Rapport BE Automatique

Nicolaï BEUHORRY-SASSUS - Quentin POINTEAU

Contents

List of Figures

List of Tables

Ce bureau d'étude a eu pour objectif, en lien avec le cours et les tds, de nous initier à la théorie des sytèmes au travers de différentes notions fondamentales parmis lesquelles on retrouve : la théorie du contrôle, les systèmes commandées, la stabilité des systèmes dynamiques ou encore la commande des systèmes cyber-physique qui inclue elle-même la contrôlabilité, l'observabilité et la stabilisation par retour d'état. Tout au long de ce parcours, nous avons utilisé comme objet d'étude le *Robot Lego Segway*, qui nous a permi entre autres de visualiser et mettre en application toutes les connaissances transmises. Ainsi, nous allons retracer au travers de ce rapport, en mentionnant succinctement les notions nécéssaires à la compréhension, la démarche que nous avons suivie pour satisfaire l'exigence suivante qui était de stabiliser à la verticale et à l'arrêt le *Robot Lego Segway*.

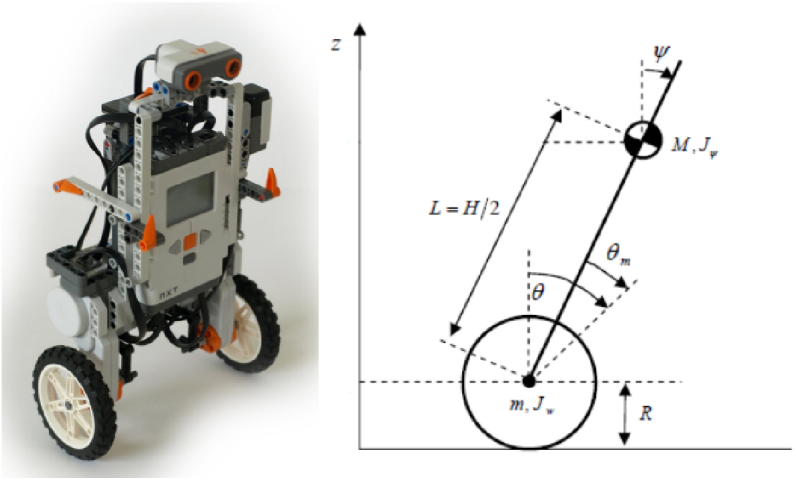


Figure 1: Illustration du Robot Lego Segway ainsi que sa schématisation

1 Positionnement du problème

Une première étape consiste à décrire à l'aide d'équations physiques le comportement du système. Pour ce faire nous allons dans une première partie assimiler le fonctionnement du robot à l'arrêt à celui d'un pendule inversé. Cette première approximation va nous permettre d'obtenir des équations plus simples à manipuler. Nous travaillerons dans un deuxième temps avec un modèle se rapprochant plus du comportement réel du système.
Avec :

- $\overrightarrow{OM} = l\vec{e}_r$
- α angle entre la normale du support et le pendule en rad
- l la longueur du pensule en m

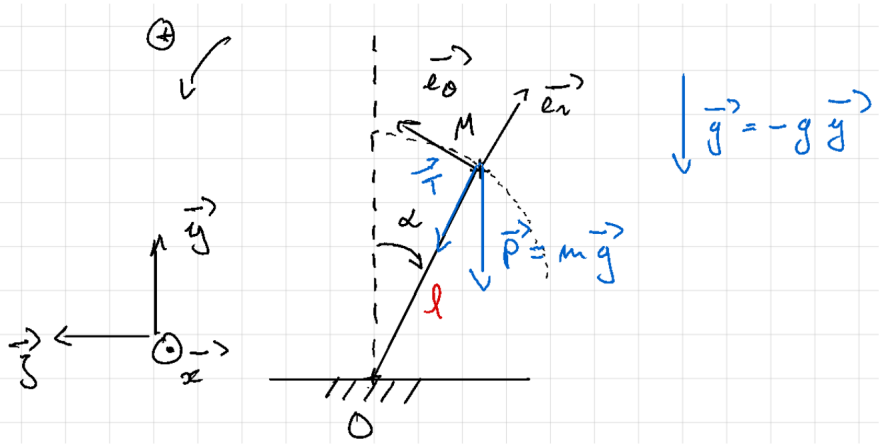


Figure 2: Schéma du pendule inversé simple fixe en O

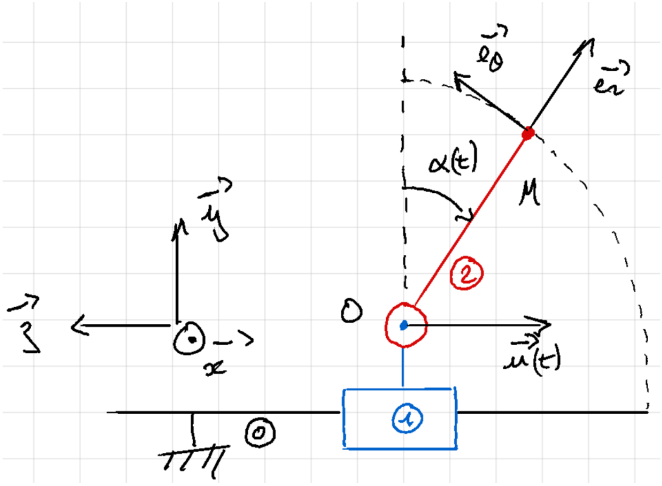


Figure 3: Schéma du pendule inversé contrôlé en accélération suivant l'axe $(O, \vec{z})$

- $u(t)$ en $m.s^{-1}$

2 Modèle dynamique du système

2.1 Equation d'état du système

Nous allons dans cette pratie mettre en équations le comportement dynamique du *Robot Lego Segway* en exploitant dans un premier temps le modèle du pendule simple inversé non contrôlé, puis celui du pendule inversé contrôlé et enfin un modèle plus complet se rapprochant du fonctionnement du système réel.

2.1.1 Modèle du pendule inversé

On considère le modèle du pendule simple inversé, schématisé par la figure 2. Notre démarche est la suivante :

Système isolé : {Point M de masse m}

Référentiel : Référentiel lié au repère $\mathcal{R} = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ supposé galiléen

Bilan des forces extérieures :

- $\overrightarrow{T} = T\vec{e}_r$ avec T en N
- $\overrightarrow{P} = mg\vec{y}$ avec m en kg et g la constante gravitationnelle terrestre en $m.s^{-2}$

Le principe fondamental de la dynamique projeté suivant la direction de $\vec{e}_\theta$ nous donne l'équation d'état suivante :

$$\ddot{\alpha}(t) = \frac{g}{l}\sin(\alpha(t)) \tag{1}$$

Ou encore en posant $x = (\alpha, \dot{\alpha})$ et $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} & \mapsto & \mathbb{R}^2 \\ (x,u) & \to & f(x,u) = \begin{bmatrix} \dot{\alpha}(t) \\ \frac{g}{l}\sin(\alpha(t)) \end{bmatrix} \end{array} \right.$:

$$\dot{x} = f(t, x(t)) \tag{2}$$

On considère à présent le modèle du pendule inversé contrôlé en accélération suivant l'axe $(O, \vec{z})$ tel qu'il est schématisé sur la figure 3. On explicitera plus en détail dans la partie commande du système (partie 3) ce que signifie exactement le terme contrôlé. Ici, il s'agit uniquement de mettre en équation le système modélisé par le schéma cinématique. Notre démarche est la suivante :

Système isolé : $(\Sigma) = \{\text{Point } M \text{ de masse } m\}$ où seul la masse m du point M est considérée

Référentiel : Référentiel lié au repère $\mathcal{R} = (O', \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ supposé galiléen où O' est un point fixe du batit (0).

Inventaire des actions mécaniques extérieures :

- $\{\mathcal{T}_{\overrightarrow{P}\to(\Sigma)}\} = \left\{ \begin{array}{c} -mg\vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{M,\mathcal{R}} = \left\{ \begin{array}{c} -mg\vec{y} \\ \sin(\alpha)mgl\vec{x} \end{array} \right\}_{M,\mathcal{R}}$

On montre à l'aide d'un théorème du moment statique appliqué en O à $\{(1)\}$ que $L_{01} = 0$. On obtient par la suite, en appliquant le théorème du moment dynamique en O à (Σ) et projeté suivant la direction de $\vec{x}$ l'équation suivante :

$$\ddot{\alpha} = \frac{g}{l}\sin(\alpha) - \frac{\cos(\alpha)\dot{u}}{l} \tag{3}$$

NB : On a supposé que l'accélération $\dot{\alpha}\sin(\alpha)u$ était négligeable devant l'accélération du solide et devant son accélération angulaire.
On peut également vectoriser l'équation (3) en posant $x = (\alpha, \dot{\alpha})$ et :

$$h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} & \mapsto & \mathbb{R}^2 \\ (x, a(t)) & \to & \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \frac{g}{l}\sin(\alpha) - \frac{\cos(\alpha)\dot{u}}{l} \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

où $a : t \mapsto a(t) = \dot{u}(t)$.
On peut alors de nouveau écrire le problème sous la forme :

$$\dot{x} = f(t, x(t), a(t)) \tag{4}$$

On remarque les équations (3) et (4) sont très proches respectivement des équations (1) et (2) mais avec un terme que l'on pourra qualifier de terme de contrôle et que l'on explicitera dans les parties suivantes.

2.1.2 Modèle du robot Lego

En ce qui concerne la mise en équations du comportement du modèle plus complet du *Robot Lego Segway* schématisé par le schéma cinématique de la figure 1 on obtient, par une méthode analogue à celle ci-dessus et en employant les principes fondamentaux de la dynamique, le système d'équations différentielles couplées suivant :

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \frac{C_4C_3 - C_2C_5 + C_4C_\theta(U(t),\dot{\theta}(t),\dot{\psi}(t)) - C_2C_\psi(U(t),\dot{\theta}(t),\dot{\psi}(t))}{C_4C_1 - C_2^2} \\ \ddot{\psi} = \frac{C_\psi(U(t),\dot{\theta}(t),\dot{\psi}(t)) - C_2\ddot{\theta} - C_5}{C_4} \end{cases}$$

Voir la partie 5.1 en Annexe pour les unités et le détails des paramètres.

2.2 Stabilité du système non contrôlé

On rappelle que les équations qui régissent le pendule inversé contrôlé sont les suivantes :

$$(S) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{g}{l}\sin(s_1(t)) - \frac{\cos(x_1(t))u(t)}{l} \\ x_1(0) = x_{0,1} = \alpha_0 \\ x_2(0) = x_{0,2} = \dot{\alpha}_0 \end{cases}$$

avec :

- $g = 9.81$
- $l = 10$
- $x_e = (0, 0)$
- $u_e = 0$
- $u(t) = u_e + K(x(t) - x_e)$
- $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$

Soit $(\Sigma) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{g}{l}\sin(x_1(t)) - \frac{\cos(x_1(t))}{l}u(t) \end{cases}$.

(Σ) s'écrit $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ où $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} & \mapsto & \mathbb{R}^2 \\ (x, u) & \to & f(x,u) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{\cos x_1}{l}u \end{bmatrix} \end{cases}$

On veut déterminer la stabilité, stabilité asymptotique ou instabilité de l'origine. On considère alors $\forall t \in \mathbb{R}, u(t) = 0$ et $\dot{x}(t) = f(x(t), 0) \overset{def}{=} g(x(t))$ c'est-à-dire $f(x, 0)$.
On a $g(x_e) = 0$ donc x_e est bien un point d'équilibre.
On calcule la jacobienne de g :

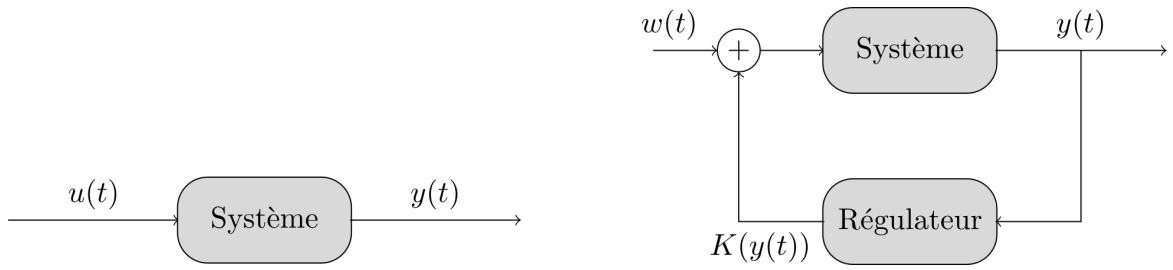
$$g'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,0)}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1(x,0)}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial f_2(x,0)}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2(x,0)}{\partial x_2}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l}\cos x_1 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow g'(x_e) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix}$$

On a donc $\begin{cases} \operatorname{tr} g'(x_e) = 0 \\ \det g'(x_e) = -\frac{g}{l} < 0 \end{cases} \Longrightarrow \lambda_\pm = \pm\sqrt{\frac{g}{l}}$ donc il existe une valeur propre à partie réelle > 0 ce qui implique que x_e est instable.

3 Commande du système

3.1 Stabilisation par retour d'état autour d'un point d'équilibre

La stabilisation par retour d'état consiste à boucler un système en boucle ouverte afin de prendre en compte l'état de sortie du système à l'instant t pour corriger ce dernier en fonction de la consigne donnée à l'instant $t+1$. L'acquisition de l'état de sortie su système se fait en réalité à l'aide de capteur. Tout ceci peut être schématisé par les figures 4a et 4b.



(a) Schéma fonctionnel d'un système en boucle ouverte

(b) Schéma fonctionnel d'un systeme en boucle fermée par retour de sortie

Figure 4: Schémas de systèmes en boucle ouverte et fermée

La correction ou le contrôle se traduit par l'expression $u(t) = w(t) + K(y(t))$ avec $K : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ où p est le nombre de pramaètres à la sortie et n le nombre de paramètres en entrée. En particulier, le terme *par retour d'état* vient du fait que $y(t) = x(t)$. On a donc $K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
La stabilisation par retour d'état autour d'un point d'équilibre signifie simplement que l'on va vouloir trouver la bonne application K qui permet de stabiliser asymptotiquement le système autour d'un point d'équilibre noté x_e (point tel que pour f, la fonction caractérisant le comportement dynamique du système, on ait : $f(x_e) = 0$).
On cherchera par la suite à déterminer la valeur de $w(t)$ est noté u_e et le couple (x_e, u_e) correspond au point de fonctionnement du système contrôlé, c'est-à-dire le point qui assure la stabilisation du système autour de sa position d'équilibre x_e en régime stationnaire (point tel que pour f on ait $f(x_e, u_e) = 0$).

3.1.1 Stabilisation du pendule inversé

On cherche maintenant des conditions sur K pour que le contrôle par retour d'état $u(t) = u_e + K(x(t) - x_e)$ stabilise asymptotiquement le système à l'origine. On note $g(x(t)) \overset{def}{=} \dot{x}(t) = f(x(t), u_e + K(x(t) - x_e))$. On a donc :

$$g(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{\cos x_1}{l}(u_e + k_1 x_1 + k_2 x_2) \end{bmatrix}$$

Donc

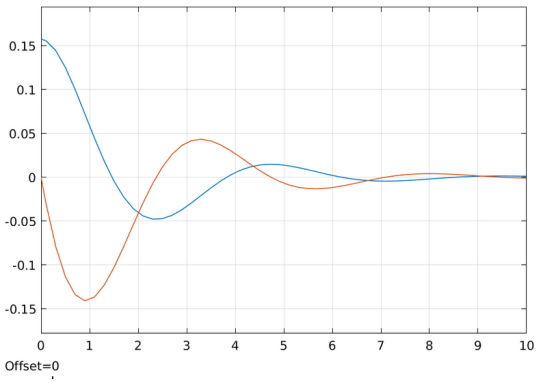
$$g'(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\cos x_1}{l}k_2 & \frac{g}{l}\cos x_1 + \frac{\sin x_1}{l}(u_e + k_1 x_1 + k_2 x_2) - \frac{\cos x_1}{l}k_1 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow g'(x_e) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g-k_1}{l} & -\frac{k_2}{l} \end{bmatrix}$$

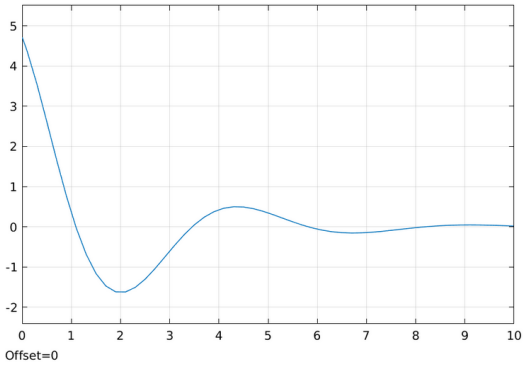
Donc on obtient :

$$\begin{cases} \operatorname{tr} g'(x_e) = -\frac{k_2}{l} < 0 \\ \det g'(x_e) = \frac{k_1 - g}{l} > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} k_1 > g \\ k_2 > 0 \end{cases}$$

Ainsi, en respectant ces deux conditions, on obtient avec $x_0 = (\pi/20, 0)$ et $K = (30, 10)$ les courbes resprésentées sur la figure 5.
On remarque que le système se stabilise asymptotiquement vers son point d'équilibre $x_e = (0, 0)$. En



(a) Etat



(b) Contrôle

Figure 5: Cas 1.1 avec $x_0 = (\pi/20, 0)$ et $K = (30, 10)$

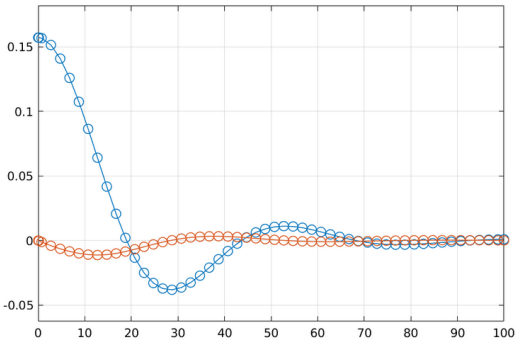
ce qui concerne la courbe du contrôle en accélération, elle a la même allure que la courbe de l'angle α du pendule (courbe bleu sur la figure 5a), ce qui fait sens. En effet, lorsque l'on perturbe l'équilibre du pendule en lui imposant une position initiale avec un angle strictement positif, la base du pendule va accélérer dans le sens positif du déplacement. De même, le support va accélérer dans le sens des z décroissants lorsque l'angle sera négatif. La base du pendule accélère donc dans le même sens que la perturbation pour la compenser.

En pratique, on n'a accès qu'à $\dot{\alpha}$. On ajoute alors en plus du contrôleur, un capteur et un prédicteur pour reconstruire α.

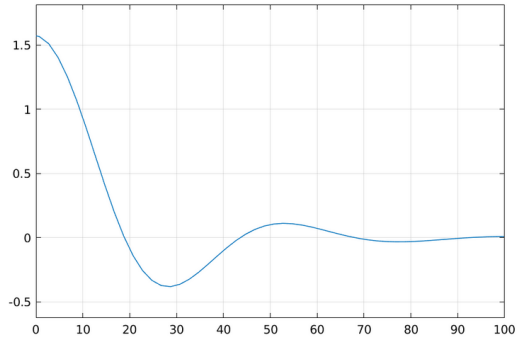
Cas	x_0	t_f	K	**Pas**	**Intégrateur**
Cas 2.1	$(\pi/20, 0)$	100	(10,1)	par défaut	ode45
Cas 2.2	$(\pi/20, 0)$	100	(10,1)	0.001	ode45
Cas 2.3	$(\pi/20, 0)$	100	(10,1)	5	Euler, ode1

Table 1: Paramètres de tests pour le retour d'état du pendule inversé avec capteur et prédicteur

On obtient alors les résulats présents sur les figures 6 et 7 et 8.



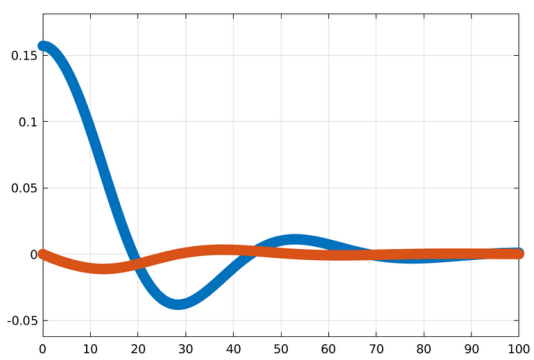
(a) Etat



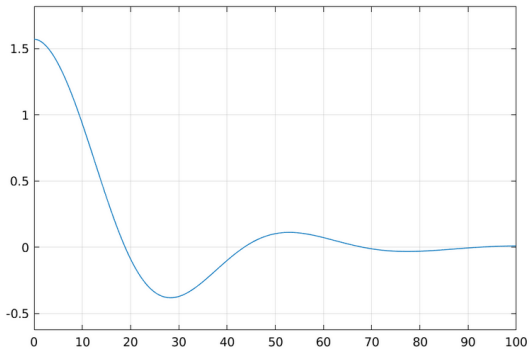
(b) Contrôle

Figure 6: Cas 2.1 avec $x_0 = (\pi/20, 0)$, $K = (10, 1)$ et un pas d'intégration par défaut

On remarque que lorsqu'on augmente le pas d'intégration, on ne peut plus considérer le signal de sortie comme un signal continu. De plus, on remarque également que cela impacte la stabilité du système puisqu'on observe sur la figure que les oscillations sont plus importantes. En effet, on relève un premier dépassement en pourcentages pour les courbes des figures 6a et 7a $D_{1\%} \simeq 25\%$ contre $D_{1\%} \simeq 64\%$

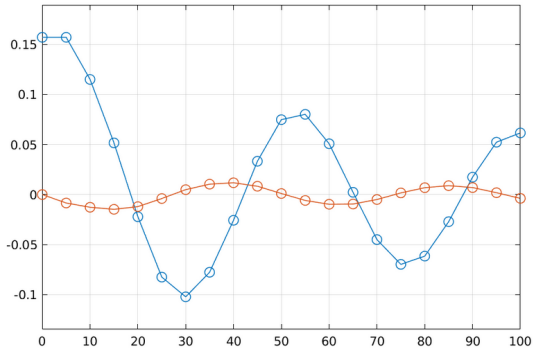


(a) Etat

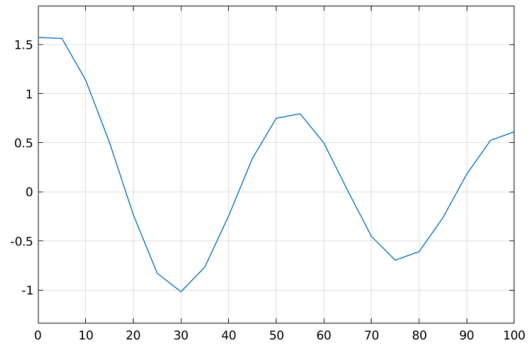


(b) Contrôle

Figure 7: Cas 2.2 avec $x_0 = (\pi/20, 0)$, $K = (10, 1)$ et un pas d'intégration de 0.001



(a) Etat



(b) Contrôle

Figure 8: Cas 2.3 avec $x_0 = (\pi/20, 0)$, $K = (10, 1)$ et un pas d'intégration de 5

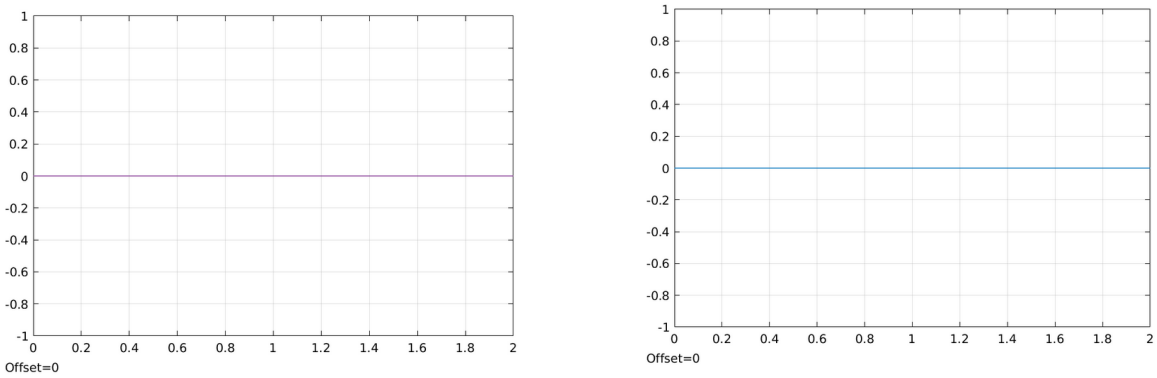
pour la courbe de la figure 8a. On remarque aussi que le système met plus de temps à converger asymptotiquement vers son point d'équilibre. Effectivement, on relève un temps de réponse à 5% pour les courbes des figures 6a et 7a $t_{5\%} \simeq 55$s contre $t_{5\%} > 100$s pour la courbe de la figure 8a. On remarque aussi que la courbe du contrôle en fonction du temps, qui est un contrôle en accélération, ne peut plus être considérée comme un signal continu si le pas d'intégration devient trop grand.

3.1.2 Stabilisation du robot Lego

Après avoir étudié le modèle du pendule inversé, le but de cette partie est d'étudier le modèle du robot Lego pendule inversé. On se propose alors de construire un modèle SIMULINK comportant un bloc avec l'équation d'état du système et un contrôleur par retour d'état. L'objectif est alors de calculer les coefficients de la matrice K. Pour ce faire, on linéarise le système d'équations différentielles du modèle du robot Lego pour se ramener à une forme $\dot{x}(t) = (A + BK)x(t)$ et on détermine l'expression de la matrice $A + BK$. Par la suite on détermine la valeur des coefficients de K à partir des valeurs des pôles du système que l'on se fixe (les valeurs des pôles sont fixées tel que leur partie réelle soit strictement négative ou que une seule seulement soit nulle).
Après avoir simulé ce modèle, on obtient les résultats présents dans les figures 9, 10 et 11.

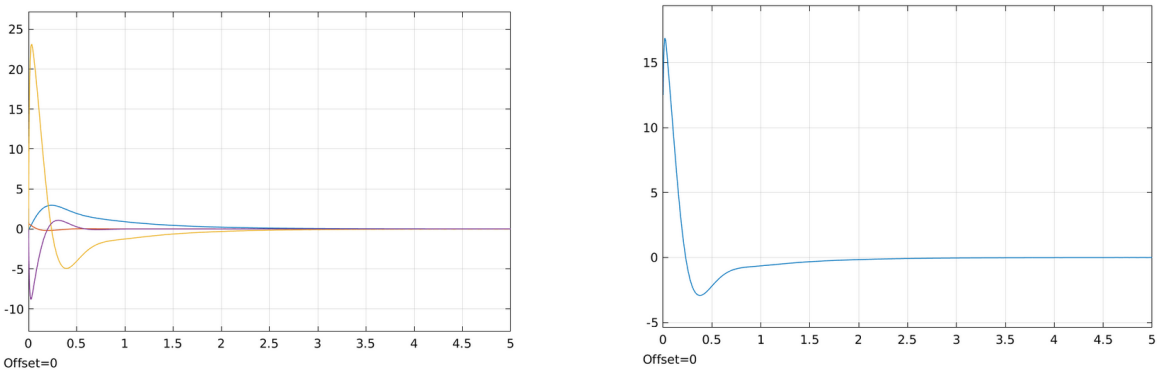
Cas	x_0	t_f	K	**Intégrateur**
Cas 1.1	$(0, 0, 0, 0)$	2	K	ode45
Cas 1.2	$(0, \pi/5, 0, 0)$	5	K	ode45
Cas 1.3	$(0, \pi/10, 0, 0)$	5	K	ode45

Table 2: Paramètres de tests pour le retour d'état du robot Lego pendule inversé sans capteur ni prédicteur



(a) Etat (b) Contrôle

Figure 9: Cas 1.1 avec $x_0 = (0, 0, 0, 0)$



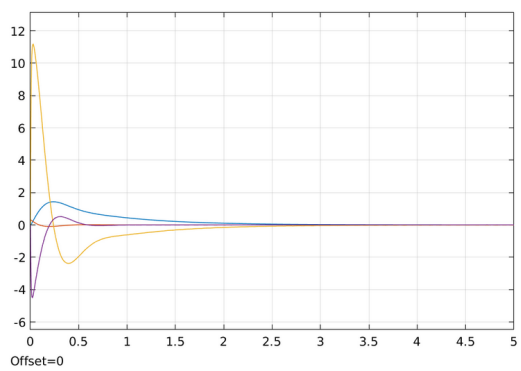
(a) Etat (b) Contrôle

Figure 10: Cas 1.2 avec $x_0 = (0, \pi/5, 0, 0)$

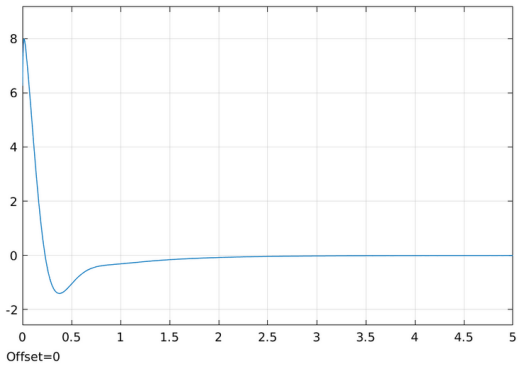
On remarque que lorsque le système est en position initiale au point d'équilibre $x_e = (0, 0, 0, 0)$, il y reste (figure 9a : courbe jaune angle ψ en deg). Ensuite, lorsque la position initiale n'est pas au point d'équilibre, le système converge toujours asymptotiquement vers sa position d'équilibre en un temps relativement rapide (cas 1.2 avec $t_{5\%} \simeq 1.3s$ et cas 1.3 avec $t_{5\%} \simeq 1.2s$) (figures 10a et 11a : courbe jaune).

En ce qui concerne le paramètre θ, qui correspond comme illustré sur la figure 1, à l'angle $\psi + \theta_m$, on remarque sur les figures 10a et 11a qu'il s'éloigne de la position angulaire 0 pour y converger de nouveau une fois que le robot se stabilise. Ce qui signifie que θ croît puis décroît. Cela se traduit physiquement par le fait que la stabilisation du robot se fait en deux phases : une première où il avance en accélérant et une deuxième où il recule en accélérant dans la direction opposée pour se retrouver à son point de départ mais avec un angle ψ de 0 (courbes bleues sur les figures 10a et 11a).

Pour les deux paramètres restants qui sont $\dot{\theta}$ (courbe rouge) et $\dot{\psi}$ (courbe violette), on remarque que



(a) Etat



(b) Contrôle

Figure 11: Cas 1.3 avec $x_0 = (0, \pi/10, 0, 0)$

pour les cas 2.2 et 2.3, seul la valeur de $\dot{\psi}$ varie significativement.

Pour ce qui est de la valeur de $\dot{\theta}$, on remarque dans les deux cas qu'elle est presque tout le temps nulle sauf initialement où le robot est écarté de sa position d'équilibre et converge vers cette dernière. Or comme $\dot{\theta} = \dot{\psi} + \dot{\theta}_m$, cela peut s'interpréter par le fait que la vitesse angulaire des deux angles se compensent, ce qui est probablement lié au contrôle en accélération qui a pour but de s'opposer à la perturbation en position angulaire du système.

Pour ce qui est de la valeur de $\dot{\psi}$, on remarque dans tous les cas que son signe est opposé à la position angulaire ψ du robot. Cela traduit bien le fait que l'évolution de la position angulaire du robot en fonction du temps est amortie et converge vers sa position d'équilibre. Donc le contrôle est bien actif.

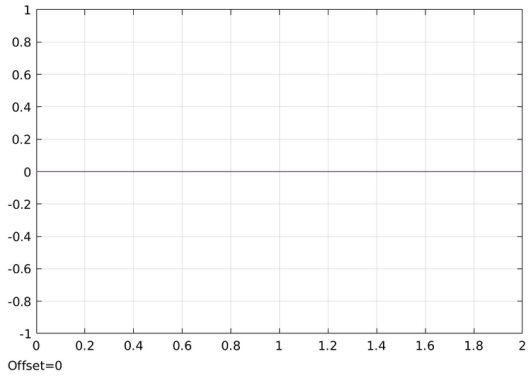
En ce qui concerne l'évolution de la courbe du contrôle en accélération, les remarques et l'interprétation physique sont les mêmes que pour la partie 3.1.1 avec la figure 7.

En pratique, un gyroscope mesure la vitesse de changement d'angle du corps du robot, que l'on note $\dot{\psi}(t)$ et un capteur mesure l'angle que l'on note $\theta(t)$. On implémente alors un sous-système prédicteur qui permet de restituer les informations manquantes, à savoir $\psi(t)$ et $\dot{\theta}(t)$.

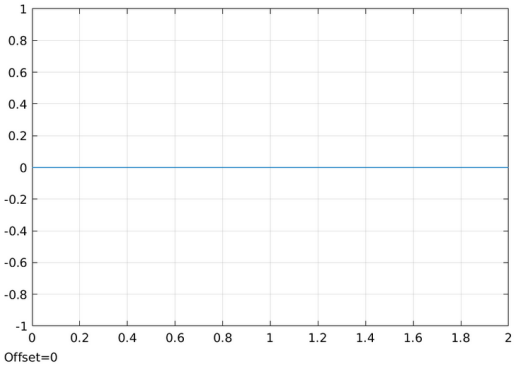
Cas	x_0	t_f	K	**Intégrateur**
Cas 2.1	$(0, 0, 0, 0)$	2	K	ode45
Cas 2.2	$(0, \pi/5, 0, 0)$	5	K	ode45
Cas 2.3	$(0, \pi/10, 0, 0)$	5	K	ode45

Table 3: Paramètres de tests pour le retour d'état du robot Lego pendule inversé avec capteur et prédicteur

On simule alors ce nouveau modèle et on obtient les courbes des figures 12, 13 et 14.

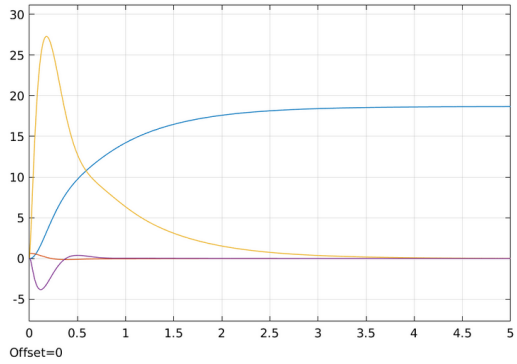


(a) Etat

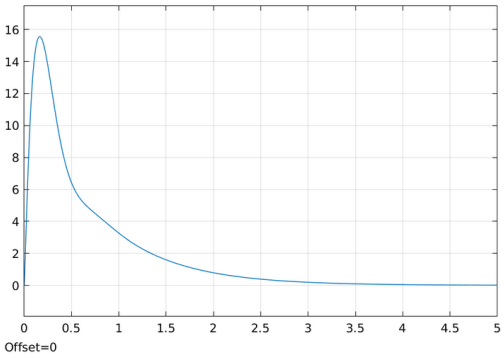


(b) Contrôle

Figure 12: Cas 2.1 avec $x_0 = (0, 0, 0, 0)$

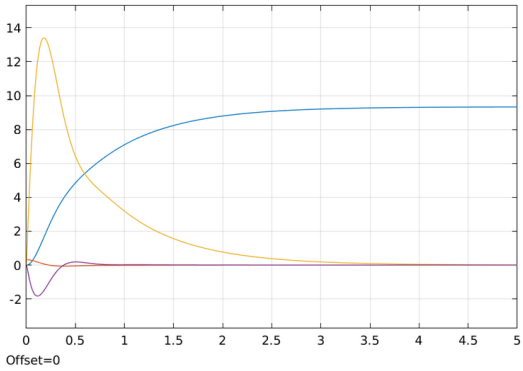


(a) Etat

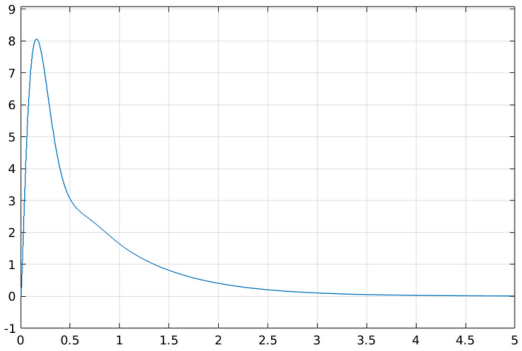


(b) Contrôle

Figure 13: Cas 2.2 avec $x_0 = (0, \pi/5, 0, 0)$



(a) Etat



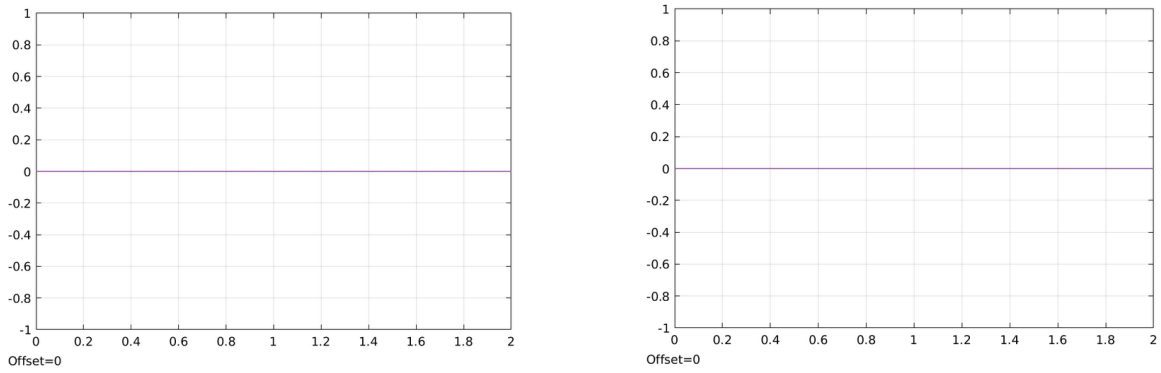
(b) Contrôle

Figure 14: Cas 2.3 avec $x_0 = (0, \pi/10, 0, 0)$

Les allures des différentes courbes sont similaires au cas où l'on considérait le modèle du robot Lego sans capteur ni prédicteur, à la différence de la courbe $\dot{\theta}$. En effet, pour les cas 2.2 et 2.3 correspondant aux courbes des figures 13a et 14a, $\dot{\theta}$ converge vers une valeur non nulle ($\dot{\theta}_\infty \simeq 18.s^{-1}$ pour le cas 2.2 et $\dot{\theta}_\infty \simeq 9.s^{-1}$ pour le cas 2.3) alors qu'en parallèle, $\dot{\psi}$ tend vers $0.s^{-1}$ en régime stationnaire. Cela s'interprète physiquement par le fait qu'une fois le système stabilisé à sa position d'équilibre, ce dernier est en mouvement uniforme dans le sens de la perturbation angulaire initiale. Il ne revient donc pas

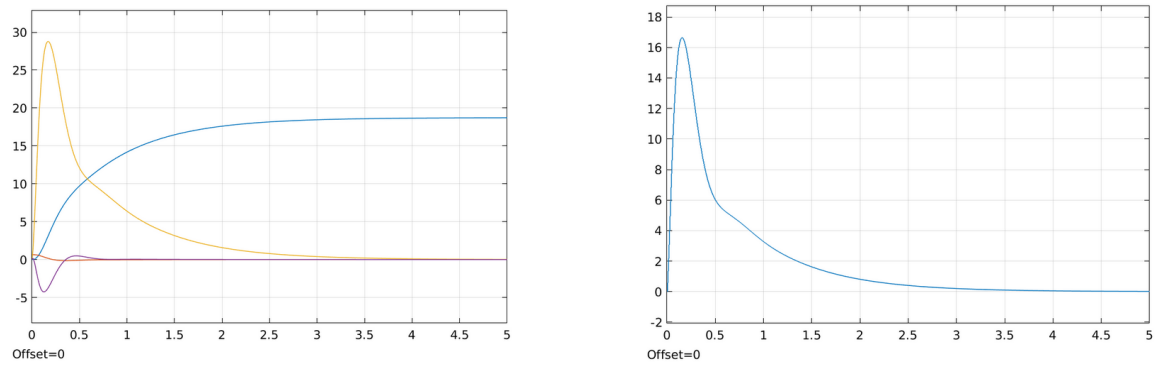
à un état immobile comme dans le modèle précédent. Cette différence de comportement peut être dû au fait que dans ce modèle, nous avons été obligé de considérer des prédicteurs (un intégrateur et un dérivateur), qui n'étant pas eux-mêmes des modèles parfaits, induisent des erreurs sur les paramètres de l'état de sortie du système, donc sur la correction du système et en conséquence sur son comportement en régime stationnaire.

Afin de coller au mieux à la réalité, on ajoute dans le modèle MATLAB un bloc *Zero-Order Hold* au niveau du capteur afin que les signaux de sortie de ce dernier soient discrets. On refait tourner le modèle pour les cas 2.1, 2.2 et 2.3 précédents (table 3).



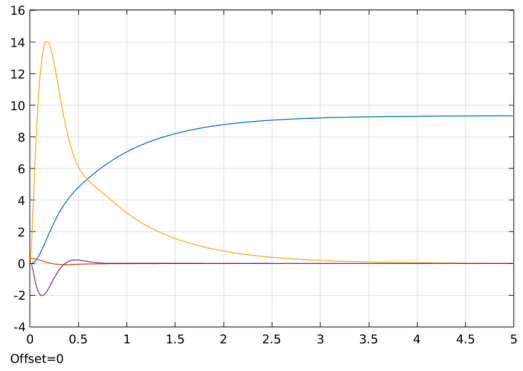
(a) Etat (b) Contrôle

Figure 15: Cas 2.1 avec $x_0 = (0, 0, 0, 0)$

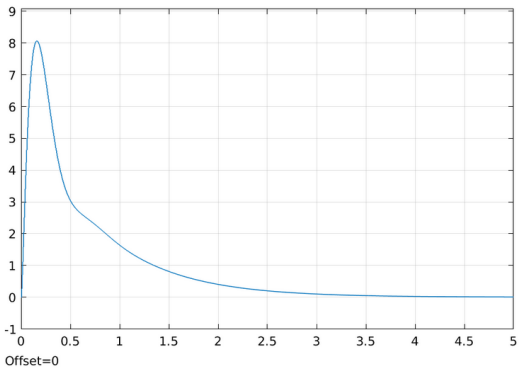


(a) Etat (b) Contrôle

Figure 16: Cas 2.2 avec $x_0 = (0, \pi/5, 0, 0)$



(a) Etat



(b) Contrôle

Figure 17: Cas 2.3 avec $x_0 = (0, \pi/10, 0, 0)$

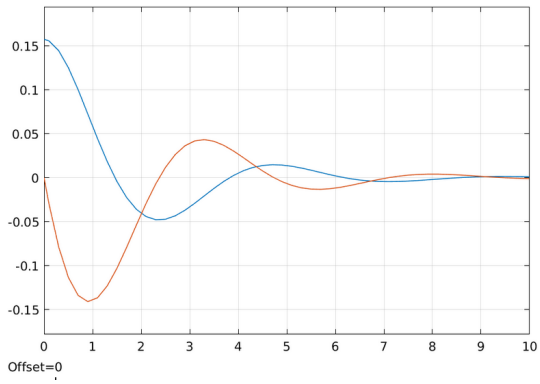
On remarque que ces courbes sont similaires à celles des figures 12, 13 et 14. La différence est que certaines des courbes ont des amplitudes légérement supérieures (courbes jaunes des états et courbes bleues des contrôles). On en conclut donc que l'ajout du bloc *Zero-Order Hold* dans MATLAB ne modifie que très peu le modèle qui renvoie toujours des résultats cohérents pour le *Robot Lego Segway*.

3.2 Impact des différents paramètres sur la stabilisation du système en boucle fermée (modèle du pendule inversé)

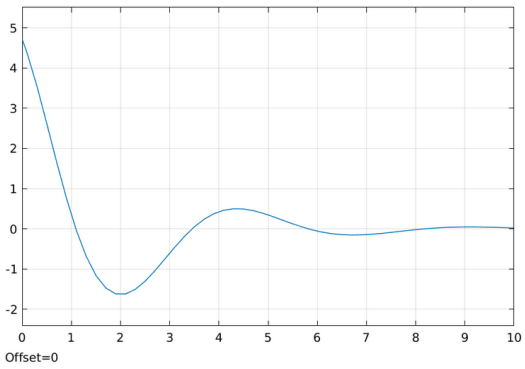
Contrôle par retour d'état sans capteur ni prédicteur Voici les différents cas qui ont été testés lors des TPs :

Cas	x_0	t_f	K	**Intégrateur**
Cas 1.1	$(\pi/20, 0)$	10	(30,10)	ode45
Cas 1.2	$(\pi/20, 0)$	100	(10,1)	ode45
Cas 1.3	$(\pi/20, 0)$	100	(10,1)	Euler, ode1
Cas 1.4	$(\pi/20, 0)$	1000	(10,1)	Euler, ode1
Cas 1.5	$(\pi/10, 0)$	100	(10,1)	ode45
Cas 1.6	$(\pi/10, 0)$	100	(30,10)	ode45

Table 4: Paramètres de tests pour le retour d'état du pendule inversé sans capteur ni prédicteur



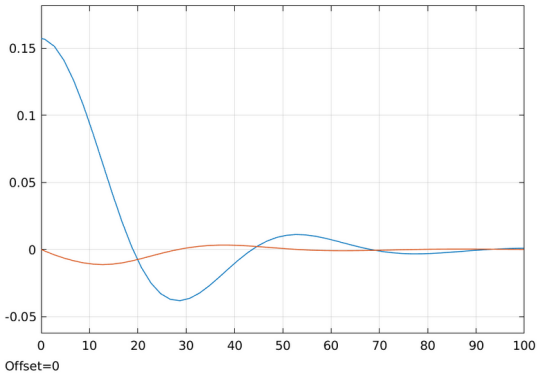
(a) Etat



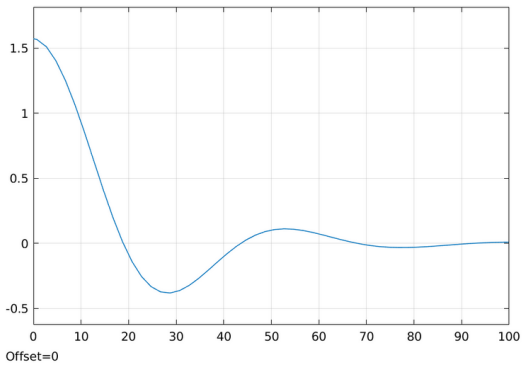
(b) Contrôle

Figure 18: Cas 1.1 TP02

On remarque que pour le cas 1.2, où on a fait varier les paramètres de K en prenant $(10, 1)$ soit en divisant par un facteur 10 par rapport au cas 1.1, le temps de réponse à 5% est de l'ordre de 10 fois plus



(a) Etat

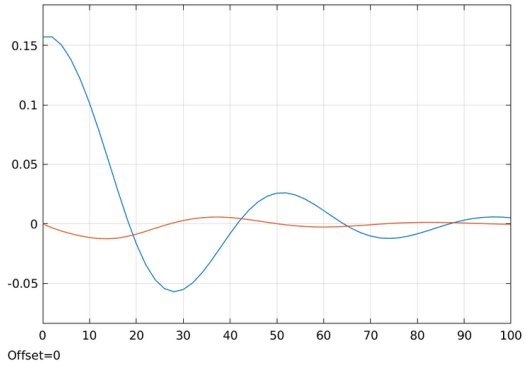


(b) Contrôle

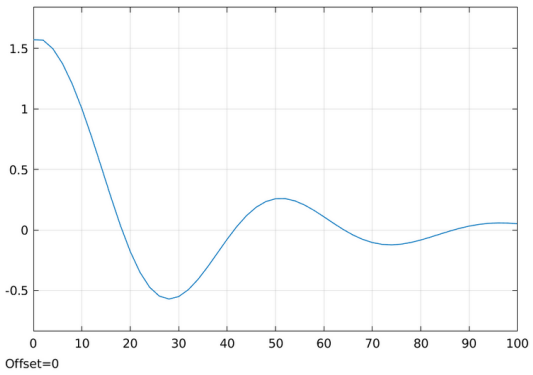
Figure 19: Cas 1.2 TP02

long que pour le cas 1.1 ($t_{5\%} \simeq 5s$ pour le cas 1.1 et $t_{5\%} \simeq 54s$ pour le cas 1.2). Néanmoins, la différence d'amplitude des oscillations est bien moins notable entre les deux cas ($D_{1\%} \simeq 33\%$ pour le cas 1.1 et $D_{1\%} \simeq 27\%$ pour le cas 1.2).

On en conclut que la variation des paramètres de K a plus d'influence sur le temps de réponse du système que sur l'amplitude de ses oscillations. En outre, plus les valeurs de K sont grandes, plus le système est rapide. Néanmoins, il faudrait tester avec d'autres valeurs plus extrêmes pour pouvoir tirer une conclusion sur la dégradation de la stabilité du système.



(a) Etat



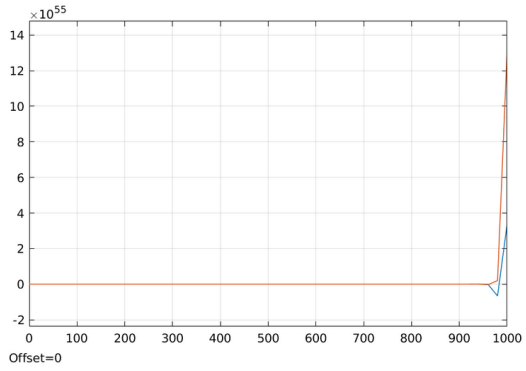
(b) Contrôle

Figure 20: Cas 1.3 TP02

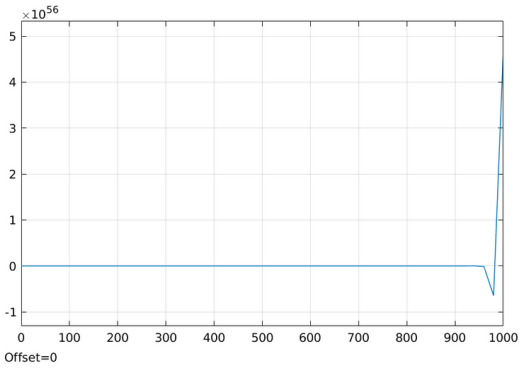
Les cas 1.3 et 1.4 sont similaires au cas 1.2 au niveau des choix des paramètres (position initiale x_0 et valeur de K) mais le choix du résolveur de l'équation différentielle globale du système diffère (Euleur, Ode1). Ils servent alors à nous montrer dans quelle mesure le résolveur et le pas de discrétisation du temps impactent le résultat.

Pour le cas 1.3, on a fixé la discrétisation du temps et on a fait tourner la simulation sur une durée de $100s$. On remarque que le résultat obtenu diffère déjà par rapport à celui obtenu pour le cas 1.2. En effet, le temps de réponse est plus long ainsi que l'amplitude des oscillations ($t_{5\%} \simeq 80s$ et $D_{1\%} \simeq 40\%$). On peut donc penser que pour les mêmes paramètres fixés, la stabilité et le temps de réponse du système se sont dégradés. Ce qui nous induit en erreur.

Pour le cas 1.4, cette incohérence se voit justifiée puisque pour une même discrétisation temporelle, (*i.e.* même nombre de pas temporels que le cas précédent) mais pour un temps de simulation de $1000s$, les résultats obtenus deviennent complètement incohérents et ne traduisent plus du tout le comportement



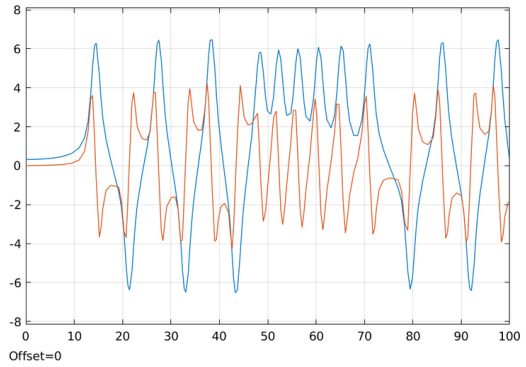
(a) Etat



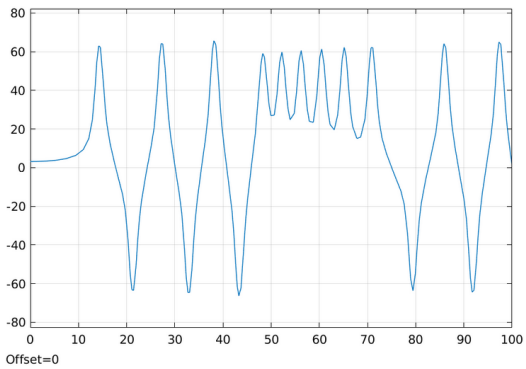
(b) Contrôle

Figure 21: Cas 1.4 TP02

réel du système.

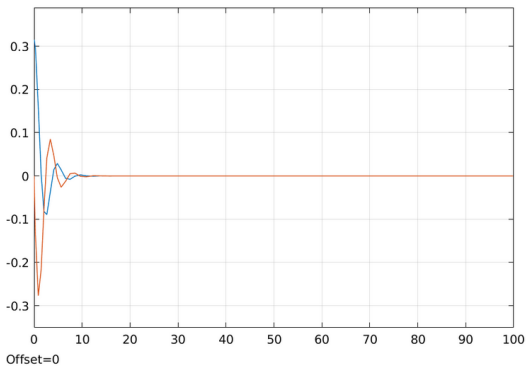


(a) Etat

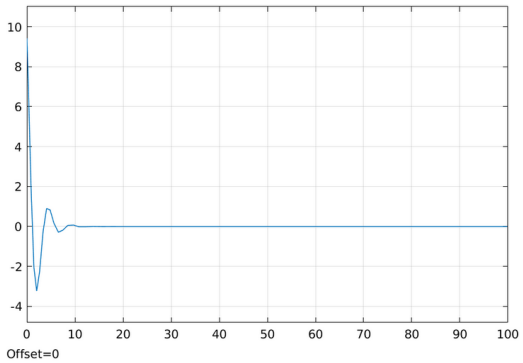


(b) Contrôle

Figure 22: Cas 1.5 TP02



(a) Etat



(b) Contrôle

Figure 23: Cas 1.6 TP02

Les cas 1.5 et 1.6 servent à nous montrer l'influence du réglage du correcteur pour une perturbation initiale de l'angle plus importante. En effet, on prend dans les deux cas comme valeur initiale $x_0 = (\pi/10, 0)$.

Pour le cas 1.4, on remarque que pour les valeurs $(10, 1)$ des paramètres de K choisis, le système devient instable. En effet, les valeurs de θ et $\dot{\theta}$ croîssent pour atteindre les valeurs maximumales en valeur absolue d'environ 6 rad et 4 rad.s^{-1}. Cela signifie que le pendule inversé effectue un tour complet pour atteindre sa position d'équilibre avant de repartir dans l'autre sens et ainsi de suite. Transposé au cas réel du robot Lego où l'angle ne pourra pas dépasser l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, le système ne sera pas stabilisé et se retrouvera par terre.

Pour le cas 1.5, on remarque que pour les valeurs $(30, 10)$ des paramètres de K choisis, le système arrive à se stabiliser asymptotiquement autour de sa position d'équilibre.

On en conclut donc qu'il vaut mieux choisir les valeurs des paramètres de K de façon à assurer la stabilité du système pour une plage de position angulaire initiale optimale.

4 Conclusion

Pour conclure, cette étude de cas sur le pendule inversé puis sur le robot Lego en pendule inversé nous aura appris des bases de l'automatique. Ainsi, nous avons abordé des notions fondamentales telles que la stabilisation d'un système avec un contrôle par retour d'état qu'il comporte un ensemble de capteurs et de prédicteurs ou non.

5 Annexes

5.1 Equations du modèles du Robot Lego

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \frac{C_4C_3 - C_2C_5 + C_4C_\theta(U(t),\dot{\theta}(t),\dot{\psi}(t)) - C_2C_\psi(U(t),\dot{\theta}(t),\dot{\psi}(t))}{C_4C_1 - C_2^2} \\ \ddot{\psi} = \frac{C_\psi(U(t),\dot{\theta}(t),\dot{\psi}(t)) - C_2\ddot{\theta} - C_5}{C_4} \end{cases}$$

Avec les expressions des différentes inerties $C_{i\in[\![1,5]\!]}$ en $kg.m^2$:

- $C_1 = (2m + M)R^2 + 2J_W + 2n^2J_m$
- $C_2 = MLR - \cos(\psi) - 2n^2J_m$
- $C_3 = -MLR\dot{\psi}^2\sin(\psi)$
- $C_4 = ML^2 + J_\psi + 2n^2J_m$
- $C_5 = -MgL\sin(\psi)$

Avec également $C_\theta(U(t),\dot{\theta}(t),\dot{\psi}(t))$ et $C_\psi(U(t),\dot{\theta}(t),\dot{\psi}(t))$ qui sont les expressions respectives des couples (en N.m) sur l'axe de rotation au point O et au point M du schéma cinématique de la figure 1 :

- $C_\theta(U(t),\dot{\theta}(t),\dot{\psi}(t)) = \frac{2K_tU(t)}{R_m} - 2\left(\frac{K_tK_b}{R_m} + f_m + f_w\right)\dot{\theta} + 2\left(\frac{K_tK_b}{R_m} + f_m\right)\dot{\psi}$
- $C_\psi(U(t),\dot{\theta}(t),\dot{\psi}(t)) = -\frac{2K_tU(t)}{R_m} - 2\left(\frac{K_tK_b}{R_m} + f_m + f_w\right)\dot{\theta} + 2\left(\frac{K_tK_b}{R_m} + f_m\right)\dot{\psi}$

où :

- g la constante de gravitation terrestre en $m.s^{-2}$
- m la masse d'une roue en kg
- R le diamètre de la roue en m
- J_W l'inertie de la roue en $kg.m^2$
- M la masse du corps du Robot en kg
- H la hauteur du Robot en m
- $L = \frac{H}{2}$ la distance entre l'axe de rotation de la roue et le centre de masse du système en m
- $J_\psi = \frac{ML^2}{3}$ l'inertie du corps du Robot qui est assimilé à un cylindre en $kg.m^2$
- J_m l'inertie du rotor du moteur en $kg.m^2$
- R_m la résistance interne du moteur en Ω
- K_b la constante électrique du moteur en $V.s.rad^{-1}$
- K_t la constante mécanique du moteur en $N.m.A^{-1}$
- n le rapport de transmission entre le moteur et la roue
- f_m le coefficient de frottement entre le corps du Robot et le moteur en $N.m.s$
- f_W le coefficient de frottement entre la roue et le sol en $N.m.s$

5.2 Code

Afin d'observer notre modèle de simulation sur le système réel du *Robot Lego Segway*, nous avons implémenté le modèle du robot Lego pendule inversé en C au travers du code suivant. Nous avons utilisé la méthode des rectangles de Riemann pour l'intégration discrète et des développements limités pour la dérivation discrète.

```
#include "tpl_os.h"
#include "nxt_motors.h"
#include "ecrobot_interface.h"
#include "ecrobot_private.h"
#include "math.h"
#include "tools.h"
#include "nxt_config.h"

/* ------------------------------------------------------------------------ */
/*  Fonctions de configuration OSEK                                         */
/* ------------------------------------------------------------------------ */
FUNC(int, OS_APPL_CODE) main(void)
{
StartOS(OSDEFAULTAPPMODE);
return 0;
}

DeclareTask(pendule);
DeclareTask(affichage);

DeclareAlarm(alarm_pendule);
DeclareAlarm(alarm_affichage);

/* ------------------------------------------------------------------------ */
/* Variables globales du système                                            */
/* ------------------------------------------------------------------------ */

/* Gyro calibration */
int  gyro_offset;                   /* gyroscope sensor offset value(deg)    */
int  gyro_offset_sum;               /* sum of gyroscope sensor offset
                                value(deg)                                   */
int  avg_cnt;                       /* average count to calculate
                                gyro offset                                  */

float xe[4] = {0.0,0.0,0.0,0.0};    /* equilibrium state                     */
float ue    = 0.0;                  /* command at equilibrium                */
float x[4];                         /* state                                 */
float y[2];                         /* observations                          */
float u;                            /* command of the controller (V)         */
float setpoint;                     /* target value for theta variable       */
float dt;

typedef enum {
INIT_MODE,      /* system initialize mode */
CAL_MODE,       /* gyro sensor offset calibration mode */
CONTROL_MODE    /* balance and RC control mode */
} MODE_ENUM;
MODE_ENUM nxtSegway_mode= INIT_MODE;


```

```
51
52  void controller () {
53  const float K[4] = {0.6700, 19.9053, 1.0747, 1.9614};
54  u = ue;
55  for (int i = 0; i<4; i++) {
56  u += K[i] * (x[i] - xe[i]);
57  }
58  }
59
60  void estimateur () {
61  float theta;
62
63  // d(psi)/dt -> d(psi)/dt
64  x[3] = y[1];
65
66  // d(psi)/dt -> psi
67  // On utilise la methode des rectangles
68  x[1] = x[3] * dt + x[1];
69
70  //theta = thetam + psi
71  theta = y[0] + x[1];
72
73  //theta -> d(theta)/dt
74  x[2] = (theta - x[0])/dt;
75  x[0] = theta;
76
77  }
78
79
80  TASK(pendule) {
81
82  int initial_time= 0;
83
84  switch(nxtSegway_mode){
85
86  case(INIT_MODE):
87
88  nxt_motor_set_count(PORT_MOTOR_L, 0);   /* reset left motor count          */
89  nxt_motor_set_count(PORT_MOTOR_R, 0);   /* reset right motor count         */
90
91  /* Initial state */
92  for(int i=0;i<4;i++){
93  x[i] = xe[i];
94  }
95
96  /* target value */
97  setpoint            = xe[0];
98
99  initial_time= ecrobot_get_systick_ms();
100 init_time(initial_time);
101
102 /* Gyro calibration */
103 gyro_offset         = 0;
104 gyro_offset_sum     = 0;
105 avg_cnt             = 0;
106
```

```
107 nxtSegway_mode = CAL_MODE;
108
109 break;
110
111 case(CAL_MODE):
112
113 gyro_offset_sum += (int) ecrobot_get_gyro_sensor(PORT_GYRO);
114 /* accumulation of the values given by the gyro */
115
116 avg_cnt++;
117
118 if ((ecrobot_get_systick_ms() - initial_time) >= 1500) {
119 gyro_offset = gyro_offset_sum / avg_cnt;
120 /* mean of the previous measures */
121
122 ecrobot_sound_tone(440, 500, 30);       /* beep a tone                  */
123 nxtSegway_mode = CONTROL_MODE;
124 }
125
126 break;
127
128 case(CONTROL_MODE):
129
130 y[0] = getMotorAngle();
131 y[1] = getGyro(gyro_offset);
132 dt = delta_t();
133 estimateur();
134 controller();
135 nxt_motors_set_command(u);
136
137 break;
138
139 default:
140 /* unexpected mode */
141 nxt_motor_set_speed(PORT_MOTOR_L, 0, 1);
142 nxt_motor_set_speed(PORT_MOTOR_R, 0, 1);
143 break;
144 }
145 TerminateTask();
146 }
147
148
149 TASK(affichage) {
150 /*display informations*/
151 display_clear(0);
152
153 //disp(1, " PWM  = ", (int)(pwmR+pwmL)/2);
154 disp(2, " y[0] = ", (int)(y[0]*RAD2DEG));
155 disp(3, " y[1] = ", (int)(y[1]*RAD2DEG));
156 disp(4, " x[0] = ", (int)((x[0]) * RAD2DEG));
157 disp(5, " x[1] = ", (int)((x[1]) * RAD2DEG));
158 disp(6, " x[2] = ", (int)((x[2]) * RAD2DEG));
159 disp(7, " x[3] = ", (int)((x[3]) * RAD2DEG));
160
161 TerminateTask();
162 }
```

```
163
164 ISR(isr_button_start)
165 {
166 ecrobot_status_monitor("isr_button_start");
167
168 }
169
170 ISR(isr_button_stop)
171 {
172 ShutdownOS(E_OK);
173 }
174
175 ISR(isr_button_left)
176 {
177 ecrobot_status_monitor("isr_button_left");
178
179 }
180
181 ISR(isr_button_right)
182 {
183 ecrobot_status_monitor("isr_button_right");
184
185 }
186
```