Traitement Numérique du Signal

Nathalie Thomas

IRIT/ENSEEIHT
Nathalie.Thomas@enseeiht.fr

Traitement Numérique du signal

1- Signaux numériques
2- Transformée de Fourier Discrète (TFD)
3- Estimation des fonctions d’auto et d’inter corrélation
4- Estimation de la densité spectrale de puissance (DSP)
5- Filtrage numérique linéaire

Fonctions d'inter et d'auto corrélation

→ Signaux déterministes

A énergie finie

$$R_{xy}(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) y^*(n-k)$$

A puissance moyenne finie non périodique

$$R_{xy}(k) = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x(n) y^*(n-k)$$

A puissance moyenne finie périodique de période N_0

$$R_{xy}(k) = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x(n) y^*(n-k)$$

→ Signaux aléatoires

$$R_{xy}(k) = E\left[x(n) y^*(n-k)\right]$$

Fonctions d'inter et d'auto corrélation

→ Signaux aléatoires : première estimation possible

$$\widehat{R}_{xy}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n-k) \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$\widehat{R}_{xy}(-k) = \widehat{R}^*_{xy}(k)$$

(Symétrie hermitienne)

Exemple :

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

$$f_0 = 100\ Hz;$$

$$\phi\ v.a.\ u.r.\ sur\ \ [0, 2\pi]$$

Fonctions d'inter et d'auto corrélation

→ Signaux aléatoires : première estimation possible

$$\widehat{R}_{xy}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n-k) \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$\widehat{R}_{xy}(-k) = \widehat{R}^*_{xy}(k)$$

(Symétrie hermitienne)

Exemple :

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

$$f_0 = 100\ Hz;$$

$$\phi\ v.a.\ u.r.\ sur\ [0, 2\pi]$$

$$\boxed{R_x(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)}$$

Fonctions d'inter et d'auto corrélation

→ Signaux aléatoires : première estimation possible

$$\widehat{R}_{xy}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n-k) \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$\widehat{R}_{xy}(-k) = \widehat{R}^*_{xy}(k)$$

(Symétrie hermitienne)

Code Matlab :

Exemple :

$$x(t) = \cos\left(2\pi f_0 t + \phi\right)$$

$$f_0 = 100\ Hz;$$

$$\phi\ v.a.\ u.r.\ sur\ \ [0, 2\pi]$$

$$\boxed{R_x(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos\left(2\pi f_0 \tau\right)}$$

```
%Paramètres
f0=100;      %fréquence du cosinus
Fe=1000;    %fréquence d'échantillonnage
Te=1/Fe;     %période d'échantillonnage
N=100;       %nombre d'échantillons

%Génération du signal
x=cos(2*pi*f0*[0:Te:N*Te]+rand*2*pi);

% Calcul et tracé de son autocorrélation biaisée
Rx=xcorr(x);
figure; plot([-N*Te:Te:N*Te],Rx);
xlabel('Temps (s)'); ylabel('R_x')
```

Fonctions d'inter et d'auto corrélation

→ Signaux aléatoires : première estimation possible

$$\widehat{R}_{xy}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n-k) \quad 0 \le k \le N-1$$

$$\widehat{R}_{xy}(-k) = \widehat{R}^*_{xy}(k)$$

(Symétrie hermitienne)

Code Matlab :

Exemple :

$$x(t) = \cos\left(2\pi f_0 t + \phi\right)$$

$$f_0 = 100\ Hz;$$

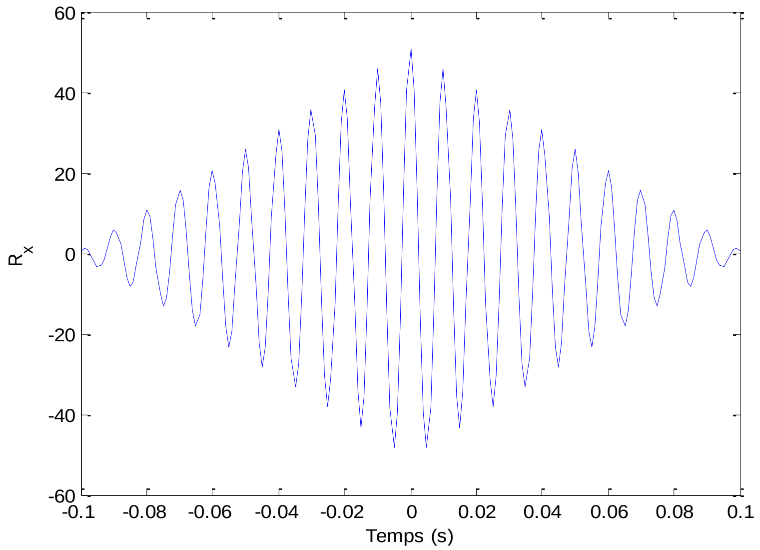
$$\phi\ v.a.\ u.r.\ sur\ \ [0, 2\pi]$$

$$\boxed{R_x(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos\left(2\pi f_0 \tau\right)}$$

```
%Paramètres
f0=100;      %fréquence du cosinus
Fe=1000;     %fréquence d'échantillonnage
Te=1/Fe;     %période d'échantillonnage
N=100;       %nombre d'échantillons

%Génération du signal
x=cos(2*pi*f0*[0:Te:N*Te]+rand*2*pi);

% Calcul et tracé de son autocorrélation biaisée
Rx=xcorr(x);
figure; plot([-N*Te:Te:N*Te],Rx);
xlabel('Temps (s)'); ylabel('R_x')
```



Fonctions d'inter et d'auto corrélation

→ Signaux aléatoires : première estimation possible

$$\widehat{R}_{xy}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n-k) \quad 0 \le k \le N-1$$

$$\widehat{R}_{xy}(-k) = \widehat{R}^*_{xy}(k)$$

(Symétrie hermitienne)

Code Matlab :

Exemple :

$$x(t) = \cos\left(2\pi f_0 t + \phi\right)$$

$$f_0 = 100\ Hz;$$

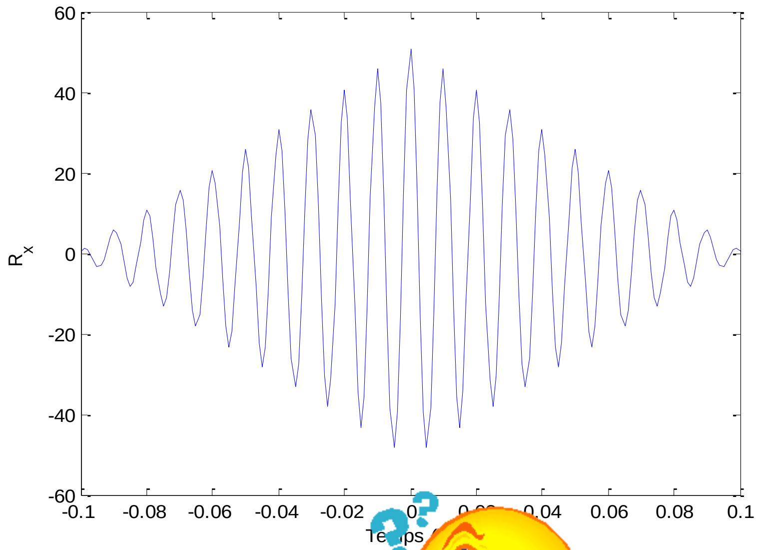
$$\phi\ v.a.\ u.r.\ sur\ \ [0, 2\pi]$$

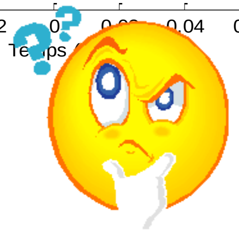
$$\boxed{R_x(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos\left(2\pi f_0 \tau\right)}$$

```
%Paramètres
f0=100;      %fréquence du cosinus
Fe=1000;     %fréquence d'échantillonnage
Te=1/Fe;     %période d'échantillonnage
N=100;       %nombre d'échantillons

%Génération du signal
x=cos(2*pi*f0*[0:Te:N*Te]+rand*2*pi);

% Calcul et tracé de son autocorrélation biaisée
Rx=xcorr(x);
figure; plot([-N*Te:Te:N*Te],Rx);
xlabel('Temps (s)'); ylabel('R_x')
```





Fonctions d'inter et d'auto corrélation

→ Signaux aléatoires : première estimation possible

$$\widehat{R}_{xy}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n-k) \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$\widehat{R}_{xy}(-k) = \widehat{R}^*_{xy}(k)$$

(Symétrie hermitienne)

Fonctions d'inter et d'auto corrélation

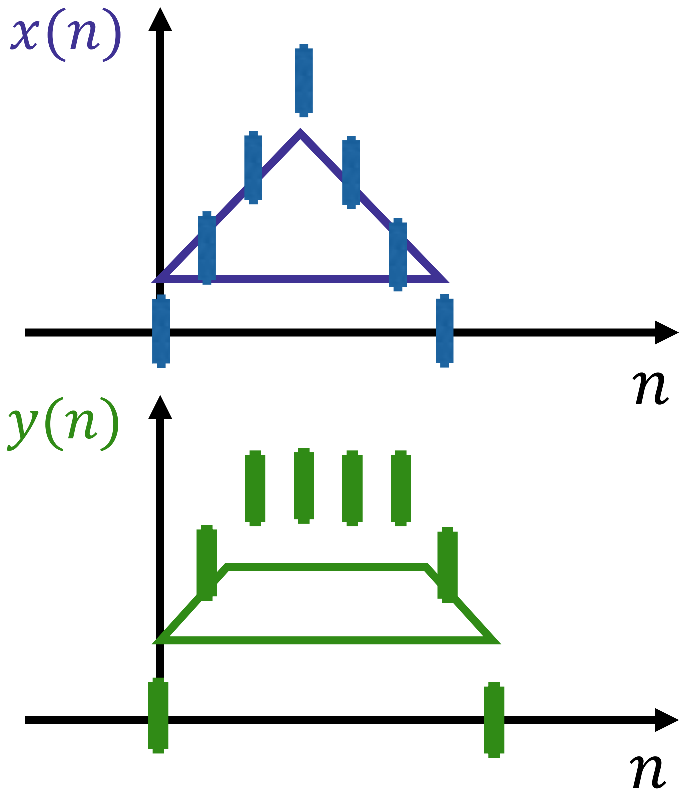
→ <u>Signaux aléatoires : première estimation possible</u>

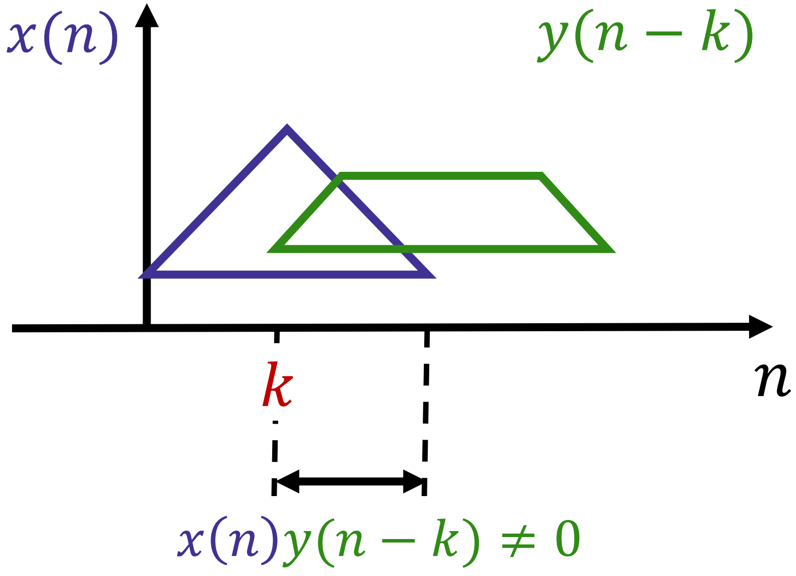
$$\widehat{R}_{xy}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n-k) \quad 0 \le k \le N-1$$

$$\widehat{R}_{xy}(-k) = \widehat{R}^*_{xy}(k)$$

(Symétrie hermitienne)

Exemple :





Fonctions d'inter et d'auto corrélation

→ <u>Signaux aléatoires : première estimation possible</u>

$$\widehat{R}_{xy}(k) = \frac{1}{N} \sum_{\substack{n=\cancel{0} \\ k}}^{N-1} x(n) y^*(n-k) \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$\widehat{R}_{xy}(-k) = \widehat{R}^*_{xy}(k)$$

(Symétrie hermitienne)

Fonctions d'inter et d'auto corrélation

→ <u>Signaux aléatoires : première estimation possible</u>

$$\widehat{R}_{xy}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=\underset{k}{\cancel{0}}}^{N-1} x(n)y^*(n-k) \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$\widehat{R}_{xy}(-k) = \widehat{R}^*_{xy}(k)$$

(Symétrie hermitienne)

$$E\left[\widehat{R}_{xy}(k)\right] = \frac{N-|k|}{N} R_{xy}(k)$$

Fonctions d'inter et d'auto corrélation

→ Signaux aléatoires : première estimation possible

$$\widehat{R}_{xy}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=\cancel{0}\ k}^{N-1} x(n)y^*(n-k) \quad 0 \le k \le N-1$$

$$\widehat{R}_{xy}(-k) = \widehat{R}^*_{xy}(k)$$

(Symétrie hermitienne)

Exemple :

$$x(t) = \cos\left(2\pi f_0 t + \phi\right)$$

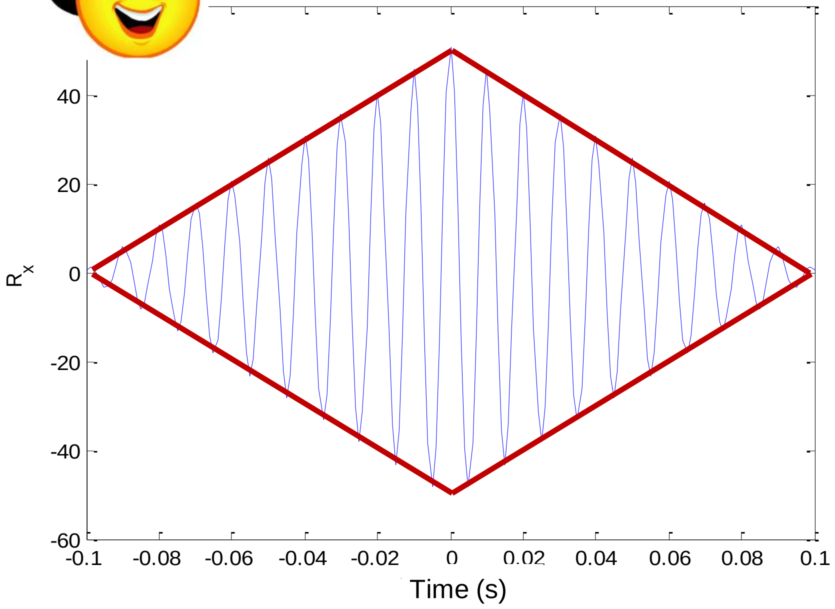
$$f_0 = 100\ Hz;$$

$$\phi\ v.a.\ u.r.\ sur\ [0, 2\pi]$$

$$\boxed{R_x(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos\left(2\pi f_0 \tau\right)}$$

Biais Multiplicatif Triangulaire

$$E\left[\widehat{R}_{xy}(k)\right] = \frac{N-|k|}{N} R_{xy}(k)$$



Fonctions d’inter et d’auto corrélation

→ <u>Signaux aléatoires : première estimation possible</u>

$$\widehat{R}_{xy}(k) = \frac{1}{N}\sum_{\substack{n=\cancel{0}\\ k}}^{N-1} x(n)y^*(n-k) \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$\widehat{R}_{xy}(-k) = \widehat{R}^*_{xy}(k)$$

(Symétrie hermitienne)

Estimateur biaisé

Fonctions d’inter et d’auto corrélation

→ <u>Signaux aléatoires : première estimation possible</u>

$$\widehat{R}_{xy}(k) = \frac{1}{N}\sum_{\substack{n=\cancel{0}\\ k}}^{N-1} x(n)y^*(n-k) \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$\widehat{R}_{xy}(-k) = \widehat{R}^*_{xy}(k)$$

(Symétrie hermitienne)

Estimateur biaisé

→ <u>Signaux aléatoires : deuxième estimation possible</u>

$$\widehat{R}_{xy}(k) = \frac{1}{N-k}\sum_{\substack{n=\cancel{0}\\ k}}^{N-1} x(n)y^*(n-k) \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$\widehat{R}_{xy}(-k) = \widehat{R}^*_{xy}(k)$$

(Symétrie hermitienne)

Estimateur non biaisé

Fonctions d’inter et d’auto corrélation

→ <u>Signaux aléatoires : deuxième estimation possible</u>

Estimateur non biaisé

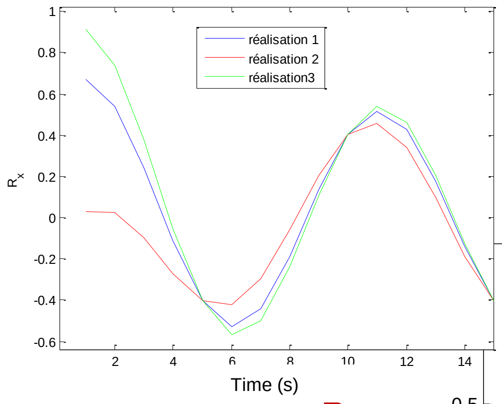
$$\widehat{R}_{xy}(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{n=\cancel{0}\;k}^{N-1} x(n)y^*(n-k) \quad 0 \le k \le N-1 \qquad \widehat{R}_{xy}(-k) = \widehat{R}^*_{xy}(k)$$

(Symétrie hermitienne)

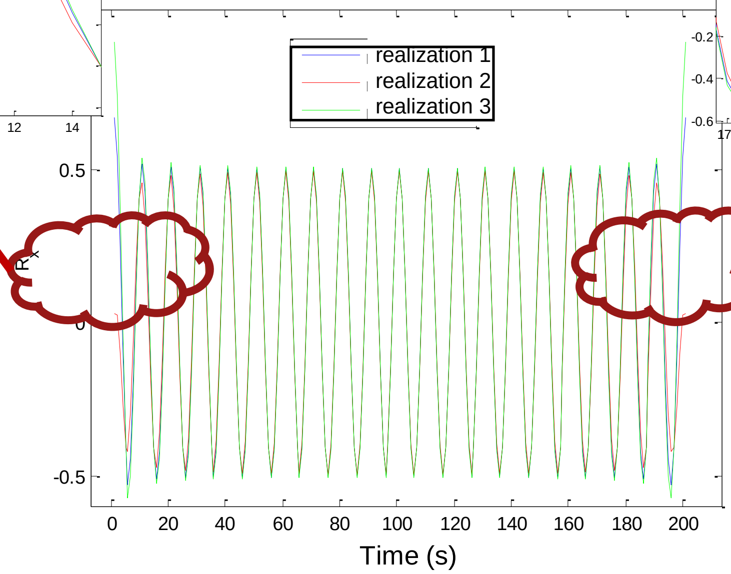
<u>Code Matlab :</u>

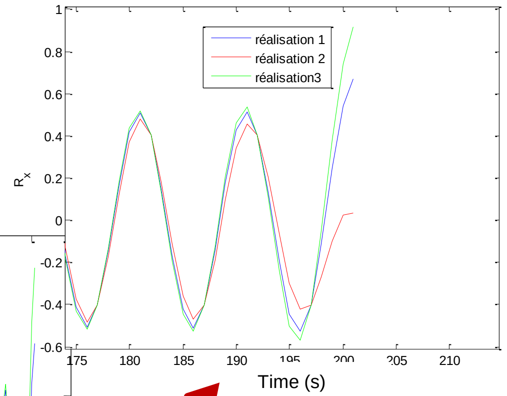
```
%Paramètres
f0=100;      %fréquence du cosinus
Fe=1000;     %fréquence d'échantillonnage
Te=1/Fe;     %période d'échantillonnage
N=100;       %nombre d'échantillons

% Calcul et tracé de son autocorrélation non biaisée
% pour différentes réalisations de signal
x1=cos(2*pi*f0*[0:Te:N*Te]+rand*2*pi);
Rx1=xcorr(x1,'unbiased');
x2=cos(2*pi*f0*[0:Te:N*Te]+rand*2*pi);
Rx2=xcorr(x2,'unbiased');
x3=cos(2*pi*f0*[0:Te:N*Te]+rand*2*pi);
Rx3=xcorr(x3,'unbiased');
figure
plot(Rx1); hold on; plot(Rx2,'r'); plot(Rx3,'g')
legend('réalisation 1','réalisation 2','réalisation3')
xlabel('Temps (s)'); ylabel('R_x')
```



zooms





Variance importante sur les bords

Fonctions d'inter et d'auto corrélation

→ Estimation dans le domaine fréquentiel

Pour :

$$\widehat{R}_{xy}(k) \propto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y^*(n-k),\ \ k = 0, ..., N-1$$

Convolution linéaire :

$$(x_1 * x_2)(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(n)x_2(k-n)$$

$$\Downarrow$$

$$\widehat{R}_{xy}(k) \propto x(k) * y^*(-k),\ \ k = 0, ..., N-1$$

Fonctions d'inter et d'auto corrélation

→ Estimation dans le domaine fréquentiel

Pour : $$\widehat{R}_{xy}(k) \propto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y^*(n-k),\ k = 0, ..., N-1$$

Convolution linéaire : $$(x_1 * x_2)(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(n)x_2(k-n)$$

⬇

$$\widehat{R}_{xy}(k) \propto x(k) * y^*(-k),\ k = 0, ..., N-1$$

⬇

$$\widehat{R}_{xy}(k) \propto TFD^{-1}\left[X(n)Y^*(n)\right], 0 \leq n \leq N-1$$

Estimateur fréquentiel

Fonctions d'inter et d'auto corrélation

→ Estimation dans le domaine fréquentiel

Pour : $$\widehat{R}_{xy}(k) \propto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y^*(n-k),\ k = 0, \ldots, N-1$$

N^2 opérations $(+/\times)$
Pour des signaux de taille N points

Convolution linéaire : $$(x_1 * x_2)(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(n)x_2(k-n)$$

$$\Downarrow$$

$$\widehat{R}_{xy}(k) \propto x(k) * y^*(-k),\ k = 0, \ldots, N-1$$

$$\Downarrow$$

$$\widehat{R}_{xy}(k) \propto TFD^{-1}\left[X(n)Y^*(n)\right], 0 \leq n \leq N-1$$

Estimateur fréquentiel

Temps de calcul : $N + 3N\log_2(N) \ll N^2$ **opérations** $(+/\times)$

Fonctions d'inter et d'auto corrélation

→ Estimation dans le domaine fréquentiel

Pour : $$\widehat{R}_{xy}(k) \propto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y^*(n-k),\ k = 0, \dots, N-1$$

N^2 opérations $(+/\times)$
Pour des signaux de taille N points

Convolution linéaire : $$(x_1 * x_2)(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(n)x_2(k-n)$$

⬇

$$\widehat{R}_{xy}(k) \propto x(k) * y^*(-k),\ k = 0, \dots, N-1$$

⬇

!! Condition : si la TFD transforme un produit en produit de convolution linéaire !!

$$\widehat{R}_{xy}(k) \propto TFD^{-1}\left[X(n)Y^*(n)\right], 0 \leq n \leq N-1$$

Estimateur fréquentiel

Temps de calcul : $N + 3Nlog_2(N) \ll N^2$ **opérations** $(+/\times)$