Traitement Numérique du Signal

Nathalie Thomas

IRIT/ENSEEIHT
Nathalie.Thomas@enseeiht.fr

Traitement Numérique du signal

1- Signaux numériques
2- Transformée de Fourier Discrète (TFD)
3- Estimation des fonctions d’auto et d’inter corrélation
4- Estimation de la densité spectrale de puissance (DSP)
5- Filtrage numérique linéaire

Densité spectrale de puissance

- **Deux estimateurs de base : définition**

  → Corrélogramme

$$\widehat{S}_x(n) = TFD\left[\widehat{R}_x(k)\right]$$

Densité spectrale de puissance

- **Deux estimateurs de base : définition**

→ Corrélogramme

Vue avant

$$\widehat{S}_x(n) = \boxed{TFD}\left[\widehat{R}_x(k)\right]$$

Vu avant

Corrélogramme biaisé

$$\widehat{R}_x(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)x^*(n-k)$$

Corrélogramme non biaisé

$$\widehat{R}_x(k) = \frac{1}{N-k}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)x^*(n-k)$$

Densité spectrale de puissance

- **Deux estimateurs de base : définition**

$\rightarrow$ Corrélogramme

Vue avant

$$\widehat{S}_x(n) = \boxed{TFD}\left[\widehat{R}_x(k)\right]$$

Vu avant

Corrélogramme biaisé

$$\widehat{R}_x(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)x^*(n-k)$$

Corrélogramme non biaisé

$$\widehat{R}_x(k) = \frac{1}{N-k}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)x^*(n-k)$$

$\rightarrow$ Périodogramme

$$\widehat{S}_x(n) = \frac{1}{N}\left|TFD\left[x(k)\right]\right|^2$$

Densité spectrale de puissance

- **Deux estimateurs de base : définition**

→ Corrélogramme

Vue avant

$$\widehat{S}_x(n) = \boxed{TFD}\left[\widehat{R}_x(k)\right]$$

Vu avant

Corrélogramme biaisé

$$\widehat{R}_x(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)x^*(n-k)$$

Corrélogramme non biaisé

$$\widehat{R}_x(k) = \frac{1}{N-k}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)x^*(n-k)$$

→ Périodogramme

$$\widehat{S}_x(n) = \frac{1}{N}\left|\boxed{TFD}\left[x(k)\right]\right|^2$$

Vue avant

<u>Remarque :</u> périodogramme ⇔ corrélogramme « biaisé »

Densité spectrale de puissance

- **Deux estimateurs de base : définition**

→ Corrélogramme

Vue avant

$$\widehat{S}_x(n) = \boxed{TFD}\left[\widehat{R}_x(k)\right]$$

Vu avant

Corrélogramme biaisé $\qquad \widehat{R}_x(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)x^*(n-k)$

Corrélogramme non biaisé $\qquad \widehat{R}_x(k) = \frac{1}{N-k}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)x^*(n-k)$

→ Périodogramme

$$\widehat{S}_x(n) = \frac{1}{N}\left|\boxed{TFD}\left[x(k)\right]\right|^2$$

Vue avant

Remarque : périodogramme ⬄ corrélogramme « biaisé »

- **Deux estimateurs de base : Inconvénients**

→ Estimateurs non consistants

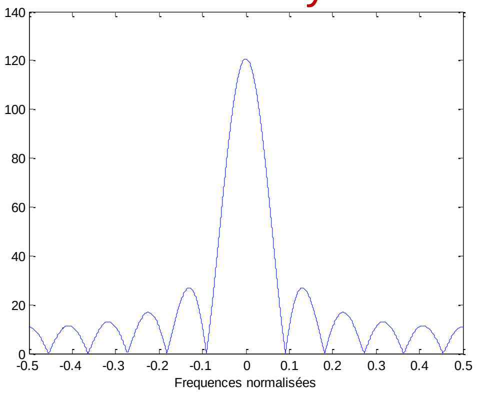
- Biais convolutif : $E\left[\widehat{S}_x(n)\right] = S_x(n) * W(n)$
- Variance indépendante de la durée d'observation du signal :

$$Var\left[\widehat{S}_x(n)\right] \xrightarrow[N\to\infty]{} S_x^2(n)$$

Exemple : périodogramme ⬄ corrélogramme « biaisé »

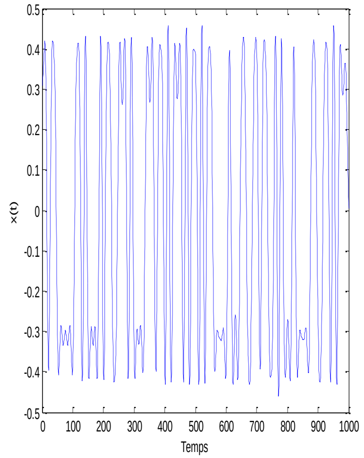
$$E\left[\widehat{S}_x(n)\right] = S_x(n) * TFD\left[1 - \frac{|k|}{N}\right]$$

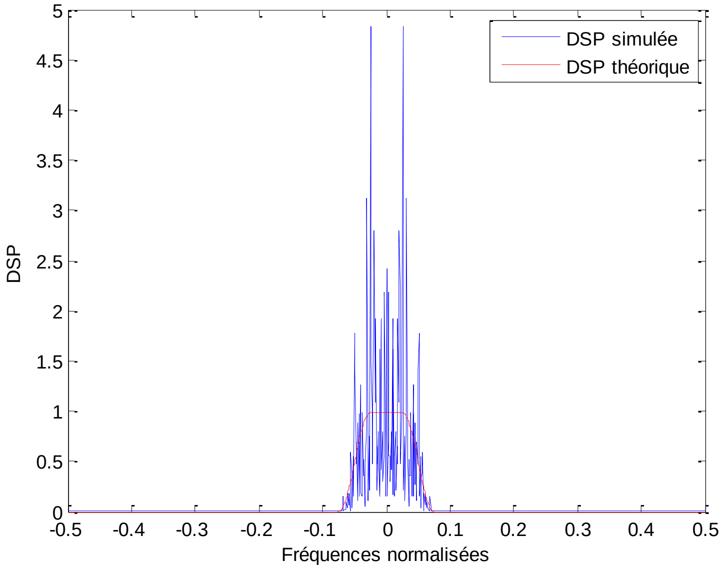
Biais convolutif : Noyau de Fejer



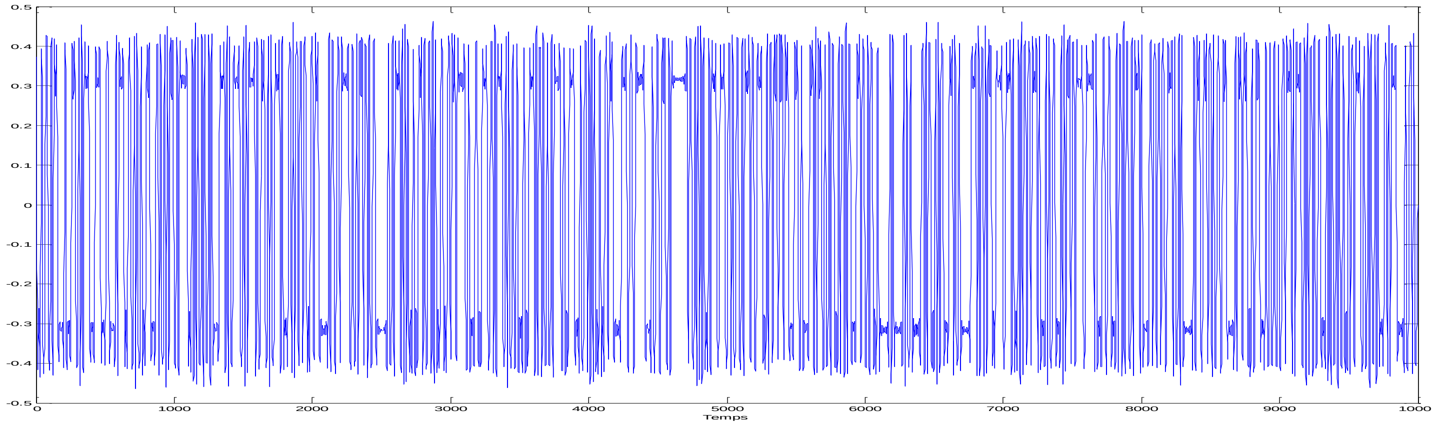
Densité spectrale de puissance

1 000 échantillons de signal



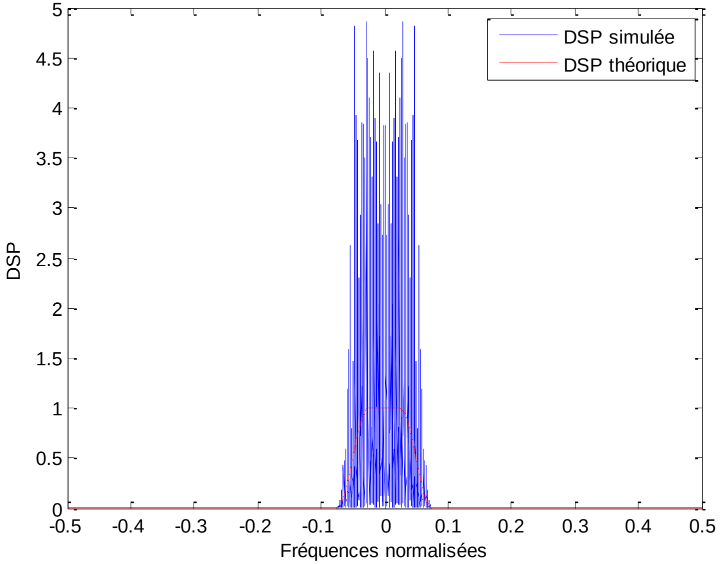


10 000 échantillons de signal



Exemple : périodogramme ⬄ corrélogramme « biaisé »

variance indépendante de la durée d'observation du signal

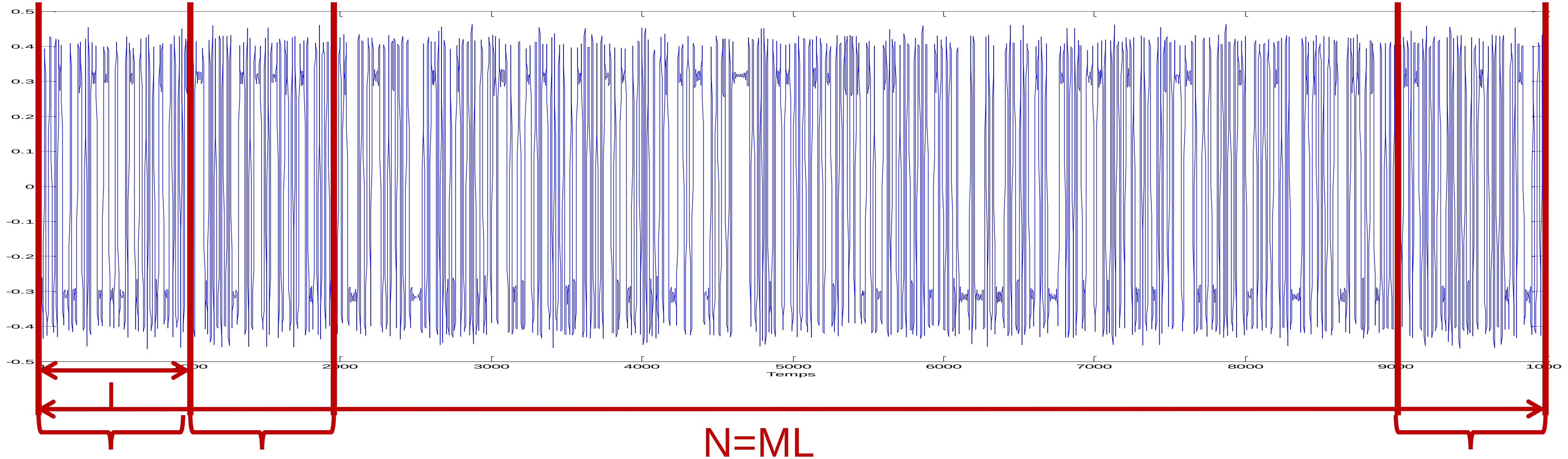


Densité spectrale de puissance

- **Autres estimateurs**

  → <u>Périodogramme cumulé (Bartlett)</u>

<u>Objectif :</u> diminuer la variance d'estimation de la DSP



N=ML

$S_{x_1}(f)$ $S_{x_2}(f)$ … $S_{x_{N-1}}(f)$

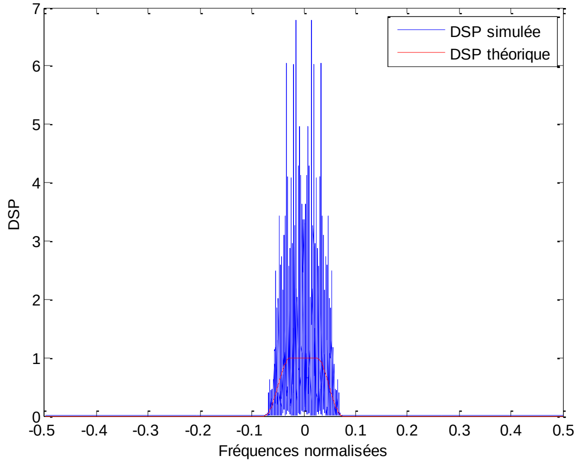
$$S_x(f) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} S_{x_i}(f)$$

Densité spectrale de puissance

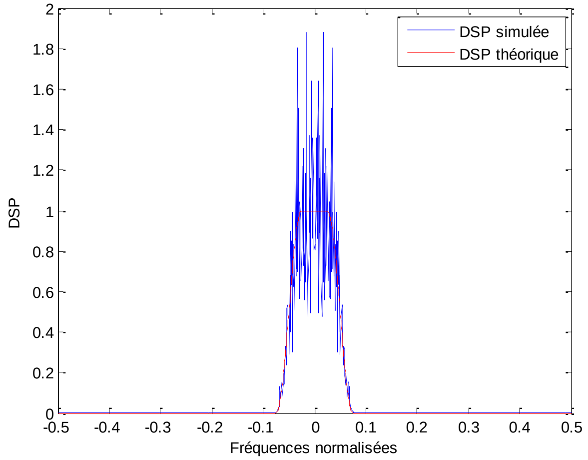
- **Autres estimateurs**

  → <u>Périodogramme cumulé (Bartlett)</u>

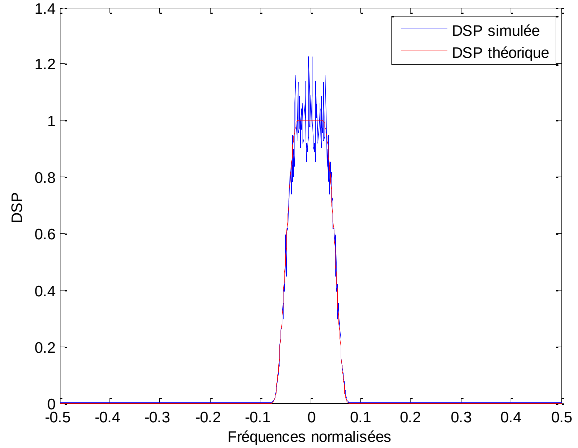
N= 10 000 échantillons, 1 fenêtre



N= 10 000 échantillons, M=10 fenêtres
de L= 1000 échantillons



N= 100 000 échantillons, M=100 fenêtres
de L=1 000 échantillons



<u>Inconvénients :</u>

- Diminution de la résolution spectrale : pas de calcul du spectre en F_e/L au lieu de F_e/N
- Pour une durée d'observation du signal donnée augmentation du biais : lobe central de W(n) de largeur 2/L au lieu de 2/N.

Densité spectrale de puissance

- **Autres estimateurs**

Fenêtre de pondération

→ Périodogramme modifié: $\widehat{S}_x(n) = \frac{1}{N}\left|TFD\left[x(k) \times w(k)\right]\right|^2$

→ Corrélogramme modifié : $\widehat{S}_x(n) = TFD\left[\widehat{R}_x(k) \times w(k)\right]$

Inconvénient : lissage des variations importantes, diminution du pouvoir séparateur

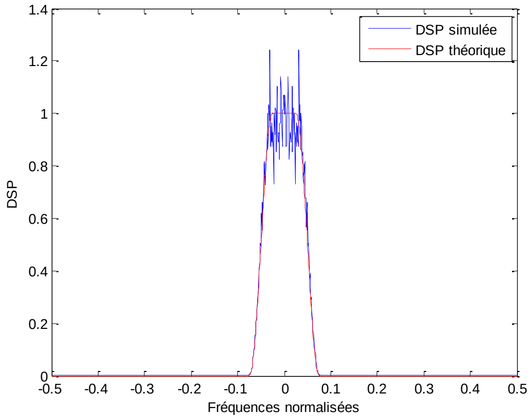
→ Périodogramme de Welch = périodogramme cumulé et modifié

- Fenêtre glissante => M’ > M fenêtres de taille L en les autorisant à se recouvrir
- Périodogramme modifié sur chaque tranche de signal

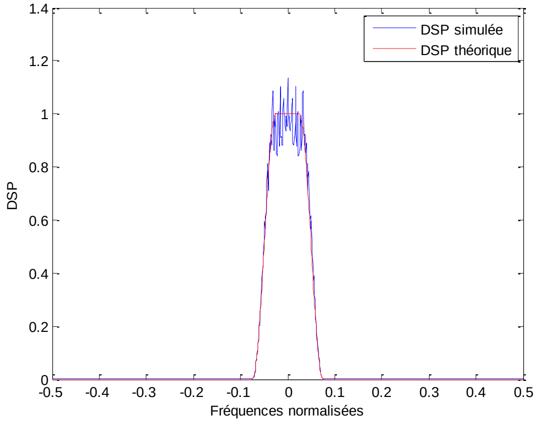
- Exemple :

N= 100 000 échantillons

M=100 fenêtres
de L=1 000 échantillons

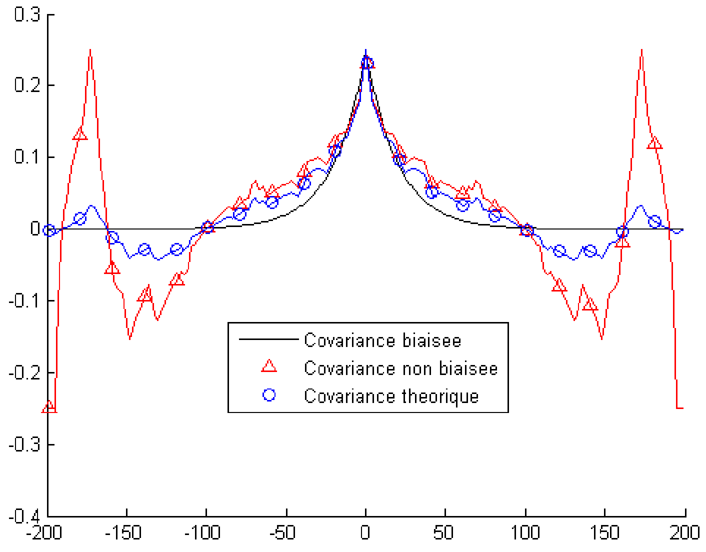


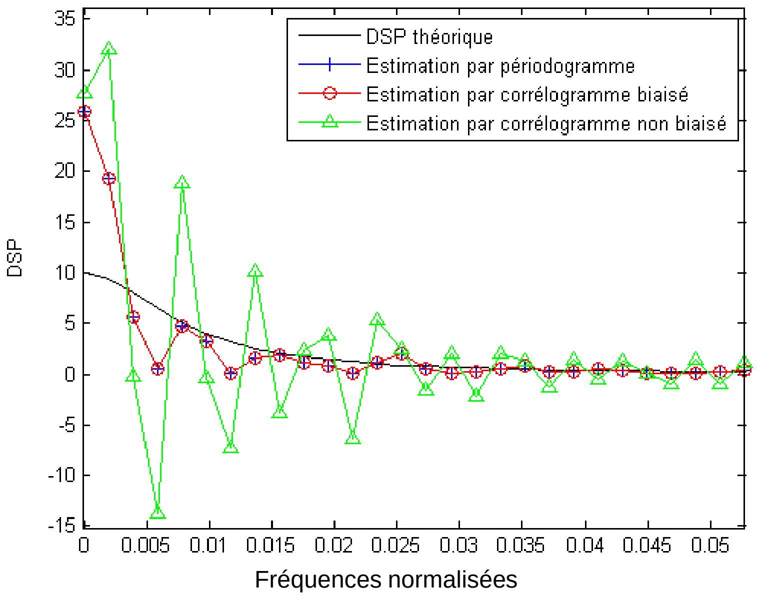
M=100 fenêtres de L=1 000 échantillons
Recouvrement de L/2, fenêtrage de Hamming

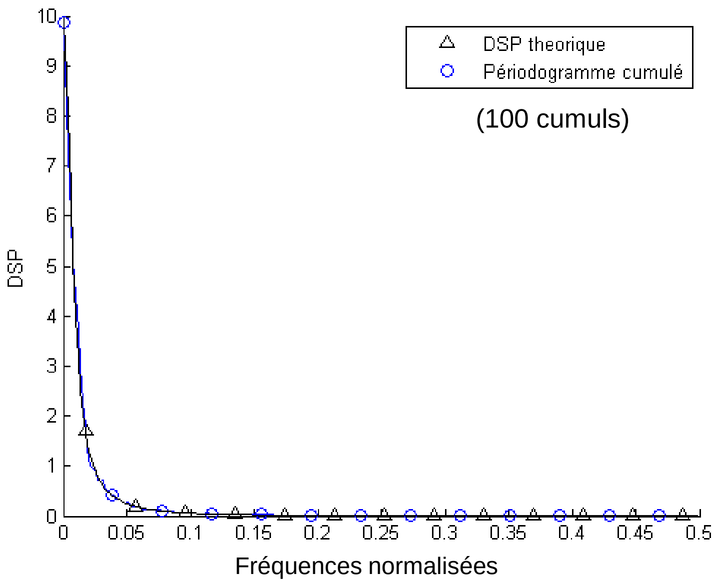


Densité spectrale de puissance

- **Exemple sur une ligne d’image SAR** (Synthetic Aperture Radar)







<u>Remarque :</u> l’estimation de la DSP par périodogramme (ou corrélogramme biaisé) est plus proche de la DSP théorique, ce qui est généralement le cas pour des signaux réels.