

Mathématiques pour la 3D

Présenté par :
Bart GEORGE
EISTI

ING3 – Option Visual Computing

Sources pour ce cours

- Fletcher Dunn & Ian Parberry : *3D Math Primer for Graphics and Game Development* (Worldware, 2002, 2ème éd. CRC Press 2011)
- R. Stuart Ferguson : *Practical Algorithms for 3D Computer Graphics* (2ème ed. CRC Press 2014)
- Eric Lengyel : *Mathematics for 3D Game Programming and Computer Graphics* (3ème éd. Cengage Learning 2012)
- Cours de Rémi Ronfard, INRIA : [Source](#)
- Jason Gregory : *Game Engine Architecture* (AK Peters, 2009, 2ème éd. CRC Press 2014)

Troisième partie

Représentation de primitives géométriques
Tests de proximité et d'intersection

Plan

- Primitives géométriques
- Tests géométriques

Plan

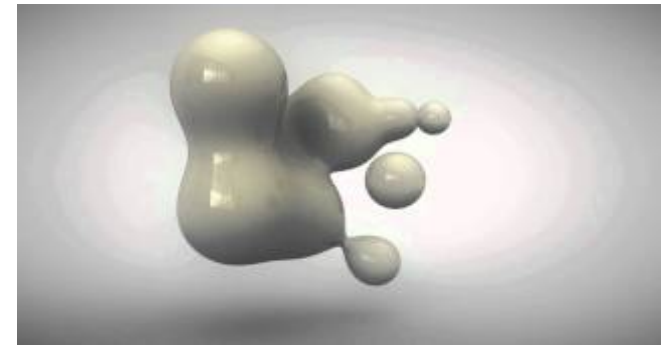
- Primitives géométriques
 - Techniques générales de représentation
 - Lignes (droites) et rayons
 - Sphères et cercles
 - Axially-Aligned Bounding Boxes (AABBs)
 - Plans
 - Triangles
 - Polygones
- Tests géométriques

Primitives géométriques

- Techniques générales de représentation
 - Pour une primitive donnée, il existe plusieurs techniques de description disponibles
 - Certaines de ces techniques peuvent s'appliquer de façon générale à plusieurs primitives
 - Nous allons en explorer quelques-unes

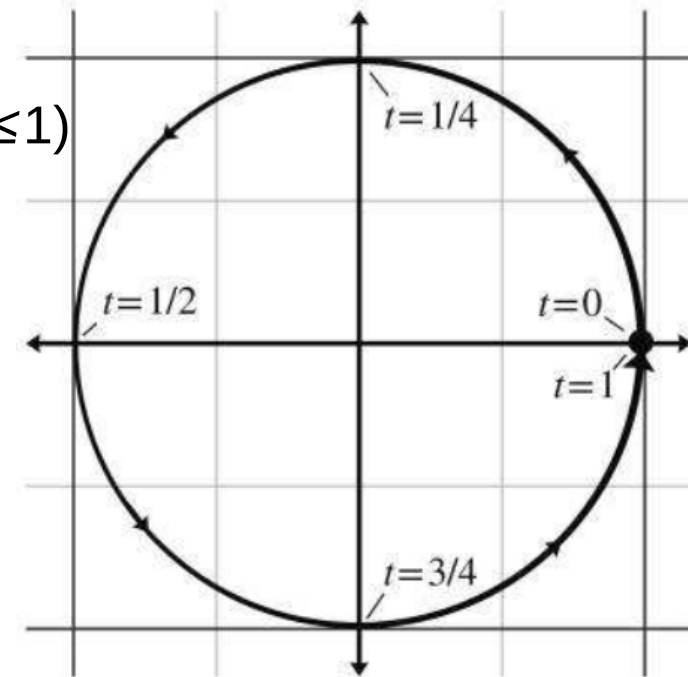
Primitives géométriques

- Techniques générales de représentation
 - Forme implicite
 - On définit une fonction booléenne $f(x,y,z)$
 - Cette fonction rend
 - Vrai pour tous les points de la primitive
 - Faux pour tous les autres points
 - Exemples
 - La fonction $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ pour les points à la surface d'une sphère unitaire
 - La fonction $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + D = 0$ décrit une section conique, c'est-à-dire la forme 2D de l'intersection entre un cône et un plan
 - Utile notamment pour les tests d'inclusion, mais aussi pour représenter des formes fluides et organiques (*metaballs*)



Primitives géométriques

- Techniques générales de représentation
 - Forme paramétrée
 - La primitive est de nouveau définie par une fonction
 - Cette fois, les coordonnées spatiales en sont la sortie
 - Les paramètres servent à tracer le contour de la primitive
 - Exemple
 - $x(t) = \cos 2\pi \cdot t$ et $y(t) = \sin 2\pi \cdot t$ (avec $0 \leq t \leq 1$)
 - Tracent le contour d'un cercle
 - Le nombre de paramètres détermine les dimensions de la primitive
 - Un seul paramètre (fonction univariée)
 - Trace une forme 1D (ligne, courbe)
 - Deux paramètres (fonction bivariée)
 - Trace une surface



Primitives géométriques

- Techniques générales de représentation
 - Formes "directes"
 - Décrivent la primitive de façon immédiate
 - Exemples
 - Les points de départ et d'arrivée pour un segment
 - Le centre et le rayon pour une sphère
 - Degrés de liberté
 - Quelle que soit la méthode de représentation, chaque primitive possède un certain nombre de degrés de liberté
 - C'est le minimum d'informations nécessaires à sa description
 - Exemple d'un cercle de centre et de rayon arbitraires
 - Forme paramétrique : $x = x_c + \cos 2\pi * t$, $y(t) = y_c + \sin 2\pi * t$
 - Forme implicite : $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$

Primitives géométriques

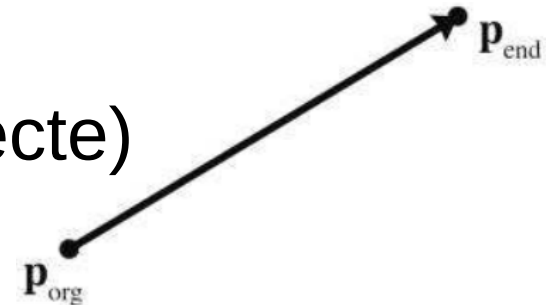
- Lignes (droites) et Rayons
 - Définitions
 - Une **ligne** s'étend à l'infini dans les deux directions
 - Un **segment** est une portion de ligne entre deux points
 - Un **rayon** est la "moitié" d'une ligne (origine + direction)
 - En informatique, un rayon est un segment avec une direction
 - Importance (particulièrement les rayons)
 - Fondamentale en algorithmique géométrique
 - Primordiale dans les jeux vidéo
 - Ligne de mire pour déterminer si l'IA voit le joueur ou non
 - Raytracing pour déterminer si le curseur est sur un objet
 - Mouvement des balles et des projectiles, pour savoir si la cible a été frappée ou non

Primitives géométriques

- Lignes (droites) et Rayons

- Représentation d'un rayon (forme directe)

- Deux points, l'origine \mathbf{p}_{org} et la fin \mathbf{p}_{end}

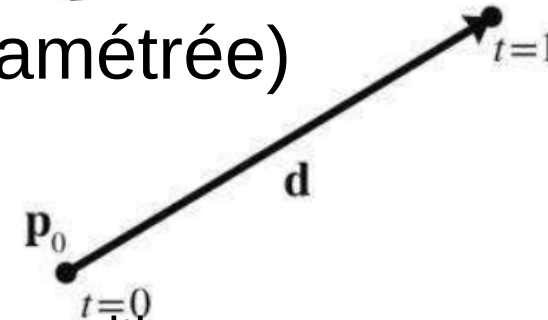


- Représentation d'un rayon (forme paramétrée)

- En 2D, avec la notation vectorielle

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{d}$$

- Le rayon démarre au point $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0$. C'est sa position
 - \mathbf{d} est le "vecteur delta" du rayon. C'est sa longueur et sa direction
 - Le paramètre t est normalisé (compris entre 0 et 1)
 - Le rayon se termine au point $\mathbf{p}(1) = \mathbf{p}_0 + \mathbf{d}$
 - Variante : \mathbf{d} est un vecteur unitaire, et $t \in [0, l]$ (l : longueur du rayon)



- En 2D, avec un scalaire pour chaque coordonnée

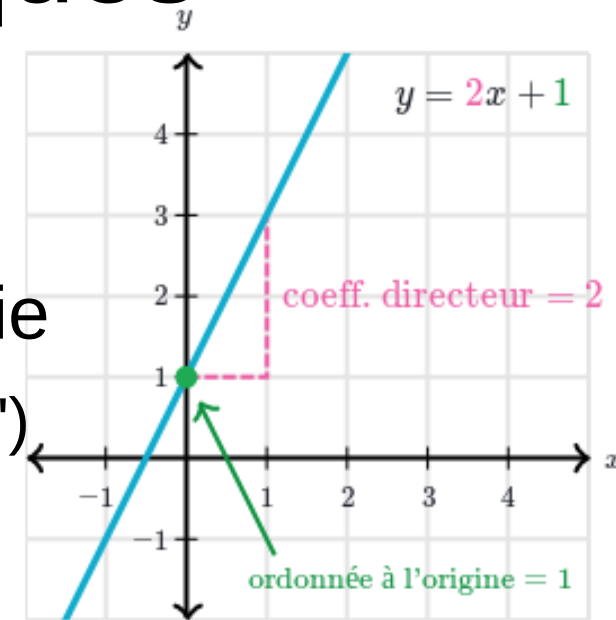
- $x(t) = x_0 + t\Delta x$ et $y(t) = y_0 + t\Delta y$ (on a donc 4 degrés de liberté)

Primitives géométriques

- Lignes (droites) et rayons
 - Représentation 2D d'une droite infinie
 - Équation réduite ("slope-intercept form")

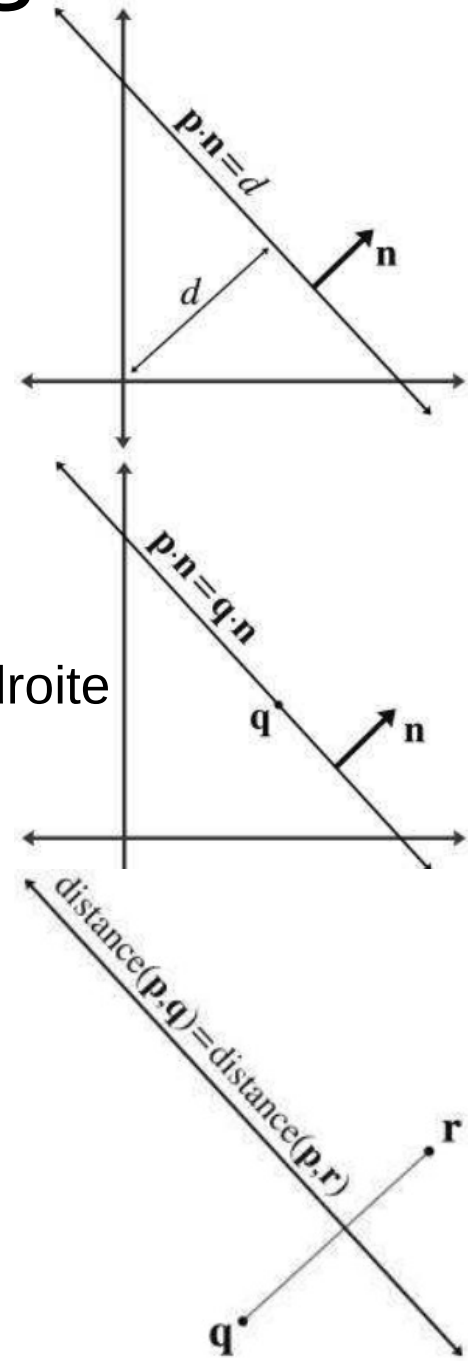
$$y = mx + y_0$$

- m est le coefficient directeur ("slope")
- y_0 est l'ordonnée à l'origine ("y-intercept", on le note b en général)
- On a donc 2 degrés de liberté : pour la rotation et pour la translation
- Ne marche pas pour une droite verticale (pente infinie)
- Équation cartésienne ("implicit definition")
$$ax + by = d \text{ (notée le plus souvent : } ax + by + d = 0)$$



Primitives géométriques

- Lignes (droites) et rayons
 - Représentation 2D d'une droite infinie
 - Équation cartésienne (notation vectorielle)
 $\mathbf{p} \cdot \mathbf{n} = d$ avec $\mathbf{p} = [x \ y]$ et $\mathbf{n} = [a \ d]$
 - Interprétation géométrique
 - \mathbf{n} ($\hat{\mathbf{n}}$) : normale (vecteur unitaire orthogonal) à la droite
 - d : distance signée de l'origine à la droite
 - Représentation "normale et point"
 $\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ (\mathbf{q} est un point sur la droite)
 - Représentation avec un segment
 $\text{distance}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \text{distance}(\mathbf{p}, \mathbf{r})$
 - \mathbf{p} et \mathbf{q} sont les extrémités d'un segment
 - La droite en est la médiatrice



Primitives géométriques

- Lignes (droites) et rayons

- Conversions entre représentations

- Rayon forme directe → rayon paramétré

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_{\text{org}} \quad \mathbf{d} = \mathbf{p}_{\text{end}} - \mathbf{p}_{\text{org}}$$

- Rayon paramétré → rayon forme directe

$$\mathbf{p}_{\text{org}} = \mathbf{p}_0 \quad \mathbf{p}_{\text{end}} = \mathbf{p}_0 + \mathbf{d}$$

- Rayon paramétré → équation réduite d'une droite

$$a = d_y \quad b = -d_x \quad d = x_{\text{org}} d_y - y_{\text{org}} d_x$$

- Équation cartésienne d'une droite → équation réduite

$$m = -a/b \quad y_0 = d/b$$

- Équation cartésienne d'une droite → "normale et distance"

$$\hat{\mathbf{n}} = [a \quad b] / \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \text{distance} = d / \sqrt{a^2 + b^2}$$

Primitives géométriques

- Lignes (droites) et rayons
 - Conversions entre représentations
 - Droite "normale et point" → "normale et distance"
distance = $\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}}$
 - Droite médiatrice → équation cartésienne

$$a = q_y - r_y,$$

$$b = r_x - q_x,$$

$$d = \frac{\mathbf{q} + \mathbf{r}}{2} \cdot [a \quad b] = \frac{\mathbf{q} + \mathbf{r}}{2} \cdot [q_y - r_y \quad r_x - q_x]$$

$$= \frac{(q_x + r_x)(q_y - r_y) + (q_y + r_y)(r_x - q_x)}{2}$$

$$= \frac{(q_x q_y - q_x r_y + r_x q_y - r_x r_y) + (q_y r_x - q_y q_x + r_y r_x - r_y q_x)}{2}$$

$$= r_x q_y - q_x r_y.$$

Primitives géométriques

- Sphères et cercles

- Deux degrés de liberté : le centre (c) et le rayon (r)
- Forme implicite (notation vectorielle)

$$\| \mathbf{p} - \mathbf{c} \| = r$$

- Forme implicite (notation avec des scalaires)

$$(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 = r^2 \quad (\text{cercle 2D})$$

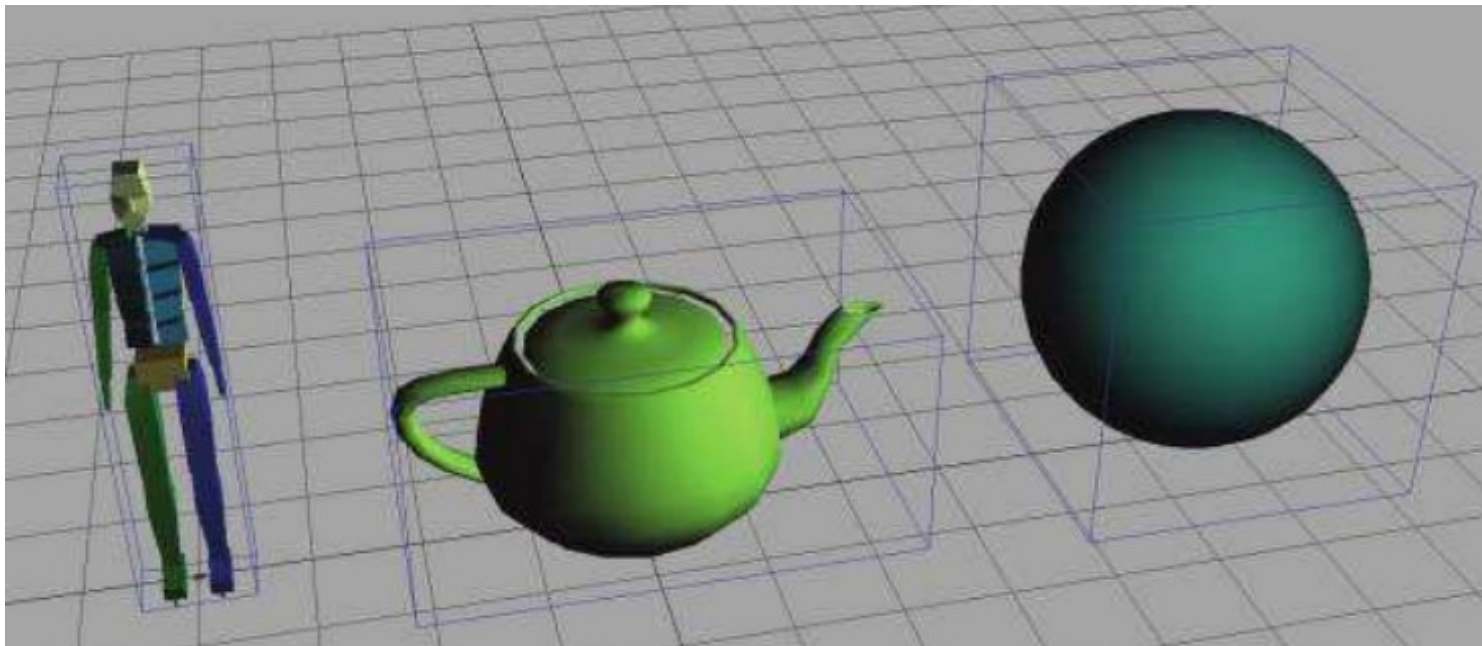
$$(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 + (z - c_z)^2 = r^2 \quad (\text{sphère 3D})$$

- Quantités associées

- Diamètre : $D = 2r$
- Circonférence : $C = 2\pi r = \pi D$
- Aire : $A = \pi r^2$ (pour un cercle), $S = 4\pi r^2$ (pour une sphère)
- Volume : $V = 4\pi r^3/3$

Primitives géométriques

- Bounding Boxes
 - Deux types différents
 - Celles qui sont orientées de façon arbitraire (OBBs)
 - Celles dont les côtés sont perpendiculaires aux axes
 - On les appelle Axially-Aligned Bounding Boxes (AABBs)



Primitives géométriques

- Axially-Aligned Bounding Boxes (AABBs)
 - Propriétés nécessaires pour représenter une AABB
 - Il faut deux points dans deux coins opposés
$$\mathbf{p}_{\min} = [x_{\min} \ y_{\min} \ z_{\min}] \quad \mathbf{p}_{\max} = [x_{\max} \ y_{\max} \ z_{\max}]$$
 - Pour les points (x,y,z) à l'intérieur d'une AABB
$$x_{\min} \leq x \leq x_{\max} \quad y_{\min} \leq y \leq y_{\max} \quad z_{\min} \leq z \leq z_{\max}$$
 - On en déduit le centre d'une AABB : $\mathbf{c} = (\mathbf{p}_{\min} + \mathbf{p}_{\max}) / 2$
 - On en déduit également deux vecteurs
 - Un vecteur contenant longueur, largeur et hauteur : $\mathbf{s} = \mathbf{p}_{\max} - \mathbf{p}_{\min}$
 - Un "vecteur radial" : $\mathbf{r} = \mathbf{p}_{\max} - \mathbf{c} = \mathbf{s} / 2$
 - Pour définir exactement une AABB, il faut 2 de ces vecteurs
 - En général, on choisit \mathbf{p}_{\min} et \mathbf{p}_{\max} , puisque le reste en découle

Primitives géométriques

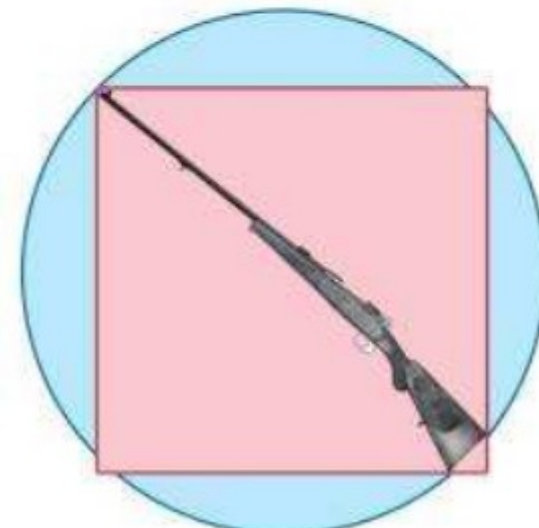
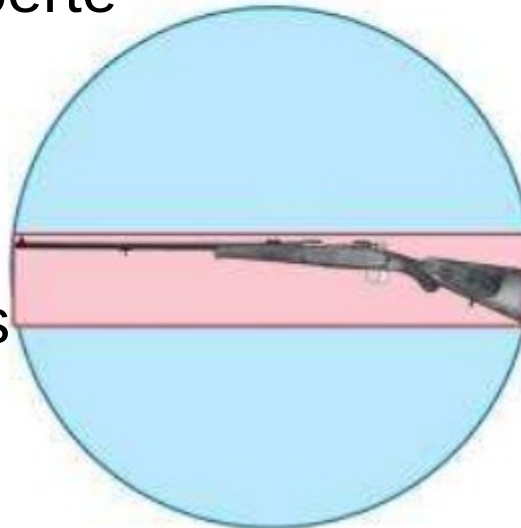
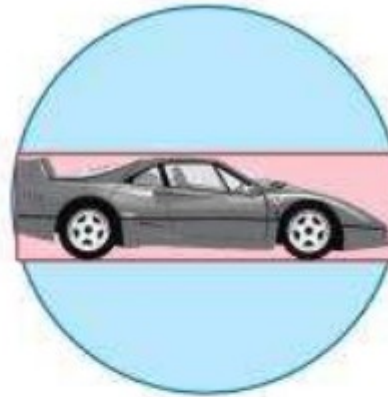
- Axially-Aligned Bounding Boxes (AABBs)
 - Implémentation d'une AABB
 - Initialisation à vide
 - On met les coordonnées de \mathbf{p}_{\min} à $+\infty$
 - On met les coordonnées de \mathbf{p}_{\max} à $-\infty$
 - Ajout d'un point
 - Pour chaque coordonnée, on redéfinit le minimum et le maximum
 - Exemple : si $p_x < x_{\min}$ alors $x_{\min} = p_x$
 - Création d'une AABB depuis une liste de points
 - D'abord, on l'initialise à vide
 - Ensuite, on ajoute chaque point de la liste un à un

Primitives géométriques

- Axially-Aligned Bounding Boxes (AABBs)

- AABBs contre Bounding Spheres

- Calculer l'AABB optimale est plus facile que de calculer la Bounding Sphere optimale
- Une Bounding Sphere a moins de degrés de liberté
- Les AABBs sont plus adaptées à certains objets que d'autres
- Les Bounding Spheres sont mieux adaptées aux rotations



Primitives géométriques

- Axially-Aligned Bounding Boxes (AABBs)
 - Transformation d'une AABB
 - Il arrive qu'on ait besoin de transformer une AABB d'un espace de coordonnées à l'autre
 - En particulier, quand on transforme un objet, l'AABB doit suivre
 - Le résultat risque de ne plus être "aligné axialement" (rotation), ni même une "box" (cisaillement)
 - Néanmoins, c'est plus rapide de transformer une AABB que d'en créer une nouvelle pour l'objet transformé
 - En effet, une AABB n'a que 8 sommets

Primitives géométriques

- Axially-Aligned Bounding Boxes (AABBs)

- Transformation d'une AABB

- Pour transformer une AABB, il ne suffit pas de transformer simplement \mathbf{p}_{\min} et \mathbf{p}_{\max}

- Risque de bugs (par exemple, si $x_{\min} > x_{\max}$)

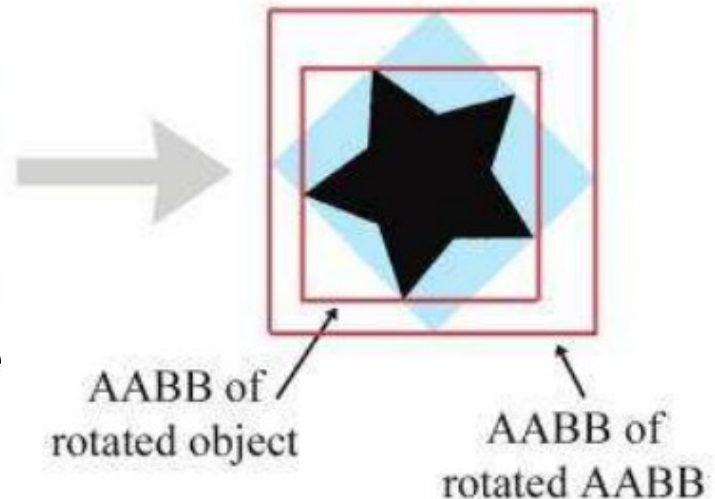
- Il faut transformer les 8 sommets, et former une AABB à partir de ces points transformés

- Il se peut que la nouvelle AABB soit plus grande que l'ancienne
 - On peut aussi exploiter la structure de l'AABB pour éviter de calculer les 8 sommets

Original Object
and AABB



Rotated Object
and AABB



Primitives géométriques

- Axially-Aligned Bounding Boxes (AABBs)
 - Transformation d'une AABB
 - Exemple : recherche du coin minimum après transformation
 - Soit $\mathbf{p}_{\min} = [x_{\min} \ y_{\min} \ z_{\min}]$ le coin minimum de l'AABB
 - Nous voulons calculer $\mathbf{p}'_{\min} = [x'_{\min} \ y'_{\min} \ z'_{\min}]$, soit la valeur de \mathbf{p}_{\min} après transformation
 - Rappel : quand on multiplie $\mathbf{p} = [x \ y \ z]$ par une matrice, on obtient $\mathbf{p}' = [x' \ y' \ z']$ tel que

$$[x' \ y' \ z'] = [x \ y \ z] \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

$$x' = m_{11}x + m_{21}y + m_{31}z,$$

$$y' = m_{12}x + m_{22}y + m_{32}z,$$

$$z' = m_{13}x + m_{23}y + m_{33}z.$$

Primitives géométriques

- Axially-Aligned Bounding Boxes (AABBs)
 - Transformation d'une AABB
 - Exemple : recherche du coin minimum après transformation
 - On va calculer x'_{min} de telle façon à obtenir la valeur minimale de $m_{11}x + m_{21}y + m_{31}z$ (où $[x \ y \ z]$ est un sommet de l'AABB)
 - Astuce : pour minimiser la somme entière, il faut minimiser chacun des produits individuellement
 - Exemple : pour obtenir le plus petit $m_{11}x$, laquelle des deux valeurs, x_{min} ou x_{max} , conviendra le mieux pour remplacer x ?
 - Si $m_{11} > 0$, ce sera forcément x_{min}
$$x'_{min} \leftarrow x'_{min} + m_{11}x_{min} \quad \text{et} \quad x'_{max} \leftarrow x'_{max} + m_{11}x_{max}$$
 - Si $m_{11} < 0$, ce sera forcément x_{max}
$$x'_{min} \leftarrow x'_{min} + m_{11}x_{max} \quad \text{et} \quad x'_{max} \leftarrow x'_{max} + m_{11}x_{min}$$
 - On fait de même pour $m_{21}y$ et $m_{31}z$, puis pour y' et z'

Primitives géométriques

- Plans

- Équation du plan : forme implicite

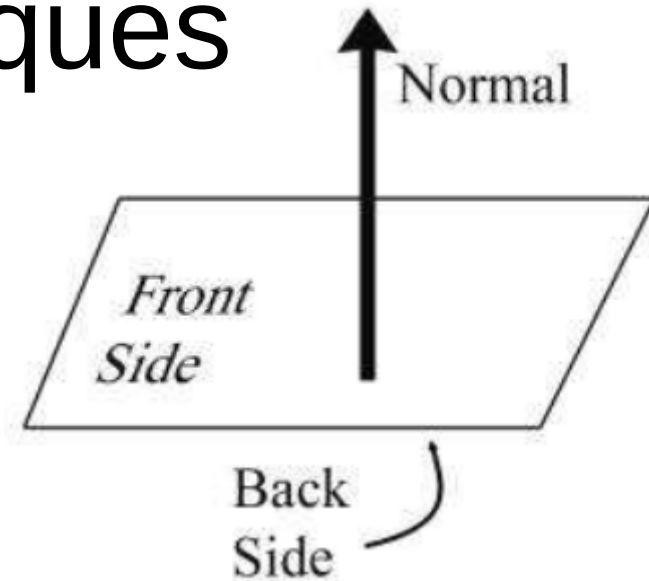
- Notations

- $ax + by + cz = d$ (notation scalaire)

- $\mathbf{p} \cdot \mathbf{n} = d$ (notation vectorielle)

- Explications

- $\mathbf{p} = [x \ y \ z]$ est un point qui, s'il satisfait l'équation, est dans le plan
 - $\mathbf{n} = [a \ b \ c]$ est la normale au plan
 - Elle définit l'orientation du plan
 - C'est souvent un vecteur unitaire (noté $\hat{\mathbf{n}}$ dans ce cas)
 - d est la distance signée depuis l'origine jusqu'au plan
 - Elle définit la position du plan
 - Si $d > 0$, l'origine est en-dessous du plan
 - Si $d < 0$, l'origine est au-dessus du plan
 - L'équation scalaire est notée le plus souvent $ax + by + cz + d = 0$



Primitives géométriques

- Plans

- Équation du plan à partir de 3 points

- Nous pouvons définir un plan au travers de 3 points non-colinéaires (i.e. qui ne sont pas tous sur la même droite)
- Soient 3 points du plan \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 et \mathbf{p}_3 (sens horaire)
- Idée

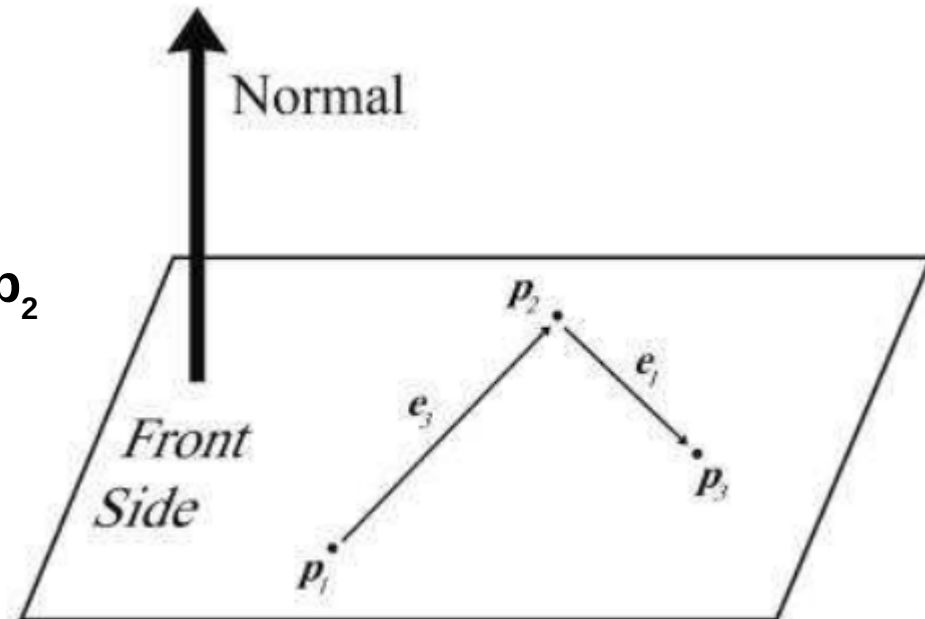
- On considère les vecteurs reliant les points 2 à 2

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 \quad \mathbf{e}_1 = \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2$$

- On en déduit la normale $\hat{\mathbf{n}}$ (unitaire) au plan

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1}{\|\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1\|}$$

- Il n'y a plus qu'à en déduire d



Primitives géométriques

- Plans
 - Équation du plan à partir de plus de 3 points
 - Il y a des cas où on a une multitude de points à disposition
 - Exemple : les sommets d'un polygone
 - Idée naïve : choisir aléatoirement 3 points consécutifs, dans le sens horaire, pour calculer l'équation du point
 - Problèmes potentiels : points colinéaires, polygone concave, etc...
 - Dans ce cas, comment choisir le "meilleur ajustement de points" afin de tous les prendre en compte dans l'équation ?

Primitives géométriques

- Plans

- Équation du plan à partir de plus de 3 points

- Soient n points : $\mathbf{p}_1 = [x_1 \ y_1 \ z_1]$, ... , $\mathbf{p}_n = [x_n \ y_n \ z_n]$

- Le vecteur \mathbf{n} perpendiculaire à ce "meilleur assortiment" est

$$\begin{aligned} n_x &= (z_1 + z_2)(y_1 - y_2) + (z_2 + z_3)(y_2 - y_3) + \cdots \\ &\quad \cdots + (z_{n-1} + z_n)(y_{n-1} - y_n) + (z_n + z_1)(y_n - y_1), \\ n_y &= (x_1 + x_2)(z_1 - z_2) + (x_2 + x_3)(z_2 - z_3) + \cdots \\ &\quad \cdots + (x_{n-1} + x_n)(z_{n-1} - z_n) + (x_n + x_1)(z_n - z_1), \\ n_z &= (y_1 + y_2)(x_1 - x_2) + (y_2 + y_3)(x_2 - x_3) + \cdots \\ &\quad \cdots + (y_{n-1} + y_n)(x_{n-1} - x_n) + (y_n + y_1)(x_n - x_1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_x &= \sum_{i=1}^n (z_i + z_{i+1})(y_i - y_{i+1}) \\ n_y &= \sum_{i=1}^n (x_i + x_{i+1})(z_i - z_{i+1}) \\ n_z &= \sum_{i=1}^n (y_i + y_{i+1})(x_i - x_{i+1}) \end{aligned}$$

- La distance d correspondant à ce "meilleur assortiment" est

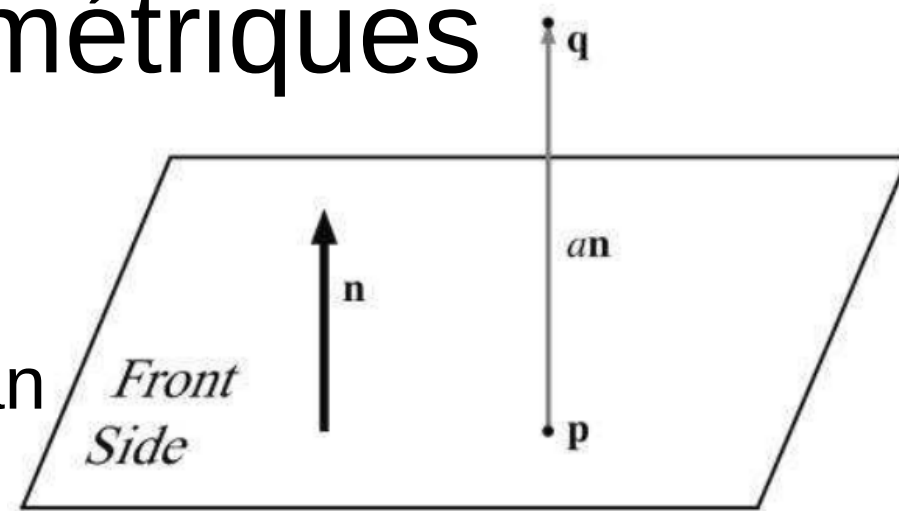
$$d = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{n}) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i \right) \cdot \mathbf{n}$$

Primitives géométriques

- Plans

- Distance d'un point à un plan

- Soit \mathbf{q} un point hors du plan
 - Soit \mathbf{p} le point du plan le plus proche de \mathbf{q}
 - Le vecteur entre \mathbf{p} et \mathbf{q} est perpendiculaire au plan
 - La distance entre le plan et \mathbf{q} est la distance entre \mathbf{p} et \mathbf{q}
 - Le vecteur entre \mathbf{p} et \mathbf{q} est parallèle à \mathbf{n} , et de forme $a\mathbf{n}$
 - Si on considère que \mathbf{n} est unitaire ($\hat{\mathbf{n}}$), alors la distance est a
 - Cette distance est signée : si $a > 0$, alors \mathbf{q} est au-dessus du plan
 - On en déduit le calcul de la distance a



$$\mathbf{p} + a\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{q},$$

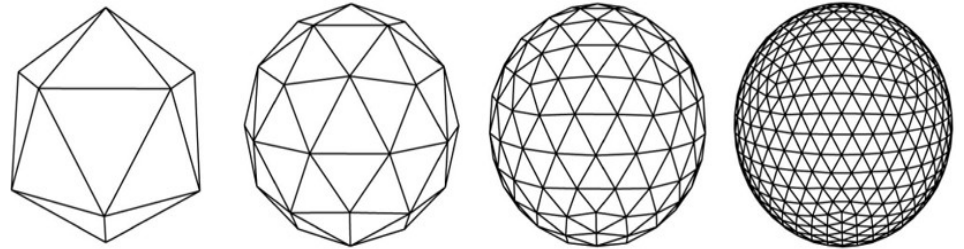
$$(\mathbf{p} + a\hat{\mathbf{n}}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}},$$

$$\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}} + (a\hat{\mathbf{n}}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}},$$

$$d + a = \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}},$$

$$a = \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} - d.$$

Primitives géométriques



- Triangles

- Primitive géométrique de base pour un modèle 3D
 - Polygône le plus simple qui soit
 - Toujours planaire, toujours triangulaire

- Notations

- Défini par 3 sommets ("vertices") : \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_3
 - Dans un espace "main-gauche", numérotés en sens horaire
- Réside sur un plan, dont on peut utiliser l'équation (\mathbf{n}, d)
- Définition et notations pour les arêtes \mathbf{e}_i et les longueurs l_i

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_2,$$

$$l_1 = \|\mathbf{e}_1\|,$$

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3,$$

$$l_2 = \|\mathbf{e}_2\|,$$

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1,$$

$$l_3 = \|\mathbf{e}_3\|.$$

Primitives géométriques

- Triangles

- Notations

- Définitions et notations pour les angles θ_i

- Loi des sinus

$$\frac{\sin \theta_1}{l_1} = \frac{\sin \theta_2}{l_2} = \frac{\sin \theta_3}{l_3}$$

- Loi des cosinus

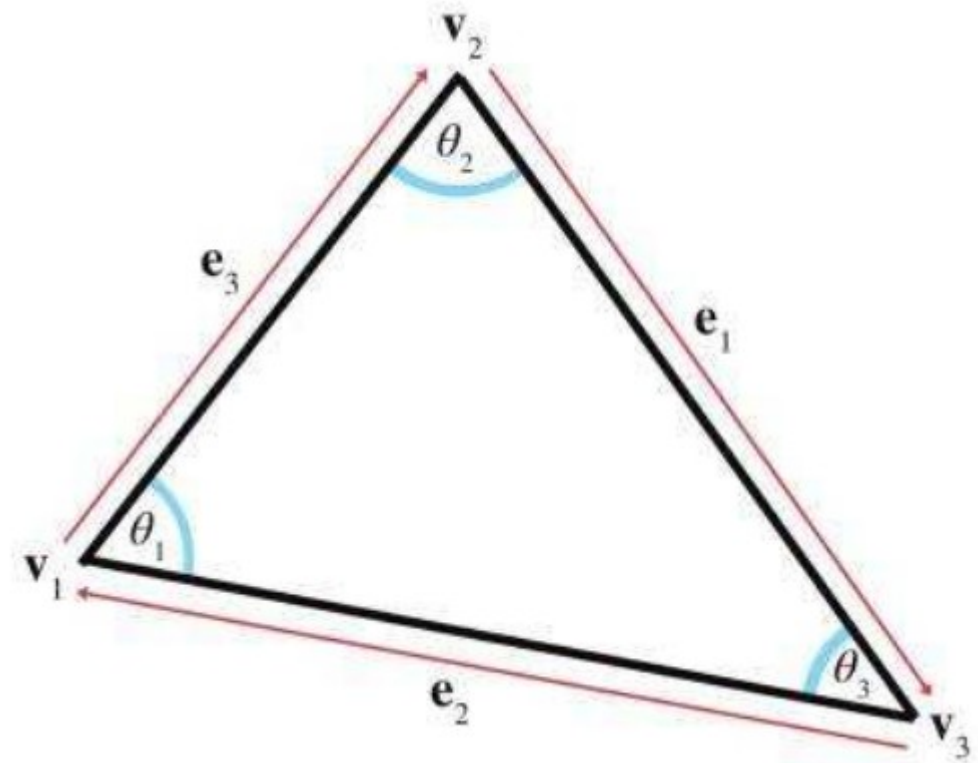
$$l_1^2 = l_2^2 + l_3^2 - 2l_2l_3 \cos \theta_1$$

$$l_2^2 = l_1^2 + l_3^2 - 2l_1l_3 \cos \theta_2$$

$$l_3^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2 \cos \theta_3$$

- Périmètre d'un triangle

$$p = l_1 + l_2 + l_3$$



Primitives géométriques

- Triangles

- Aire d'un triangle

- À partir de la base b et de la hauteur h : $A = bh / 2$
 - Formule de Héron, à partir des longueurs

$$s = \frac{l_1 + l_2 + l_3}{2} = \frac{p}{2} \quad A = \sqrt{s(s - l_1)(s - l_2)(s - l_3)}$$

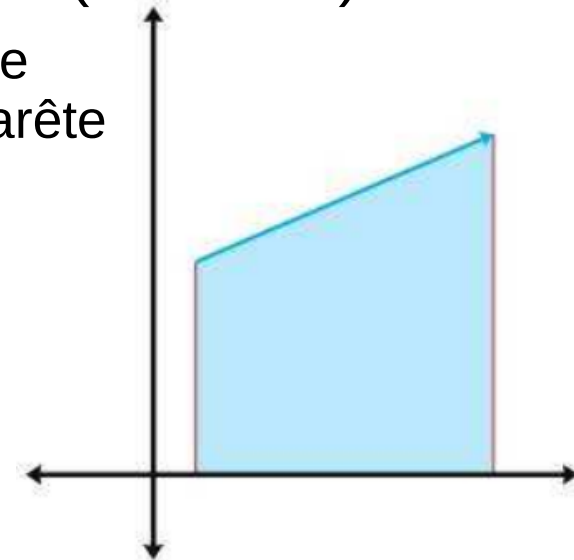
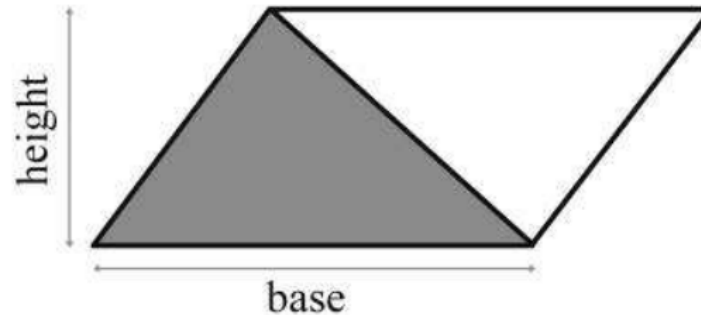
- Calcul (2D) quand on n'a que les sommets (et arêtes)

- Idée : pour chaque arête, calculer l'aire signée du trapézoïde entre l'axe des x et le vecteur arête

$$A(\mathbf{e}_1) = \frac{(y_3 + y_2)(x_3 - x_2)}{2}$$

$$A(\mathbf{e}_2) = \frac{(y_1 + y_3)(x_1 - x_3)}{2}$$

$$A(\mathbf{e}_3) = \frac{(y_2 + y_1)(x_2 - x_1)}{2}$$



Primitives géométriques

- Triangles

- Aire d'un triangle

- Calcul (2D) quand on n'a que les sommets (et les arêtes)

- L'aire du triangle est la somme des aires des trapézoïdes

$$\begin{aligned}
 A &= A(\mathbf{e}_1) + A(\mathbf{e}_2) + A(\mathbf{e}_3) &= \frac{-y_3x_2 + y_2x_3 - y_1x_3 + y_3x_1 - y_2x_1 + y_1x_2}{2} \\
 &= \frac{(y_3 + y_2)(x_3 - x_2) + (y_1 + y_3)(x_1 - x_3) + (y_2 + y_1)(x_2 - x_1)}{2} &= \frac{y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2)}{2} \\
 &= \frac{\begin{pmatrix} (y_3x_3 - y_3x_2 + y_2x_3 - y_2x_2) \\ + (y_1x_1 - y_1x_3 + y_3x_1 - y_3x_3) \\ + (y_2x_2 - y_2x_1 + y_1x_2 - y_1x_1) \end{pmatrix}}{2} &= \frac{(y_1 - y_3)(x_2 - x_3) + (y_2 - y_3)(x_3 - x_1) + (y_3 - y_3)(x_1 - x_2)}{2} \\
 & &= \frac{(y_1 - y_3)(x_2 - x_3) + (y_2 - y_3)(x_3 - x_1)}{2}.
 \end{aligned}$$

- Calcul (3D) quand on n'a que les arêtes

- On peut utiliser le produit vectoriel

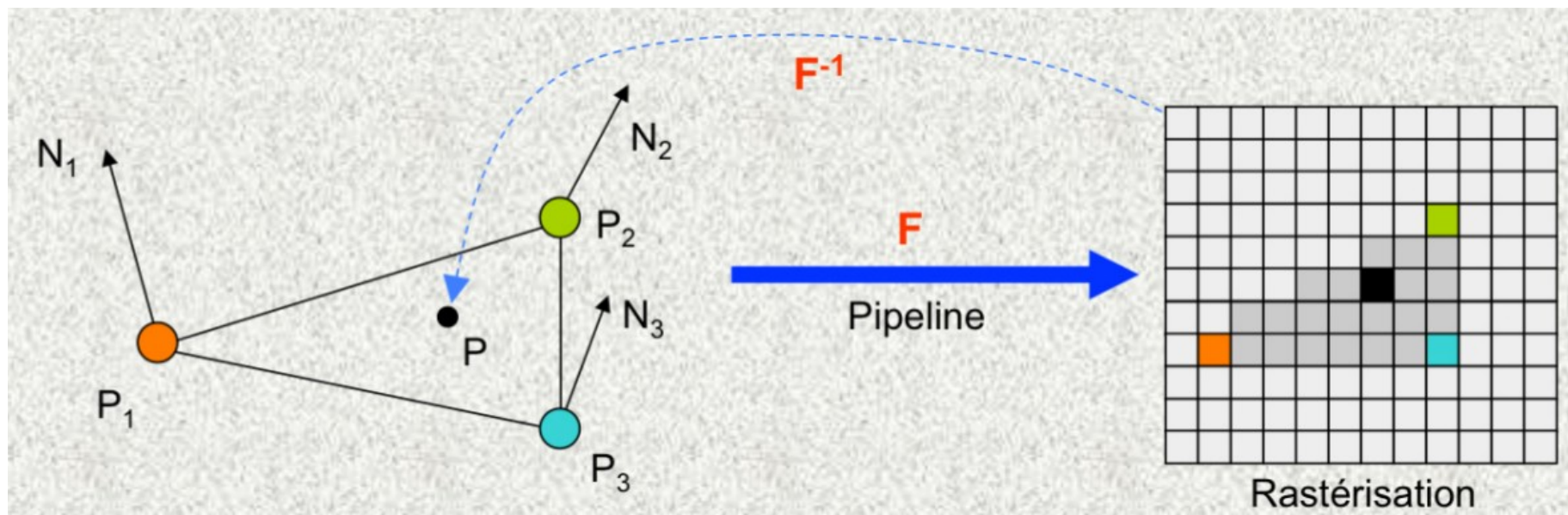
$$A = \frac{\|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2\|}{2}$$

Primitives géométriques

- Triangles
 - Coordonnées barycentriques
 - Problématique
 - Même si on déplace les triangles en 3D, la surface se trouve toujours sur un plan, et ça reste un objet 2D
 - Ce n'est pas très pratique de se déplacer sur la surface d'un triangle arbitrairement orienté en 3D
 - Il faudrait un espace de coordonnées relié à la surface du triangle, mais indépendant de l'espace 3D dans lequel il réside
 - Solution : les coordonnées barycentriques
 - Largement utilisées pour les problèmes d'intersection, d'interpolation

Primitives géométriques

- Triangles
 - Coordonnées barycentriques
 - Exemple d'utilisation : rasterisation
 - Conversion, lors du passage de "l'espace caméra" à "l'espace écran", des modèles (triangles) 3D en régions de pixels 2D
 - Les propriétés des pixels (couleur, coordonnées de textures...) sont calculées par interpolation à l'aide des coordonnées barycentriques



Primitives géométriques

- Triangles
 - Coordonnées barycentriques

- Définition

- N'importe quel point du plan sur lequel réside un triangle peut être considéré comme une moyenne pondérée des sommets
 - Ces pondérations sont les **coordonnées barycentriques**

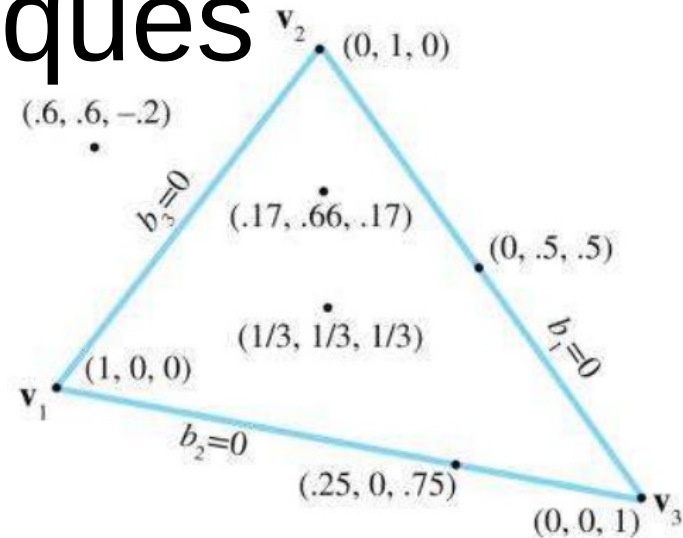
- Notation

- Soit un triangle de sommets \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_3 et un point \mathbf{p} du même plan
 - Alors \mathbf{p} peut être exprimé en coordonnées cartésiennes comme suit

$$\mathbf{p} = b_1 \mathbf{v}_1 + b_2 \mathbf{v}_2 + b_3 \mathbf{v}_3$$

- (b_1, b_2, b_3) sont les coordonnées barycentriques de \mathbf{p} relativement au triangle, ou les contributions que chaque sommet "apporte" à \mathbf{p}

$$b_1 + b_2 + b_3 = 1$$



Primitives géométriques

- Triangles

- Coordonnées barycentriques

- Propriétés

- Les coordonnées barycentriques des 3 sommets sont "unitaires"

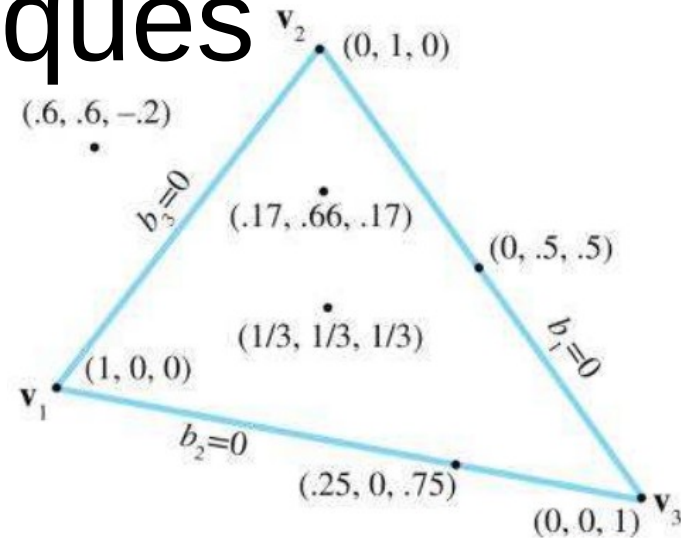
$$(1,0,0) \equiv \mathbf{v}_1 \quad (0,1,0) \equiv \mathbf{v}_2 \quad (0,0,1) \equiv \mathbf{v}_3$$

- Tous les points sur un le côté opposé à un sommet auront leur coordonnée barycentrique correspondante à 0

- Exemple : $b_1=0$ pour tous les points se trouvant sur la ligne contenant \mathbf{e}_1 , opposée à \mathbf{v}_1

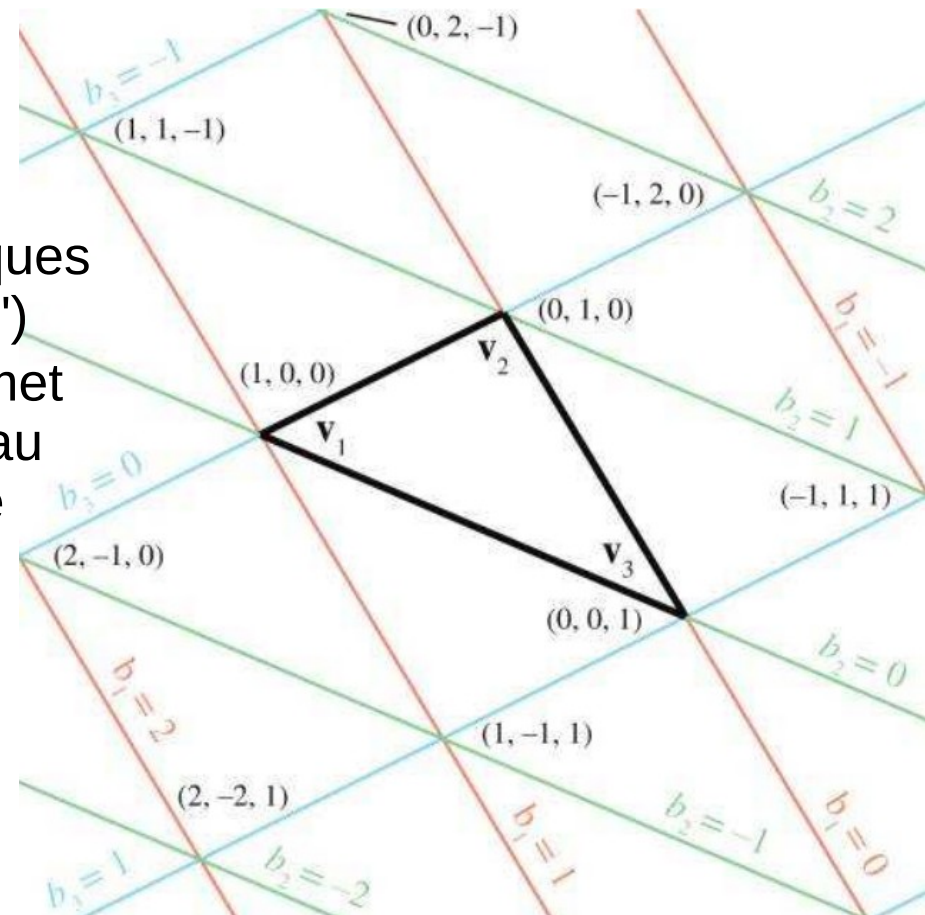
- N'importe quel point du plan peut être décrit en coordonnées barycentriques, même s'il n'est pas inclus dans le triangle

- A l'intérieur du triangle, chaque coordonnée est normalisée $[0,1]$
 - A l'extérieur, au moins une coordonnée est négative



Primitives géométriques

- Triangles
 - Coordonnées barycentriques
 - Tessellation du plan
 - Tesslation, pavage, dallage
Consiste à partitionner l'espace en motifs identiques (appelés "tuiles" ou "tiles")
 - L'espace barycentrique permet de paver le plan où il réside au moyen de triangles de même taille que celui d'origine



Primitives géométriques

- Triangles

- Coordonnées barycentriques

- Interprétation en tant que coordonnées 2D

- En éliminant b_3 , on peut faire de (b_1, b_2) des coordonnées 2D (x, y)

- L'origine est \mathbf{v}_3

- L'axe des x est $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3$

- L'axe des y est $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$

- Équation correspondante

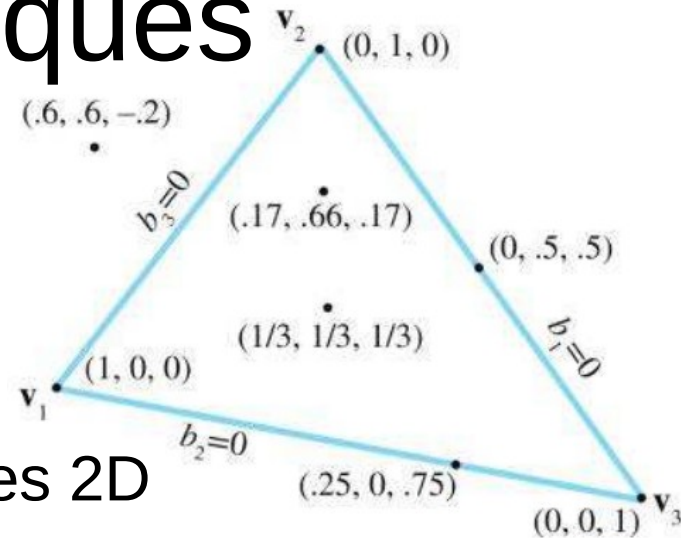
$$(b_1, b_2, b_3) \equiv b_1 \mathbf{v}_1 + b_2 \mathbf{v}_2 + b_3 \mathbf{v}_3$$

$$\equiv b_1 \mathbf{v}_1 + b_2 \mathbf{v}_2 + (1 - b_1 - b_2) \mathbf{v}_3$$

$$\equiv b_1 \mathbf{v}_1 + b_2 \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - b_1 \mathbf{v}_3 - b_2 \mathbf{v}_3$$

$$\equiv \mathbf{v}_3 + b_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3) + b_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3).$$

- Cela prouve qu'on peut décrire un point dans l'espace barycentrique au moyen de 2 coordonnées seulement



Primitives géométriques

- Triangles

- Coordonnées barycentriques

- Conversion coordonnées cartésiennes \rightarrow barycentriques

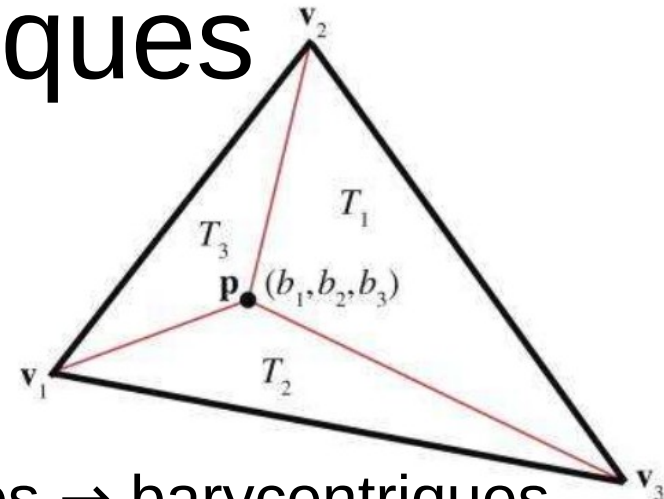
- En 2D

- Soient les 3 sommets \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_3 et un point \mathbf{p}
- Soient les 3 sous-triangles T_i opposés aux sommets \mathbf{v}_i
- Objectif : calculer les coordonnées barycentriques (b_1, b_2, b_3)
- Cela nous donne 3 équations et 3 inconnues
 - Une équation pour chaque coordonnée p_x et p_y
 - L'équation de normalisation de $b_1 + b_2 + b_3$

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = p_x,$$

$$b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 = p_y,$$

$$b_1 + b_2 + b_3 = 1.$$



Primitives géométriques

- Triangles

- Coordonnées barycentriques

- Conversion coordonnées cartésiennes → barycentriques

- En 2D

- Les équations se résolvent comme suit

$$b_1 = \frac{(p_y - y_3)(x_2 - x_3) + (y_2 - y_3)(x_3 - p_x)}{(y_1 - y_3)(x_2 - x_3) + (y_2 - y_3)(x_3 - x_1)},$$

$$b_2 = \frac{(p_y - y_1)(x_3 - x_1) + (y_3 - y_1)(x_1 - p_x)}{(y_1 - y_3)(x_2 - x_3) + (y_2 - y_3)(x_3 - x_1)},$$

$$b_3 = \frac{(p_y - y_2)(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)(x_2 - p_x)}{(y_1 - y_3)(x_2 - x_3) + (y_2 - y_3)(x_3 - x_1)}.$$

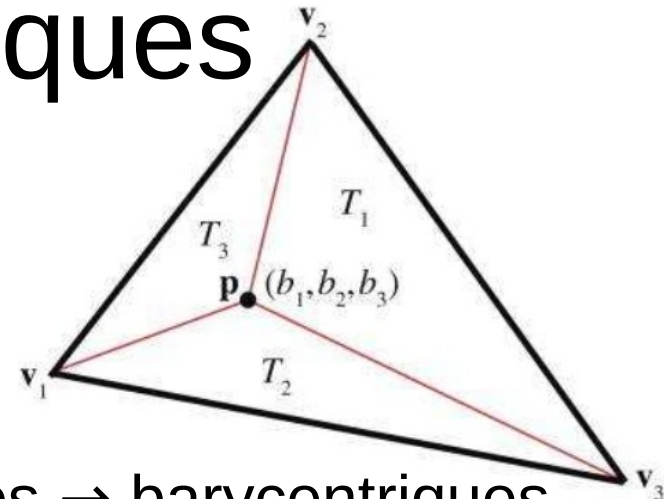
- Remarques

- Le dénominateur commun est 2 * l'aire du triangle

- Chaque numérateur de b_i est 2 * l'aire du sous-triangle T_i

- On en déduit

$$b_1 = A(T_1)/A(T), \quad b_2 = A(T_2)/A(T), \quad b_3 = A(T_3)/A(T)$$



Primitives géométriques

- Triangles
 - Coordonnées barycentriques
 - Conversion coordonnées cartésiennes → barycentriques
 - En 3D
 - Plus compliqué qu'en 2D
 - 4 équations (p_x , p_y , p_z et normalisation) à 3 inconnues
 - Idée : faire du problème 3D un problème 2D
 - On élimine une coordonnée parmi x , y ou z
 - On projette donc le triangle sur l'un des 3 plans cardinaux
 - Question : comment choisir la bonne coordonnée ?
 - Réponse : choisir le plan de projection qui maximise l'aire du triangle projeté
 - On examine la normale $\mathbf{n} = [n_x \ n_y \ n_z]$ au plan original
 - On prend la coordonnée qui a la plus grande valeur absolue
 - On l'élimine et on projette sur le plan perpendiculaire

Primitives géométriques

- Triangles

- Coordonnées barycentriques

- Conversion coordonnées cartésiennes → barycentriques

- En 3D

- Idée : si on connaît 2 vecteurs arête \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 d'un triangle, on peut calculer son aire comme suit : $\|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2\| / 2$

- Donc si on connaît l'aire du triangle et des 3 sous-triangles, on peut calculer les coordonnées barycentriques

- Problème: les coordonnées barycentriques des points hors du triangle peuvent être négatives, or la magnitude est positive

- Astuce : on utilise le produit scalaire pour avoir l'aire signée

- Soit \mathbf{c} un produit vectoriel entre deux vecteurs arête

- Soit $\hat{\mathbf{n}}$ une normale unitaire au triangle

- $\hat{\mathbf{n}}$ et \mathbf{c} sont parallèles, mais de direction peut-être opposée

- En divisant leur produit scalaire par 2, on peut calculer l'aire signée du triangle en 3D

$$\begin{aligned}\mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \|\mathbf{c}\| \|\hat{\mathbf{n}}\| \cos \theta \\ &= \|\mathbf{c}\| (1) (\pm 1) \\ &= \pm \|\mathbf{c}\|.\end{aligned}$$

Primitives géométriques

- Triangles

- Coordonnées barycentriques

- Conversion coordonnées cartésiennes \rightarrow barycentriques

- En 3D

- On récupère les vecteurs arête

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_2,$$

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3,$$

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1,$$

- On récupère les vecteurs entre \mathbf{p} et chaque sommet

$$\mathbf{d}_1 = \mathbf{p} - \mathbf{v}_1,$$

$$\mathbf{d}_2 = \mathbf{p} - \mathbf{v}_2,$$

$$\mathbf{d}_3 = \mathbf{p} - \mathbf{v}_3$$

- On calcule une normale $\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{\|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2\|}$

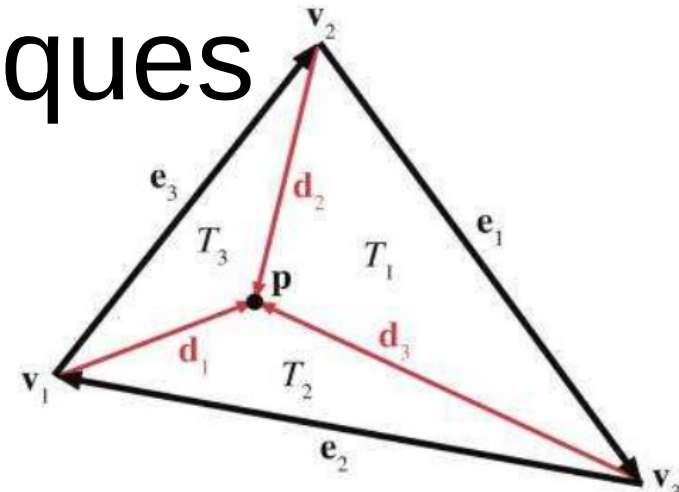
- On récupère les aires signées du triangle et des sous-triangles

$$A(T) = ((\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \hat{\mathbf{n}})/2,$$

$$A(T_1) = ((\mathbf{e}_1 \times \mathbf{d}_3) \cdot \hat{\mathbf{n}})/2,$$

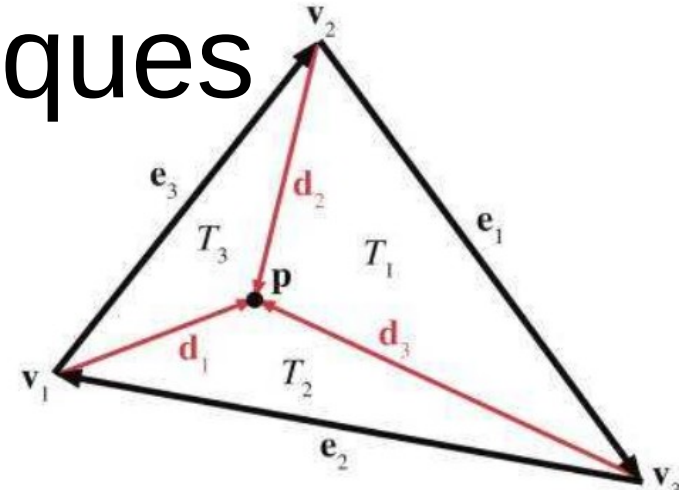
$$A(T_2) = ((\mathbf{e}_2 \times \mathbf{d}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}})/2,$$

$$A(T_3) = ((\mathbf{e}_3 \times \mathbf{d}_2) \cdot \hat{\mathbf{n}})/2.$$



Primitives géométriques

- Triangles
 - Coordonnées barycentriques
 - Conversion coordonnées cartésiennes → barycentriques
 - En 3D
 - Chaque coordonnée barycentrique b_i est donnée par $A(T_i)/A(T)$



$$b_1 = A(T_1)/A(T) = \frac{(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{d}_3) \cdot \hat{\mathbf{n}}}{(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \hat{\mathbf{n}}},$$

$$b_2 = A(T_2)/A(T) = \frac{(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{d}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}}{(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \hat{\mathbf{n}}},$$

$$b_3 = A(T_3)/A(T) = \frac{(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{d}_2) \cdot \hat{\mathbf{n}}}{(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \hat{\mathbf{n}}}.$$

Primitives géométriques

- Triangles

- Points spéciaux

- Centre de gravité (ou "centroïde")

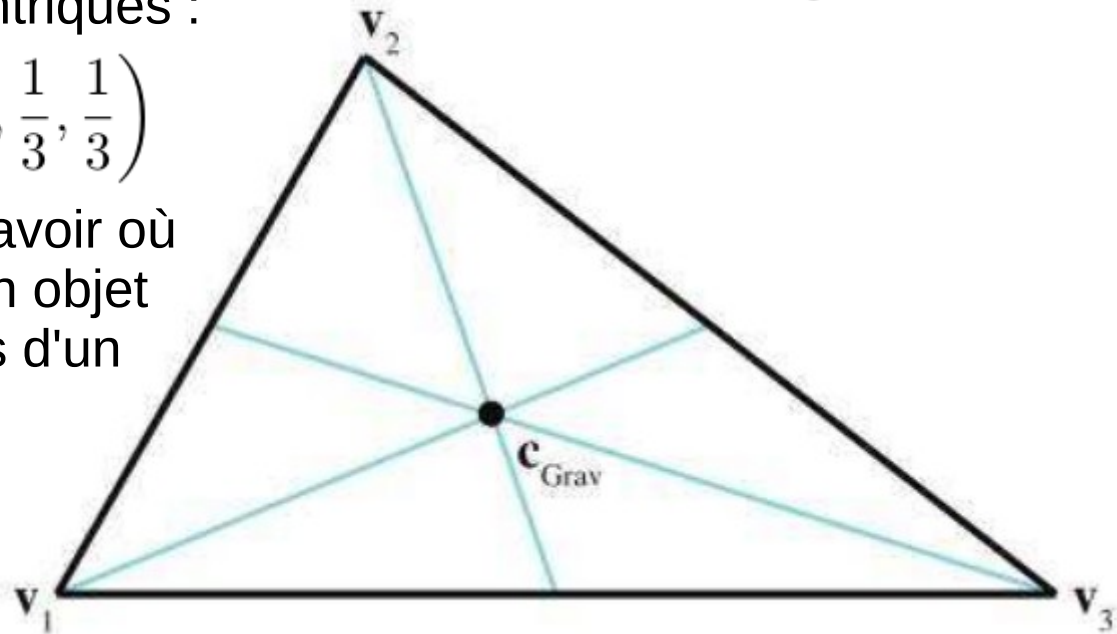
- Intersection des médianes (droite qui traverse un sommet ainsi que le milieu du côté opposé à ce sommet)

- C'est la moyenne des 3 sommets : $\mathbf{c}_{\text{Grav}} = \frac{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3}{3}$

- Coordonnées barycentriques :

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

- Utile quand on veut savoir où se trouve le poids d'un objet (en particulier le poids d'un objet volant)



Primitives géométriques

- Triangles

- Points spéciaux

- Centre du cercle inscrit dans le triangle (ou "incenter")

- Point du triangle qui est à équidistance des 3 côtés
 - Utile quand on veut un cercle tangent à 3 droites
 - C'est aussi l'intersection des bissectrices des angles (les demi-droites qui les coupent en 2)

- Soit le périmètre $p = l_1 + l_2 + l_3$

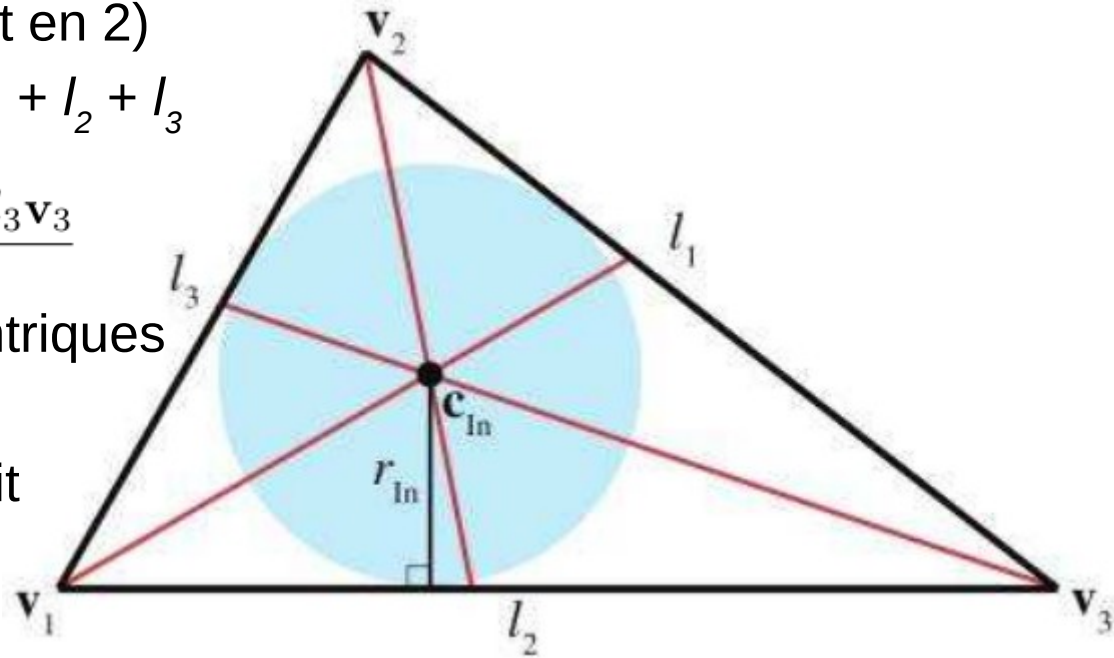
- Équation
$$\mathbf{c}_{\text{In}} = \frac{l_1 \mathbf{v}_1 + l_2 \mathbf{v}_2 + l_3 \mathbf{v}_3}{p}$$

- Coordonnées barycentriques

$$\left(\frac{l_1}{p}, \frac{l_2}{p}, \frac{l_3}{p} \right)$$

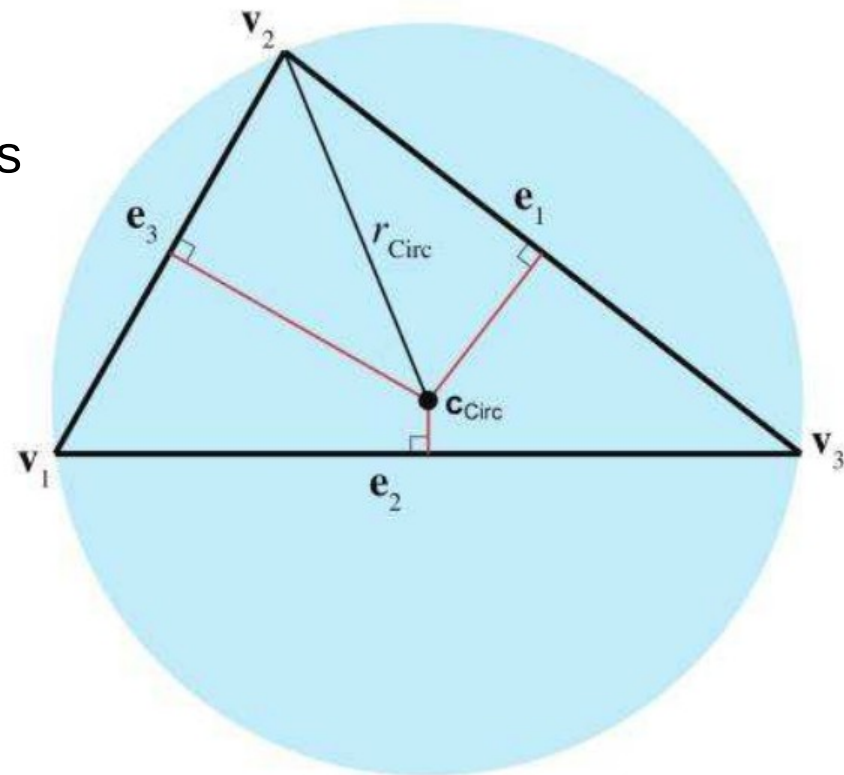
- Rayon du cercle inscrit

$$r_{\text{In}} = \frac{A}{p}$$



Primitives géométriques

- Triangles
 - Points spéciaux
 - Centre du cercle circonscrit (ou "circumcenter")
 - C'est le point à équidistance des 3 sommets
 - C'est aussi le centre du cercle qui englobe ("circonscrit") le triangle
 - C'est l'intersection des médiatrices des 3 côtés du triangle
 - Utile quand on veut trouver un cercle qui traverse 3 points



Primitives géométriques

- Triangles

- Points spéciaux

- Centre du cercle circonscrit (ou "circumcenter")

- Calcul de quelques valeurs intermédiaires

$$\begin{array}{lll} d_1 = -\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 & d_2 = -\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 & d_3 = -\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \\ c_1 = d_2 d_3 & c_2 = d_3 d_1 & c_3 = d_1 d_2 \end{array}$$

$$c = c_1 + c_2 + c_3$$

- Coordonnées barycentriques

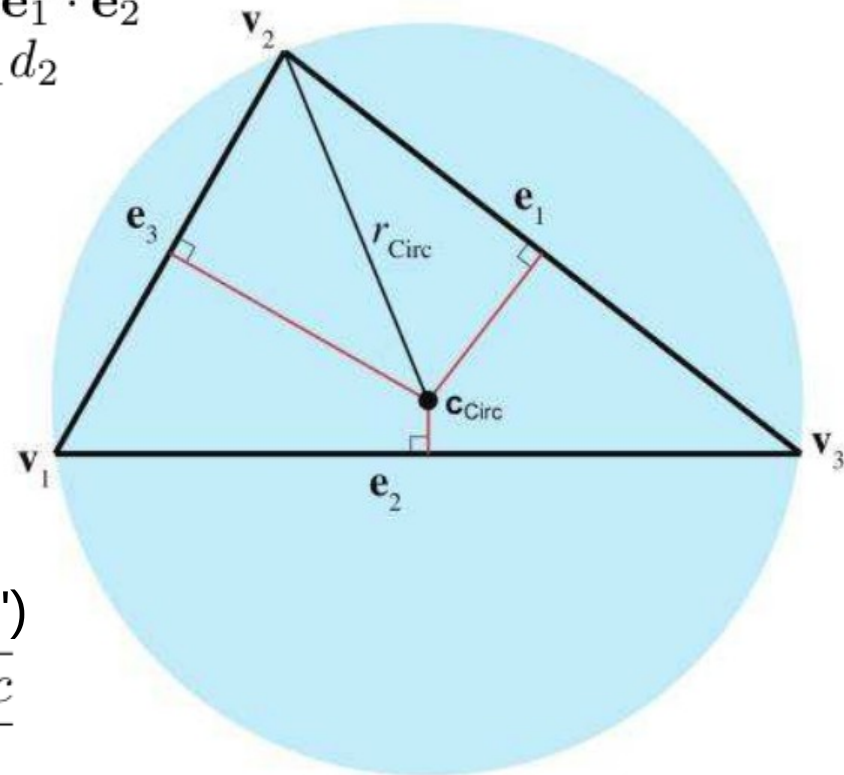
$$\left(\frac{c_2 + c_3}{2c}, \frac{c_3 + c_1}{2c}, \frac{c_1 + c_2}{2c} \right)$$

- Équation du centre

$$\mathbf{c}_{\text{Circ}} = \frac{(c_2 + c_3)\mathbf{v}_1 + (c_3 + c_1)\mathbf{v}_2 + (c_1 + c_2)\mathbf{v}_3}{2c}$$

- Équation du rayon ("circumradius")

$$r_{\text{Circ}} = \frac{\sqrt{(d_1 + d_2)(d_2 + d_3)(d_3 + d_1)}/c}{2}$$



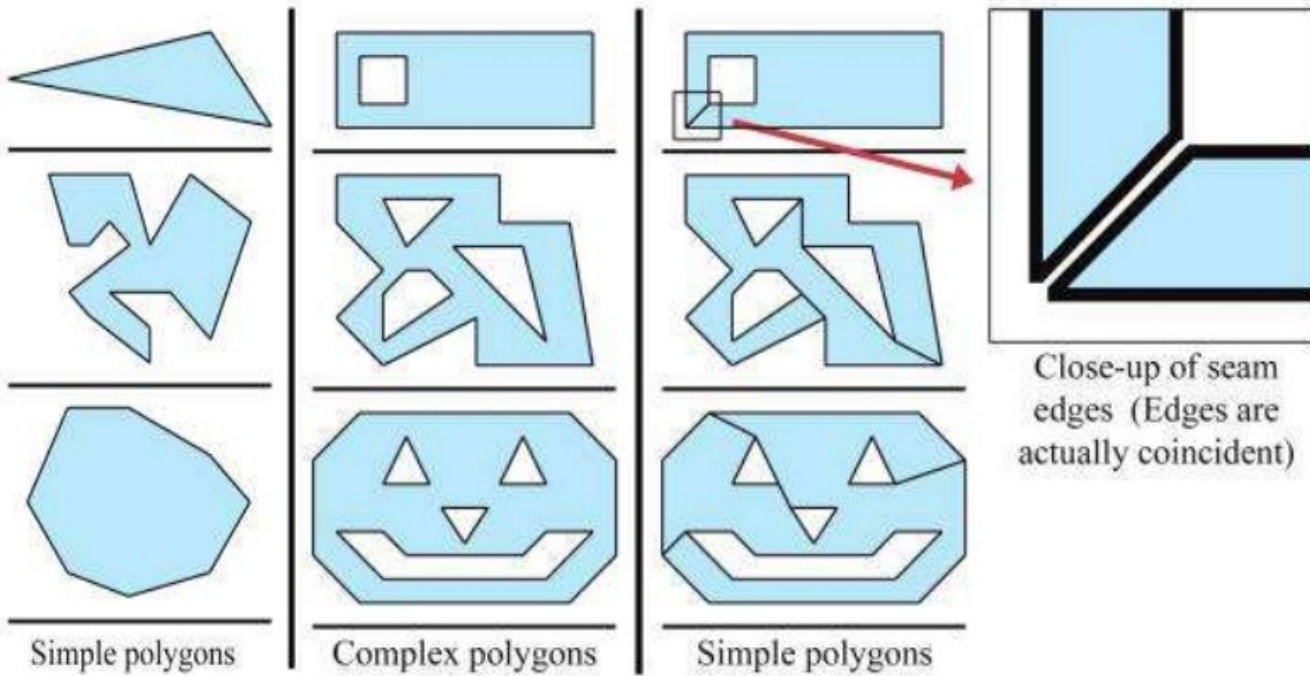
Primitives géométriques

- Polygones
 - Définition générale
 - Objet plat constitué de sommets et d'arêtes
 - Les catégories qui nous intéressent
 - Polygones simples vs. Polygones complexes
 - Polygones convexes vs. Polygones concaves

Primitives géométriques

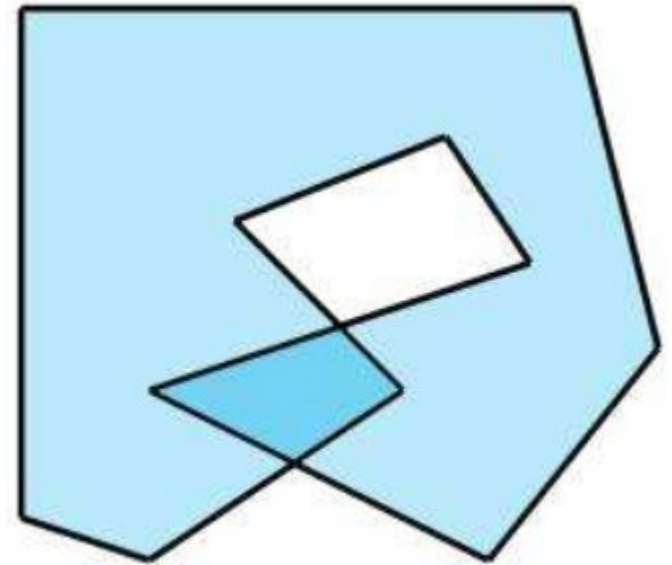
- Polygones simples vs. Polygones complexes
 - Un polygone "simple" n'a pas de trous
 - On peut le représenter en listant ses sommets
 - Un polygone complexe a potentiellement des trous
 - On peut le "simplifier" en rajoutant deux côtés rapprochés

("seam edges"
ou "bords de
couture")
depuis le
sommet d'un
trou jusqu'à
un sommet du
polygone



Primitives géométriques

- Polygones simples vs. Polygones complexes
 - La plupart des polygones simples ne s'auto-intersectent pas, mais ça arrive
 - En général, on préfère établir des règles pour les éviter ou les rejeter
 - Les polygones les plus courants sont simples et sans auto-intersection
 - On les peut les classifier comme "convexes" ou "concaves"

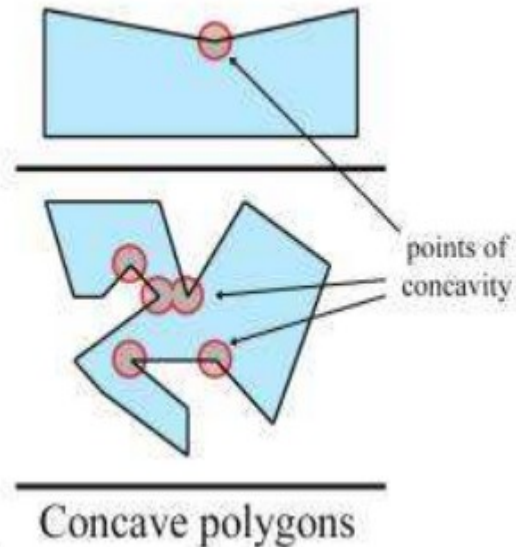
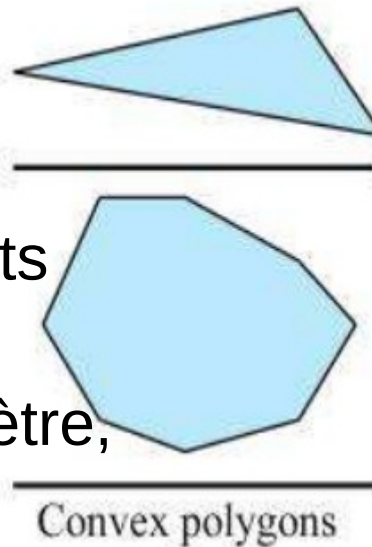


Primitives géométriques

- Polygones convexes vs. Polygones concaves

- Pour un polygone convexe

- Il n'y a pas de "creux"
 - Le segment entre deux points est inclus dans le polygone
 - Quand on parcourt le périmètre, à chaque sommet on tourne dans la même direction



- Pour un polygone concave

- Il y a au moins un "creux" ("point de concavité")
 - Il y a au moins deux points dont le segment est dehors
 - On peut tourner dans la direction opposée à partir du point de concavité

Primitives géométriques

- Polygones convexes vs. Polygones concaves
 - N'importe quel polygone concave peut être divisé en sous-polygones convexes
 - Pour cela, il faut localiser les points de concavité ("reflex vertices") et les éliminer en rajoutant des diagonales
- Test de convexité
 - Idée : examiner la somme des angles aux sommets
 - Soit un polygone convexe à n sommets
 - Alors la somme des angles intérieurs est de $(n - 2) * 180^\circ$

Primitives géométriques

- Polygones convexes vs. Polygones concaves
 - Test de convexité

- Démonstration

- Soit θ_i l'angle interne au sommet i
 - Si le polygone est convexe, alors $\theta_i \leq 180^\circ$
 - Quand on "tourne" à ce sommet la rotation est de $180^\circ - \theta_i$
 - Un "tour" complet sur un polygone fermé fera forcément une révolution complète, c'est-à-dire 360°
 - On en déduit la somme des angles intérieurs

- Problème de cette méthode

- On arrive à la même somme pour les polygones concaves

$$\sum_{i=1}^n (180^\circ - \theta_i) = 360^\circ,$$

$$\begin{aligned} n180^\circ - \sum_{i=1}^n \theta_i &= 360^\circ, \\ - \sum_{i=1}^n \theta_i &= 360^\circ - n180^\circ, \\ \sum_{i=1}^n \theta_i &= n180^\circ - 360^\circ, \\ \sum_{i=1}^n \theta_i &= (n - 2)180^\circ. \end{aligned}$$

Primitives géométriques

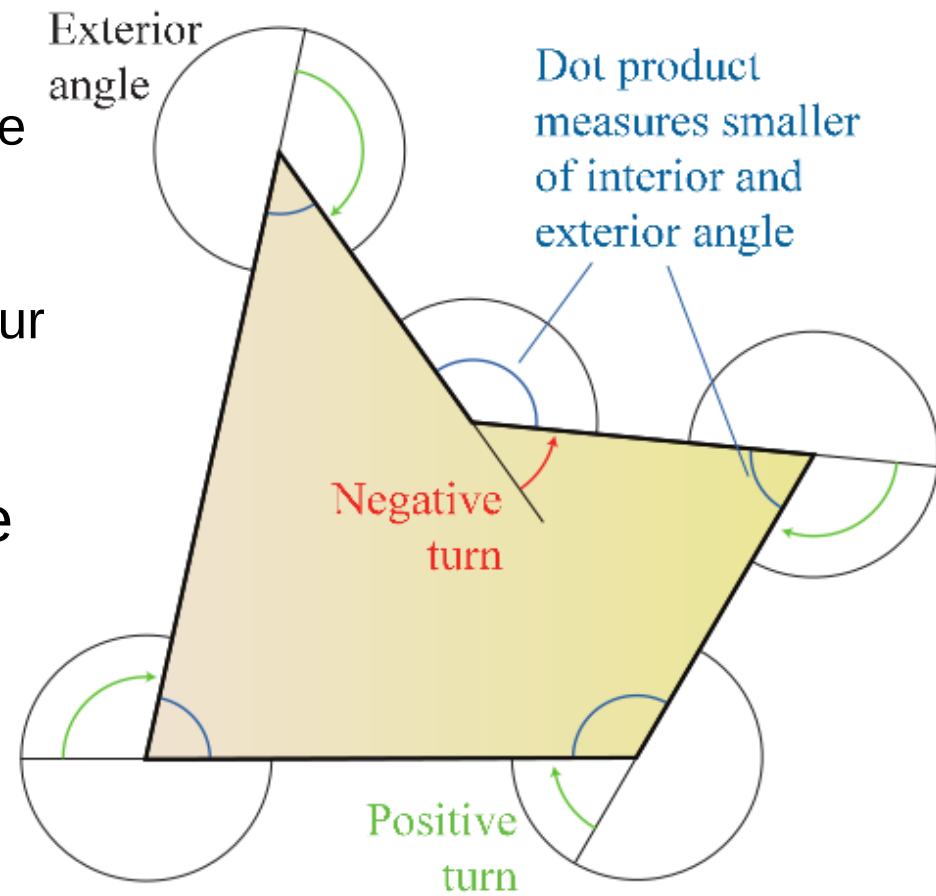
- Polygones convexes vs. Polygones concaves
- Test de convexité

- Idée : utiliser le produit scalaire

- Rappel : $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta$
- Entre l'angle intérieur et l'angle extérieur, le produit scalaire mesure le plus petit des deux
- Les angles intérieur et extérieur sont complémentaires, et leur somme vaut 360°

- Ensuite, on fait la somme de tous les angles minimaux à chaque sommet

- Si $(n-2) \cdot 180^\circ$: convexe
- En-dessous : concave



Plan

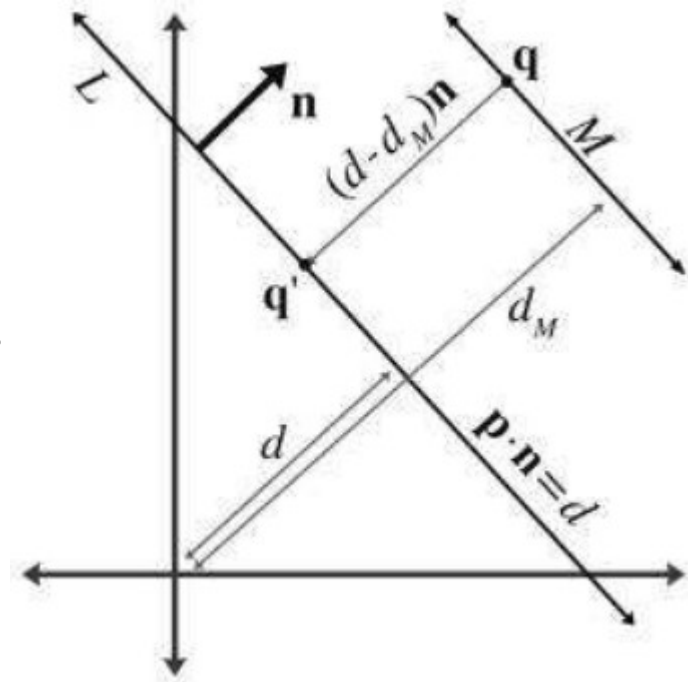
- Primitives géométriques
- Tests géométriques
 - Point le plus proche ...
 - ... d'une droite 2D, d'un rayon, d'un plan, d'un cercle ou d'une sphère, d'une AABB
 - Tests d'intersection...
 - ... entre deux droites 2D, entre deux rayons, entre un rayon et un plan, entre une AABB et un plan, entre 3 plans, entre un rayon et un cercle ou une sphère, entre deux cercles ou sphères, entre une sphère et une AABB, entre une sphère et un plan, entre un rayon et un triangle, entre deux AABBs, entre un rayon et une AABB

Tests géométriques

- Le chapitre précédent traitait des méthodes de représentation et de calcul pour une seule primitive à la fois
- Ce chapitre traite des méthodes de calcul qui concernent au moins deux primitives
 - Point le plus proche d'une primitive
 - Intersection entre deux primitives
 - De nature similaire
 - De nature différente

Tests géométriques

- Point le plus proche d'une droite 2D
 - Soit une droite L sous forme implicite pour tout point \mathbf{p}
$$\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}} = d \quad (\text{avec } \hat{\mathbf{n}} \text{ vecteur normal unitaire})$$
 - Objectif : pour n'importe quel point \mathbf{q} , trouver le point \mathbf{q}' qui en est le plus proche (et la projection) sur L
 - Solution
 - Droite M , parallèle à L , passant par \mathbf{q}
 - Soit $\hat{\mathbf{n}}_M$ et d_M pour l'équation de M
 - On a : $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}}_M$ car $\hat{\mathbf{n}}$ et $\hat{\mathbf{n}}_M$ sont parallèles
 - L'équation de M devient : $\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} = d_M$
 - On en déduit : $d - d_M = d - \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}}$
 - Et finalement : $\mathbf{q}' = \mathbf{q} + (d - \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}}$



Tests géométriques

- Point le plus proche d'un rayon (paramétré)
 - Soit un rayon R (2D ou 3D) sous forme paramétrée
$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_{\text{org}} + t\hat{\mathbf{d}} \text{ (}\hat{\mathbf{d}} \text{ vecteur unitaire, } t \in [0, l], l \text{ longueur de } R\text{)}$$
 - Objectif : pour un point \mathbf{q} donné, trouver le point \mathbf{q}' sur R qui soit le plus proche de \mathbf{q}
 - Solution : projeter le vecteur de \mathbf{p}_{org} à \mathbf{q} sur $\hat{\mathbf{d}}$

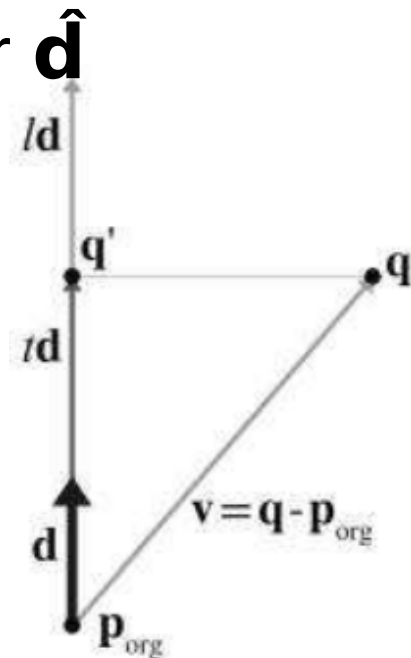
- Soit \mathbf{v} le vecteur de \mathbf{p}_{org} à \mathbf{q}
- Le produit scalaire $\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{d}}$ est t tel que $\mathbf{p}(t) = \mathbf{q}'$

$$t = \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{v} = \hat{\mathbf{d}} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{p}_{\text{org}}),$$

$$\mathbf{q}' = \mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_{\text{org}} + t\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{p}_{\text{org}} + (\hat{\mathbf{d}} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{p}_{\text{org}}))\hat{\mathbf{d}}$$

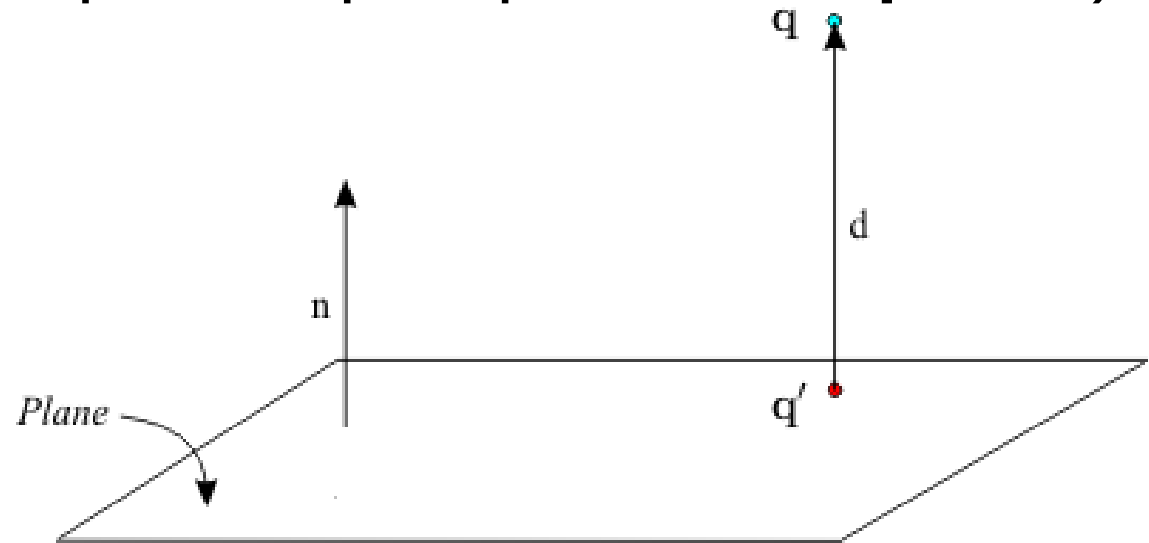
- Si $t \in [0, 1]$, on divise par la magnitude

$$t = \frac{\mathbf{d} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{p}_{\text{org}})}{\|\mathbf{d}\|}$$



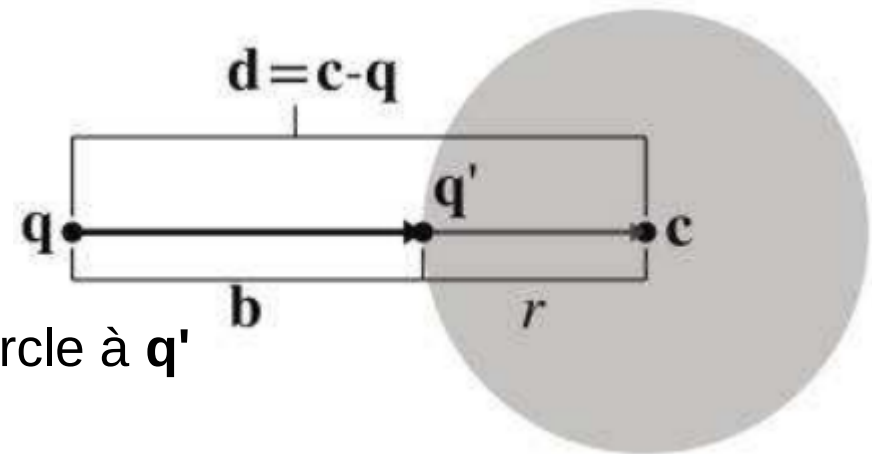
Tests géométriques

- Point le plus proche d'un plan
 - Soit un plan P sous forme implicite pour tout point \mathbf{p}
$$\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}} = d \quad (\text{avec } \hat{\mathbf{n}} \text{ vecteur normal unitaire})$$
 - Objectif : pour un point \mathbf{q} donné, trouver le point \mathbf{q}' projeté de \mathbf{q} sur P (le point le plus proche de \mathbf{q} sur P)
 - Solution
 - Rappels
$$\mathbf{q} + a\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{q}'$$
$$a = \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} - d$$
 - On en déduit
$$\mathbf{q}' = \mathbf{q} + (\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} - d)\hat{\mathbf{n}}$$
 - Même équation que le point le plus proche d'une droite



Tests géométriques

- Point le plus proche d'un cercle ou d'une sphère
 - Soient \mathbf{q} un point 2D et un cercle (centre \mathbf{c} , rayon r)
 - On peut aussi appliquer le principe à une sphère 3D
 - Objectif : trouver le point \mathbf{q}' qui soit le plus proche de \mathbf{q} sur le cercle



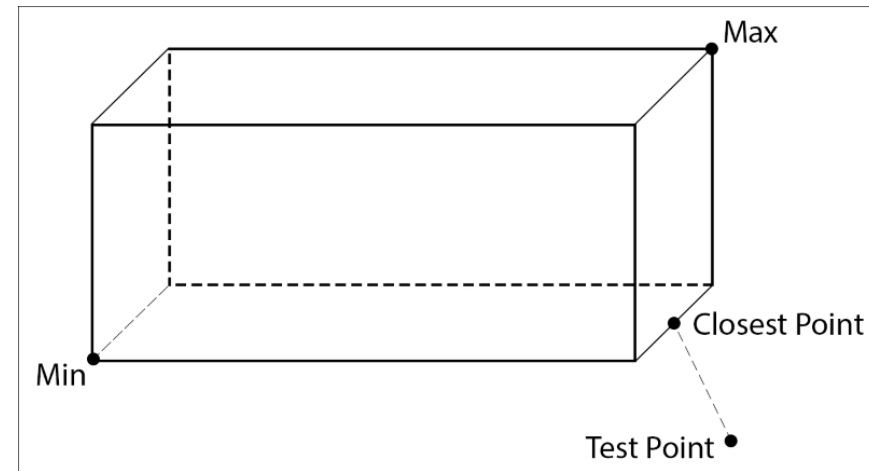
- Solution

- Soit \mathbf{d} le vecteur de \mathbf{q} à \mathbf{c}
 - Ce vecteur intersectionne le cercle à \mathbf{q}'
- Soit \mathbf{b} le vecteur de \mathbf{q} à \mathbf{q}'
- Alors $\|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{d}\| - r$, et :
- On en déduit $\mathbf{q}' = \mathbf{q} + \mathbf{b}$

$$= \mathbf{q} + \frac{\|\mathbf{d}\| - r}{\|\mathbf{d}\|} \mathbf{d}$$

Tests géométriques

- Point le plus proche d'une AABB
 - Soit B une AABB définie par les extrémités \mathbf{p}_{\min} et \mathbf{p}_{\max}
 - Pour n'importe quel point $\mathbf{q} = [x \ y \ z]$ on peut calculer $\mathbf{q}' = [x' \ y' \ z']$ le point sur l'AABB le plus proche de \mathbf{q}
 - Il suffit de "pousser" \mathbf{q} dans B sur chaque axe
 - Si $x < x_{\min}$ alors $x' \leftarrow x_{\min}$
sinon si $x > x_{\max}$ alors $x' \leftarrow x_{\max}$
 - Si $y < y_{\min}$ alors $y' \leftarrow y_{\min}$
sinon si $y > y_{\max}$ alors $y' \leftarrow y_{\max}$
 - Si $z < z_{\min}$ alors $z' \leftarrow z_{\min}$
sinon si $z > z_{\max}$ alors $z' \leftarrow z_{\max}$
- Cet algorithme ne marche que si \mathbf{q} est hors de l'AABB



Tests géométriques

- Tests d'intersection
 - Servent à déterminer s'il y a intersection (parfois où)
 - Deux types de test
 - Statique
 - Entre deux primitives stationnaires, immobiles
 - Test booléen : il y a intersection ou pas
 - Dynamique
 - Entre deux primitives qui bougent (mouvement paramétré)
 - Il s'agit de savoir s'il y a intersection *et quand*
 - Le résultat comporte un booléen et la valeur du paramètre
 - Chaque objet a son déplacement mais il est plus pratique de considérer le déplacement du point de vue d'une seule primitive
 - On considère qu'un objet est "statique" pendant que l'autre "bouge"
 - On combine les deux vecteurs déplacements pour n'en avoir qu'un

Tests géométriques

- Tests d'intersection

- Intersection entre deux droites 2D (forme implicite)

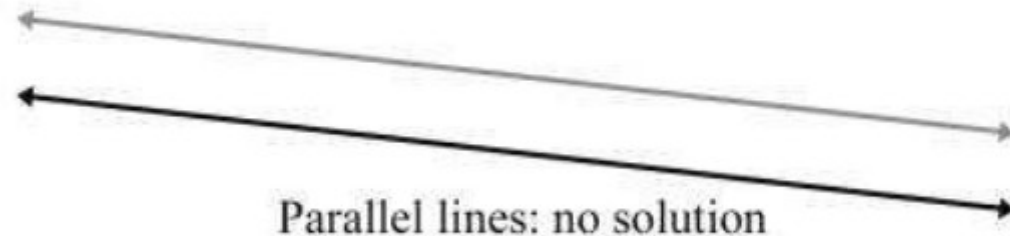
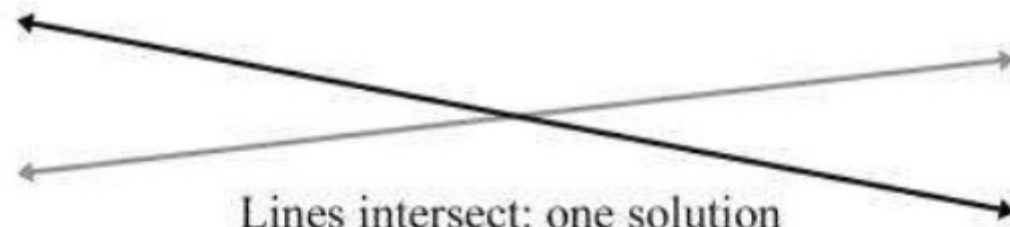
- Deux équations $a_1x + b_1y = d_1$
 - Résolution $a_2x + b_2y = d_2$

$$x = \frac{b_2d_1 - b_1d_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$y = \frac{a_1d_2 - a_2d_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

- Trois possibilités

- Une solution unique
 - Intersection
 - Pas de solution
 - Droites parallèles
 - Une infinité de solutions
 - Droites qui coïncident



Tests géométriques

- Tests d'intersection
 - Intersection de deux rayons en 3D
 - Un rayon peut être vu comme un point en mouvement
 - Soient deux rayons 3D sous forme paramétrique
 - On a 4 possibilités
 - Les trois mêmes possibilités que pour deux droites
 - Un cas supplémentaire : les rayons n'ont pas de plan commun



Tests géométriques

- Tests d'intersection

- Intersection de deux rayons en 3D

- Équations au point d'intersection : $\mathbf{r}_1(t_1) = \mathbf{p}_1 + t_1\mathbf{d}_1$
 $\mathbf{r}_2(t_2) = \mathbf{p}_2 + t_2\mathbf{d}_2$

- Résolution pour t_1 -----> $\mathbf{r}_1(t_1) = \mathbf{r}_2(t_2),$

$$\mathbf{p}_1 + t_1\mathbf{d}_1 = \mathbf{p}_2 + t_2\mathbf{d}_2,$$

$$t_1\mathbf{d}_1 = \mathbf{p}_2 + t_2\mathbf{d}_2 - \mathbf{p}_1,$$

- Résolution pour t_2

$$(t_1\mathbf{d}_1) \times \mathbf{d}_2 = (\mathbf{p}_2 + t_2\mathbf{d}_2 - \mathbf{p}_1) \times \mathbf{d}_2,$$

$$t_1(\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2) = (t_2\mathbf{d}_2) \times \mathbf{d}_2 + (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \times \mathbf{d}_2,$$

$$t_1(\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2) = t_2(\mathbf{d}_2 \times \mathbf{d}_2) + (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \times \mathbf{d}_2,$$

$$t_1(\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2) = t_2\mathbf{0} + (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \times \mathbf{d}_2,$$

$$t_1(\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2) = (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \times \mathbf{d}_2,$$

$$t_1(\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2) \cdot (\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2) = ((\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \times \mathbf{d}_2) \cdot (\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2),$$

$$t_1 = \frac{((\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \times \mathbf{d}_2) \cdot (\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2)}{\|\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2\|^2}.$$

$$t_2 = \frac{((\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \times \mathbf{d}_1) \cdot (\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2)}{\|\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2\|^2}$$

Tests géométriques

- Tests d'intersection

- Intersection entre un rayon et un plan en 3D

- L'intersection se fait en un point
 - Rayon sous forme paramétrique, plan sous forme implicite

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{d} \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{n} = d$$

- Solution

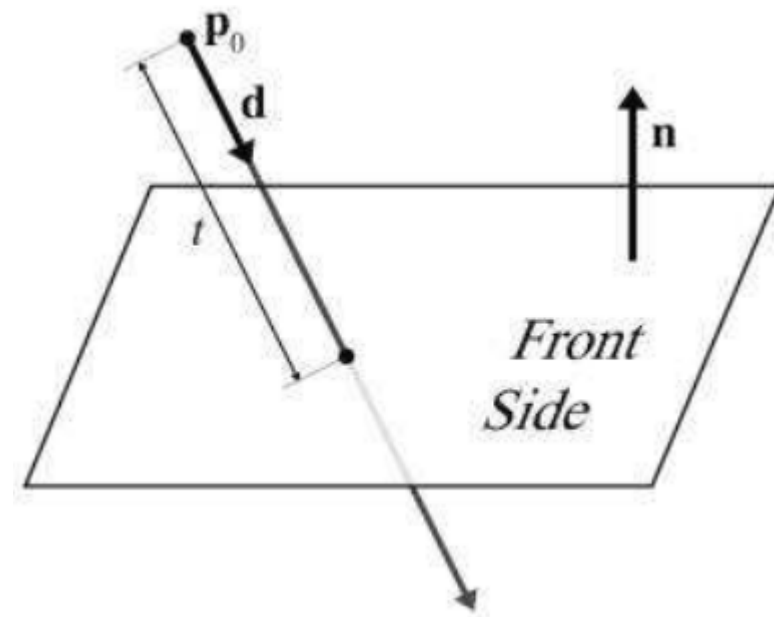
$$(\mathbf{p}_0 + t\mathbf{d}) \cdot \mathbf{n} = d,$$

$$\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{n} + t\mathbf{d} \cdot \mathbf{n} = d,$$

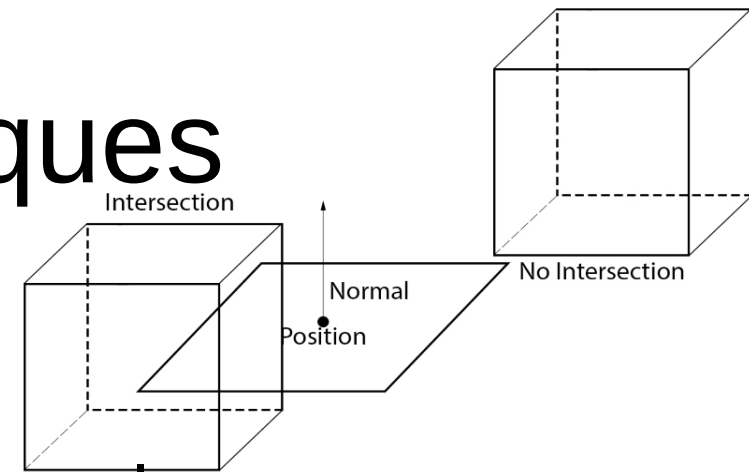
$$t\mathbf{d} \cdot \mathbf{n} = d - \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{n},$$

$$t = \frac{d - \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{d} \cdot \mathbf{n}}.$$

- Si le rayon est parallèle au plan, le dénominateur est nul, donc il n'y a pas d'intersection

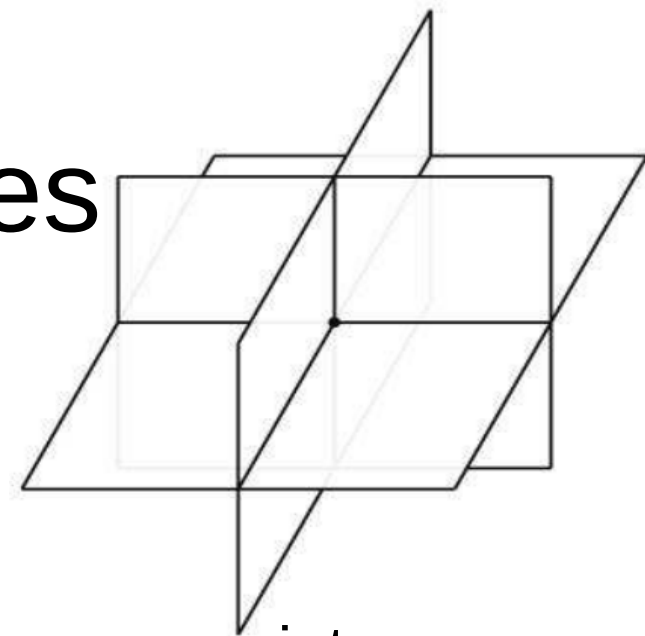


Tests géométriques



- Tests d'intersection
 - Intersection entre une AABB et un plan
 - Soit une AABB définie par ses extrémités \mathbf{p}_{\min} et \mathbf{p}_{\max}
 - Soit un plan défini de manière implicite : $\mathbf{p} \cdot \mathbf{n} = d$
 - Idée : prendre chaque sommet de l'AABB, et déterminer s'il est "devant" ou "derrière" le plan
 - On calcule le produit scalaire s de chaque sommet avec \mathbf{n}
 - Si $\forall s, s > d$ (resp. $< d$) l'AABB est complètement "devant" (resp. "derrière") le plan, sans intersection
 - On n'a pas forcément besoin de tester chaque sommet
 - Si $n_x > 0$, alors pour le sommet avec $s = s_{\min}$, $x = x_{\min}$ et pour celui avec $s = s_{\max}$, $x = x_{\max}$ (si $n_x < 0$ l'opposé est vrai. Idem pour n_y et n_z)
 - Si $s_{\min} > d$, ou si $s_{\max} < d$, c'est le cas pour tous les autres produits, et l'AABB est complètement "devant" ou "derrière" sans intersection

Tests géométriques



- Tests d'intersection

- Intersection de 3 plans

- En 3D, trois plans ont une intersection sur un point

- Soient 3 plans définis par leur forme implicite

- $$\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}_1 = d_1, \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{n}_2 = d_2, \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{n}_3 = d_3$$

- Cela fait 3 équations linéaires avec 3 inconnues

- Solution

$$\mathbf{p} = \frac{d_1(\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_3) + d_2(\mathbf{n}_3 \times \mathbf{n}_1) + d_3(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2)}{(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) \cdot \mathbf{n}_3}$$

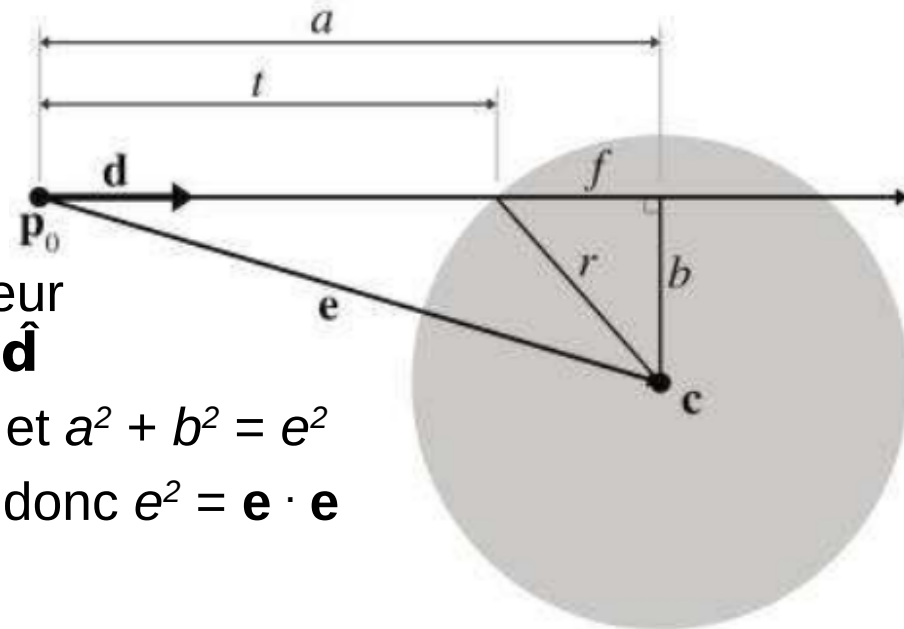
- Si n'importe quelle paire de plans est parallèle

- Le dénominateur est nul

- Le point d'intersection n'existe pas, ou n'est pas unique

Tests géométriques

- Tests d'intersection
 - Intersection d'un rayon avec un cercle ou une sphère
 - En 3D, il suffit de récupérer le plan contenant le rayon et le centre de la sphère. On en fait alors un problème 2D
 - Soit une sphère (centre \mathbf{c} , rayon r) et un rayon défini par $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\hat{\mathbf{d}}$ ($\hat{\mathbf{d}}$ vecteur unitaire, $t \in [0, l]$, l longueur de R)
 - Si t au point d'intersection
 - $t = a - f$
 - Soit $\mathbf{e} = \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}$
 - Si on projette \mathbf{e} sur $\hat{\mathbf{d}}$, la longueur du vecteur projeté est : $a = \mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{d}}$
 - D'après Pythagore : $f^2 + b^2 = r^2$ et $a^2 + b^2 = e^2$
 - e est la longueur du vecteur \mathbf{e} , donc $e^2 = \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}$
 - On peut donc calculer f , puis t



Tests géométriques

- Tests d'intersection
 - Intersection d'un rayon avec un cercle ou une sphère
 - Solution

$$f^2 + b^2 = r^2,$$

$$f^2 + (e^2 - a^2) = r^2,$$

$$f^2 = r^2 - e^2 + a^2,$$

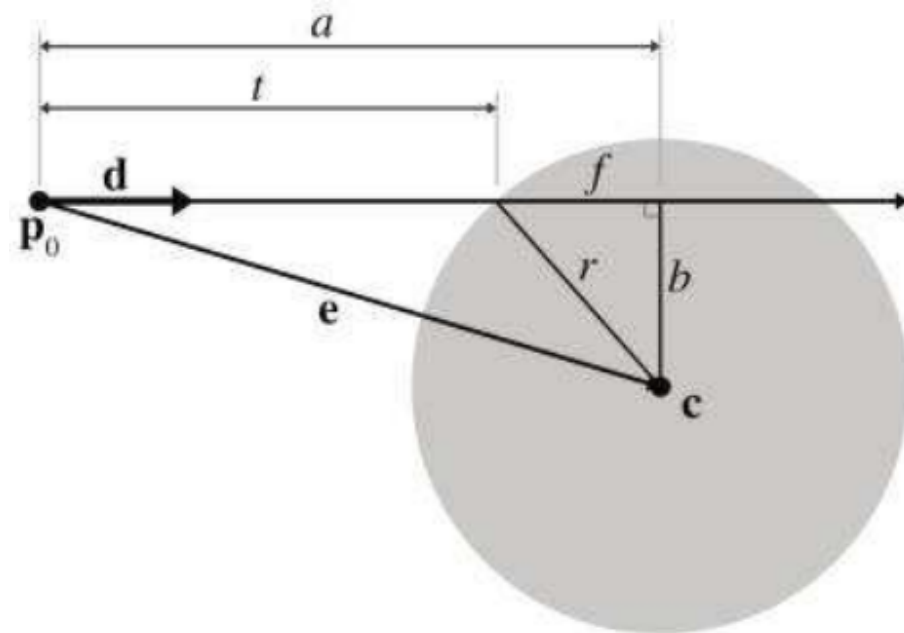
$$f = \sqrt{r^2 - e^2 + a^2}$$

$$t = a - f$$

$$= a - \sqrt{r^2 - e^2 + a^2}$$

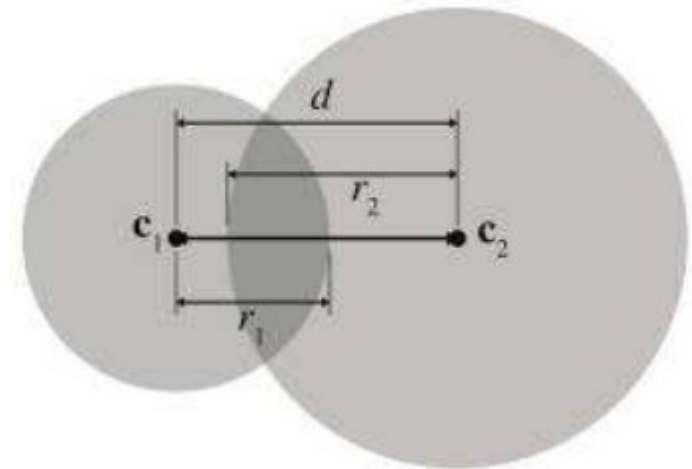
- Cas particulier

- Si $r^2 - e^2 + a^2 < 0$, alors il n'y a pas d'intersection



Tests géométriques

- Tests d'intersection
 - Intersection de deux cercles ou sphères
 - Intersection statique
 - Soient deux sphères de centre \mathbf{c}_1 et \mathbf{c}_2 , et de rayon r_1 et r_2
 - Soit d la distance entre \mathbf{c}_1 et \mathbf{c}_2
 - Alors il y a intersection si $d < r_1 + r_2$
 - Dit autrement (sans la racine carrée), il y a intersection si $d^2 < (r_1 + r_2)^2$



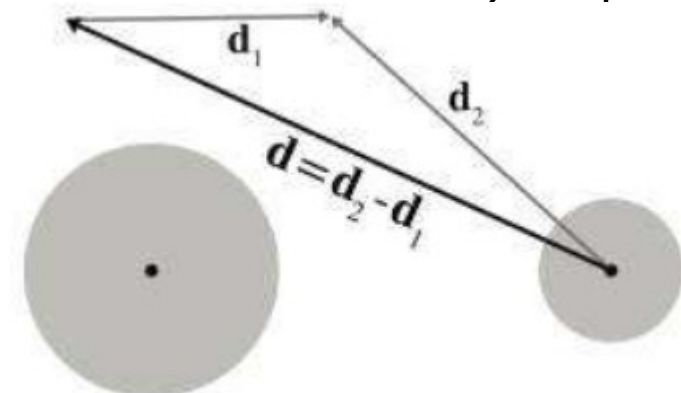
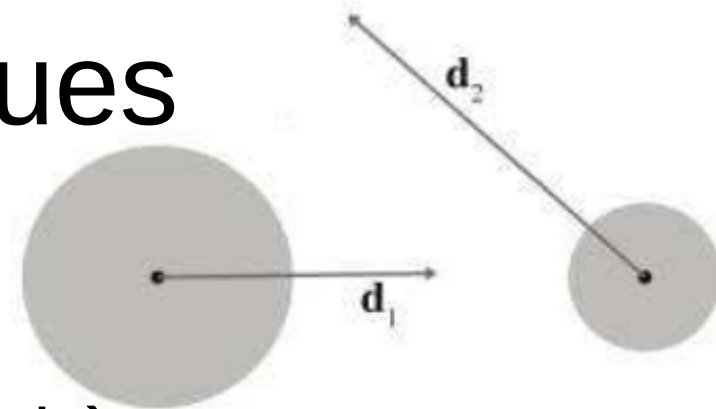
Tests géométriques

- Tests d'intersection

- Intersection de deux cercles ou sphères

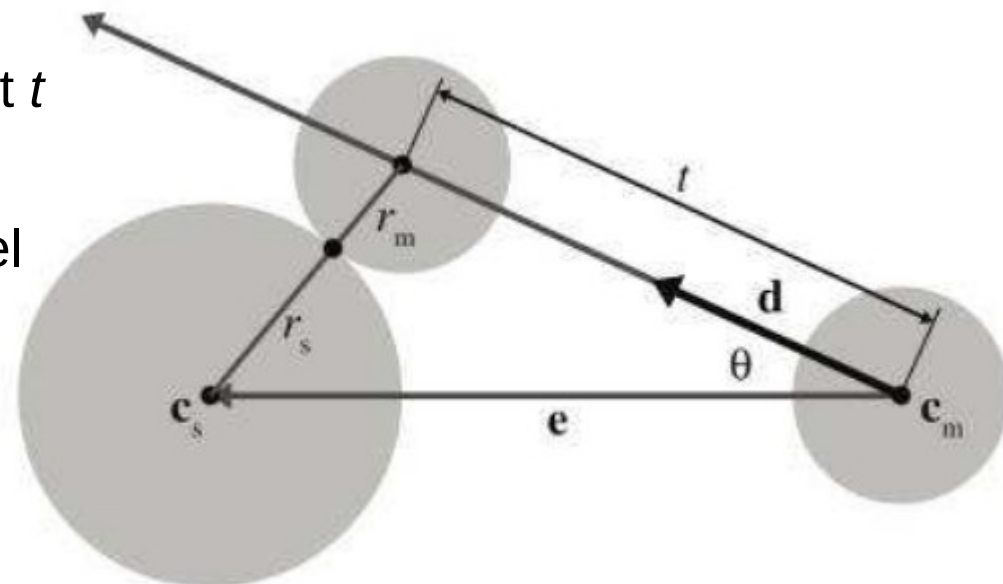
- Intersection dynamique

- Soient deux vecteurs $\mathbf{d1}$ et $\mathbf{d2}$, un pour chaque sphère
 - Chacun de ces vecteurs déplacement décrit comment les sphères bougent pendant une période de temps donnée
 - On peut simplifier le problème en le considérant du point de vue de la première sphère
 - On va considérer qu'elle est "stationnaire" et que l'autre bouge
 - Ce qui nous donne un unique vecteur déplacement $\mathbf{d} = \mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1$



Tests géométriques

- Tests d'intersection
 - Intersection de deux cercles ou sphères
 - Intersection dynamique
 - Soient \mathbf{c}_s et r_s le centre et le rayon de la 1^{ère} sphère "stationnaire"
 - Soient \mathbf{c}_m et r_m le centre et le rayon de la 2^{ème} sphère "mouvante"
 - On normalise \mathbf{d} , et t varie de 0 à 1 (la longueur du déplacement)
 - \mathbf{c}_m démarre à $t = 0$
 - La position de \mathbf{c}_m à l'instant t est donnée par $\mathbf{c}_m + t\mathbf{d}$
 - L'objectif est de trouver t tel que les deux sphères se touchent



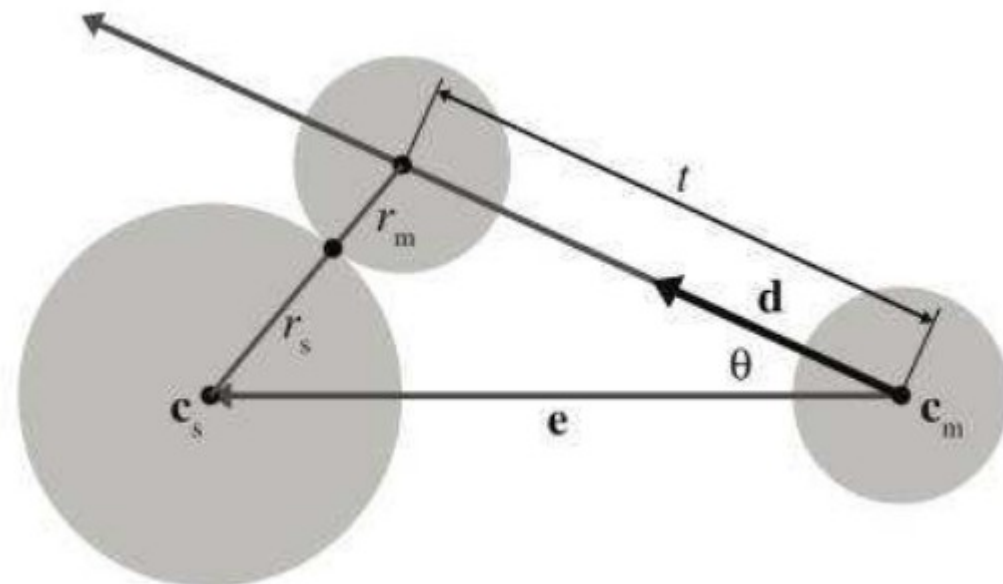
Tests géométriques

- Tests d'intersection
 - Intersection de deux cercles ou sphères
 - Intersection dynamique
 - Soit le vecteur $\mathbf{e} = \mathbf{c}_s - \mathbf{c}_m$ et $r = r_s + r_m$
 - D'après la loi des cosinus : $r^2 = t^2 + \|\mathbf{e}\|^2 - 2t\|\mathbf{e}\| \cos \theta$
 - En utilisant le produit scalaire, on obtient :

$$r^2 = t^2 + \|\mathbf{e}\|^2 - 2t\|\mathbf{e}\| \cos \theta,$$

$$r^2 = t^2 + \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} - 2t(\mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{d}}),$$

$$0 = t^2 - 2(\mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{d}})t + \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} - r^2$$



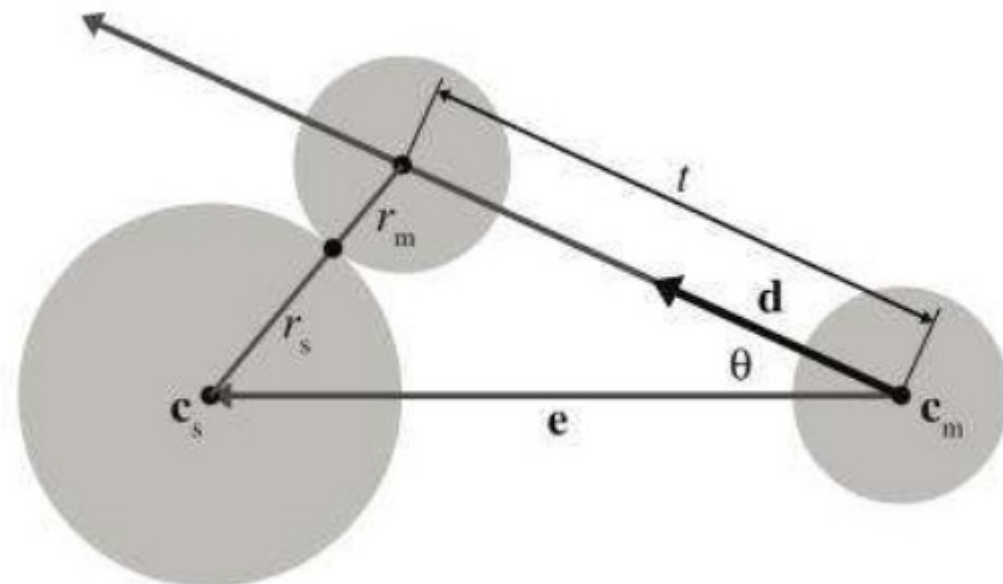
Tests géométriques

- Tests d'intersection
 - Intersection de deux cercles ou sphères
 - Intersection dynamique
 - On en déduit t :

$$t = \frac{2(\mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{d}}) \pm \sqrt{\left(-2(\mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{d}})\right)^2 - 4(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} - r^2)}}{2},$$

$$t = \frac{2(\mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{d}}) \pm \sqrt{4(\mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{d}})^2 - 4(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} - r^2)}}{2},$$

$$t = \mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{d}} \pm \sqrt{(\mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{d}})^2 + r^2 - \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}}.$$



Tests géométriques

- Tests d'intersection

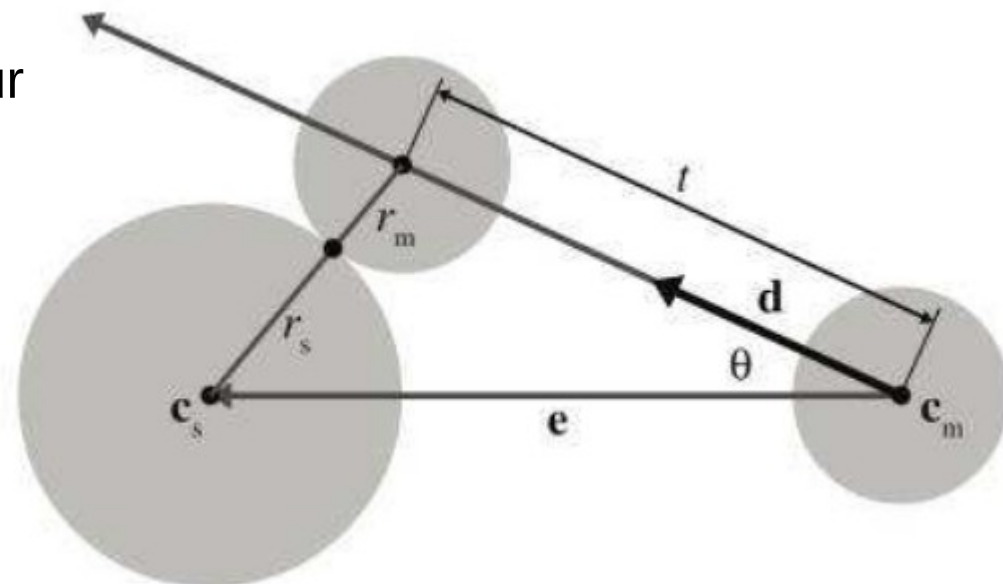
- Intersection de deux cercles ou sphères

- Intersection dynamique

- Interprétation

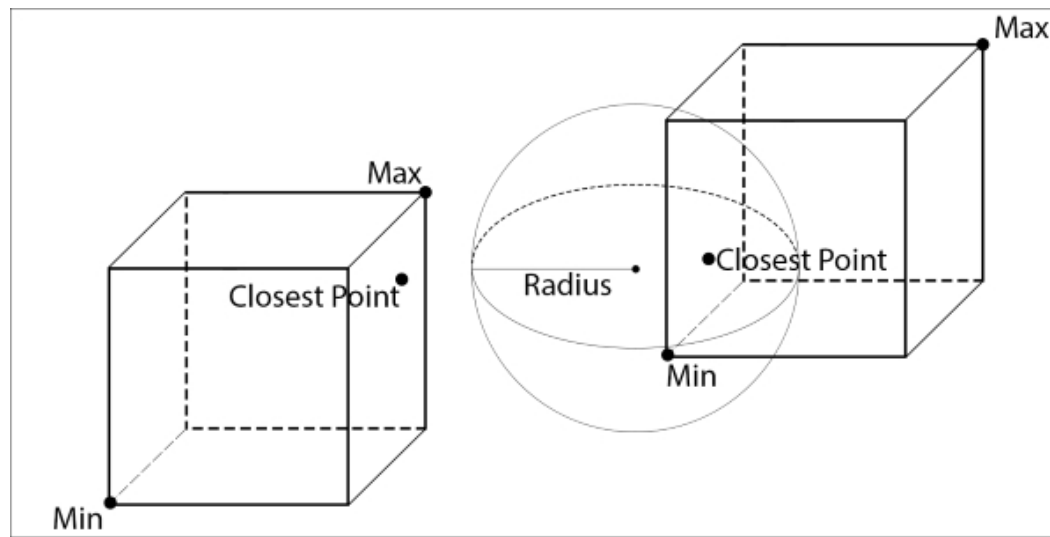
- La plus petite valeur (racine négative) donne l'instant t où les sphères commencent à interagir
 - La plus grande valeur (racine négative) donne l'instant t où elles cessent d'interagir
 - C'est la première valeur qui nous intéresse
 - Si $\|\mathbf{e}\| < r$, les sphères se touchent à $t=0$
 - Si $t < 0$ ou $t > l$, il n'y a pas d'intersection sur cet intervalle

$$t = \mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{d}} - \sqrt{(\mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{d}})^2 + r^2 - \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}}$$



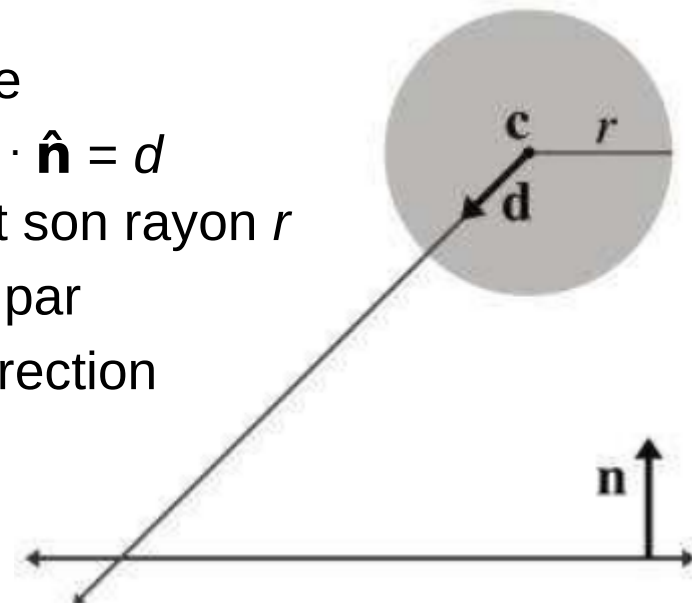
Tests géométriques

- Tests d'intersection
 - Intersection entre une sphère et une AABB
 - On ne va considérer ici que le test statique
 - On va trouver le point de l'AABB qui est le plus proche du centre de la sphère
 - Puis on va calculer la distance entre les deux (ou plutôt son carré), et la comparer avec le rayon de la sphère
 - Si cette distance est inférieure au rayon, alors il y a intersection



Tests géométriques

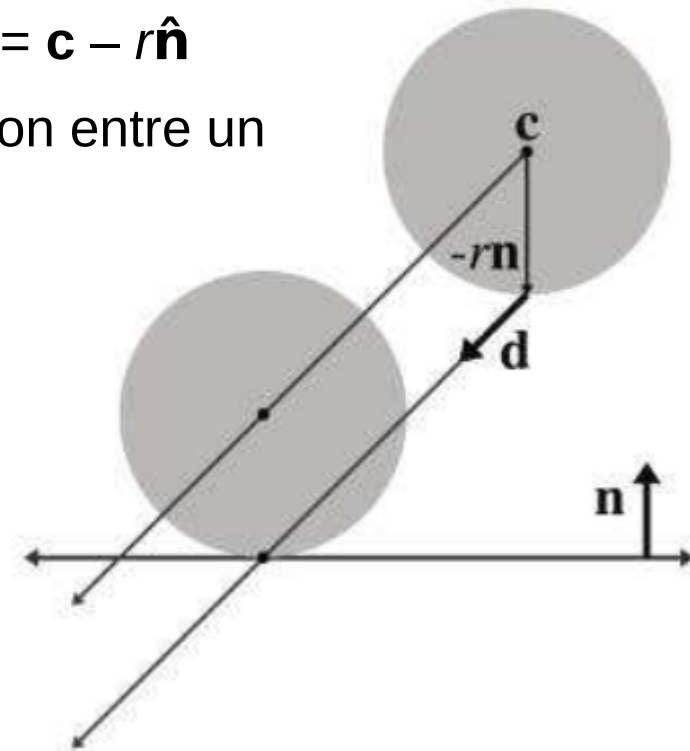
- Tests d'intersection
 - Intersection entre une sphère et un plan
 - Intersection statique
 - On calcule la distance entre le centre de la sphère et le plan
 - Cf. la section "distance entre un point et un plan"
 - Si cette distance inférieure au rayon, il y a intersection
 - Intersection dynamique
 - On considère que le plan est stationnaire
 - On le définit par sa forme implicite $\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}} = d$
 - La sphère est définie par son centre \mathbf{c} et son rayon r
 - Le déplacement de la sphère est donné par
 - Le vecteur unitaire $\hat{\mathbf{d}}$ qui donne la direction
 - Une distance l
 - L'équation $\mathbf{c} + t\hat{\mathbf{d}}$ ($t \in [0, l]$)



Tests géométriques

- Tests d'intersection
 - Intersection entre une sphère et un plan
 - Intersection dynamique
 - Idée : peu importe l'endroit du plan où a lieu l'intersection, le point de contact sur la surface de la sphère est toujours le même
 - Soit \mathbf{p}_0 ce point de contact, défini par $\mathbf{p}_0 = \mathbf{c} - r\hat{\mathbf{n}}$
 - On n'a plus qu'à faire un test d'intersection entre un rayon et un plan

$$\begin{aligned} t &= \frac{d - \mathbf{p}_0 \cdot \hat{\mathbf{n}}}{\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{n}}}, \\ &= \frac{d - (\mathbf{c} - r\hat{\mathbf{n}}) \cdot \hat{\mathbf{n}}}{\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{n}}}, \\ &= \frac{d - \mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{n}} + r}{\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{n}}}. \end{aligned}$$

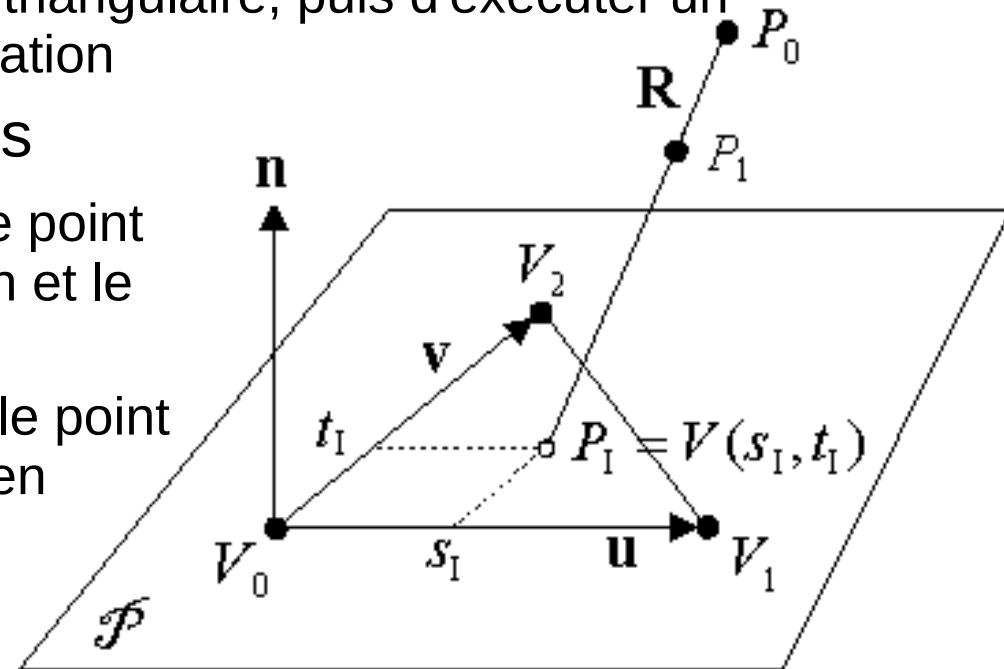
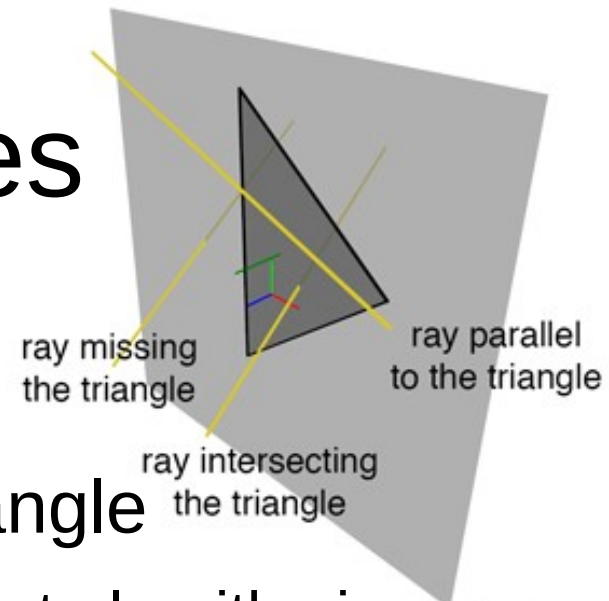


Tests géométriques

- Tests d'intersection

- Intersection entre un rayon et un triangle

- Extrêmement important en infographie et algorithmique géométrique
 - Permet de représenter (ou d'approximer) la surface d'un objet en tant que maillage ("mesh") triangulaire, puis d'exécuter un raytracing sur sa représentation
- Algorithme en deux étapes
 - Première étape : calculer le point d'intersection entre le rayon et le plan contenant le triangle
 - Deuxième étape : tester si le point est à l'intérieur du triangle en calculant ses coordonnées barycentriques



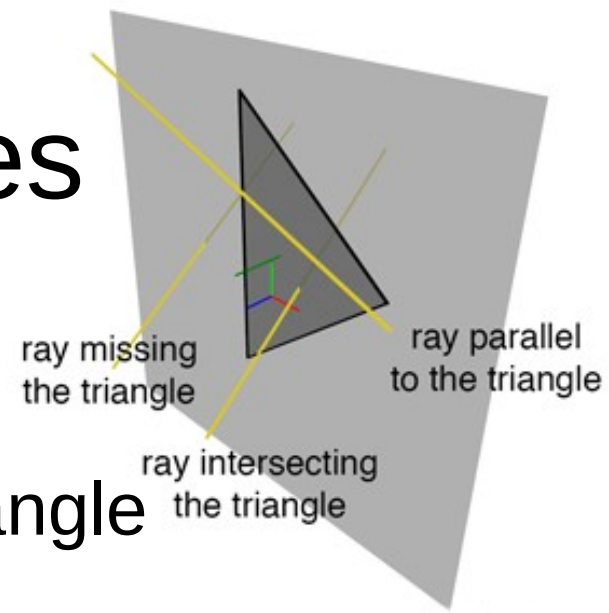
Tests géométriques

- Tests d'intersection

- Intersection entre un rayon et un triangle

- Optimisations possibles

- Détecter et retourner le plus vite possible un résultat négatif ("pas de collision")
 - Différer le plus possible les opérations mathématiques coûteuses, telles que la division
 - Si on n'a finalement pas besoin du résultat de ces opérations, c'est du gaspillage de temps et de ressources
 - Différer ces opérations permettra au compilateur de générer en priorité du code consacré à d'autres opérations plus utiles
 - Ne faire le test de détection de collision que quand le rayon approche de front du triangle
 - Consulter le site <http://www.realtimerendering.com/> pour en savoir plus



Tests géométriques

- Tests d'intersection

- Intersection entre deux AABBs

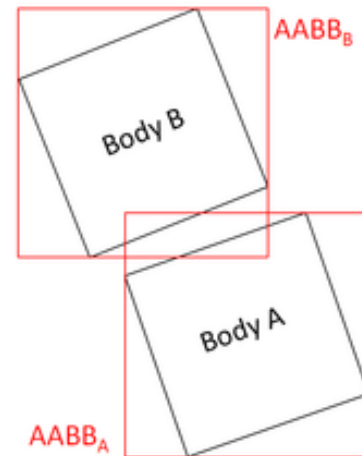
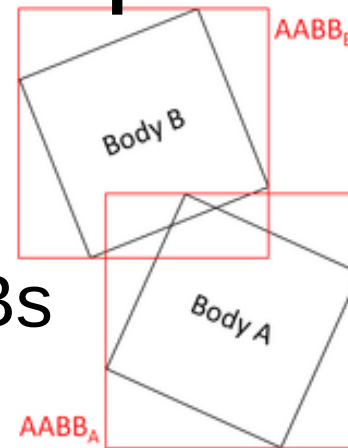
- Intersection statique

- Il suffit de comparer le \mathbf{p}_{\min} de l'une et le \mathbf{p}'_{\max} de l'autre, et vice-versa

Si $x_{\min} \geq x'_{\max}$ ou $x_{\max} \leq x'_{\min}$ ou ... [idem y et z] alors non

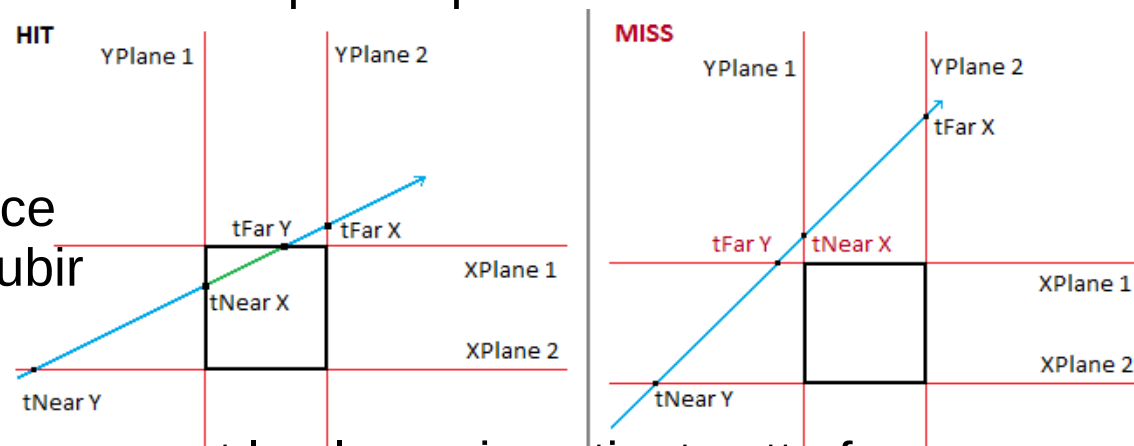
Sinon il y a intersection

- C'est une instance particulière du "test de l'axe séparé"
 - Principe : si deux polyèdres convexes ne se chevauchent pas, alors il existe un axe séparé sur lequel, si on projette ces deux polyèdres, leurs projections ne se chevaucheront pas non plus
 - On peut visualiser un plan perpendiculaire à cet axe séparé qui peut être placé juste entre les 2 polyèdres
 - Seul un nombre fini de données nécessite de passer ce test
 - Les normales des faces, et quelques produits vectoriels
 - Si les projections se chevauchent toujours, il n'y a pas d'axe



Tests géométriques

- Tests d'intersection
 - Intersection entre un rayon et une AABB
 - Là encore, d'une importance capitale
 - Par exemple, si on veut faire un raytracing sur plusieurs meshes triangulaires, on peut tout d'abord tester les AABBs, ce qui permettra de rejeter les meshes plutôt que de toutes les tester individuellement
 - Idée générale
 - Déterminer quelle face de l'AABB pourrait subir l'intersection
 - Faire un test d'intersection entre le rayon et le plan qui contient cette face
 - Si le point d'intersection avec le plan est inclus dans l'AABB, il y a intersection, sinon il n'y en a pas



Fin de la troisième partie