TD3: Mathématiques pour la 3D

1) Soit le rayon 2D suivant, sous forme paramétrique :

$$\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Déterminez (sous forme réduite) la ligne qui contient ce rayon.

2) Donnez le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de la droite 2D définie par : $4x + 7y = 42$.

3) Considérez l'ensemble des 5 points suivants :

$$\mathbf{v}_1 = (7, 11, -5), \quad \mathbf{v}_2 = (2, 3, 8), \quad \mathbf{v}_3 = (-3, 3, 1),$$
$$\mathbf{v}_4 = (-5, -7, 0), \quad \mathbf{v}_5 = (6, 3, 4).$$

(a) Déterminez l'AABB de cette boîte. Que sont $\mathbf{p}_{min}$ et $\mathbf{p}_{max}$?

(b) Listez les 8 sommets de l'AABB.

(c) Déterminez le centre **c** et le vecteur arête **s**

(d) Multipliez les 5 points par la matrice suivante.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0.707 & 0.707 & 0 \\ -0.707 & 0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(e) Quelle est l'AABB de ces points transformés

(f) Quelle est l'AABB que nous obtenons en transformant l'AABB originale par M

4) Considérez un triangle défini par l'énumération (en sens horaire) des sommets suivants :

(6,10,-2) , (3,-1,17) , (-9,8,0)

(a) Quelle est l'équation du plan qui contient ce triangle ?

(b) Est-ce que le point (3,4,5) est devant ou derrière ce plan ?

(c) Quelle est sa distance par rapport au plan ?

(d) Calculez les coordonnées barycentriques du point (13.60, -0.46, 17.11)

(e) Quel est le centre de gravité du triangle ? Le centre du cercle inscrit ? Celui du cercle circonscrit ?

5) On considère la droite 2D infinie qui consiste en tous les points p tels que $\mathbf{p} \cdot [0.3511 \;\; 0.9363] = 6$

(a) Trouvez le point sur la droite qui est le plus proche du point (10,20).

(b) Trouvez le point sur la droite qui est le plus proche du point (4,3).

(c) Trouvez, pour chacun des points précédents, la distance depuis la droite jusqu'à ce point.

6) On considère le rayon 3D défini sous forme paramétrée par $\mathbf{p}(t) = [3 \;\; 4 \;\; 5] + t\,[\,0.2673 \;\; 0.8018 \;\; 0.5345\,]$ où t varie de 0 à 50.

(a) Trouvez la valeur de t pour le point du rayon qui est le plus proche du point (18,7,32).

(b) Trouvez la valeur de t pour le point du rayon qui est le plus proche du point (13,52,26)

7) On considère le plan formé par tous les points **p** qui vérifient l'équation $\mathbf{p} \cdot [\,0.4838 \;\; 0.8602 \;\; -0.1613\,] = 42$

(a) Trouvez le point du plan qui est le plus proche du point (3, 6, 9).

(b) Trouvez le point du plan qui est le plus proche du point (7, 9, 42).

8) On considère une sphère unitaire (de rayon 1) dont le centre est (2,6,9). Trouvez le point sur la sphère qui est le plus proche du point (3,-17,6).

9) On considère l'AABB définie par $\mathbf{p}_{min}$=(2, 4, 6) et $\mathbf{p}_{max}$ = (8, 14, 26). Trouvez le point dans l'AABB qui est le plus proche du point (23,-9,12).

10) Trouvez le point d'intersection des deux droites 2D suivantes (définies sous forme implicite) :

$\mathbf{p} \cdot [\,-0.7863 \;\; 0.6178\,] = 8$

$\mathbf{p} \cdot [\,0.2688 \;\; 0.9632\,] = 2$

11) On considère le rayon 3D suivant, défini sous forme paramétrique par $\mathbf{r}(t) = t\,[\,0.4417 \;\; 0.5822 \;\; 0.6826\,]$

et le plan dont tous les points p satisfont l'équation $\mathbf{p} \cdot [\;\; 0.6125 \;\; 0.4261 \;\; 0.6658\,]$

Trouvez le point d'intersection entre le rayon et le plan. Est-ce qu'elle a lieu au-dessus ou en-dessous du plan ?

12) On considère l'AABB définie par $\mathbf{p}_{min}$ = (7,-4,16) et $\mathbf{p}_{max}$ = (18,4,26), ainsi que le plan dont tous les points **p** satisfont l'équation $\mathbf{p} \cdot [\,-0.4472 \;\; 0 \;\; 0.8944\,] = 13$

Est-ce que le plan croise l'AABB, et sinon, est-ce qu'il passe devant ou derrière le plan ?

Bart GEORGE bge@eisti.eu

13) Trouvez le point d'intersection entre les trois plans définis par les équations suivantes :

$\mathbf{p} \cdot [\ -0.5973\ \ 0.6652\ \ -0.4480\ ] = 2$

$\mathbf{p} \cdot [\ 0.7613\ \ 0.2900\ \ -0.5800\ ] = 3$

$\mathbf{p} \cdot [\ 0.3128\ \ 0.8096\ \ 0.4968\ ] = 5$

14) On considère la sphère de rayon 10 dont le centre est l'origine. Trouvez les points d'intersection avec le rayon suivant : $\mathbf{r}(t) = [\ -10.1275\ -9.6922\ -9.7103\ ] + t\ [\ 0.5179\ \ 0.6330\ \ 0.5754\ ]$

15) On considère une sphère S_1 de rayon 7 et de centre (42, 9, 90) et une sphère S_2 de rayon 5 et de centre (41, 80, 41). Les sphères commencent à bouger à t=0. Le vecteur vélocité de S_1 en unités par secondes est (27, 38, -37]. Le vecteur vélocité de S_2 en unités par seconde est [24, -38, 10]. Déterminez si les deux sphères entrent en collision, et si oui, trouver le temps t où il y a l'intersection.

16) On considère une sphère de rayon 3 et de centre (78, 43, 43) et un plan dont tous les points **p** vérifient l'équation $\mathbf{p} \cdot [\ 0.5358\ \ -0.7778\ \ -0.3284\ ] = 900$.

La sphère commence à se mouvoir au temps $t = 0$ avec un vecteur vélocité de [9 2 1] unités par seconde.

Est-ce que la sphère croise le plan ? Si c'est le cas, à quel moment elle touche le plan pour la première fois ? Recommencez avec un vecteur vélocité de [-9 -2 -1]

17) On considère un triangle défini pa les sommets (en sens horaire) (78, 59, 29), (21, 172, 65) et (7, 6, 0).

(a) Calculez l'équation du plan contenant le triangle.

(b) On considère les rayons suivants, qui partent de l'origine :

$\mathbf{r}(t) = t\ [\ 0.6956\ \ 0.6068\ \ 0.3848\ ]$

$\mathbf{r}(t) = t\ [\ 0.3839\ \ 0.3839\ \ 0.8398\ ]$

$\mathbf{r}(t) = t\ [\ 0.7208\ \ 0.1941\ \ 0.6654\ ]$

(i) Pour chacun de ces rayons, calculez son point d'intersection avec le triangle.

(ii) Calculez les coordonnées barycentriques de chaque triange.

(iii) Utilisez cette information pour déterminer si le rayon traverse chacun des triangles.