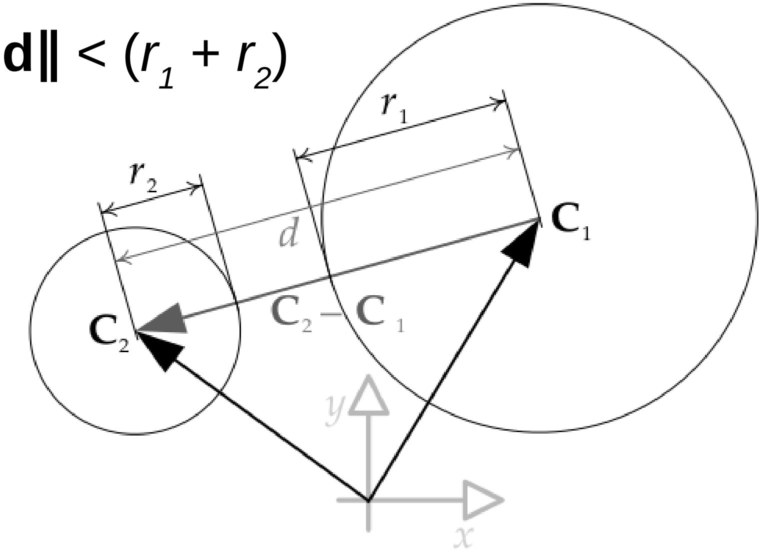
Opérations sur les vecteurs

- Addition et soustraction de vecteurs
  - Exemples d'utilisation
    - Anticiper la direction $\mathbf{p_2}$ d'un objet ou d'un personnage dans la prochaine frame
      - $\mathbf{p_1}$: vecteur position dans la frame courante
      - **v** : vecteur vitesse ou **vélocité**, qui combine la vitesse et le déplacement vers une direction (exemple : 40km/h vers le nord)
      - Δt : intervalle de temps entre 2 frames
    - Solution : $\mathbf{p_2} = \mathbf{p_1} + (\Delta t)\, \mathbf{v}$
      - Addition + multiplication par un scalaire, rien de plus !



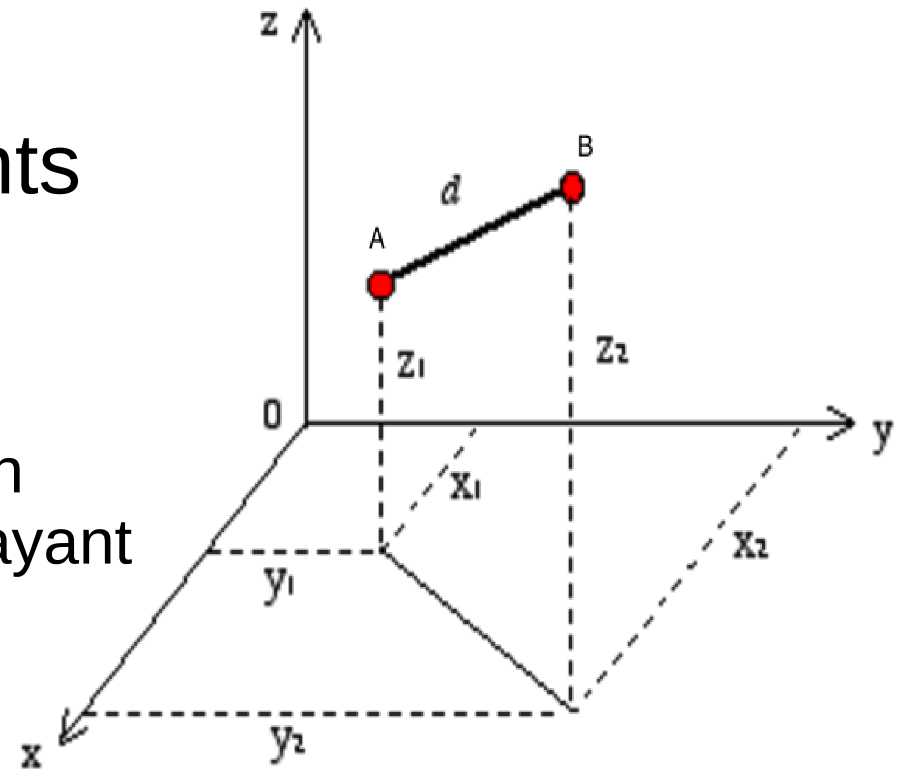
Opérations sur les vecteurs

- Addition et soustraction de vecteurs
  - Exemples d'utilisation
    - Pour 2 sphères données, savoir quand est-ce qu'elles vont rentrer en collision
      - $\mathbf{c}_1$ et $\mathbf{c}_2$: vecteurs position des centres respectifs des 2 sphères
      - r_1 et r_2 : rayons respectifs des 2 sphères
      - $\mathbf{d} = \mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1$, donc $\|\mathbf{d}\|$ détermine la distance entre les 2 centres
      - La collision a lieu si et seulement si $\|\mathbf{d}\| < (r_1 + r_2)$



Opérations sur les vecteurs

- Distance entre deux points
  - Distance et vecteur
    - On peut calculer le déplacement (vecteur) d'un point à un autre en soustrayant leurs 2 vecteurs position
    - La longueur de ce vecteur différence représente la distance entre ces 2 points
  - Formule de la distance (3D)

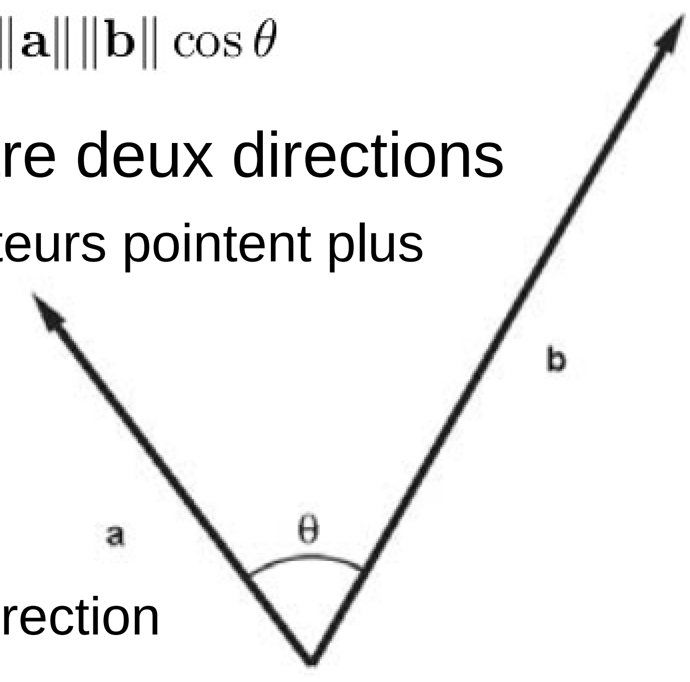


$$\mathbf{d} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = \begin{bmatrix} b_x - a_x \\ b_y - a_y \\ b_z - a_z \end{bmatrix}$$

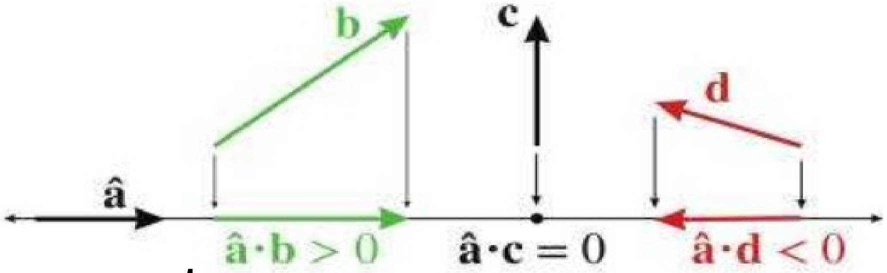
$$\text{distance}\,(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| = \sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2 + (b_z - a_z)^2}$$

Opérations sur les vecteurs

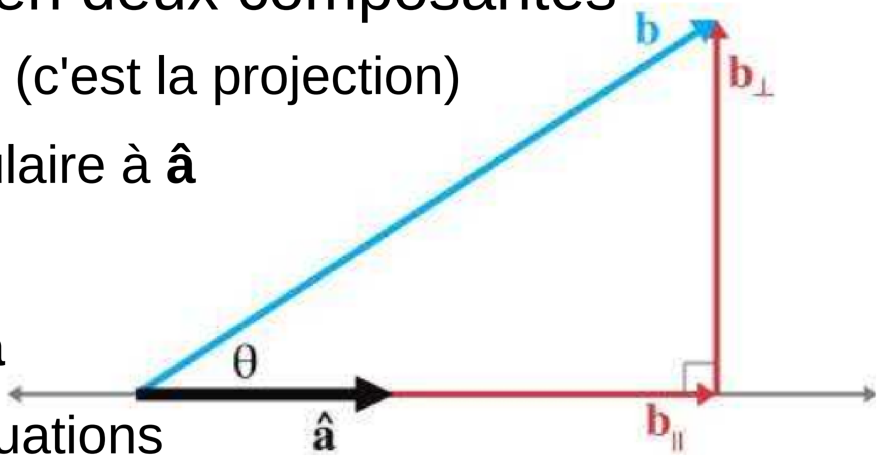
- Produit scalaire (aussi appelé *"dot product"*)
  - Noté **a** · **b**, commutatif, associatif et distributif
  - Point de vue algébrique $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$
    - Somme des produits des composantes correspondantes
  - Point de vue géométrique $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta$
    - Permet de mesurer la similitude entre deux directions
      - Produit > 0 : angle < 90°, les deux vecteurs pointent plus ou moins vers la même direction
      - Produit = 0 : angle = 90°, les deux vecteurs sont perpendiculaires
      - Produit <0 : angle < 90°
Les deux vecteurs pointent vers une direction opposée



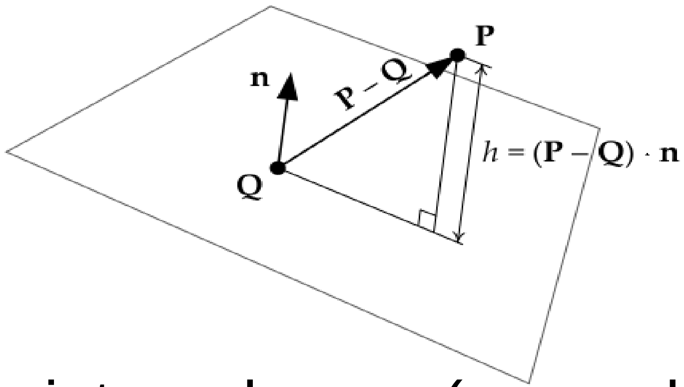
Opérations sur les vecteurs



- Produit scalaire
  - Projection d'un vecteur sur un autre
    - Soit deux vecteurs **â** (unitaire) et **b**
    - Alors leur produit scalaire représente la longueur de la **projection** de **b** sur une ligne définie par la direction de **â**
    - Cette longueur est signée
      - On peut donc mesurer, là encore, la similitude entre deux directions
    - On peut également séparer **b** en deux composantes
      - La première, $\mathbf{b}_{\parallel}$, est parallèle à **â** (c'est la projection)
      - La deuxième, $\mathbf{b}_{\perp}$, est perpendiculaire à **â**
      - De sorte que : $\mathbf{b} = \mathbf{b}_{\parallel} + \mathbf{b}_{\perp}$
      - $\mathbf{b}_{\parallel}=(\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b})\, \hat{\mathbf{a}}$, donc $\mathbf{b}_{\perp}=\mathbf{b} - (\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b})\, \hat{\mathbf{a}}$
      - On se réfèrera souvent à ces équations



Opérations sur les vecteurs



- Produit scalaire
  - Exemple d'application
    - Trouver la hauteur d'un point au-dessus (ou au-dessous) d'un plan (atterrissage vertical, saut en hauteur, etc...)
      - Soient un point q sur un plan, et un vecteur **n**, unitaire et perpendiculaire (normal) à ce plan
      - Soit un point p au-dessus du plan, dont on veut trouver la hauteur *h*
      - Considérons le vecteur **v** entre p et q (soient **p** et **q** les vecteurs positions, alors **v** = **p** – **q**)
      - La hauteur *h* est égale au produit scalaire entre **v** et **n**

$$h = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{p} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n}$$

Opérations sur les vecteurs

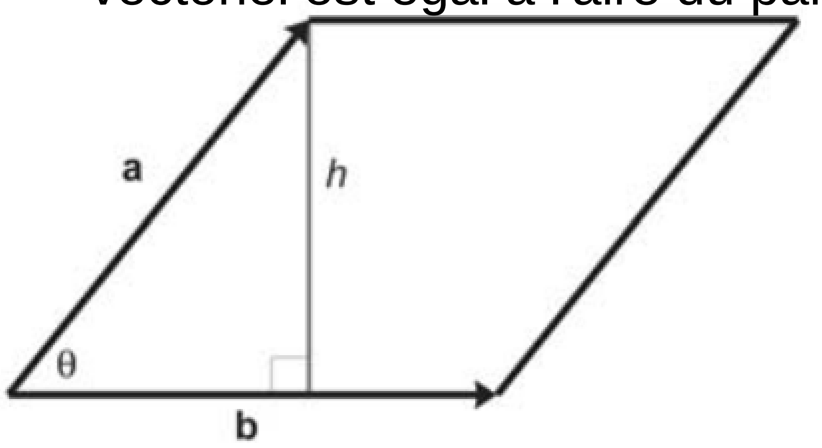
- Produit vectoriel (aussi appelé *"cross product"*)
  - Noté **a** x **b**
  - Différences par rapport au produit scalaire
    - Spécifique aux vecteurs 3D
    - Ne renvoie pas un scalaire mais un vecteur
    - N'est ni commutatif (**a** x **b** = – (**b** x **a**)) ni associatif
  - Possibilité de combiner produits scalaire et vectoriel
    - Triple produit : **a** · **b** x **c** = **a** · (**b** x **c**)
    - C'est l'unique manière de les combiner
  - Point de vue algébrique : $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{bmatrix}$

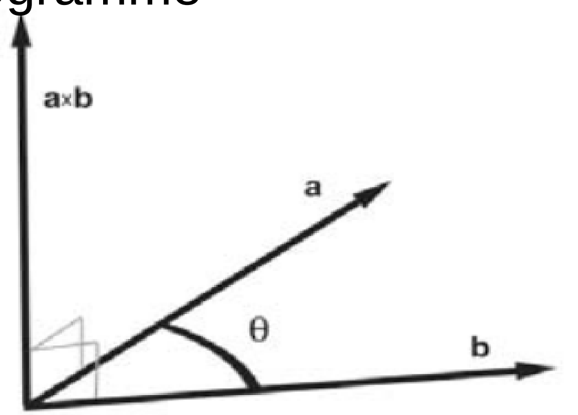
Opérations sur les vecteurs

- Produit vectoriel
  - Point de vue géométrique
    - Le produit vectoriel entre deux vecteurs renvoie un troisième vecteur qui leur est perpendiculaire
    - Longueur du produit vectoriel
      - Soit θ l'angle entre deux vecteurs **a** et **b**. Alors

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta$$

      - Soit le parallélogramme formé par **a** et **b**. Alors leur produit vectoriel est égal à l'aire du parallélogramme





Plan

- Introduction
- Vecteurs
- Matrices
  - Définition mathématique
  - Interprétation géométrique
- Matrices et transformations linéaires
- Matrices et transformations avancées

Matrices

- Utilisation en 3D
  - Passer d'un espace de coordonnées à un autre
  - Représenter des transformations
    - Linéaires : rotation, redimensionnement, projection ...
    - Affines : translations ...
  - De là, on peut "tout" faire (ou presque)

Matrices

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 12 \\ -5 & \sqrt{4} & 3 \\ 12 & -4/3 & -1 \\ 1/2 & 18 & 0 \end{bmatrix}$$

- Définition mathématique
  - Grille rectangulaire de *m* * *n* nombres scalaires
    - Organisés en *m* **lignes** (vertical) et *n* **colonnes** (horizontal)
  - Relation avec les vecteurs
    - Un vecteur est une collection de scalaires
    - Une matrice est une collection de vecteurs
    - C'est ici que la distinction entre "vecteur ligne" (matrice 1*n) et "vecteur colonne" (matrice n*1) va être importante
  - Notation
    - Gras et majuscule pour les noms de matrices (**M**, **A**, **X**...)
    - Exemple : m_{21} signifie
      - Élément à la ligne 2 et à la colonne 1

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

Matrices

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- Définition mathématique

$$\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Matrices diagonales et identité
    - Matrice carrée
      - Même nombre de lignes et de colonnes
      - Les matrices 2*2, 3*3 et 4*4 sont celles qui nous intéressent
    - Éléments diagonaux
      - Éléments m_{ii} d'une matrice carrée (les autres sont non-diagonaux)
      - Ensemble, ils forment la diagonale de la matrice
    - Matrice diagonale
      - Matrice carrée dont les éléments non-diagonaux sont tous nuls
    - Matrice identité
      - Matrice diagonale n*n dont les éléments diagonaux sont tous de 1
      - On la note $\mathbf{I}_n$

Matrices

- Définition mathématique
  - Transposée d'une matrice

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$$

    - Soit une matrice **M** de dimension *m*n*
    - Sa transposée, notée $\mathbf{M}^T$, est une matrice n*m dont les colonnes sont les lignes de **M** (à savoir : $\mathbf{M}^T_{ij} = \mathbf{M}_{ji}$)
    - Propriétés particulières
      - $(\mathbf{M}^T)^T = \mathbf{M}$
      - La transposition d'un vecteur ligne renvoie le vecteur colonne équivalent, et vice-versa
      - Une matrice diagonale est identique à sa transposée

Matrices

- Définition mathématique
  - Multiplication d'une matrice par un scalaire
    - On multiplie tous les éléments de la matrice par ce scalaire

$$k\mathbf{M} = k \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} km_{11} & km_{12} & km_{13} \\ km_{21} & km_{22} & km_{23} \\ km_{31} & km_{32} & km_{33} \\ km_{41} & km_{42} & km_{43} \end{bmatrix}$$

  - Multiplication de deux matrices

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} \end{bmatrix}$$

$$c_{43} = a_{41} b_{13} + a_{42} b_{23}$$

Matrices

- Définition mathématique
  - Multiplication de deux matrices
    - Sur une matrice 2*2

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

    - Sur une matrice 3*3

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{bmatrix}$$

Matrices

- Définition mathématique
  - Multiplication de deux matrices
    - Le produit de deux matrices carrées est une matrice carrée de même dimension
    - La multiplication d'une matrice M et d'une matrice identité renvoie M : **IM** = **MI** = **M**
    - La multiplication de matrices est associative, mais pas commutative (à savoir, (**AB**)**C** = **A**(**BC**), mais **AB** ≠ **BA**)
    - La transposée du produit de deux matrices est égale au produit inversé des deux transposées : $(\mathbf{AB})^{T} = \mathbf{B}^{T}\mathbf{A}^{T}$
      - Cette propriété fonctionne pour plus de 2 matrices

$$(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\cdots\mathbf{M}_{n-1}\mathbf{M}_n)^T = \mathbf{M}_n{}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_{n-1}{}^{\mathrm{T}}\cdots\mathbf{M}_2{}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_1{}^{\mathrm{T}}$$

Matrices

- Définition mathématique
  - Multiplication d'un vecteur et d'une matrice
    - Il en résulte un vecteur
      - Chaque composante est un produit scalaire
      - On peut interpréter ce vecteur comme une combinaison linéaire des lignes (ou des colonnes) de la matrice
      - Cette multiplication est distributive : (**v** + **w**)**M** = **vM** + **wM**
    - Exemples avec des vecteurs 3D et une matrice 3x3

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xm_{11} + ym_{12} + zm_{13} \\ xm_{21} + ym_{22} + zm_{23} \\ xm_{31} + ym_{32} + zm_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} xm_{11} + ym_{21} + zm_{31} & xm_{12} + ym_{22} + zm_{32} & xm_{13} + ym_{23} + zm_{33} \end{bmatrix}$$

Matrices

- Définition mathématique
  - Vecteurs ligne ou vecteurs colonne
    - On peut constater (cf. exemples précédents) que le produit n'est pas le même selon que le vecteur est ligne ou colonne
    - Quand plusieurs transformations ont lieu, cette différence prend une importance accrue
      - Exemple : on veut transformer le vecteur **v** par les matrices **A**,**B** et **C**, dans cet ordre
      - Si **v** est un vecteur ligne, le résultat sera **vABC**, de gauche à droite
      - Si **v** est un vecteur colonne, ce sera **CBAv**, de droite à gauche
    - Tout le monde n'utilise pas les mêmes types de vecteurs
      - Vecteurs ligne : utilisés par l'API DirectX et de nombreux livres
      - Vecteurs colonne : utilisés par OpenGL
      - Risques de confusion et d'erreurs en chaîne quand on programme

Matrices

- Interprétation géométrique
  - Une matrice décrit une transformation **linéaire**
    - L'origine ne bouge pas
      - Pas de translation (il faut une matrice 4x4... on va y venir)
    - Les autres propriétés géométriques, si
      - Longueurs, surfaces, angles, volumes...
      - Ce qui permet des rotations, des agrandissements, des projections
    - L'algèbre linéaire est parfaitement appropriée pour manipuler les matrices
  - Quelle est la relation entre une matrice et la transformation qu'elle représente ?
    - Comment une matrice transforme-t-elle un vecteur ?
    - Comment visualiser une matrice ?

Matrices

- Interprétation géométrique
  - Comment une matrice transforme-t-elle un vecteur ?
    - Rappel : un vecteur est une séquence de déplacements
      - Somme des 3 vecteurs de base **i**, **j**, **k** multipliés chacun par un scalaire : $\mathbf{v} = [v_x \ v_y \ v_z] = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$ (combinaison linéaire)
    - Interprétation
      - Considérons un vecteur $\mathbf{a}=[x \ y \ z]$ dans un système de coordonnées
      - Considérons une matrice <u>carrée</u> **M** dont les lignes **p**, **q** et **r** sont les vecteurs de base d'un autre système de coordonnées

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_x & \mathbf{p}_y & \mathbf{p}_z \\ \mathbf{q}_x & \mathbf{q}_y & \mathbf{q}_z \\ \mathbf{r}_x & \mathbf{r}_y & \mathbf{r}_z \end{bmatrix}$$

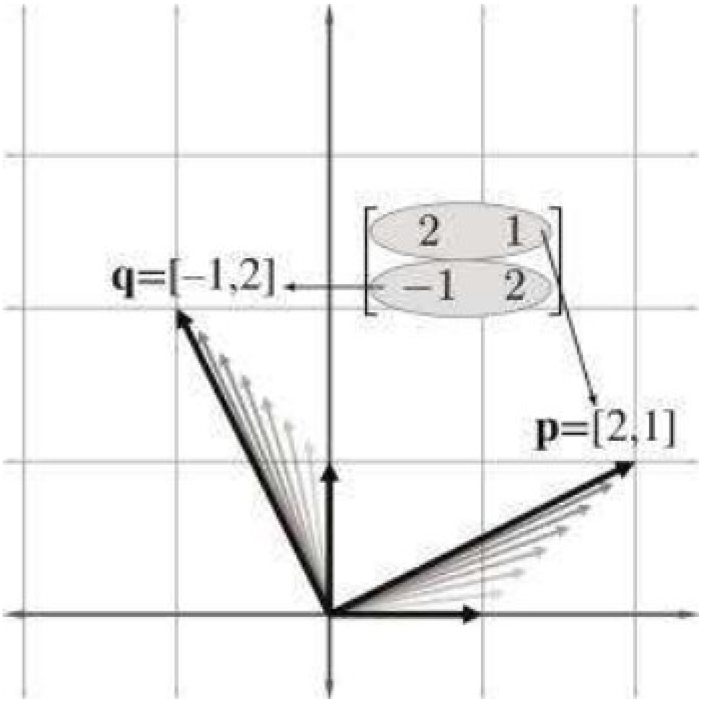
      - Alors $\mathbf{b} = \mathbf{aM} = x\mathbf{p} + y\mathbf{q} + z\mathbf{r}$ est la transformation du système de coordonnées de **a** dans celui de **M** (i.e. **M** transforme **a** en **b**)

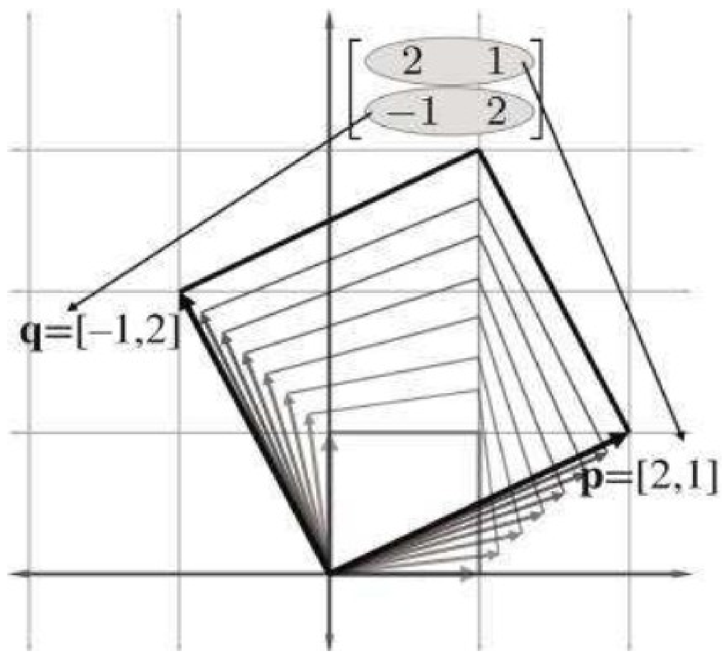
Matrices

- Interprétation géométrique
  - Comment visualiser une matrice ?
    - *"Unfortunately, no one can be told what the matrix is. You have to see it for yourself"*
    - Méthode
      - On extrait les vecteurs ligne de la matrice
        - Ce sont les vecteurs de base de son système de coordonnées
      - On les utilise pour comparer leur orientation et leurs dimensions avec celles du système de coordonnées originel
      - On peut s'aider de certains éléments pour clarifier la transformation
        - Le "L" formé par le système de coordonnées 2D
        - Le "tripod" formé par le système de coordonnées 3D
        - Le parallélogramme formé par les vecteurs de base
          - On l'appelle "skew box"
          - On peut aussi dessiner un objet dedans

Matrices

- Interprétation géométrique
  - Comment visualiser une matrice ?
    - Exemple avec une matrice carrée 2x2 $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

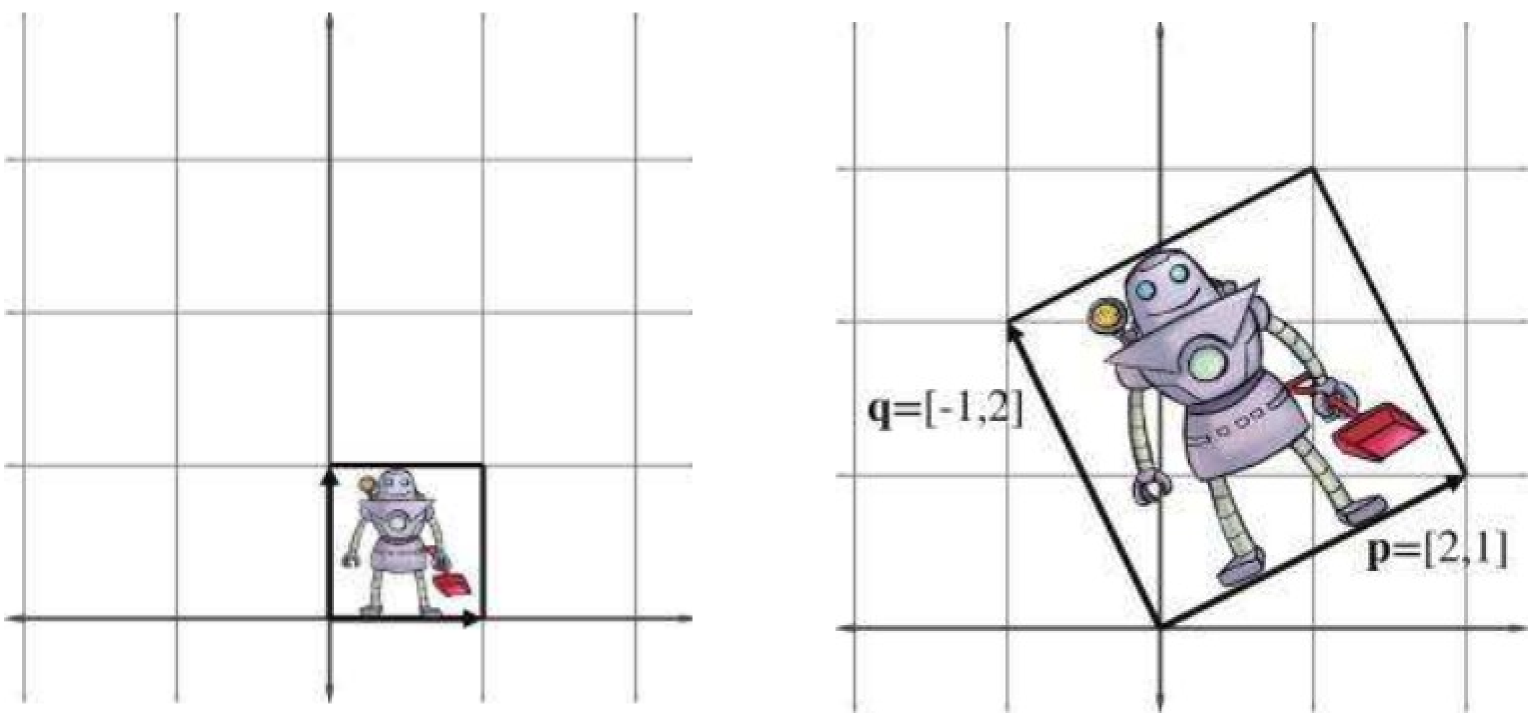




Matrices

- Interprétation géométrique
  - Comment visualiser une matrice ?
    - Exemple avec une matrice carrée 2x2

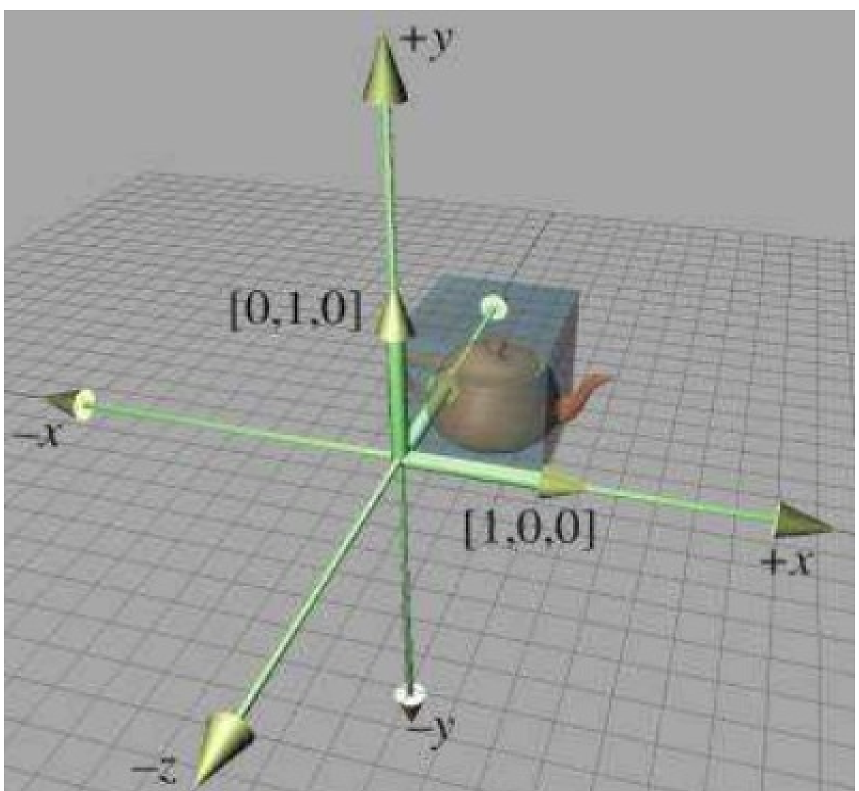
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

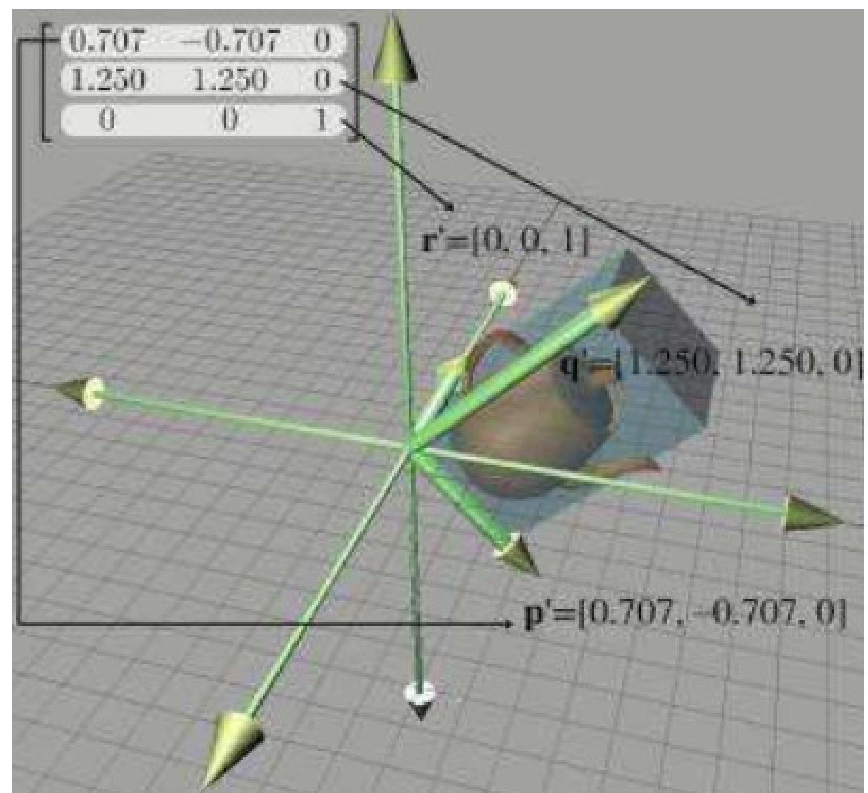


Matrices

- Interprétation géométrique
  - Comment visualiser une matrice ?
    - Exemple avec une matrice carrée 3x3

$$\begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 & 0 \\ 1.250 & 1.250 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$





Matrices

- Interprétation géométrique
  - En résumé
    - Les lignes d'une matrice carrée peuvent être vues comme les vecteurs de base d'un système de coordonnées
    - Pour transformer un vecteur du système de coordonnées dans un autre système, on le multiplie par une matrice
      - En somme, "multiplication" est synonyme de "transformation"
      - Les lignes droites sont préservées, les lignes parallèles le restent
      - Les angles, longueurs, surfaces et volumes peuvent changer
      - Si on multiplie le vecteur nul **0** par une matrice, c'est toujours **0**
        - L'origine ne bouge pas, donc pas de translation
    - On peut "visualiser" une matrice en visualisant les vecteurs de base du nouveau système de coordonnées après transformation (avec un "L", un tripod, une boîte...)

Plan

- Introduction
- Vecteurs
- Matrices
- Matrices et transformations linéaires
  - Rotation
  - Redimensionnement
  - Projection orthographique
  - Réflexion
  - Cisaillement
- Matrices et transformations avancées

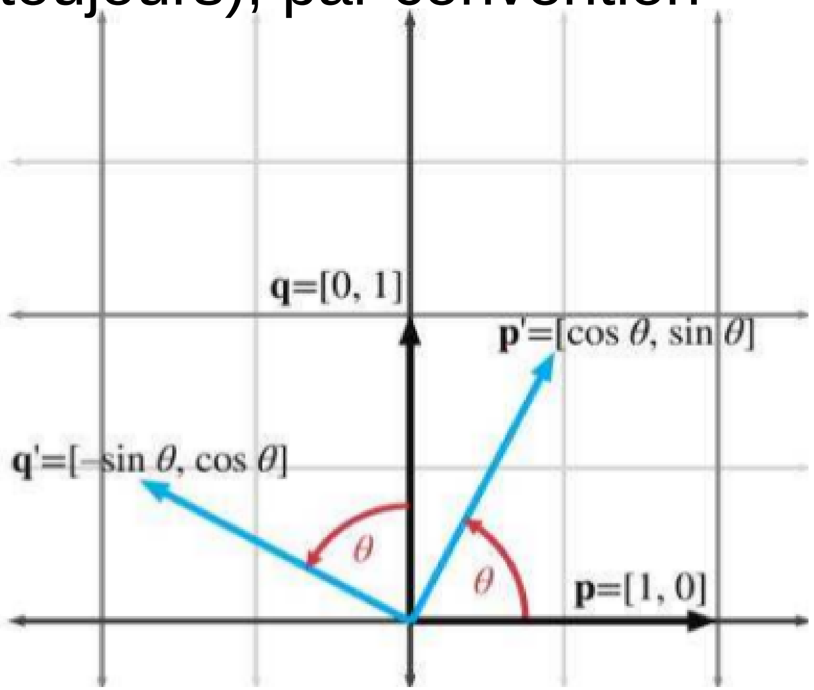
Matrices et transformations linéaires

- Idée
  - Si on peut "visualiser" une matrice en interprétant la (ou les) transformation(s) qu'elle représente...
  - Alors on peut appliquer une transformation en construisant la matrice correspondante
- Transformations linéaires
  - Rotation
  - Redimensionnement
  - Projection orthographique
  - Réflexion
  - Cisaillement

Matrices et transformations linéaires

- Rotation
  - En 2D
    - Une seule rotation possible : autour de l'origine
    - Un seul paramètre : l'angle de rotation θ
    - La plupart du temps (mais pas toujours), par convention
      - Sens des aiguilles d'une montre
        - Rotation négative
      - Sens contraire
        - Rotation positive

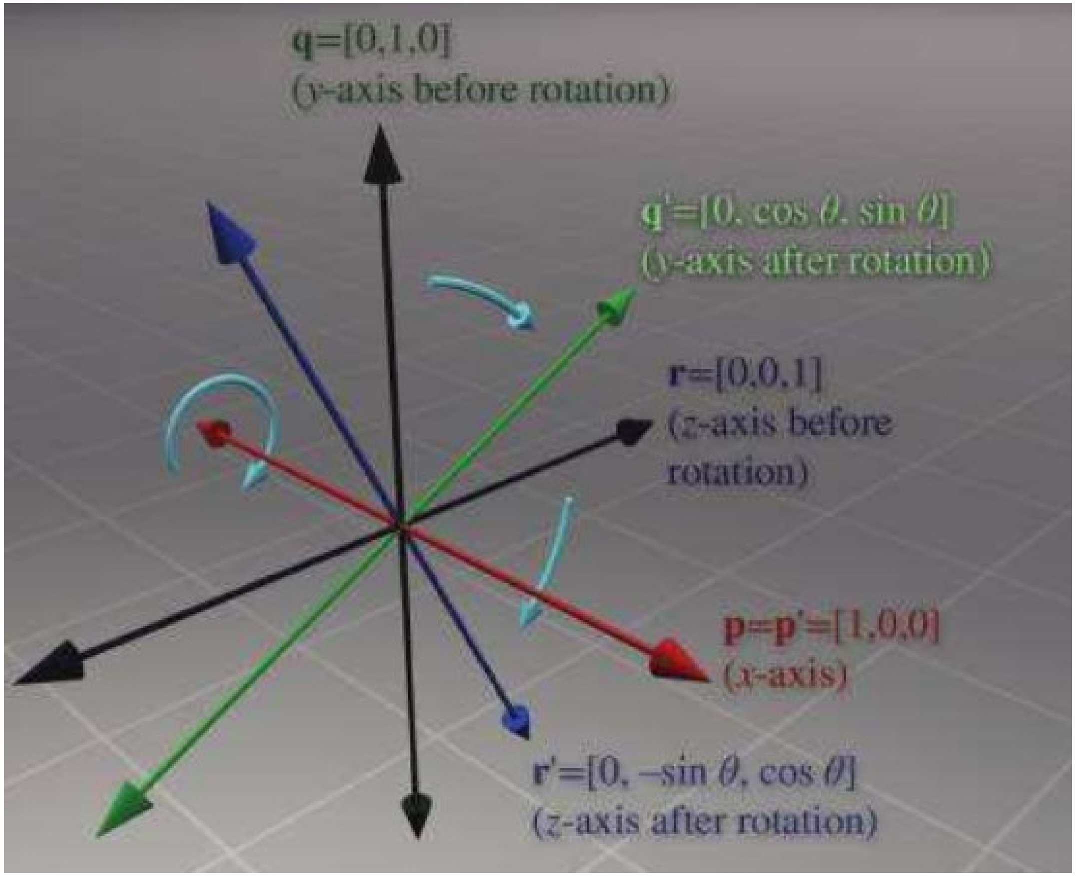
$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}' \\ \mathbf{q}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$



Matrices et transformations linéaires

- Rotation
  - En 3D, autour des axes cardinaux
    - Axe des x

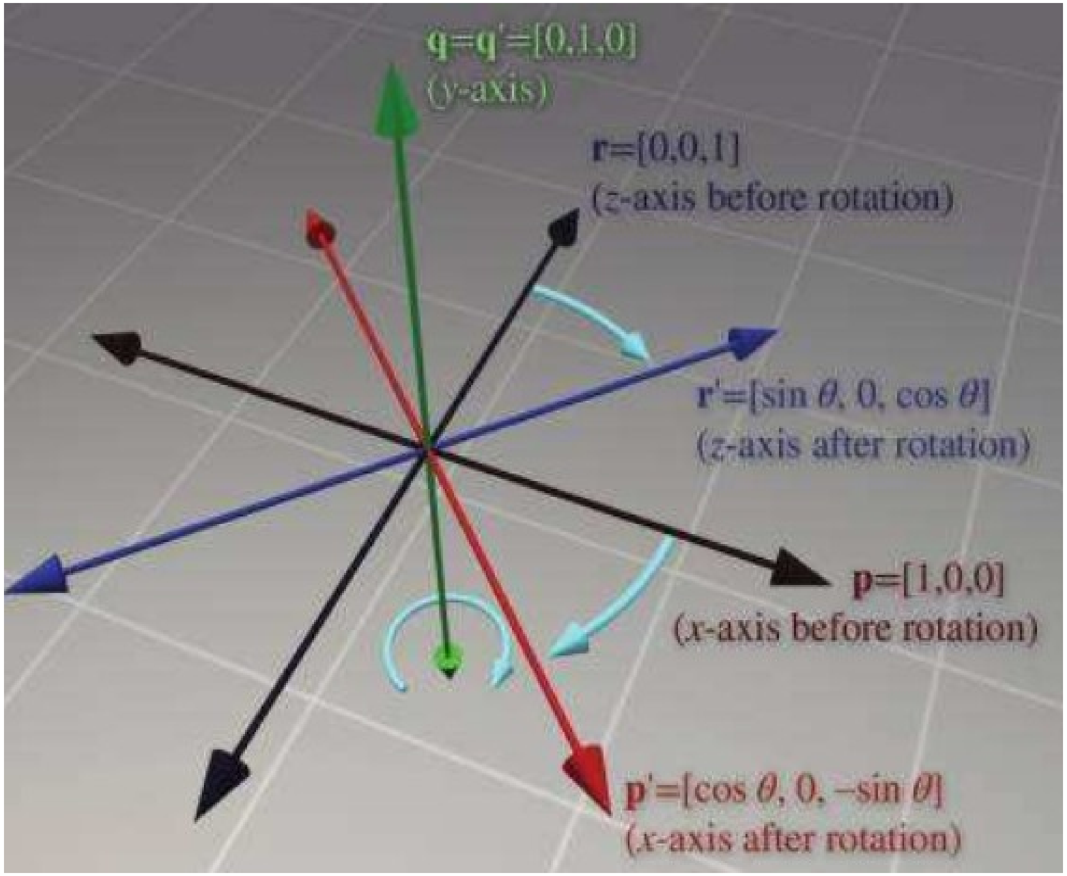
$$\mathbf{R}_x(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}' \\ \mathbf{q}' \\ \mathbf{r}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$



Matrices et transformations linéaires

- Rotation
  - En 3D, autour des axes cardinaux
    - Axe des y

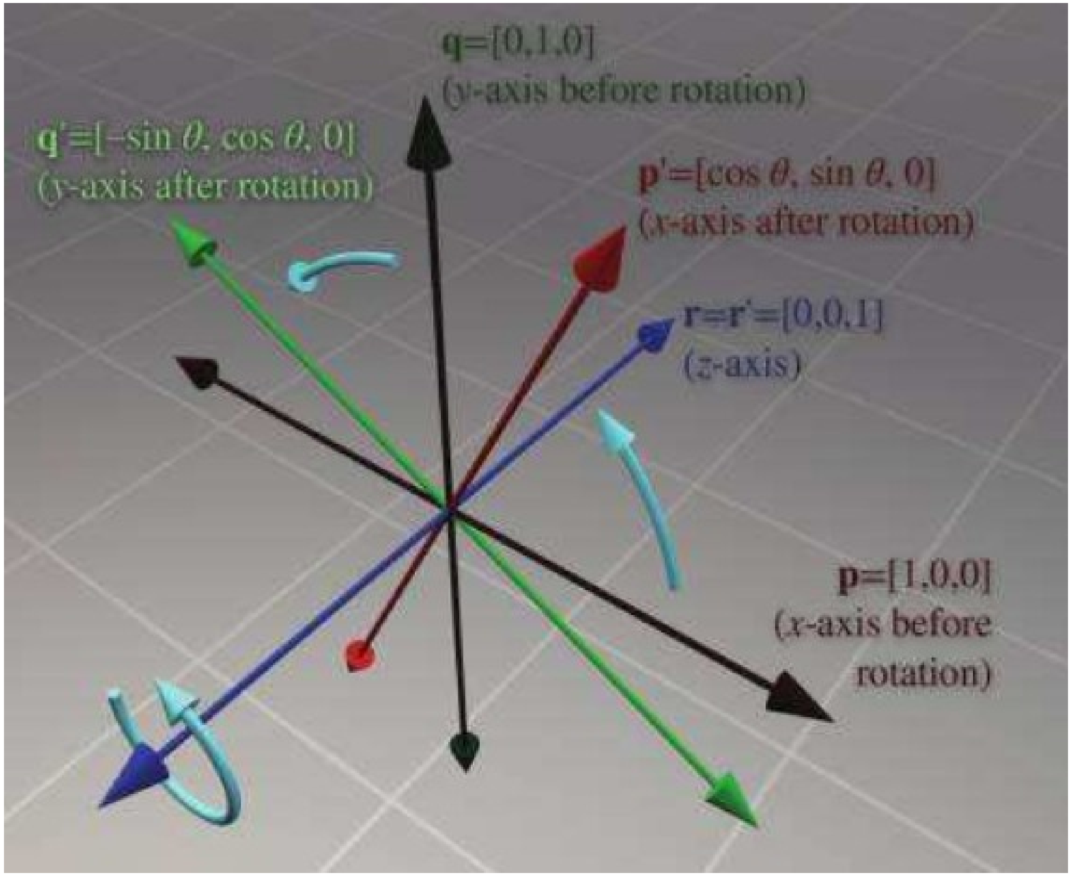
$$\mathbf{R}_y(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}' \\ \mathbf{q}' \\ \mathbf{r}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$



Matrices et transformations linéaires

- Rotation
  - En 3D, autour des axes cardinaux
    - Axe des z

$$\mathbf{R}_z(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}' \\ \mathbf{q}' \\ \mathbf{r}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Matrices et transformations linéaires

- Rotation
  - En 3D, autour d'un axe arbitraire
    - Condition : l'axe doit passer par l'origine
      - On ne considère pas encore les translations
    - Soit θ l'angle de rotation autour de l'axe
    - Soit **n** le vecteur unité qui définit l'axe
    - Problème
      - Comment en déduire la matrice de rotation de θ° autour de **n** ?
    - Astuce
      - Soit $\mathbf{R}(\mathbf{n},\theta)$ la matrice de rotation et **v** un vecteur
      - Soit **v'** le vecteur produit de **v** par $\mathbf{R}(\mathbf{n},\theta)$: $\mathbf{v}' = \mathbf{v}\mathbf{R}(\mathbf{n},\theta)$
      - **v'** résulte d'une rotation, d'un angle de θ degrés, de **v** autour de **n**
      - On va exprimer **v'** en fonction de **v**, **n** et θ

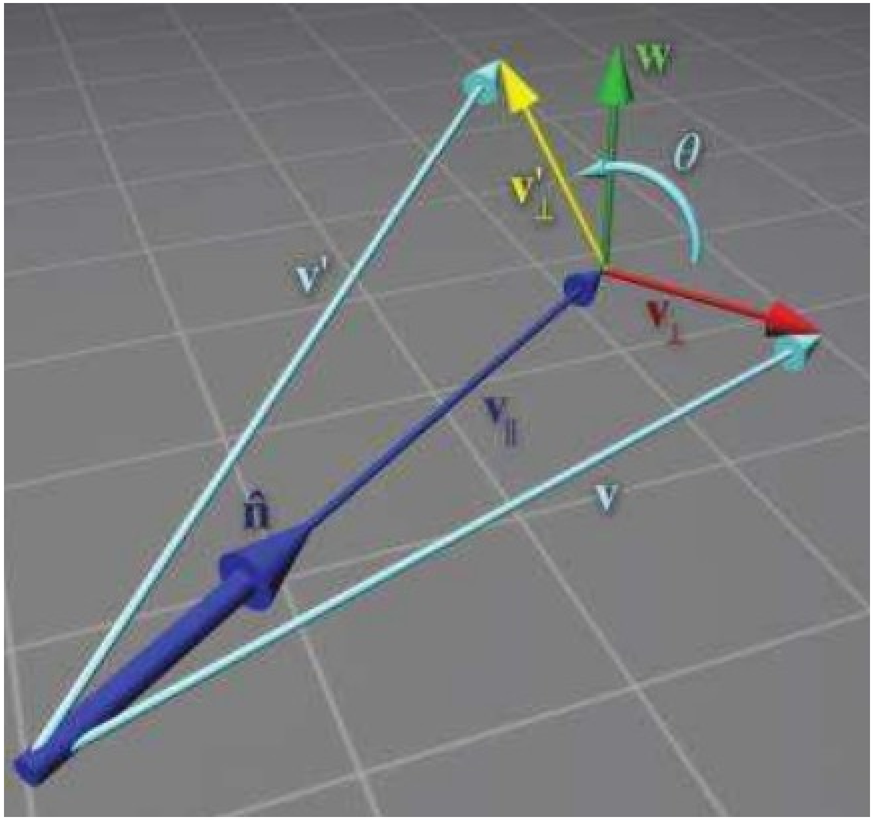
Matrices et transformations linéaires

- Rotation
  - En 3D, autour d'un axe arbitraire
    - Astuce
      - Soient les vecteurs $\mathbf{v}_\perp$ et $\mathbf{v}_\parallel$ tels que $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_\parallel$
      - Soient les vecteurs $\mathbf{v'}$ et $\mathbf{v'}_\parallel$ tels que $\mathbf{v'} = \mathbf{v'}_\perp + \mathbf{v'}_\parallel$
      - $\mathbf{v}_\parallel$ est parallèle à $\mathbf{n}$, donc non affecté par la rotation : $\mathbf{v'}_\parallel = \mathbf{v}_\parallel$
      - $\mathbf{v}_\parallel$ est la valeur de $\mathbf{v}$ projetée sur $\mathbf{n}$: $\mathbf{v}_\parallel = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$
      - $\mathbf{v}_\perp$ est perpendiculaire à $\mathbf{n}$, donc $\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$
      - Soit w le vecteur perpendiculaire à $\mathbf{v}_\perp$ comme à $\mathbf{v}_\parallel$
        - En conséquence, $\mathbf{w} = \mathbf{n} \times \mathbf{v}_\perp = ... = \mathbf{n} \times \mathbf{v}$
      - $\mathbf{w}$ et $\mathbf{v}_\perp$ forment 2 axes d'un espace de coordonnées 2D
        - $\mathbf{v'}_\perp$ est donc une rotation, d'un angle θ, de $\mathbf{v'}$ autour de ce plan
        - En conséquence, $\mathbf{v'}_\perp = \cos\theta\, \mathbf{v}_\perp + \sin\theta\, \mathbf{w}$

Matrices et transformations linéaires

- Rotation
  - En 3D, autour d'un axe arbitraire
    - De proche en proche, on obtient l'équation suivante

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}' &= \mathbf{v}'_{\perp} + \mathbf{v}_{\parallel} \\
&= \cos\theta\,(\mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,\mathbf{n}) + \sin\theta\,(\mathbf{n}\times\mathbf{v}) + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,\mathbf{n}
\end{aligned}
$$



    - Soient **p**, **q** et **r** les vecteurs de base
    - On peut en déduire **p'**, **q'** et **r'**, les nouveaux vecteurs de base après transformation
    - Ce sont les vecteurs ligne de **R**(**n**,*θ*)

Matrices et transformations linéaires

- Rotation
  - En 3D, autour d'un axe arbitraire

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{p}' = \begin{bmatrix} {n_x}^2 (1 - \cos\theta) + \cos\theta \\ n_x n_y (1 - \cos\theta) + n_z \sin\theta \\ n_x n_z (1 - \cos\theta) - n_y \sin\theta \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{q}' = \begin{bmatrix} n_x n_y (1 - \cos\theta) - n_z \sin\theta \\ {n_y}^2 (1 - \cos\theta) + \cos\theta \\ n_y n_z (1 - \cos\theta) + n_x \sin\theta \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{r}' = \begin{bmatrix} n_x n_z (1 - \cos\theta) + n_y \sin\theta \\ n_y n_z (1 - \cos\theta) - n_x \sin\theta \\ {n_z}^2 (1 - \cos\theta) + \cos\theta \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{n}, \theta) = \begin{bmatrix} {n_x}^2 (1 - \cos\theta) + \cos\theta & n_x n_y (1 - \cos\theta) + n_z \sin\theta & n_x n_z (1 - \cos\theta) - n_y \sin\theta \\ n_x n_y (1 - \cos\theta) - n_z \sin\theta & {n_y}^2 (1 - \cos\theta) + \cos\theta & n_y n_z (1 - \cos\theta) + n_x \sin\theta \\ n_x n_z (1 - \cos\theta) + n_y \sin\theta & n_y n_z (1 - \cos\theta) - n_x \sin\theta & {n_z}^2 (1 - \cos\theta) + \cos\theta \end{bmatrix}$$

Matrices et transformations linéaires

- Redimensionnement ("scale")
  - Agrandit ou rapetisse un objet selon un **facteur** de k
  - Est **uniforme** s'il est appliqué à l'objet entier
    - Pour les longueurs : facteur k
    - Pour les surfaces : facteur k^2
    - Pour les volumes (3D) : facteur k^3
  - Est non-uniforme si on applique différents facteurs dans différentes directions (angles non préservés)
  - Pour l'instant, on va considérer que $|k| > 0$
    - Si $|k| > 1$, l'objet s'agrandit (ou s'élargit)
    - Si $|k| < 1$, l'objet rapetisse (ou se raccourcit)

Matrices et transformations linéaires

- Redimensionnement selon les axes cardinaux
  - En 2D

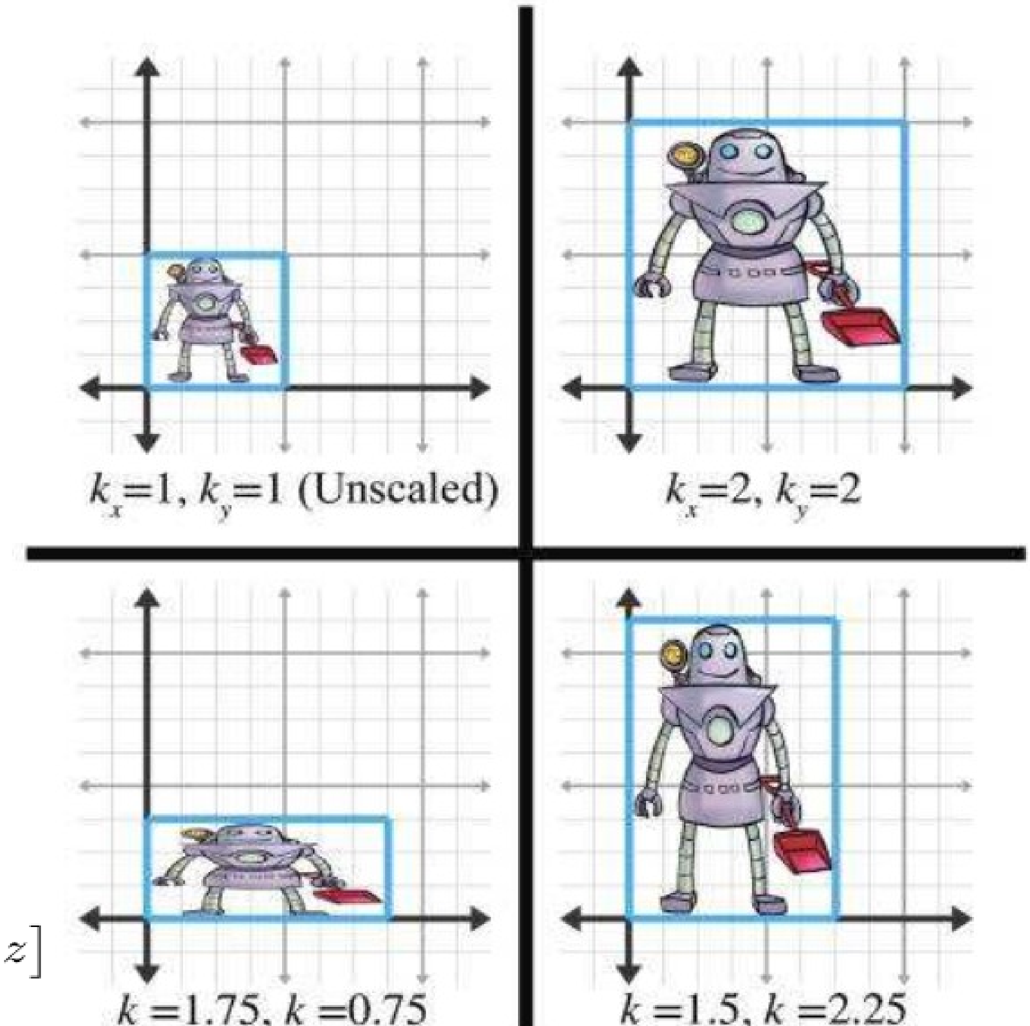
$$\begin{aligned} \mathbf{p}' &= k_x\mathbf{p} = k_x\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}k_x & 0\end{bmatrix} \\ \mathbf{q}' &= k_y\mathbf{q} = k_y\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & k_y\end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{S}(k_x, k_y) = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix}$$

  - En 3D

$$\mathbf{S}(k_x, k_y, k_z) = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}k_x x & k_y y & k_z z\end{bmatrix}$$

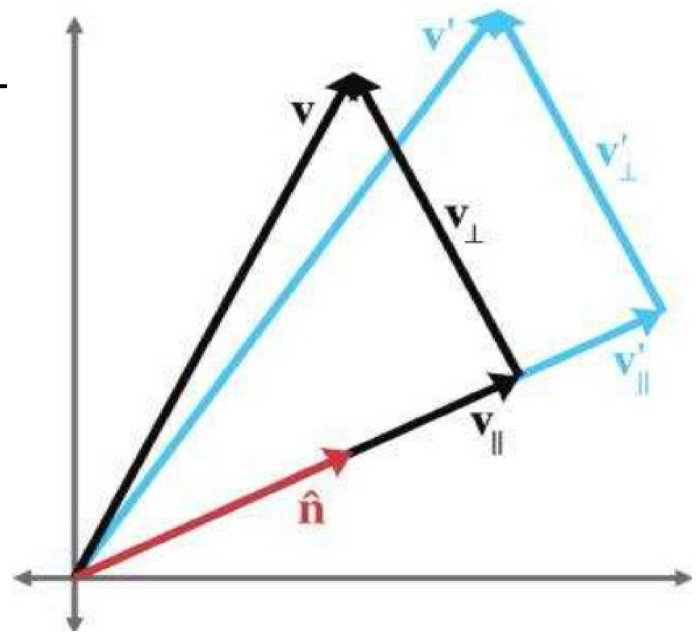


Matrices et transformations linéaires

- Redimensionnement dans une direction arbitraire
  - Soit **n** le vecteur unitaire parallèle à la direction dans laquelle on effectue le redimensionnement
  - Soit *k* le facteur de redimensionnement qu'on applique selon la ligne (2D) ou selon le plan (3D) perpendiculaire à **n**
  - Soient **v** un vecteur à redimensionner, et **v'** le nouveau vecteur une fois qu'on a appliqué le redimensionnement : **v'** = **vS**(**n**,*k*)
  - La construction de la matrice **S**(**n**,*k*) se fait selon le même principe que pour la rotation

Matrices et transformations linéaires

- Redimensionnement dans une direction arbitraire
  - Astuce
    - Soient les vecteurs $\mathbf{v}_\perp$ et $\mathbf{v}_\parallel$ tels que $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_\parallel$
    - $\mathbf{v}_\parallel$ est la valeur de $\mathbf{v}$ projetée sur $\mathbf{n}$: $\mathbf{v}_\parallel = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$
    - $\mathbf{v}_\parallel$ est parallèle à $\mathbf{n}$, donc $\mathbf{v'}_\parallel = k\mathbf{v}_\parallel = k(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$
    - $\mathbf{v}_\perp$ est perpendiculaire à $\mathbf{n}$: $\mathbf{v'}_\perp = \mathbf{v}_\perp$
    - On a toujours $\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$
    - On en déduit $\mathbf{v'} = \mathbf{v} + (k - 1)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$



Matrices et transformations linéaires

- Redimensionnement dans une direction arbitraire
  - En 2D

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} + (k-1)\left(\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{n}}\right)\hat{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + (k-1)\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}n_x\\n_y\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}n_x\\n_y\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + (k-1)\,n_x\begin{bmatrix}n_x\\n_y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}(k-1)\,{n_x}^2\\(k-1)\,n_xn_y\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1+(k-1)\,{n_x}^2\\(k-1)\,n_xn_y\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{q}' = \begin{bmatrix}(k-1)\,n_xn_y\\1+(k-1)\,{n_y}^2\end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{n},k) = \begin{bmatrix}\mathbf{p}'\\\mathbf{q}'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+(k-1)\,{n_x}^2 & (k-1)\,n_xn_y\\(k-1)\,n_xn_y & 1+(k-1)\,{n_y}^2\end{bmatrix}$$

Matrices et transformations linéaires

- Redimensionnement dans une direction arbitraire
  - En 3D

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{p}' = \begin{bmatrix} 1 + (k-1)\, {n_x}^2 \\ (k-1)\, n_x n_y \\ (k-1)\, n_x n_z \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

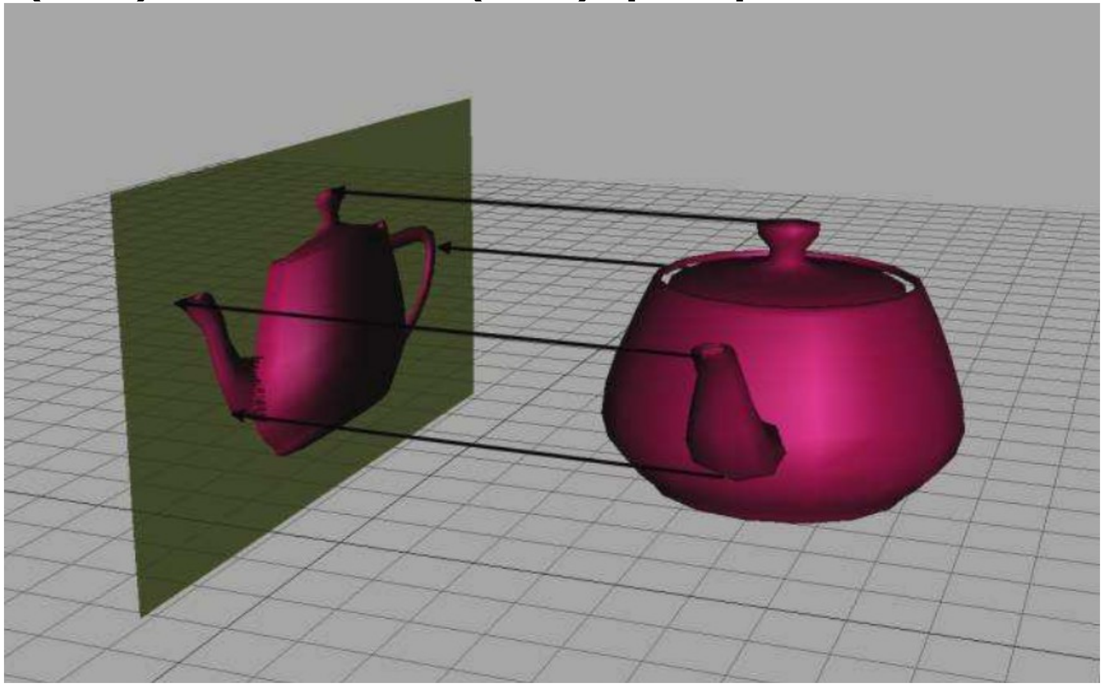
$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{q}' = \begin{bmatrix} (k-1)\, n_x n_y \\ 1 + (k-1)\, {n_y}^2 \\ (k-1)\, n_y n_z \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{r}' = \begin{bmatrix} (k-1)\, n_x n_z \\ (k-1)\, n_y n_z \\ 1 + (k-1)\, {n_z}^2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{n}, k) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}' \\ \mathbf{q}' \\ \mathbf{r}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + (k-1)\, {n_x}^2 & (k-1)\, n_x n_y & (k-1)\, n_x n_z \\ (k-1)\, n_x n_y & 1 + (k-1)\, {n_y}^2 & (k-1)\, n_y n_z \\ (k-1)\, n_x n_z & (k-1)\, n_y n_z & 1 + (k-1)\, {n_z}^2 \end{bmatrix}$$

Matrices et transformations linéaires

- Projection orthographique (ou parallèle)
  - "Redimensionnement" avec un facteur de $|k| = 0$ dans une direction particulière
  - Tous les points sont aplatis, ou **projetés**, sur la ligne (2D) ou l'axe (3D) perpendiculaire



Matrices et transformations linéaires

- Projection sur un axe ou un plan cardinal
  - Il suffit d'annuler l'une des coordonnées
- Sur un axe (2D)

$$\mathbf{P}_x = \mathbf{S}\left(\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}, 0\right) = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_y = \mathbf{S}\left(\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}, 0\right) = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

- Sur un plan (3D)

$$\mathbf{P}_{xy} = \mathbf{S}\left(\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}, 0\right) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{xz} = \mathbf{S}\left(\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}, 0\right) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{yz} = \mathbf{S}\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}, 0\right) = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Matrices et transformations linéaires

- Projection sur un axe ou un plan arbitraires
  - En 2D

$$\mathbf{P}(\mathbf{n}) = \mathbf{S}(\mathbf{n}, 0) = \begin{bmatrix} 1 + (0-1)\,{n_x}^2 & (0-1)\,n_x n_y \\ (0-1)\,n_x n_y & 1 + (0-1)\,{n_y}^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - {n_x}^2 & -n_x n_y \\ -n_x n_y & 1 - {n_y}^2 \end{bmatrix}.$$

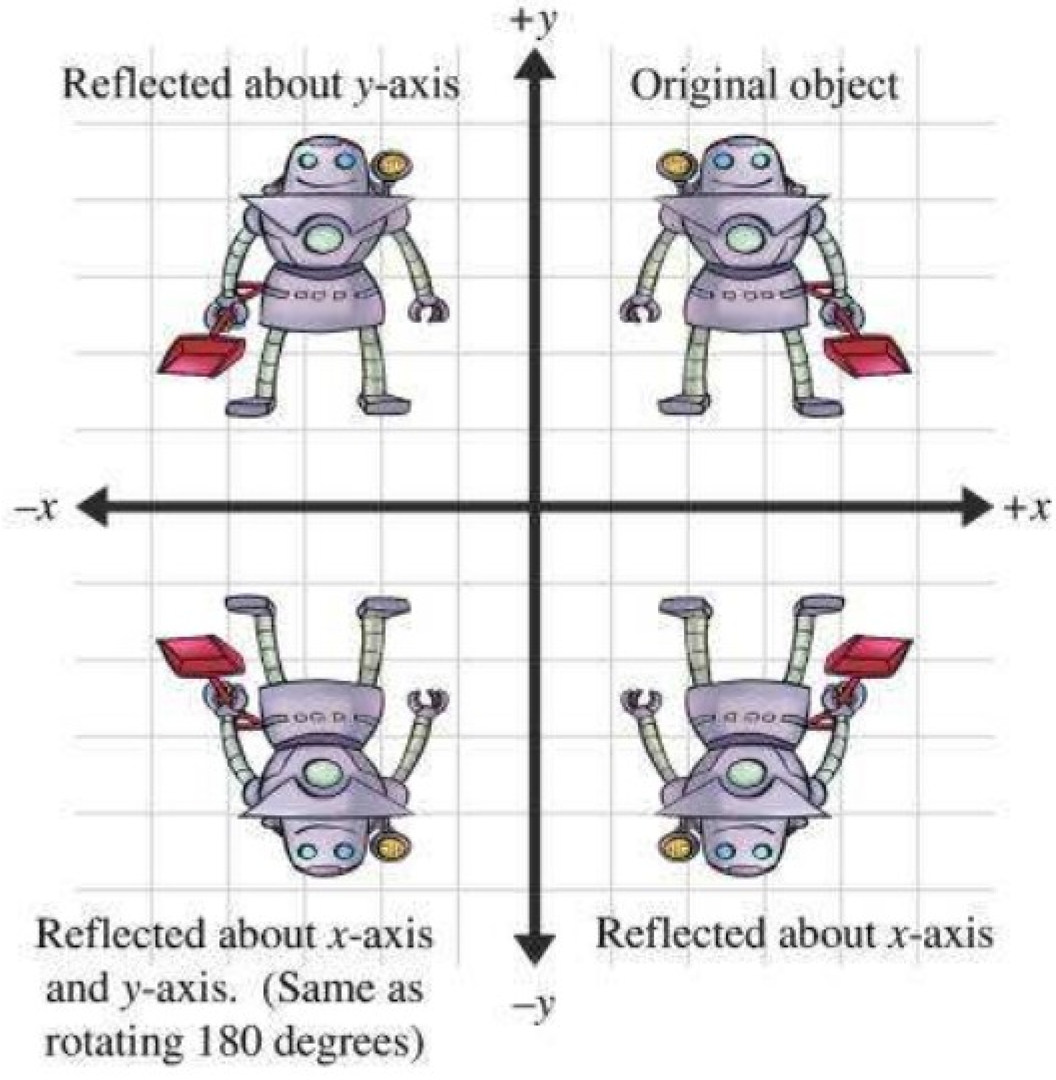
  - En 3D

$$\mathbf{P}(\mathbf{n}) = \mathbf{S}(\mathbf{n}, 0) = \begin{bmatrix} 1 + (0-1)\,{n_x}^2 & (0-1)\,n_x n_y & (0-1)\,n_x n_z \\ (0-1)\,n_x n_y & 1 + (0-1)\,{n_y}^2 & (0-1)\,n_y n_z \\ (0-1)\,n_x n_z & (0-1)\,n_y n_z & 1 + (0-1)\,{n_z}^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - {n_x}^2 & -n_x n_y & -n_x n_z \\ -n_x n_y & 1 - {n_y}^2 & -n_y n_z \\ -n_x n_z & -n_y n_z & 1 - {n_z}^2 \end{bmatrix}.$$

Matrices et transformations linéaires

- Réflexion (ou "miroir")
  - Renvoie l'objet diamétralement opposé selon une ligne (2D) ou un plan (3D)
  - "Redimensionnement" avec un facteur de $|k| = -1$



Matrices et transformations linéaires

- Réflexion
  - En 2D : L'axe de réflexion passe par l'origine et est perpendiculaire à un vecteur unitaire **n**

$$\mathbf{R}(\mathbf{n}) = \mathbf{S}(\mathbf{n},-1) = \begin{bmatrix} 1+(-1-1)\,{n_x}^2 & (-1-1)\,n_x n_y \\ (-1-1)\,n_x n_y & 1+(-1-1)\,{n_y}^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-2{n_x}^2 & -2n_x n_y \\ -2n_x n_y & 1-2{n_y}^2 \end{bmatrix}.$$

  - En 3D : même principe, avec un plan de réflexion

$$\mathbf{R}(\mathbf{n}) = \mathbf{S}(\mathbf{n},-1) = \begin{bmatrix} 1+(-1-1)\,{n_x}^2 & (-1-1)\,n_x n_y & (-1-1)\,n_x n_z \\ (-1-1)\,n_x n_y & 1+(-1-1)\,{n_y}^2 & (-1-1)\,n_y n_z \\ (-1-1)\,n_x n_z & (-1-1)\,n_y n_z & 1+(-1-1)\,{n_z}^2 \end{bmatrix}$$

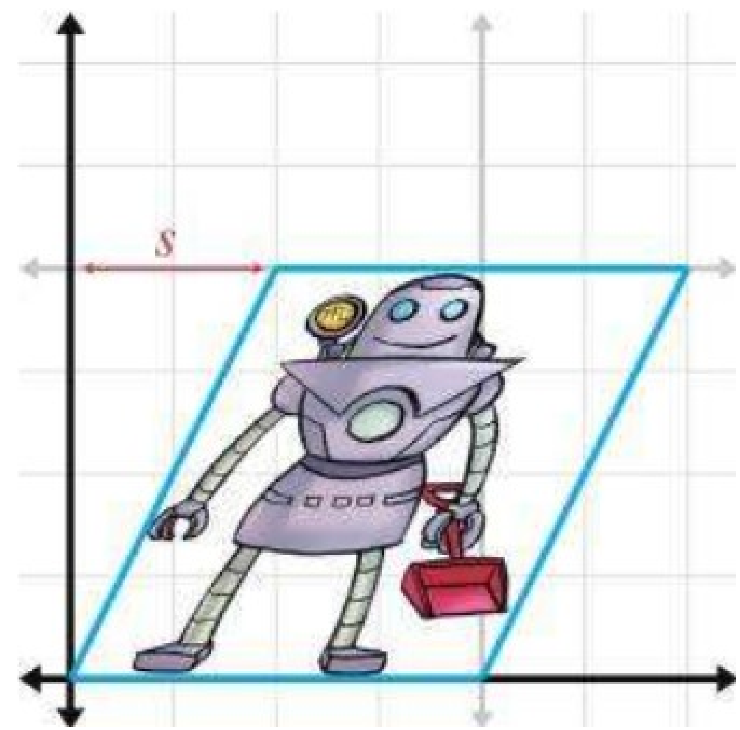
$$= \begin{bmatrix} 1-2{n_x}^2 & -2n_x n_y & -2n_x n_z \\ -2n_x n_y & 1-2{n_y}^2 & -2n_y n_z \\ -2n_x n_z & -2n_y n_z & 1-2{n_z}^2 \end{bmatrix}.$$

Matrices et transformations linéaires

- Cisaillement ("shearing")
  - Consiste à étirer un objet de manière non-uniforme
  - Les angles ne sont pas préservés
  - Principe : on ajoute le multiple d'une coordonnée à l'autre coordonnée
    - Exemple (2D) : *x′* = *x* + *sy*

      (avec *s* étant un multiple de *y*)
    - Matrice correspondante

$$\mathbf{H}_x(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{bmatrix}$$



Matrices et transformations linéaires

- Cisaillement
  - En 2D
    - Le facteur *s* contrôle le degré et la direction du cisaillement
    - Quand *x* est "cisaillé" par *y* : $\mathbf{H}_x(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{bmatrix}$
    - Quand *y* est "cisaillé" par *x* : $\mathbf{H}_y(s) = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
  - En 3D
    - Une coordonnée en "cisaille" deux autres
    - Deux facteurs de contrôle, *s* et *t*

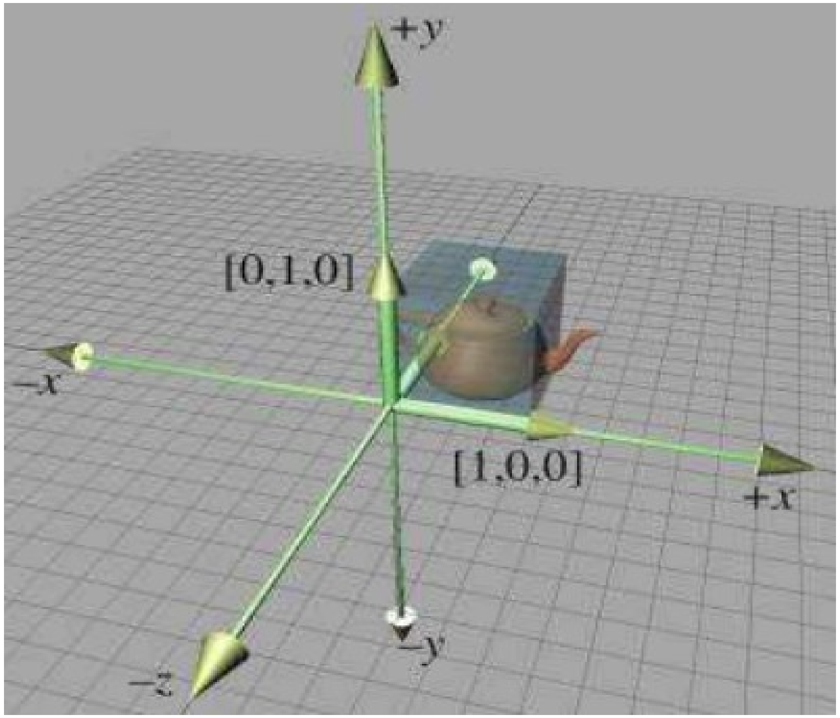
$$\mathbf{H}_{xy}(s,t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ s & t & 1 \end{bmatrix}$$

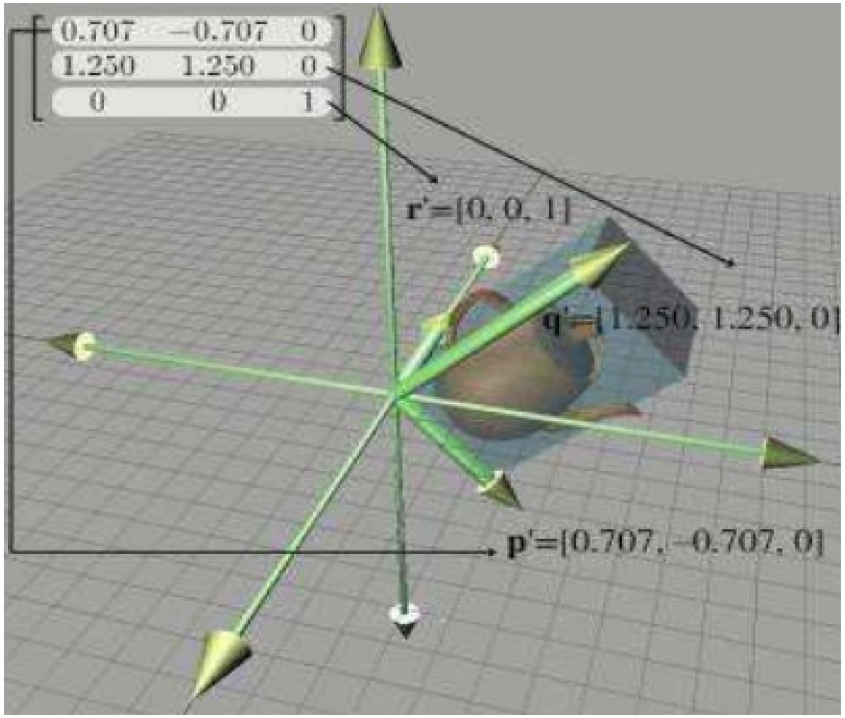
$$\mathbf{H}_{xz}(s,t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{yz}(s,t) = \begin{bmatrix} 1 & s & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrices et transformations linéaires

- Combinaison de transformations
  - On combine (ou concatène) plusieurs transformations en multipliant les matrices qui les représentent
  - Exemple : rotation + agrandissement (non-uniforme)





Classes de transformations

- Transformation linéaire
  - Peut être décrite par une multiplication de matrices
  - Ce qui n'inclut pas la translation
- Transformation affine
  - Transformation linéaire suivie d'une translation
  - Sur-ensemble des transformations linéaires
- Transformation inversible
  - Transformation dont il existe l'opération inverse
  - L'inverse d'une transformation "défait" celle-ci
  - Seule la projection orthographique n'est pas inversible

Classes de transformations

- Transformation conforme ("angle preserving")
  - Préserve la magnitude ET la direction des angles
  - Cela concerne la translation, la rotation et le redimensionnement uniforme
- Transformation orthogonale
  - Matrice dont les lignes forment une base orthonormée (axes perpendiculaires et unitaires)
  - Cela concerne la translation, la rotation et la réflexion
- Transformation isométrique ("rigid body")
  - Préserve les dimensions (angles,longueurs,surfaces)
  - Concerne uniquement la translation et la rotation

Plan

- Introduction
- Vecteurs
- Matrices
- Matrices et transformations linéaires
- Matrices et transformations avancées
  - Déterminant
  - Inverse d'une matrice
  - Matrice orthogonale
  - Translation
  - Projection perspective

Matrices et transformations avancées

- Déterminant d'une matrice
  - Définition algébrique
    - Valeur scalaire qui s'applique aux matrices carrées
    - Notation : "det **M**" ou |**M**|
    - Pour les matrices 2x2
    - Pour les matrices 3x3

$$|\mathbf{M}| = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}$$

$$\begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{aligned} &m_{11}m_{22}m_{33} + m_{12}m_{23}m_{31} + m_{13}m_{21}m_{32} \\ &- m_{13}m_{22}m_{31} - m_{12}m_{21}m_{33} - m_{11}m_{23}m_{32} \end{aligned} \\ &= m_{11}(m_{22}m_{33} - m_{23}m_{32}) \\ &\quad + m_{12}(m_{23}m_{31} - m_{21}m_{33}) \\ &\quad + m_{13}(m_{21}m_{32} - m_{22}m_{31}). \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} &m_{11}m_{22}m_{33} + m_{12}m_{23}m_{31} + m_{13}m_{21}m_{32} \\ &- m_{13}m_{22}m_{31} - m_{12}m_{21}m_{33} - m_{11}m_{23}m_{32} \end{aligned}$$

Matrices et transformations avancées

- Déterminant d'une matrice
  - Définition algébrique
    - Mineur d'une matrice
      - Soient r et c le nombre de lignes et de colonnes d'une matrice M
      - Soit la sous-matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j
      - Le déterminant de cette sous-matrice, $M^{\{ij\}}$, est un **mineur** de **M**
      - Exemple

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \implies M^{\{12\}} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

    - Cofacteur d'une matrice
      - Mineur d'une matrice multiplié par $(-1)^{i+j}$

$$C^{\{ij\}} = (-1)^{i+j} M^{\{ij\}}$$

Matrices et transformations avancées

- Déterminant d'une matrice
  - Définition algébrique
    - Pour les matrices nxn
      - On peut exprimer |**M**| en fonction des cofacteurs de **M**

$$|\mathbf{M}| = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} C^{\{ij\}} = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} (-1)^{i+j} M^{\{ij\}}$$

      - Exemple avec les matrices 4x4

$$\begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{vmatrix} = m_{11} \begin{vmatrix} m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{vmatrix}$$

$$- m_{12} \begin{vmatrix} m_{21} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{43} & m_{44} \end{vmatrix} + m_{13} \begin{vmatrix} m_{21} & m_{22} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{44} \end{vmatrix}$$

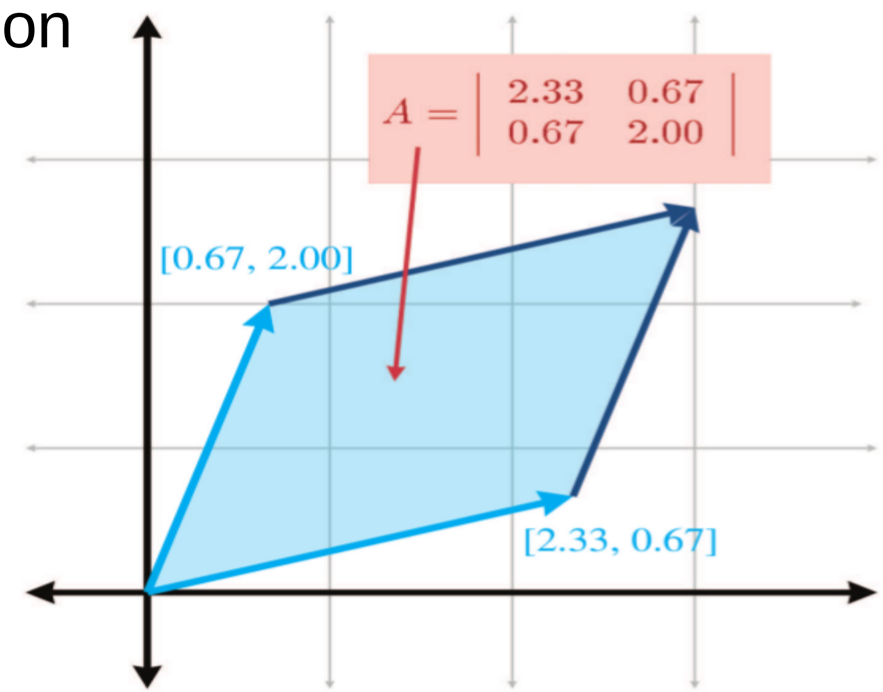
$$- m_{14} \begin{vmatrix} m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} \end{vmatrix}.$$

Matrices et transformations avancées

- Déterminant d'une matrice
  - Propriétés
    - Déterminant de l'identité : $|\mathbf{I}| = 1$
    - Déterminant d'un produit = produit des déterminants
      - $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$ $\quad |\mathbf{M_1 M_2 M_3}| = |\mathbf{M_1}||\mathbf{M_2}||\mathbf{M_3}|$
    - Déterminant d'une matrice = déterminant de sa transposée
      - $|\mathbf{M}^T| = |\mathbf{M}|$
    - En cas de ligne ou de colonne nulle, le déterminant est nul
    - Échanger deux lignes ou deux colonnes inverse le signe
    - Ajouter une ligne à une autre, ou une colonne à une autre, ne change pas la valeur du déterminant
    - Déterminant 0 pour une projection orthographique, -1 pour une réflexion, 1 pour un cisaillement, translation ou rotation

Matrices et transformations avancées

- Déterminant d'une matrice
  - Interprétation géométrique
    - C'est le parallélogramme en 2D, ou parallélépipède en 3D, dont les côtés sont les vecteurs de base transformés
    - On peut utiliser sa valeur pour évaluer les changements après transformation



Matrices et transformations avancées

- Inverse d'une matrice
  - Définition algébrique
    - L'inverse de **M**, noté $\mathbf{M}^{-1}$, est tel que si on multiplie les deux, on obtient l'identité. $\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{I}$
    - Ne s'applique qu'aux matrices carrées dont le déterminant n'est pas nul
      - On appelle ces matrices **inversibles** ou **non-singulières**
      - A l'opposée, une matrice qui n'a pas d'inverse est appelée **non-inversible** ou **singulière**
    - Problème
      - Comment calculer l'inverse d'une matrice carrée donnée ?
    - Solution
      - Calcul de la comatrice, et division par le déterminant

Matrices et transformations avancées

- Inverse d'une matrice
  - Définition algébrique
    - Comatrice (ou "classical adjoint", noté "adj **M**")
      - Transposée de la matrice des cofacteurs de M

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C^{\{11\}} = +\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 6, \quad C^{\{12\}} = -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2, \quad C^{\{13\}} = +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -2,$$

$$C^{\{21\}} = -\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 9, \quad C^{\{22\}} = +\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1, \quad C^{\{23\}} = -\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 13,$$

$$C^{\{31\}} = +\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad C^{\{32\}} = -\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -8, \quad C^{\{33\}} = +\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -8.$$

$$\text{adj } \mathbf{M} = \begin{bmatrix} C^{\{11\}} & C^{\{12\}} & C^{\{13\}} \\ C^{\{21\}} & C^{\{22\}} & C^{\{23\}} \\ C^{\{31\}} & C^{\{32\}} & C^{\{33\}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 9 & 1 & 13 \\ 0 & -8 & -8 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 0 \\ -2 & 1 & -8 \\ -2 & 13 & -8 \end{bmatrix}$$

Matrices et transformations avancées

- Inverse d'une matrice
  - Définition algébrique
    - Pour calculer l'inverse d'une matrice, on divise la comatrice par le déterminant

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{\mathrm{adj}\ \mathbf{M}}{|\mathbf{M}|}$$

    - Proprietes
      - L'inverse d'une matrice est la matrice originale : $(\mathbf{M}^{-1})^{-1} = \mathbf{M}$
      - L'identité est égale à son propre inverse : $\mathbf{I}^{-1} = \mathbf{I}$
      - L'inverse de la transposée est la transposée de l'inverse :

        $(\mathbf{M}^{T})^{-1} = (\mathbf{M}^{-1})^{T}$
      - L'inverse d'un produit est égal au produit opposé des inverses

        $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ et $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 \ldots \mathbf{M}_{n-1}\mathbf{M}_n)^{-1} = \mathbf{M}_n^{-1}\mathbf{M}_{n-1}^{-1} \ldots \mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{M}_1^{-1}$
      - Le déterminant de l'inverse est égal à 1 divisé par le déterminant

        $|\mathbf{M}^{-1}| = 1 / |\mathbf{M}|$

Matrices et transformations avancées

- Inverse d'une matrice
  - Interprétation géométrique
    - Pour "défaire" une transformation, il suffit de calculer la transformation inverse
    - Dit autrement, si on multiplie un vecteur par une matrice puis par l'inverse de celle-ci, on retrouve le vecteur d'origine

$$(\mathbf{vM})\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{v}(\mathbf{MM}^{-1}) = \mathbf{vI} = \mathbf{v}$$

Matrices et transformations avancées

- Matrices orthogonales
  - Définition algébrique
    - Une matrice carrée **M** est dite **orthogonale** quand $\mathbf{MM}^T = \mathbf{I}$
    - Sachant que $\mathbf{MM}^{-1} = \mathbf{I}$, cela signifie qu'une matrice est orthogonale si et seulement si $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^T$
    - L'intérêt de ce type de matrices est double
      - On a souvent besoin de calculer l'inverse d'une matrice
      - Plusieurs transformations (notamment la rotation et la réflexion) sont représentées par des matrices orthogonales
  - Interprétation géométrique
    - Une matrice est orthogonale à deux conditions
      - Chaque ligne (et colonne) de la matrice est un vecteur unitaire
      - Les lignes (et colonnes) de la matrices sont 2 à 2 perpendiculaires

Matrices et transformations avancées

- Matrices orthogonales
  - Interprétation géométrique
    - Exemple avec une matrice 3x3

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{M} & & \mathbf{M}^{\mathrm{T}} & = & \mathbf{I}, \\ \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
m_{11}m_{11} + m_{12}m_{12} + m_{13}m_{13} &= 1, \\
m_{11}m_{21} + m_{12}m_{22} + m_{13}m_{23} &= 0, \\
m_{11}m_{31} + m_{12}m_{32} + m_{13}m_{33} &= 0, \\
m_{21}m_{11} + m_{22}m_{12} + m_{23}m_{13} &= 0, \\
m_{21}m_{21} + m_{22}m_{22} + m_{23}m_{23} &= 1, \\
m_{21}m_{31} + m_{22}m_{32} + m_{23}m_{33} &= 0, \\
m_{31}m_{11} + m_{32}m_{12} + m_{33}m_{13} &= 0, \\
m_{31}m_{21} + m_{32}m_{22} + m_{33}m_{23} &= 0, \\
m_{31}m_{31} + m_{32}m_{32} + m_{33}m_{33} &= 1.
\end{aligned}$$

- Soient **r1**, **r2** et **r3** les vecteurs ligne de M

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \end{bmatrix}$$

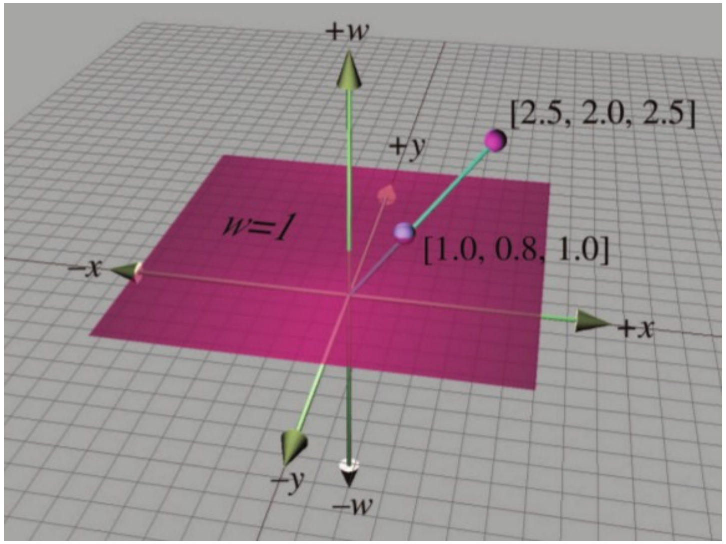
- On a donc les équations suivantes :

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1 = 1, & \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = 0, & \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3 = 0, \\
\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1 = 0, & \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_2 = 1, & \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3 = 0, \\
\mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}_1 = 0, & \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}_2 = 0, & \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}_3 = 1.
\end{array}$$

Matrices et transformations avancées

- Matrices homogènes 4x4
  - Jusqu'à présent, nous n'avons travaillé qu'avec des matrices 2x2 et 3x3
  - Ces matrices ne nous permettaient pas de représenter des translations
  - Pour ce faire, il faut introduire une 4ème dimension et une nouvelle notion : "l'espace homogène"
  - Les transformations affines (exemple : translation) se feront donc sur des matrices 4x4

Matrices et transformations avancées



- Matrices homogènes 4x4
  - Notion d'espace homogène
    - Exemple pour la 2D
      - Soit l'espace 2D standard, représenté comme un plan dans le monde 3D (axes *x*, *y* et *w*) de coordonnées *w*=1
      - Tout point (*x*,*y*) de l'espace 2D peut être représenté en 3D avec les coordonnées (*x*,*y*,1). Il fait donc partie de ce plan
      - Pour tout point hors de ce plan (*x*,*y*,*w*≠1), on peut retrouver le point 2D correspondant en divisant par *w*, pourvu que *w* soit ≠0
        - Le point (*x*,*y*,*w*) est projeté sur le point 2D (*x*/*w*, *y*/*w*, 1)
      - Si *w*=0, un point (*x*,*y*,0) est un "point à l'infini", il représente une direction plutôt qu'une position (c'est un vecteur plutôt qu'un point)
    - Même principe pour la 3D
      - L'espace 3D est un plan dans "l'hyperplan 4D" (*x*,*y*,*z*,*w*) avec *w*=1
      - *w* est appelée la **coordonnée homogène**

Matrices et transformations avancées

- Translation avec des matrices 4x4
  - Passage de la 3D à la 4D
    - Il suffit de supposer que *w*=1
    - Un vecteur 3D [*x y z*] sera représenté en 4D par [*x y z* 1]
    - De même, il est facile de convertir une matrice 3D en 4D
    - La multiplication est préservée

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & 0 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} xm_{11}+ym_{21}+zm_{31} & xm_{12}+ym_{22}+zm_{32} & xm_{13}+ym_{23}+zm_{33} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & 0 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} xm_{11}+ym_{21}+zm_{31} & xm_{12}+ym_{22}+zm_{32} & xm_{13}+ym_{23}+zm_{33} & 1 \end{bmatrix}$$

Matrices et transformations avancées

- Translation avec des matrices 4x4
  - Représentation d'une translation d'un certain Δ
    - Matrice de translation correspondante

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \Delta x & \Delta y & \Delta z & 1 \end{bmatrix}$$

    - Multiplication par une telle matrice

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \Delta x & \Delta y & \Delta z & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+\Delta x & y+\Delta y & z+\Delta z & 1 \end{bmatrix}$$

Matrices et transformations avancées

- Translation avec des matrices 4x4
  - Que se passe-t-il pour un "point à l'infini" (*w*=0) ?
    - Transformation linéaire : appliquée normalement

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ \Delta x & \Delta y & \Delta z & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} xr_{11}+yr_{21}+zr_{31} & xr_{12}+yr_{22}+zr_{32} & xr_{13}+yr_{23}+zr_{33} & 0 \end{bmatrix}$$

    - Translation : elle ne se fait pas

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} xr_{11}+yr_{21}+zr_{31} & xr_{12}+yr_{22}+zr_{32} & xr_{13}+yr_{23}+zr_{33} & 0 \end{bmatrix}$$

Matrices et transformations avancées

- Translation avec des matrices 4x4
  - Conséquence
    - On utilise la composante *w* d'un vecteur 4D pour déterminer quand la translation se fait ou pas
      - Les "positions" (i.e. points, sommets) peuvent être déplacées
      - Les "directions" (i.e. normales) ne doivent pas être déplacées
    - D'un point de vue géométrique
      - Quand *w*=1, un vecteur 4D représente un "point"
      - Quand *w*=0, un vecteur 4D représente un "vecteur"

Matrices et transformations avancées

- Translation avec des matrices 4x4... ou 4x3 ?
  - Utilisation de matrices 4x3 ?
    - Quand on utilise une matrice 4x4 pour une translation, la colonne est toujours égale à $[0\ 0\ 0\ 1]^T$
    - On peut donc s'en débarrasser dans notre code
      - On ne l'utilise jamais, et elle ne change pas
    - En fait, l'utilisation des matrices 4x3 est assez courante dans le code des moteurs 3D
      - Ce sont des matrices 4x4 amputées de leur colonne inutile
      - Parfois elles remplacent les matrices 4x4, parfois elles les complètent

Matrices et transformations avancées

- Transformations affines
  - Les matrices 4x4 peuvent représenter plusieurs transformations affines contenant une translation
    - Rotation autour d'un axe qui ne passe pas par l'origine
    - Projection orthographique / réflexion / redimensionnement selon un plan qui ne passe pas par l'origine
  - Idée générale
    - On fait une translation (matrice **T**) depuis le "centre" de la transformation (**p**) jusqu'à l'origine
    - On effectue la transformation linéaire (matrice **R**)
    - On fait la translation inverse, de l'origine au "centre"
    - La matrice finale **A** est égale à $\mathbf{TR}(\mathbf{T}^{-1})$

Matrices et transformations avancées

- Transformations affines
  - En pratique
    - La translation n'affecte pas la transformation 3x3

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -p_x & -p_y & -p_z & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{p} & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{R}_{4\times4} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3\times3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p_x & p_y & p_z & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{p} & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{T}\mathbf{R}_{4\times4}\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{p} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3\times3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{p} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3\times3} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{p}\left(\mathbf{R}_{3\times3}\right) + \mathbf{p} & 1 \end{bmatrix}$$

Matrices et transformations avancées

- Matrices 4x4 et projection perspective
  - Perspective vs. orthographique
    - Projection orthographique (ou parallèle)
      - Permet de "plaquer" un espace 3D sur un **plan de projection** 2D
      - Les **projecteurs** (lignes allant depuis le point original jusqu'au point projeté sur le plan) sont parallèles
      - Reste constante peu importe l'éloignement de l'objet
    - Projection perspective
      - Il s'agit toujours de projeter un espace 3D sur un plan 2D
      - Différence de taille : les projecteurs ne sont pas parallèles. Ils s'intersectent en un point, le **centre de projection**
      - Plus l'objet est éloigné, plus sa projection est petite
      - Quand le centre de projection est devant le plan de projection, les projecteurs se croisent avant d'aller sur le plan, et l'image projetée de l'objet est inversée

Matrices et transformations avancées

- Matrices 4x4 et projection perspective
  - Perspective vs. orthographique
    - Projection orthographique

Matrices et transformations avancées

- Matrices 4x4 et projection perspective
  - Perspective vs. orthographique
    - Projection perspective (peintures de la Renaissance)

Matrices et transformations avancées

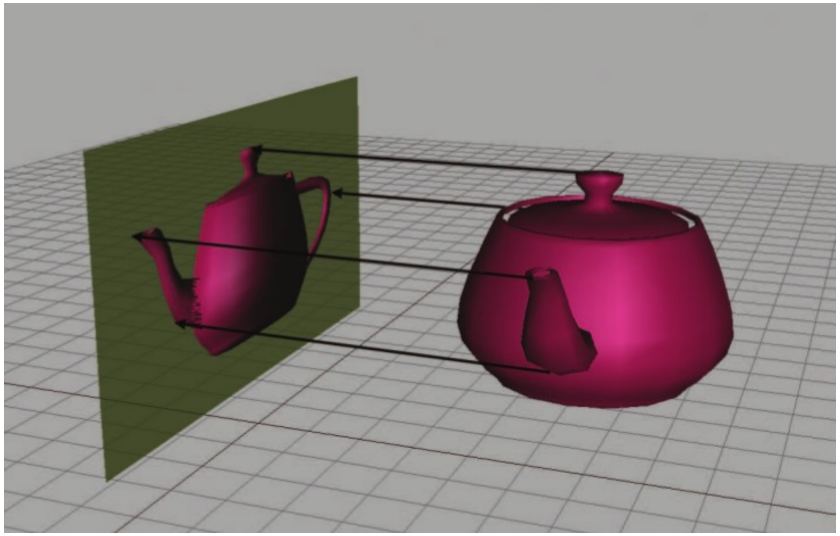
- Matrices 4x4 et projection perspective
  - Perspective vs. orthographique
    - Projection orthographique (jeux 2D)
      - *Heroes of Might and Magic 1* (1995)

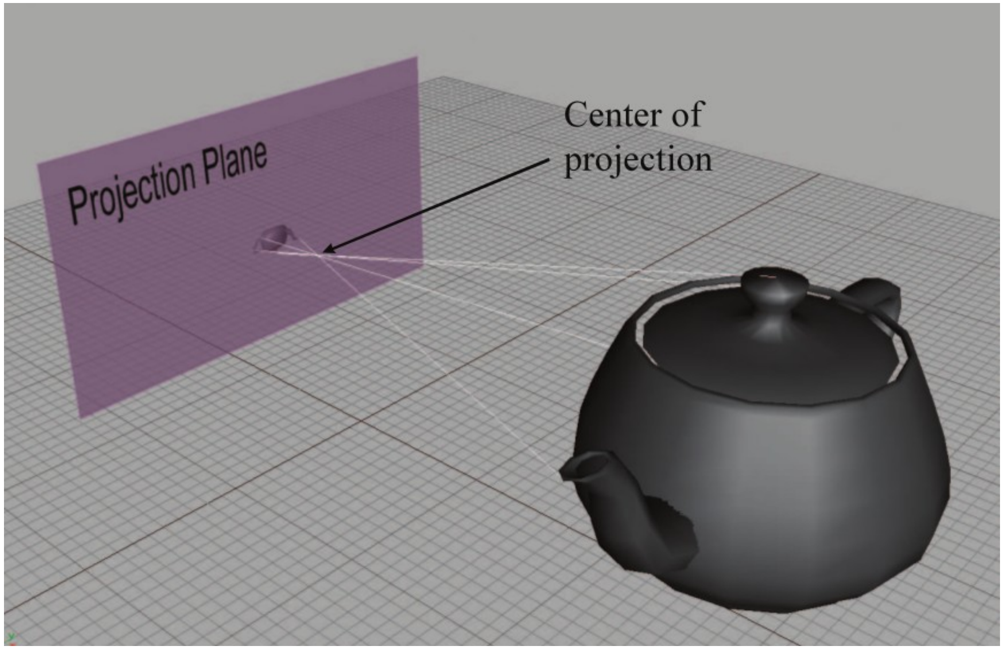
Matrices et transformations avancées

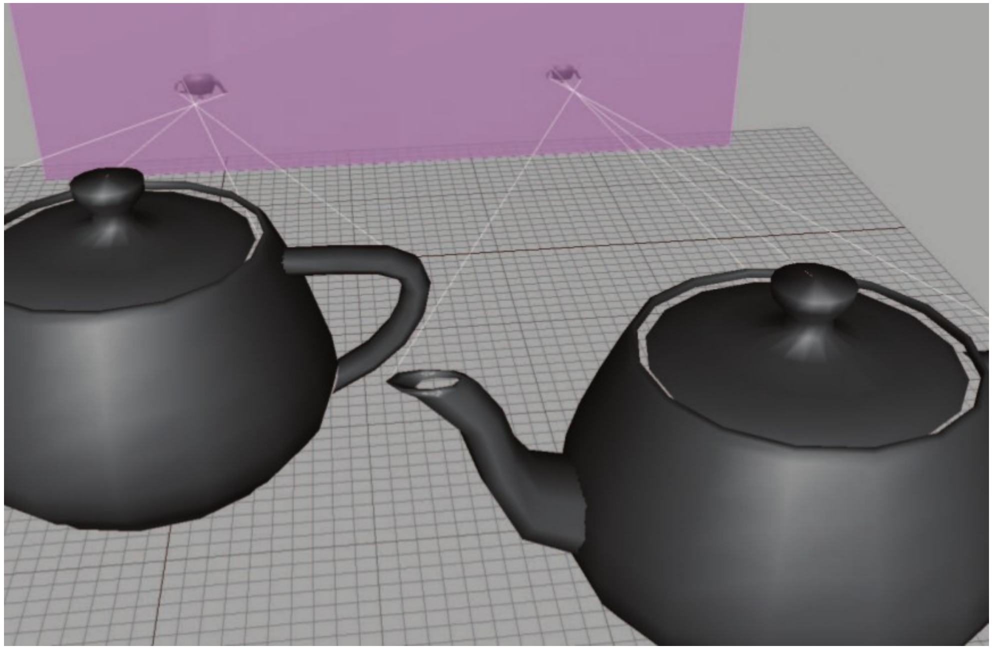
- Matrices 4x4 et projection perspective
  - Perspective vs. orthographique
    - Projection perspective (jeux 3D)
      - *Heroes of Might and Magic 5* (2006)

Matrices et transformations avancées

- Matrices 4x4 et projection perspective
  - Projection orthographique
  - Projection perspective
    - cf. en bas

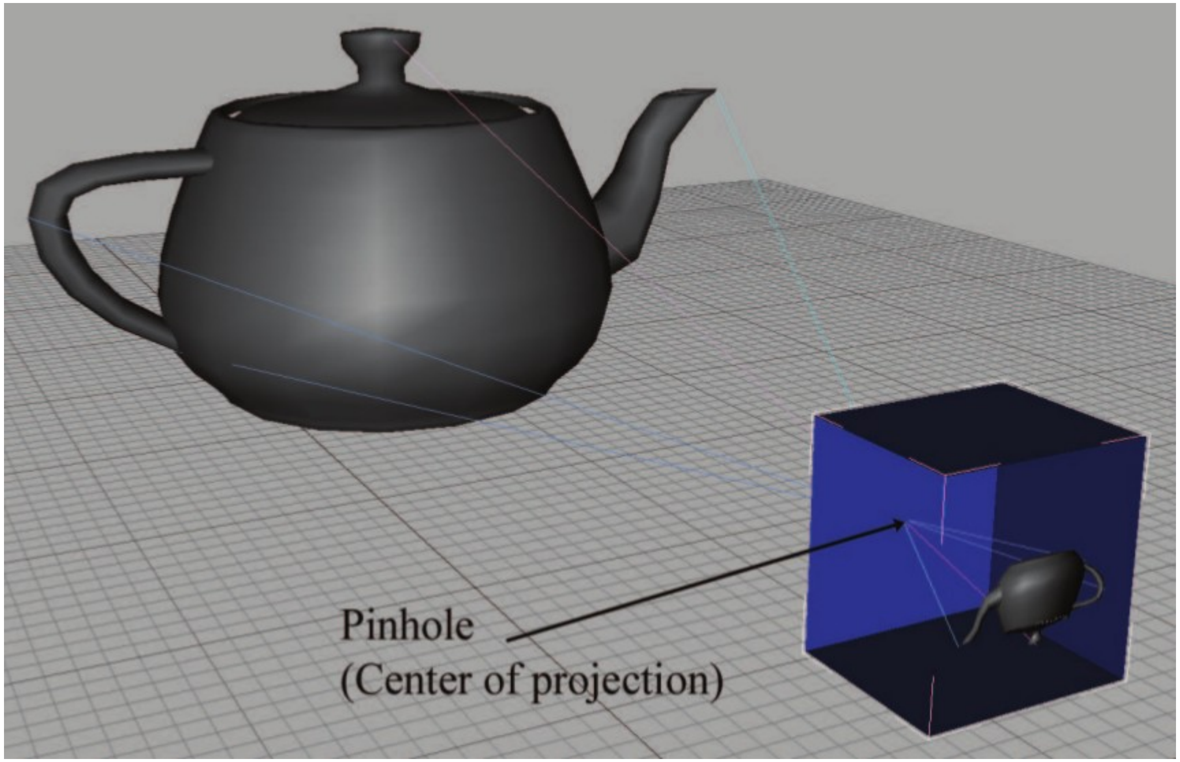






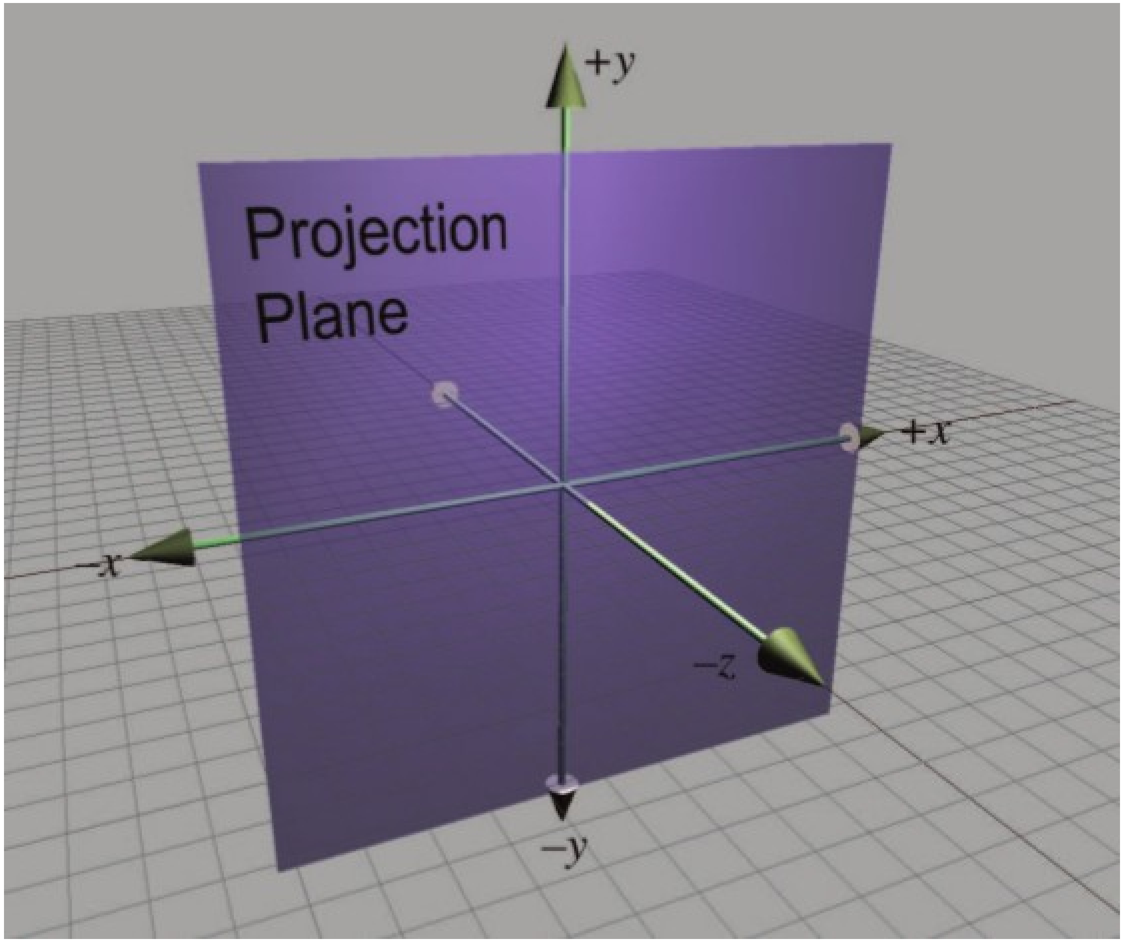
Matrices et transformations avancées

- Matrices 4x4 et projection perspective
  - Interprétation géométrique
    - Exemple du sténopé (*pinhole camera*)
      - Considérons le sténopé comme une boîte trouée
      - Le trou d'aiguille (*pinhole*) est le centre de projection
      - L'opposé du sténopé est le plan de projection



Matrices et transformations avancées

- Matrices 4x4 et projection perspective
  - Interprétation géométrique
    - Soit un espace de coordonnées 3D
      - L'origine est le centre de projection
      - L'axe des z est perpendiculaire au plan de projection
      - Les axes des x et y sont parallèles au plan de projection



Matrices et transformations avancées

- Matrices 4x4 et projection perspective
  - Interprétation géométrique
    - Pour un point **p** arbitraire de cet espace, nous allons calculer son projeté **p'**
    - Soit *d* la distance entre le centre de projection et le plan
    - Alors le plan de projection est défini par l'équation $z = -d$
      - Pour chaque point de l'espace, la coordonnée *z* de son projeté est toujours égale à $-d$
    - Il ne reste plus qu'à calculer les coordonnées *x* et *y*

Matrices et transformations avancées

- Matrices 4x4 et projection perspective
  - Interprétation géométrique
    - Mettons-nous de côté (parallèle à *x*)

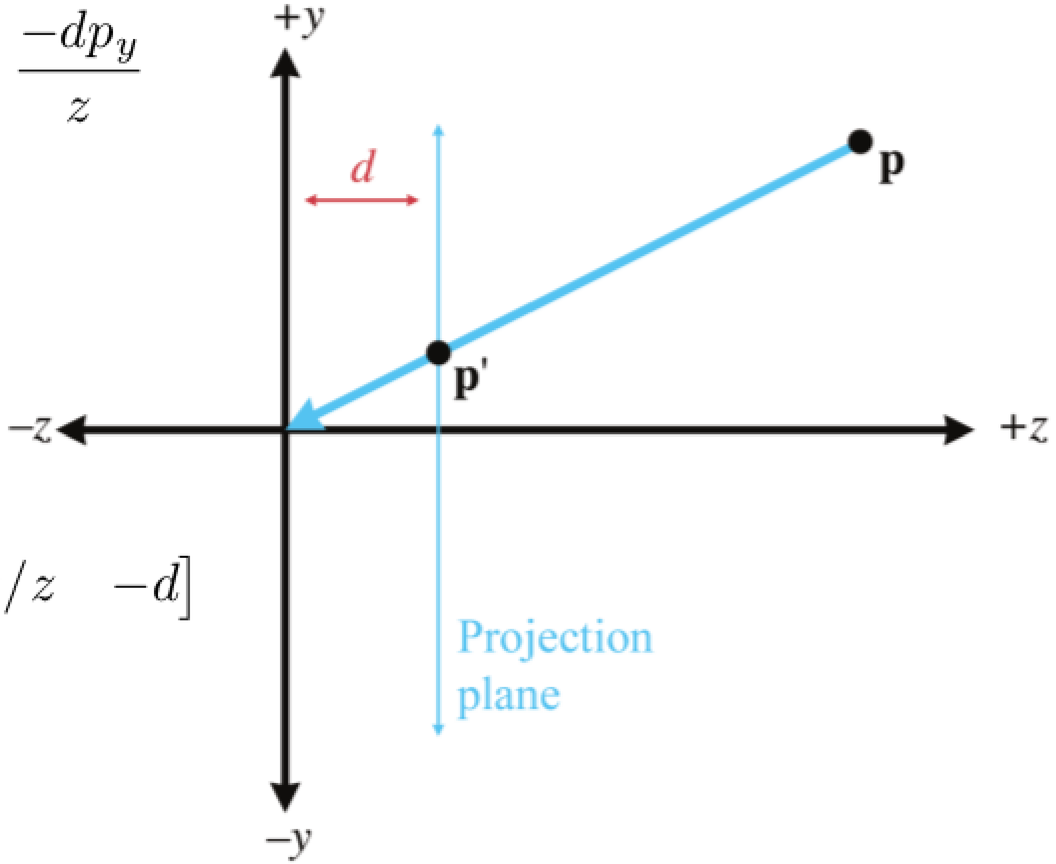
$$\frac{-p'_y}{d} = \frac{p_y}{z} \quad \Longrightarrow \quad p'_y = \frac{-dp_y}{z}$$

    - Même chose pour px

$$p'_x = \frac{-dp_x}{z}$$

    - On en déduit
      - Si **p** = [*x y z*]
      - Alors

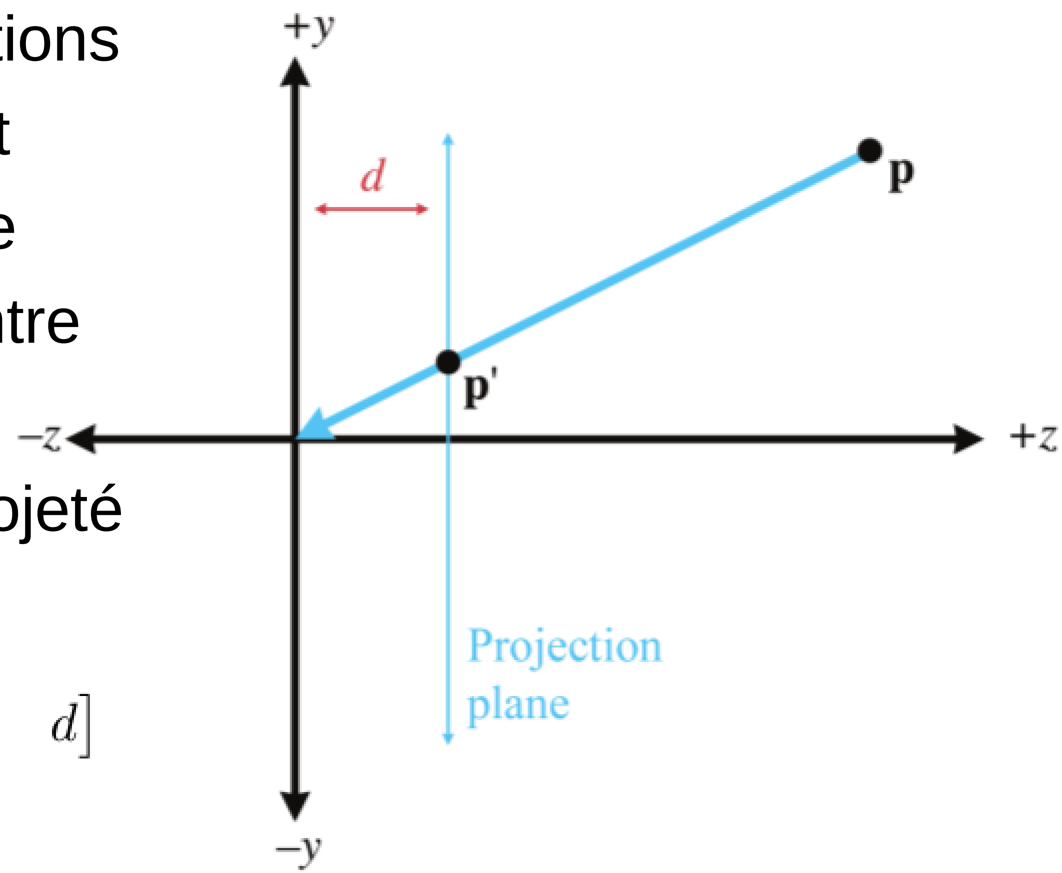
$$\mathbf{p}' = \begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -dx/z & -dy/z & -d \end{bmatrix}$$



Matrices et transformations avancées

- Matrices 4x4 et projection perspective
  - Interprétation géométrique
    - En pratique, le signe négatif (-*d*) est source de complications
    - Par conséquent, on met généralement le plan de projection devant le centre de projection ($z = d$)
    - Les coordonnées du projeté de **p** deviennent donc

$$\mathbf{p}' = \begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dx/z & dy/z & d \end{bmatrix}$$



Matrices et transformations avancées

- Matrices 4x4 et projection perspective
  - Calcul de la matrice
    - D'abord, on manipule **p'** afin d'avoir un dénominateur commun pour *x*, *y* et *z*

$$\mathbf{p}' = \begin{bmatrix} dx/z & dy/z & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dx/z & dy/z & dz/z \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}}{z/d}$$

    - Un point 4D résultant d'une projection perspective aura sa coordonnée *w* égale à ce dénominateur : [*x* *y* *z* *z*/*d*]
    - Il nous faut donc une matrice 4x4 dont la multiplication avec un vecteur 4D homogène [*x* *y* *z* 1] produise un tel point

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & z/d \end{bmatrix}$$

Fin de la première partie