

TD1: Mathématiques pour la 3D

1) Evaluer les expressions suivantes :

(a) $-[3 \ 7]$

(b) $\|[-12 \ 5]\|$

(c) $\|[8 \ -3 \ 1/2]\|$

(d) $3[4 \ -7 \ 0]$

(e) $[4 \ 5]/2$

2) Normaliser les vecteurs suivants :

(a) $[12 \ 5]$

(b) $[0 \ 743.632]$

(c) $[8 \ -3 \ 1/2]$

(d) $[-12 \ 3 \ -4]$

(e) $[1 \ 1 \ 1 \ 1]$

3) Evaluer les opérations vectorielles suivantes :

(a) $[7 \ -2 \ -3] + [6 \ 6 \ -4]$

(b) $[2 \ 9 \ -1] + [-2 \ -9 \ 1]$

(c) $\begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ 11 \end{bmatrix}$

(e) $3 \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ -6 \end{bmatrix}$

4) Calculer la distance entre les paires de points suivantes :

(a) $\begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -14 \\ 30 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -12 \\ 5 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ -7 \\ 9.5 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 6 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix}$

5) Evaluer les opérations vectorielles suivantes :

(a) $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \end{bmatrix}$

(b) $-7 \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11 & -4 \end{bmatrix}$

(c) $10 + \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -13 \\ 9 \end{bmatrix}$

(d) $3 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ 3/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix} \right)$

6) Calculer $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ et $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ pour les vecteurs suivants :

(a) $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 & 10 & 7 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 & -7 & 4 \end{bmatrix}$

7) Calculer l'angle entre les vecteurs $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} -6 & 3 \end{bmatrix}$

8) Calculez les produits matriciels suivants (si c'est possible) :

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 4 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 5 & 7 & -6 \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} x & y & z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(e) \begin{bmatrix} 7 & -2 & 7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(f) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

$$(g) \begin{bmatrix} 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(h) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

9) Multipliez le vecteur ligne $[5 \ -1 \ 2]$ par chacune des matrices suivantes. Puis multipliez chacune de ces matrices par le vecteur colonne $[5 \ -1 \ 2]^T$

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 7 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 7 & 1 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} 0 & -4 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- 10) Construisez une matrice de rotation de -22° autour de l'axe des x (en 3D)
- 11) Construisez une matrice de rotation de 30° autour de l'axe des y (en 3D)
- 12) Construisez une matrice de rotation de -15° autour de l'axe $[0.267 \ -0.535 \ 0.802]$
- 13) Construisez une matrice qui double la hauteur, la largeur et la longueur d'un objet 3D
- 14) Construisez une matrice de projection orthographique sur le plan traversant l'origine qui est perpendiculaire au vecteur $[0.267 \ -0.535 \ 0.802]$
- 15) Calculez le déterminant de la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

- 16) Calculez le déterminant, la comatrice et l'inverse de la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- 17) Calculez l'inverse de la matrice suivante. Est-elle orthogonale ?

$$\begin{bmatrix} -0.1495 & -0.1986 & -0.9685 \\ -0.8256 & 0.5640 & 0.0117 \\ -0.5439 & -0.8015 & 0.2484 \end{bmatrix}$$

- 18) Calculez l'inverse de la matrice 4x4 suivante :

$$\begin{bmatrix} -0.1495 & -0.1986 & -0.9685 & 0 \\ -0.8256 & 0.5640 & 0.0117 & 0 \\ -0.5439 & -0.8015 & 0.2484 & 0 \\ 1.7928 & -5.3116 & 8.0151 & 1 \end{bmatrix}$$

- 19) Construisez une matrice de translation de $[4 \ 2 \ 3]$
- 20) Construisez une matrice faisant une rotation de 20° autour de l'axe des x, puis une translation de $[4 \ 2 \ 3]$
- 21) Construisez une matrice faisant une translation de $[4 \ 2 \ 3]$, puis une rotation de 20° autour de l'axe des x
- 22) Construisez une matrice faisant une projection perspective sur le plan $x=5$ (on considère que l'origine est le centre de projection)
- 10) Utilisez la matrice précédente pour calculer les coordonnées 3D de la projection du point $(105, -243, 89)$ sur le plan $x=5$