# Traitement Numérique du Signal

Nathalie Thomas

IRIT/ENSEEIHT
Nathalie.Thomas@enseeiht.fr

# Traitement Numérique du signal

1- Signaux numériques
2- Transformée de Fourier Discrète (TFD)
3- Estimation des fonctions d'inter et d'auto corrélation
4- Estimation de la densité spectrale de puissance (DSP)
5- Filtrage numérique linéaire

# 0. Slide de connexion

1 Allez sur wooclap.com

2 Entrez le code d'événement dans le bandeau supérieur

Code d'événement

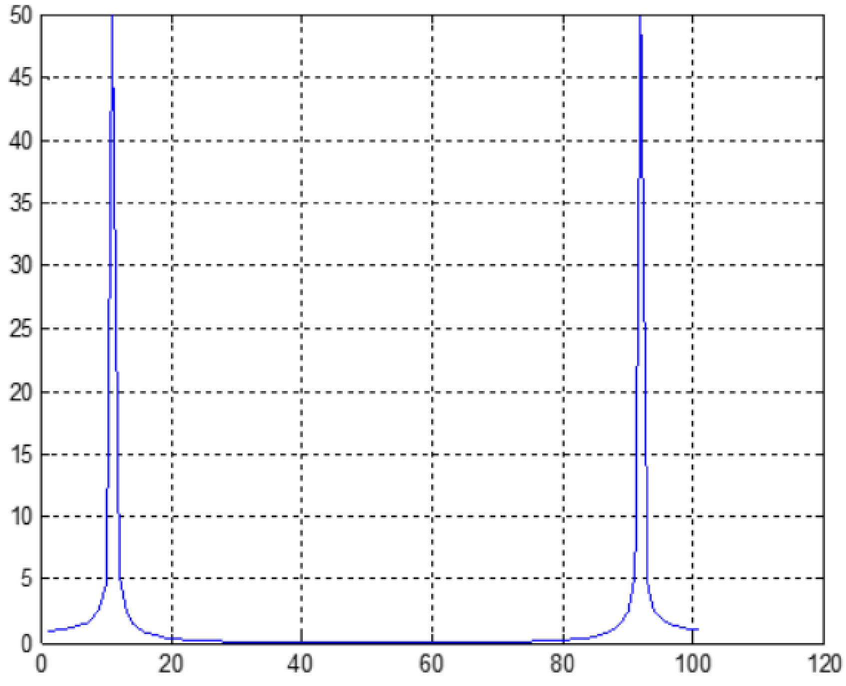
**SIGSEQ2**

https://app.wooclap.com/SIGSEQ2

Copier le lien de participation

# QUESTION 1

Allez sur **wooclap.com** et utilisez le code **SIGSEQ2**




Ce tracé représente le module de la transformée de Fourier estimée en numérique d'un signal correctement échantillonné (condition de Shannon respectée). Ce signal est-il :

1. Un cosinus de fréquence 10 Hz ?
2. Une somme de deux cosinus de fréquences 10 et 90 Hz ?
3. Pas assez d'éléments pour répondre à la question

# Transformée de Fourier Discrète

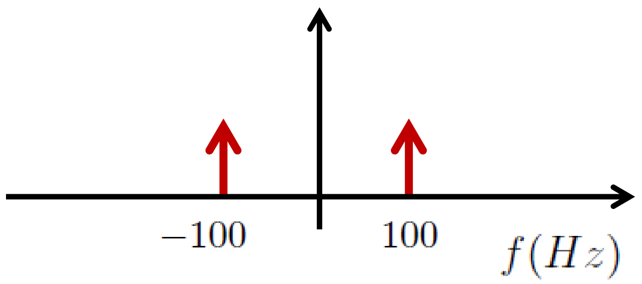
## Exemple

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)\,;\ \ f_0 = 100\ Hz$$

<u>TF du signal :</u>

$$X(f) = \frac{1}{2}\left(\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)\right)$$

<u>Tracé du module de la TF du signal :</u>



# Transformée de Fourier Discrète

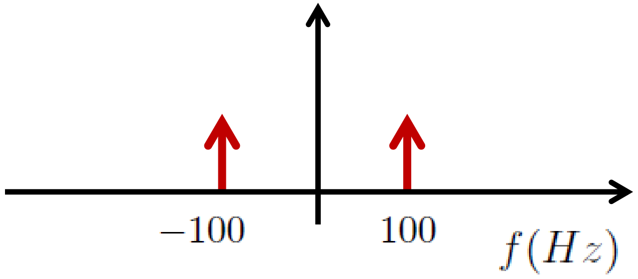
## Exemple

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)\,; \;\; f_0 = 100\ Hz$$

TF du signal :

$$X(f) = \frac{1}{2}\left(\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)\right)$$

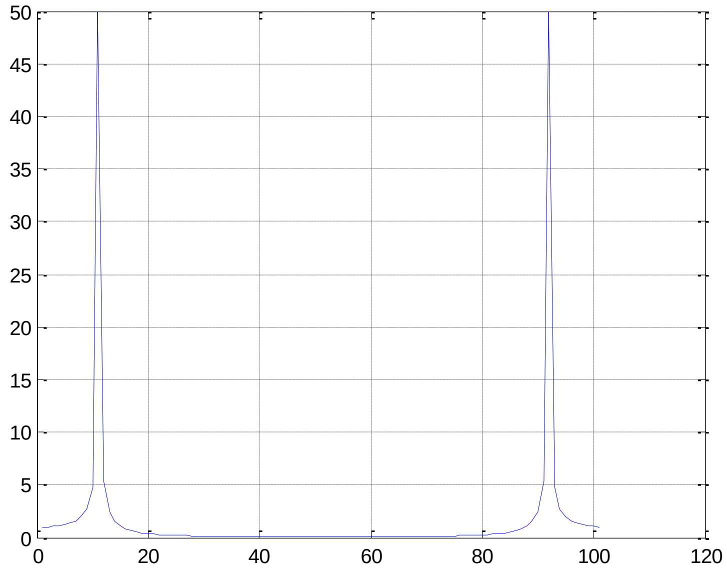
Tracé du module de la TF du signal :




Code Matlab :

```
%Paramètres
f0=100;      %fréquence du cosinus
Fe=1000;     %fréquence d'échantillonnage
Te=1/Fe;     %période d'échantillonnage
N=100;       %nombre d'échantillons

%Génération du signal
x=cos(2*pi*f0*[0:Te:(N-1)*Te]);

%Tracé du signal
figure; plot(x)

%Calcul de la TFD du signal
X=fft(x);

%Tracé du module de la TFD du signal
figure;  plot(abs(X))
```

Tracé du module de la TFD obtenu :



# Transformée de Fourier Discrète

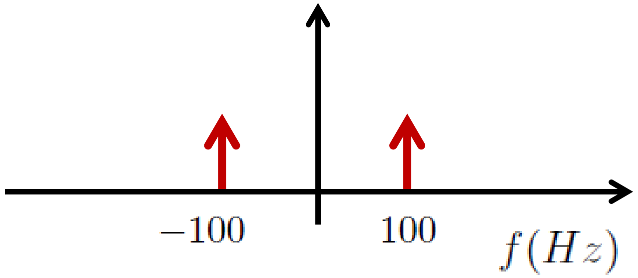
## Exemple

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)\,;\;\; f_0 = 100\ Hz$$

TF du signal :

$$X(f) = \frac{1}{2}\left(\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)\right)$$

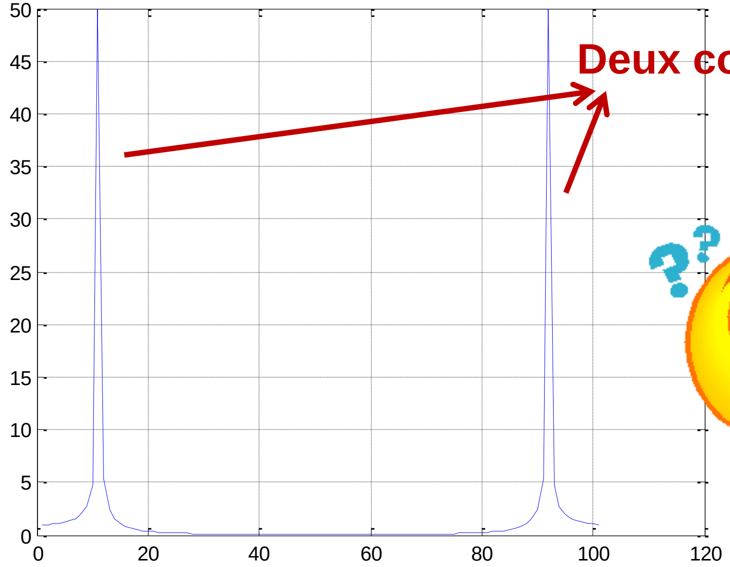
Tracé du module de la TF du signal :




Code Matlab :

```
%Paramètres
f0=100;       %fréquence du cosinus
Fe=1000;    %fréquence d'échantillonnage
Te=1/Fe;     %période d'échantillonnage
N=100;        %nombre d'échantillons

%Génération du signal
x=cos(2*pi*f0*[0:Te:(N-1)*Te]);

%Tracé du signal
figure; plot(x)

%Calcul de la TFD du signal
X=fft(x);

%Tracé du module de la TFD du signal
figure;  plot(abs(X))
```

Tracé du module de la TFD obtenu :




Deux cosinus ?

# QUESTION 2

Allez sur **wooclap.com** et utilisez le code **SIGSEQ2**

L'échantillonnage d'un signal avec une période de Te :

1. Périodise sa transformée de Fourier tous les Fe=1/Te

2. Provoque l'échantillonnage de sa transformée de Fourier avec un pas de Fe=1/Te

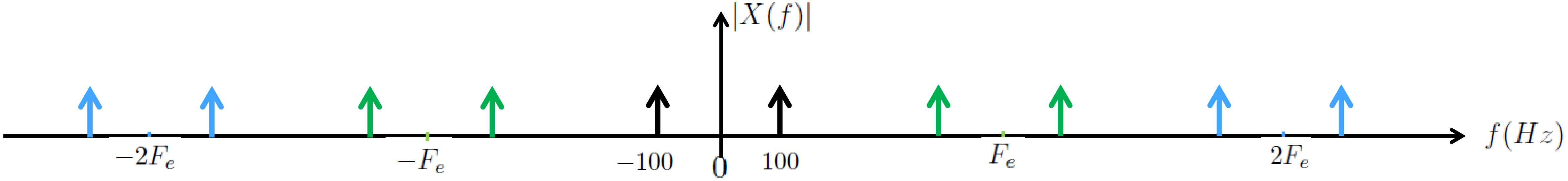
3. Périodise sa transformée de Fourier tous les Te

# Transformée de Fourier Discrète

## Echantillonnage temporel

Exemple

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)\,;\;\; f_0 = 100\ Hz$$



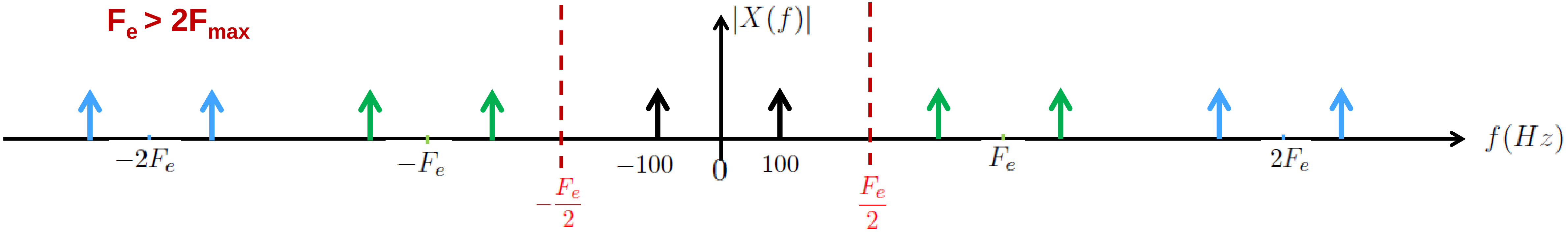
# Transformée de Fourier Discrète

**Echantillonnage temporel**

Exemple

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)\,;\;\; f_0 = 100\ Hz$$

**$F_e > 2F_{max}$**



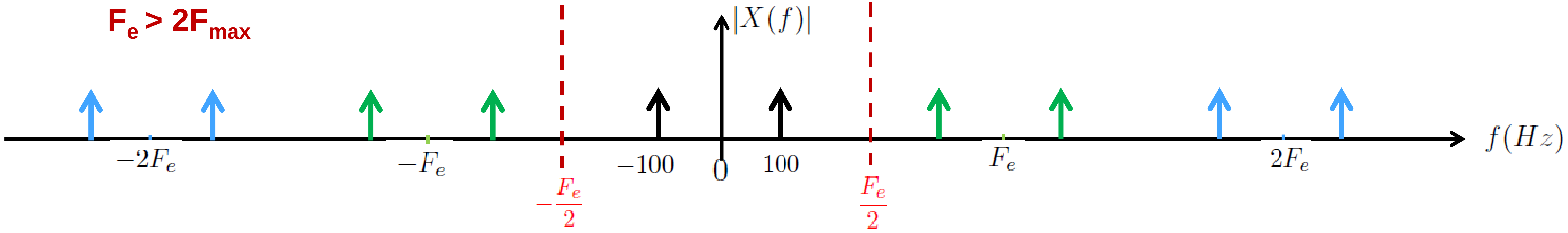
# Transformée de Fourier Discrète

## Echantillonnage temporel

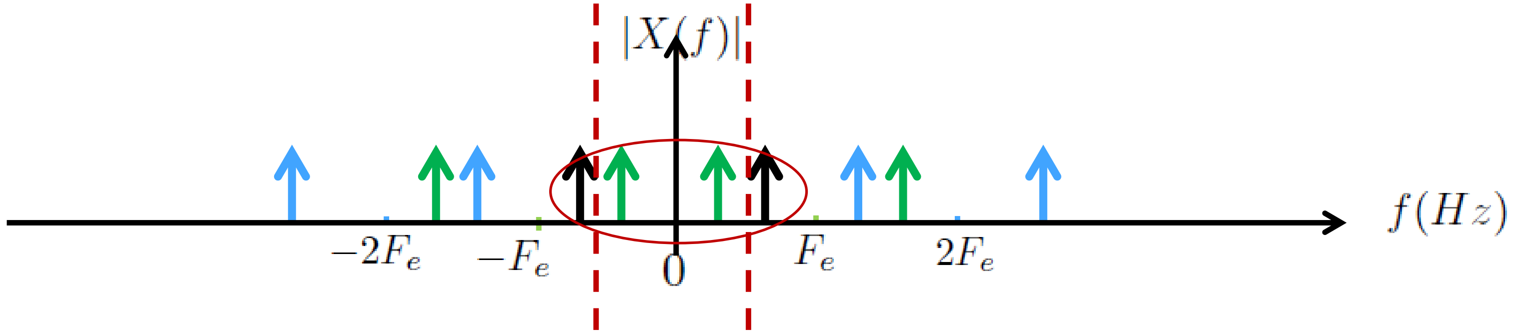
Exemple

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)\,;\;\; f_0 = 100\ Hz$$

$F_e > 2F_{max}$




$F_e < 2F_{max}$



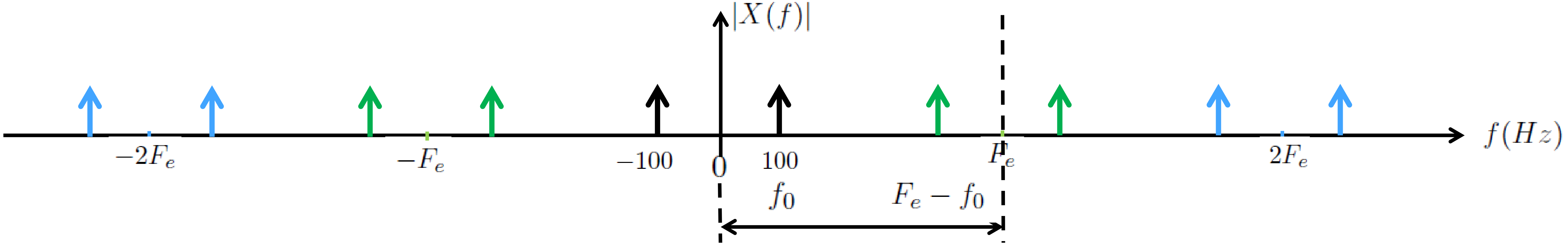

**Recouvrement spectral (Aliasing)**

# Transformée de Fourier Discrète

**Echantillonnage temporel**

Exemple

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)\,;\ \ f_0 = 100\ Hz$$



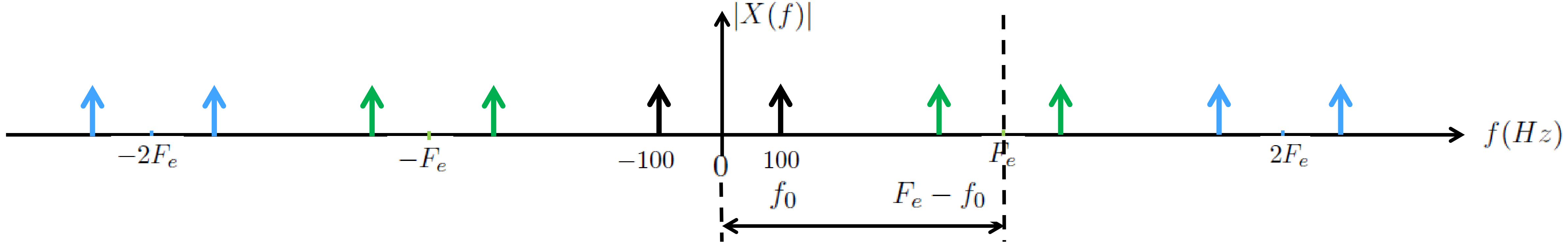

**Visualisation sur [0, $F_e$]**

# Transformée de Fourier Discrète

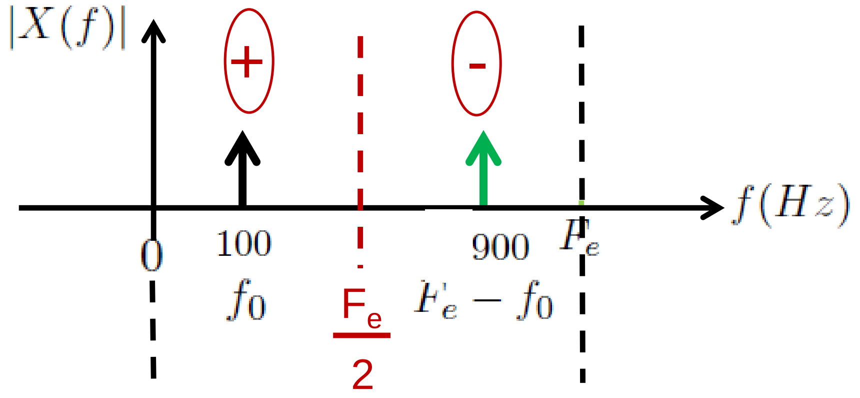
**Echantillonnage temporel**

Exemple

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)\,;\;\; f_0 = 100\ Hz$$




**Visualisation sur [0, $F_e$] :**



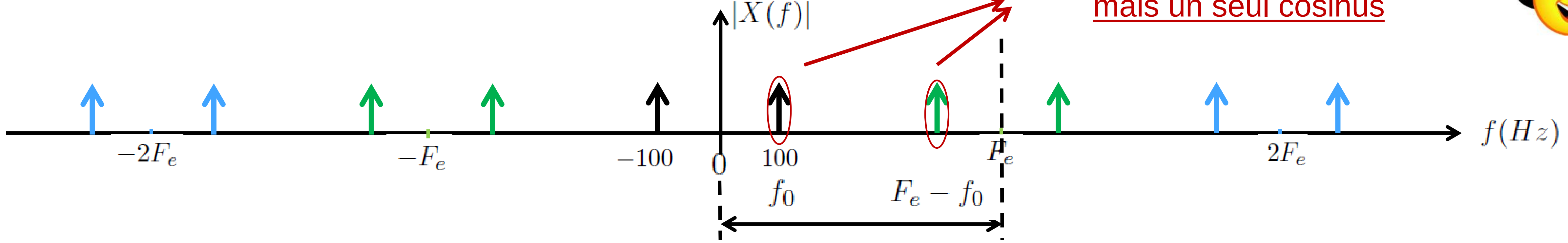
# Transformée de Fourier Discrète

**Echantillonnage temporel**

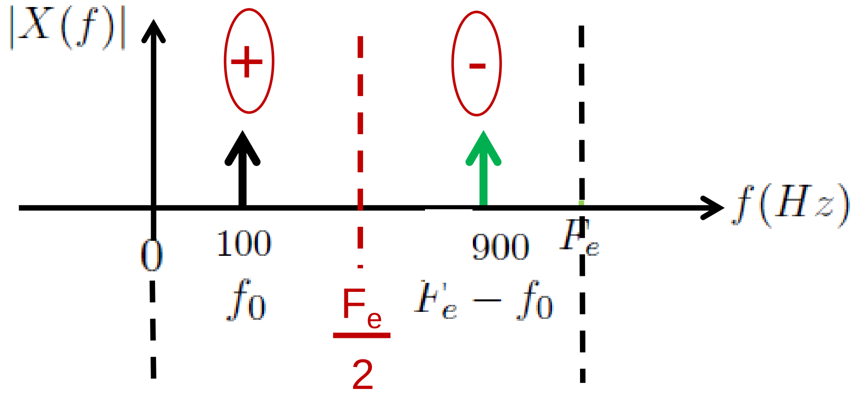
Exemple

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)\,;\ \ f_0 = 100\ Hz$$

Deux diracs côté fréquences positives
<u>mais un seul cosinus</u>




**Visualisation sur [0, $F_e$] :**



# Transformée de Fourier Discrète

## Echantillonnage temporel

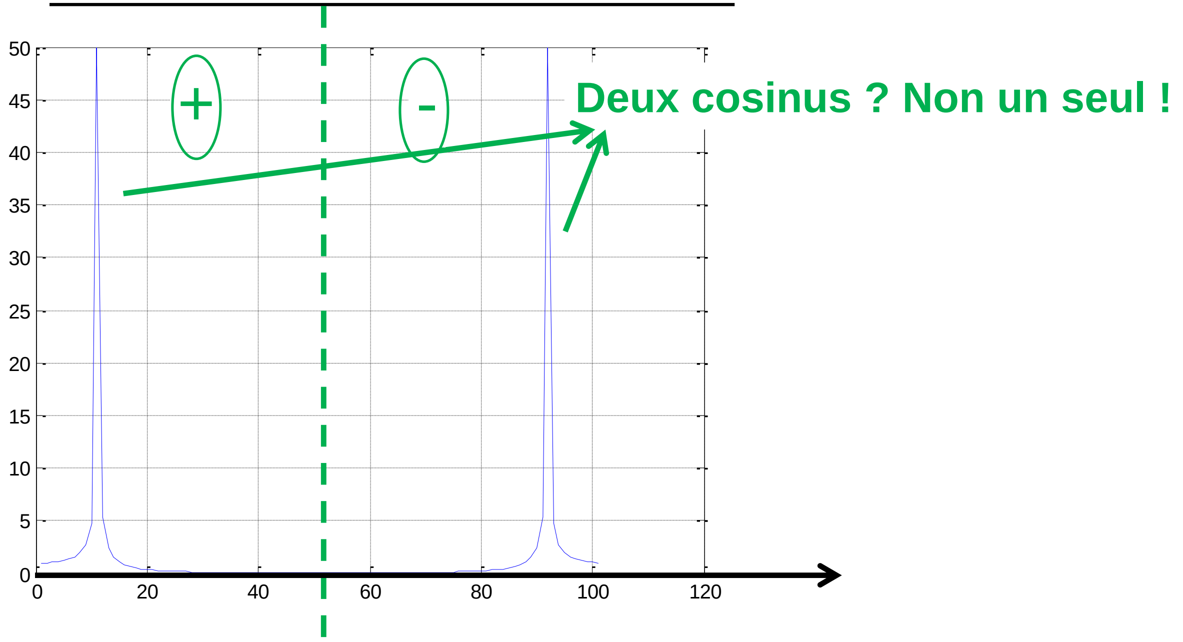
Exemple

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)\,;\;\; f_0 = 100\ Hz$$

<u>Code Matlab :</u>

```
%Paramètres
f0=100;       %fréquence du cosinus
Fe=1000;     %fréquence d'échantillonnage
Te=1/Fe;      %période d'échantillonnage
N=100;         %nombre d'échantillons

%Génération du signal
x=cos(2*pi*f0*[0:Te:(N-1)*Te]);

%Tracé du signal
figure; plot(x)

%Calcul de la TFD du signal
X=fft(x);

%Tracé du module de la TFD du signal
figure;  plot(abs(X))
```

<u>Tracé du module de la TFD obtenu :</u>



# Transformée de Fourier Discrète

## !! Echelle fréquentielle !!

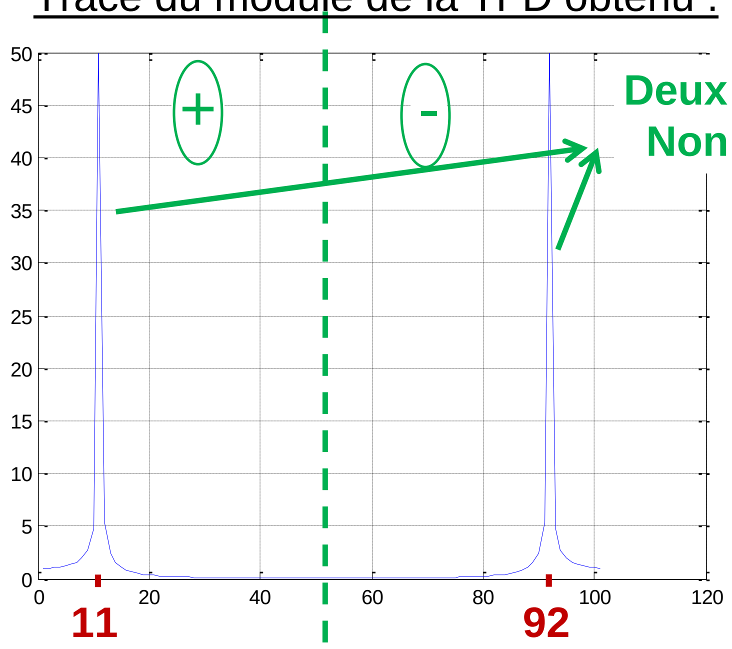
Exemple

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)\,;\ \ f_0 = 100\ Hz$$

Code Matlab :

```
%Paramètres
f0=100;      %fréquence du cosinus
Fe=1000;     %fréquence d'échantillonnage
Te=1/Fe;     %période d'échantillonnage
N=100;       %nombre d'échantillons

%Génération du signal
x=cos(2*pi*f0*[0:Te:(N-1)*Te]);

%Tracé du signal
figure; plot(x)

%Calcul de la TFD du signal
X=fft(x);

%Tracé du module de la TFD du signal
figure;  plot(abs(X))
```

Tracé du module de la TFD obtenu :




**Deux cosinus ? Non un seul !**

**De fréquences $f_0$=11 Hz et $F_e$- $f_0$=92 Hz ??**

# Transformée de Fourier Discrète

**!! Echelle fréquentielle !!**

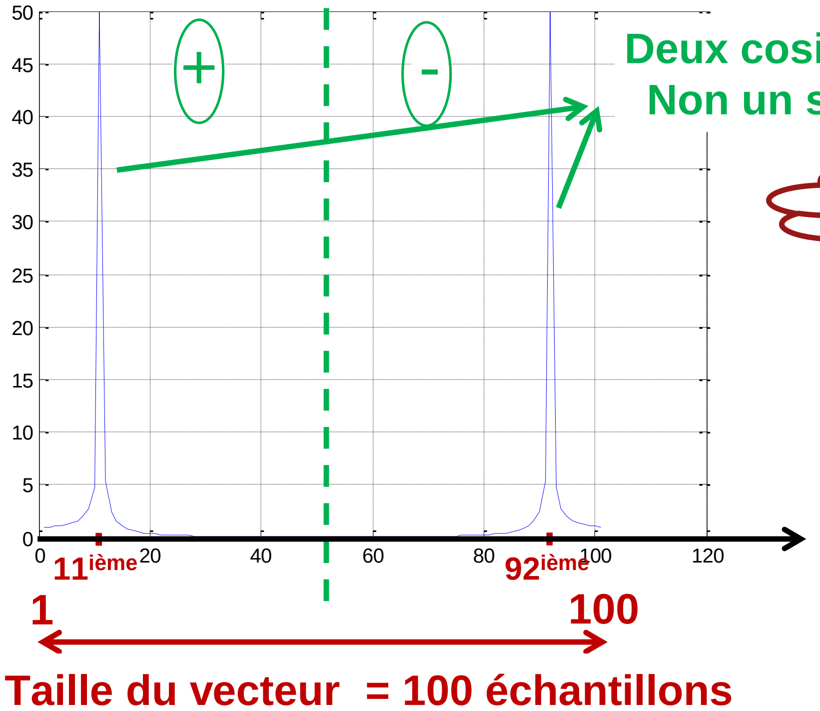
Exemple

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)\,; \;\; f_0 = 100\ Hz$$

## Code Matlab :

```
%Paramètres
f0=100;        %fréquence du cosinus
Fe=1000;   %fréquence d'échantillonnage
Te=1/Fe;      %période d'échantillonnage
N=100;         %nombre d'échantillons

%Génération du signal
x=cos(2*pi*f0*[0:Te:(N-1)*Te]);

%Tracé du signal
figure; plot(x)

%Calcul de la TFD du signal
X=fft(x);

%Tracé du module de la TFD du signal
figure;  plot(abs(X))
```

Tracé du module de la TFD obtenu :




$f_0 \Leftrightarrow 11^{ième}$ échantillons de la TFD

# Transformée de Fourier Discrète

**!! Echelle fréquentielle !!**

Exemple

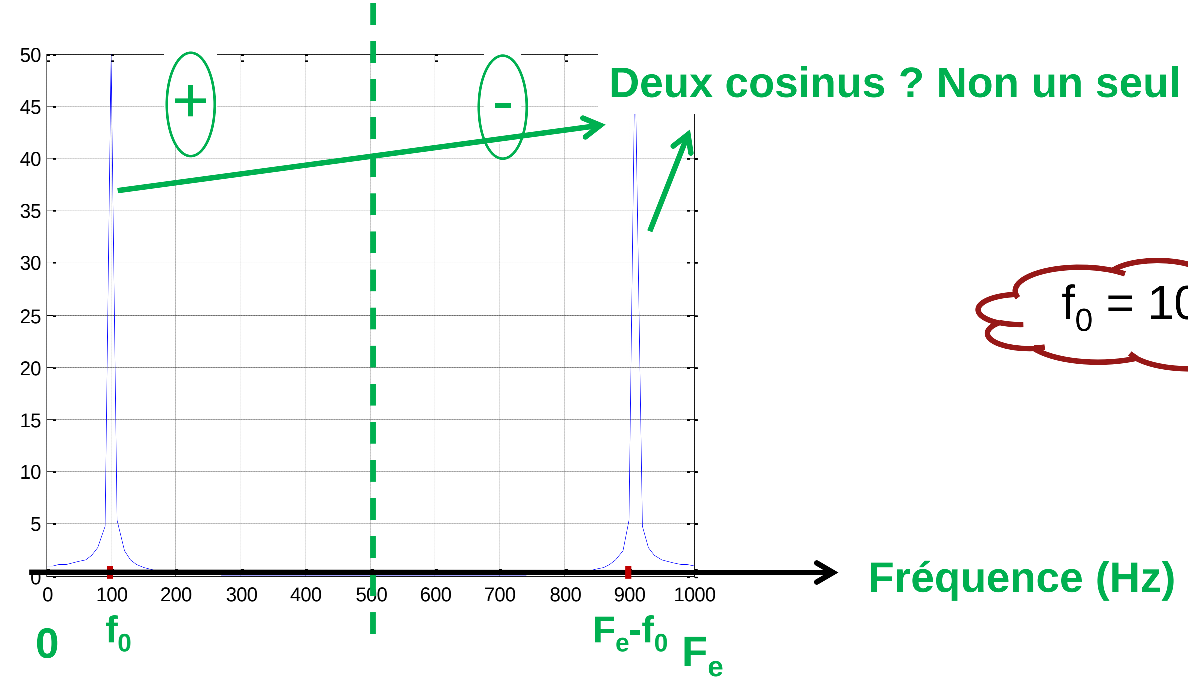
$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)\,;\ f_0 = 100\ Hz$$

## Code Matlab :

```
%Paramètres
f0=100;      %fréquence du cosinus
Fe=1000;     %fréquence d'échantillonnage
Te=1/Fe;     %période d'échantillonnage
N=100;       %nombre d'échantillons

%Génération du signal
x=cos(2*pi*f0*[0:Te:N*Te]);

%Tracé du signal
figure; plot([0:Te:N*Te],x)

%Calcul de la TFD du signal
X=fft(x);

%Tracé du module de la TFD du signal
figure;
plot(linspace(0,Fe,length(X)),abs(X))
```

**!! Echelle fréquentielle à donner !!**

Tracé du module de la TFD obtenu :




$f_0$ = 100 Hz

# Transformée de Fourier Discrète

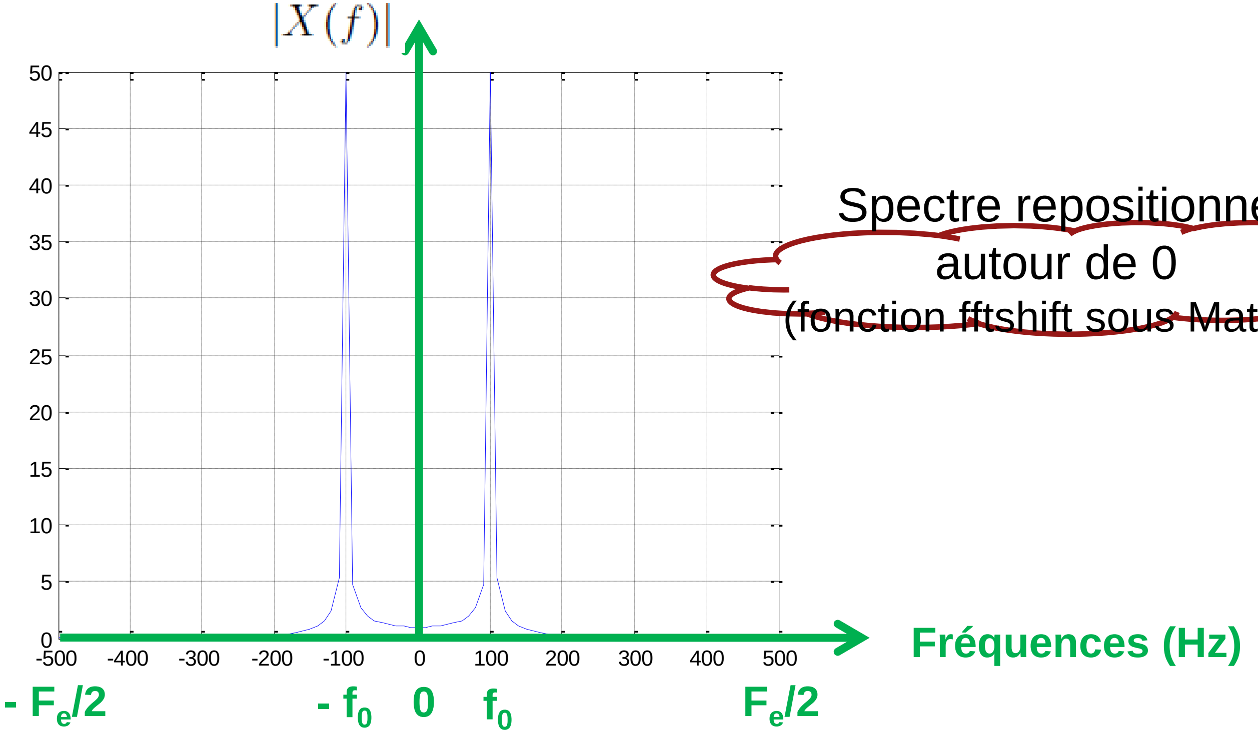
## !! Echelle fréquentielle !!

Exemple

$$x(t) = \cos\left(2\pi f_0 t\right);\ \ f_0 = 100\ Hz$$

Code Matlab :

```
%Paramètres
f0=100;      %fréquence du cosinus
Fe=1000;     %fréquence d'échantillonnage
Te=1/Fe;     %période d'échantillonnage
N=100;       %nombre d'échantillons

%Génération du signal
x=cos(2*pi*f0*[0:Te:N*Te]);

%Tracé du signal
figure; plot([0:Te:N*Te],x)

%Calcul de la TFD du signal
X=fft(x);

%Tracé du module de la TFD du signal
figure; plot(linspace(-Fe/2,Fe/2,length(X)),fftshift(abs(X)))
```




Spectre repositionné autour de 0 (fonction fftshift sous Matlab)

# Transformée de Fourier Discrète

**Transformée de Fourier (TF)** $\longrightarrow$ **Transformée de Fourier Discrète (TFD)**

Echantillonnage temporel

$$x(t) \;\rightarrow\; \{x(kT_e)\}_{k=-\infty,\dots,+\infty}$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{j2\pi ft}\,dt \;\rightarrow\; \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e)e^{j2\pi fkT_e}$$ (définie à $T_e$ près)

Impact : Périodisation de la TFD

$\Rightarrow$ !! Respecter la condition de Shannon !!

$\Rightarrow$ !! Lecture des tracés et échelle !!

$$X(f+F_e) = X(f)$$

$$X(\tilde{f}+1) = X(\tilde{f})$$

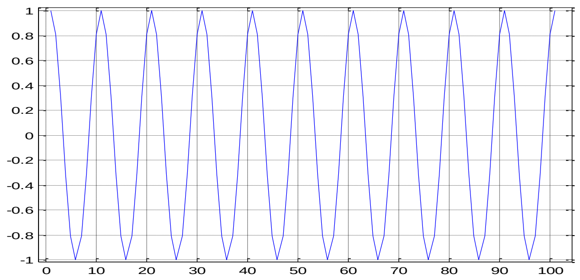
Définition de la fréquence normalisée : $\boxed{\tilde{f} = \frac{f}{F_e}}$

# Transformée de Fourier Discrète

**Signal de durée limitée**

Exemple

$$x(t) = \cos\left(2\pi f_0 t\right);\ \ f_0 = 100\ Hz$$



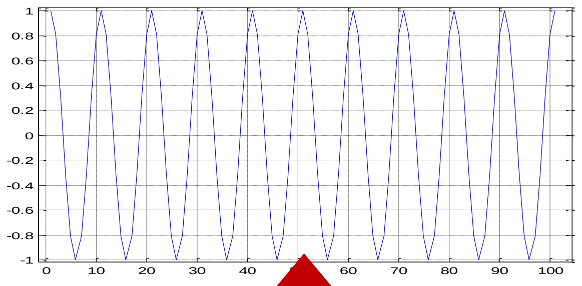

**Signal de durée limitée**

# Transformée de Fourier Discrète

## Signal de durée limitée

Exemple

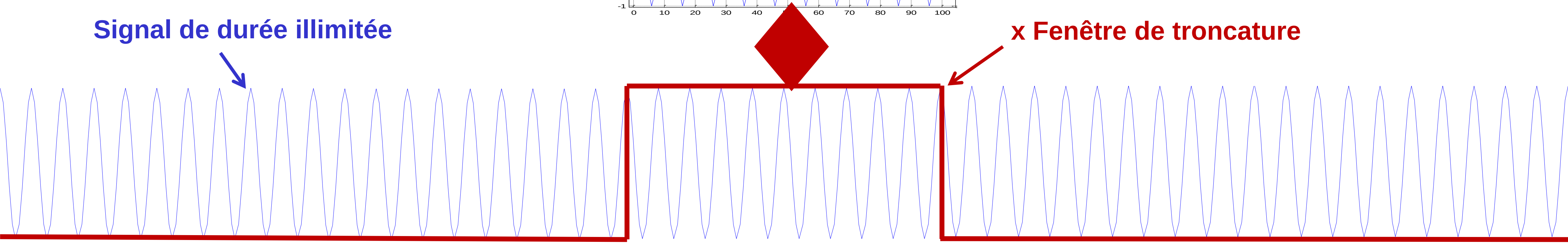
$$x(t) = \cos\left(2\pi f_0 t\right) ;\ \ f_0 = 100\ Hz$$




Signal de durée limitée

Signal de durée illimitée

x Fenêtre de troncature



# Transformée de Fourier Discrète

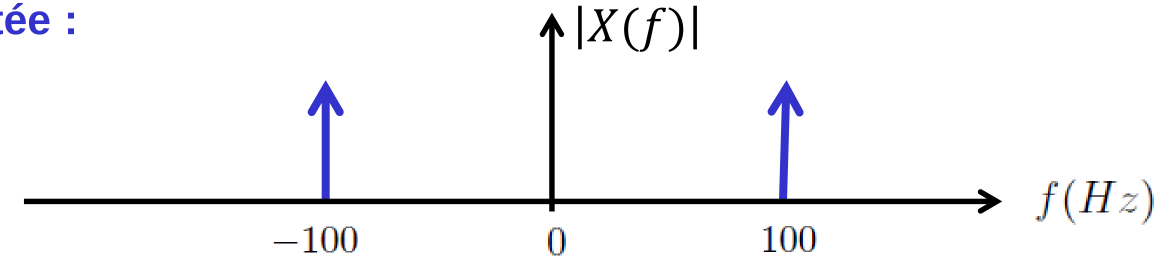
## Signal de durée limitée

Exemple

$$x(t) = \cos\left(2\pi f_0 t\right) ; \;\; f_0 = 100 \; Hz$$

**TF du signal de durée illimitée :**

$$x(t) \xrightarrow{TF} X(f)$$



# Transformée de Fourier Discrète

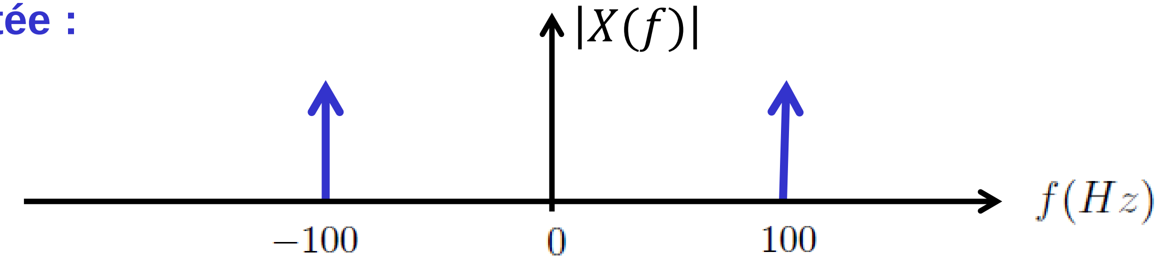
## Signal de durée limitée

Exemple

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)\,; \;\; f_0 = 100\ Hz$$

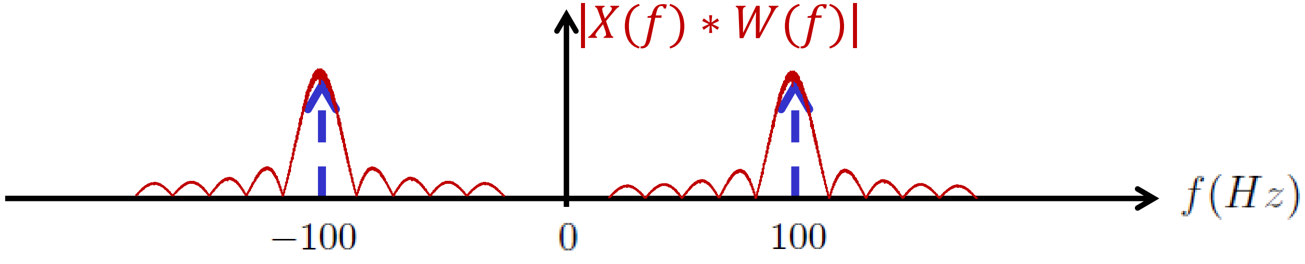
**TF du signal de durée illimitée :**

$$x(t) \xrightarrow{TF} X(f)$$




**TF du signal à durée limitée** = **TF du signal à durée illimitée** $*$ **TF de la fenêtre modélisant la troncature** :

$$x(t)w(t) \xrightarrow{TF} X(f) * W(f)$$



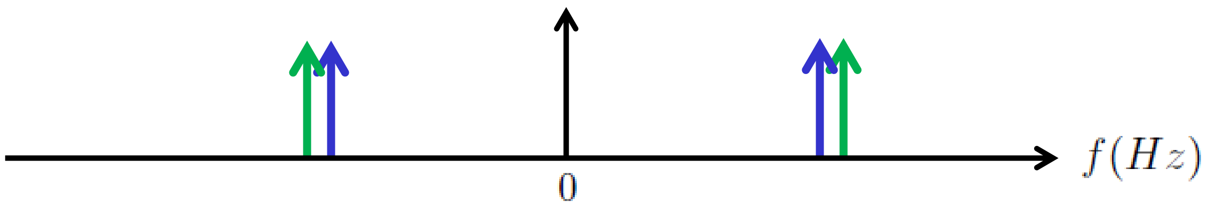
# Transformée de Fourier Discrète

**Signal de durée limitée**

Problèmes posés :

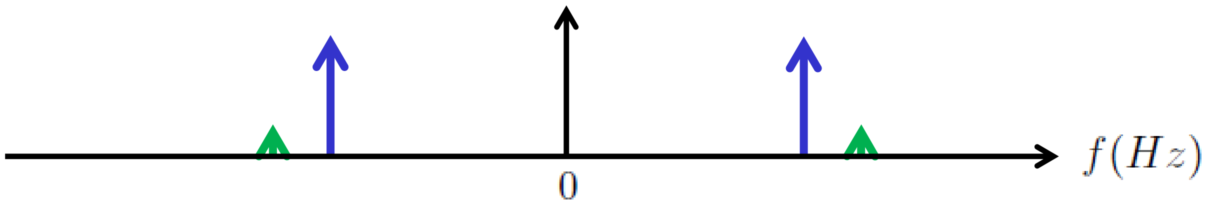
**Exemple 1**

Somme de deux cosinus proches en fréquences




**Exemple 2**

Somme de deux cosinus dont un de faible puissance



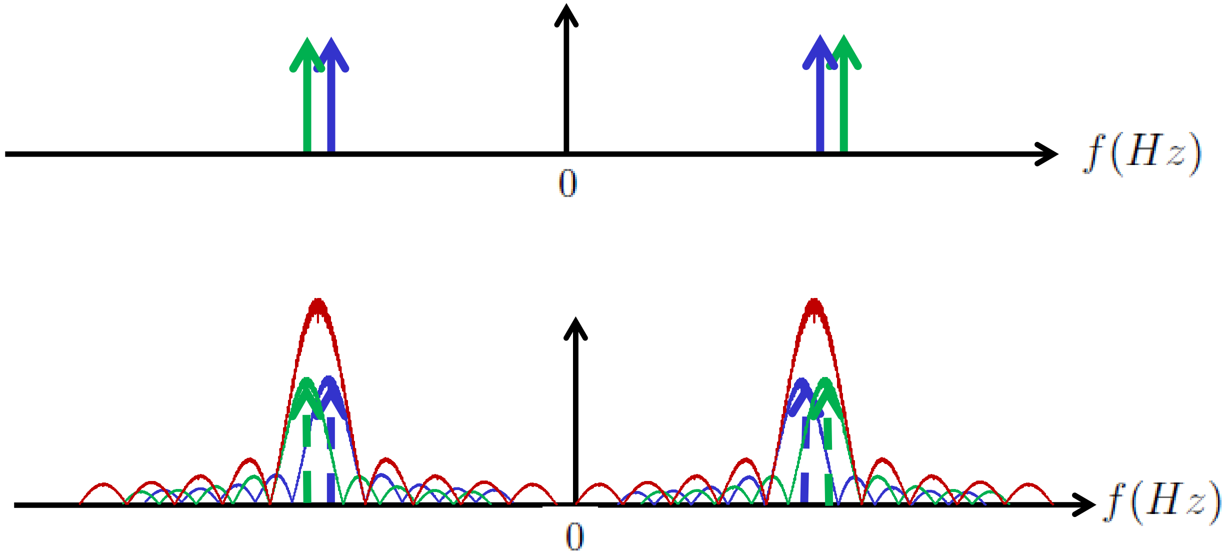
# Transformée de Fourier Discrète

## Signal de durée limitée

Problèmes posés :

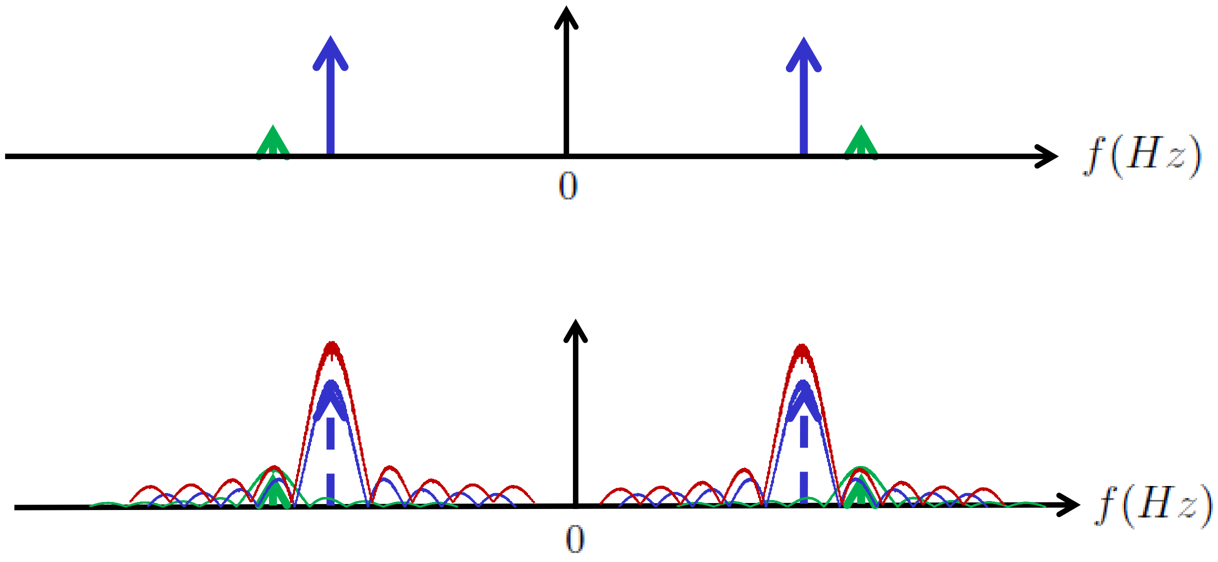
### Exemple 1

Somme de deux cosinus proches en fréquences




### Exemple 2

Somme de deux cosinus dont un de faible puissance



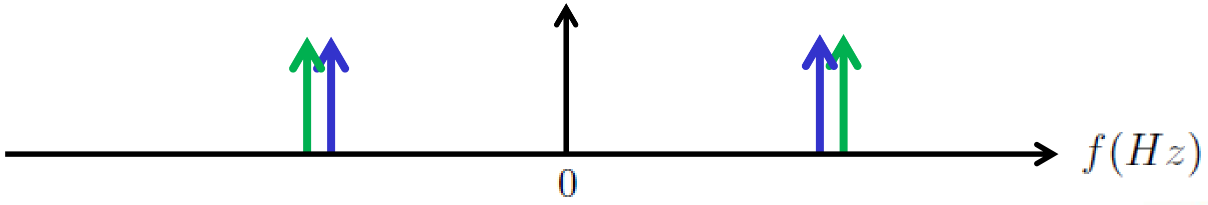
# Transformée de Fourier Discrète

## Signal de durée limitée

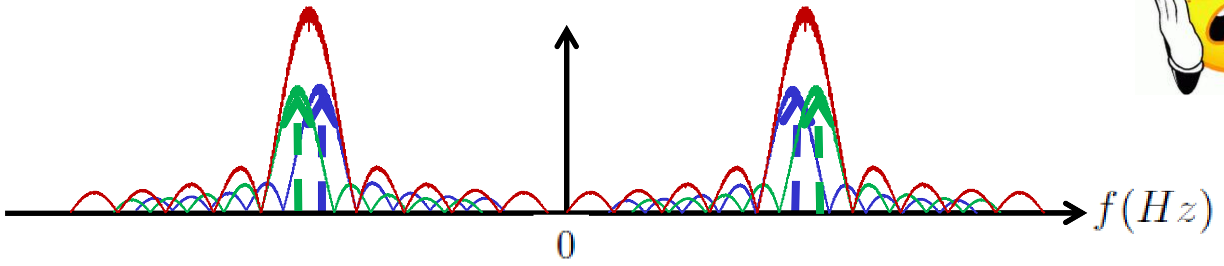
<u>Problèmes posés :</u>

### Exemple 1

Somme de deux cosinus proches en fréquences

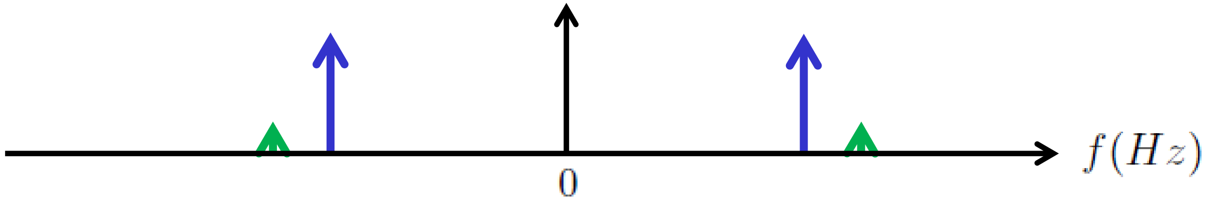



!! Un seul cosinus !!

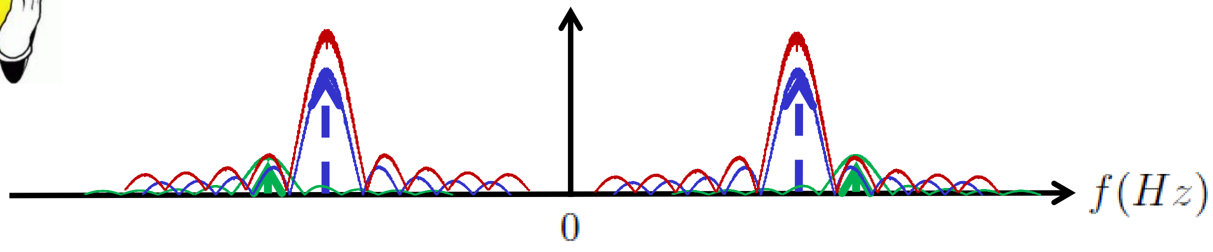



### Exemple 2

Somme de deux cosinus dont un de faible puissance




!! Un seul cosinus !!



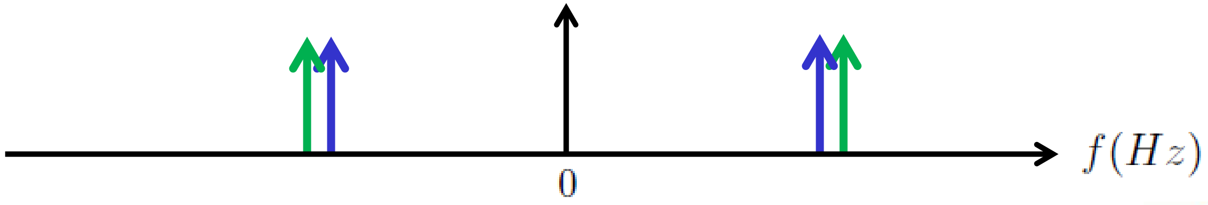
# Transformée de Fourier Discrète

**Signal de durée limitée**

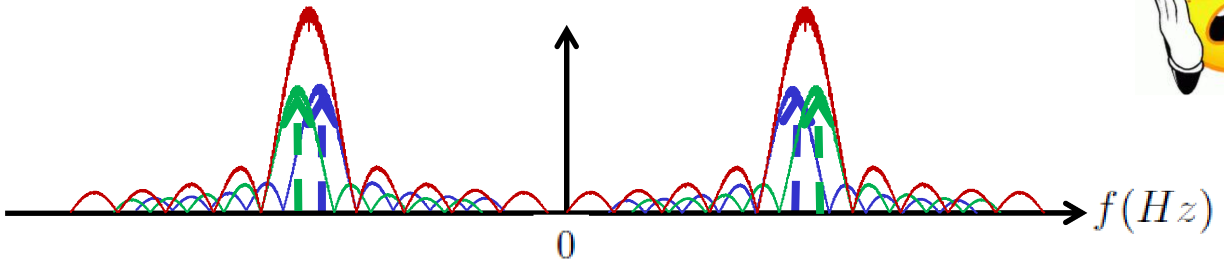
<u>Problèmes posés :</u>

**Exemple 1**

Somme de deux cosinus proches en fréquences

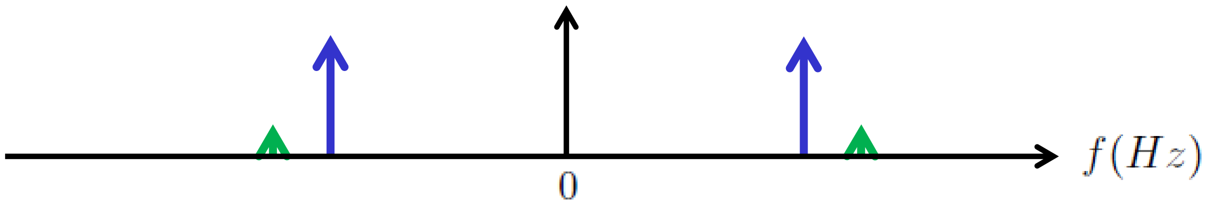



!! Un seul cosinus !!

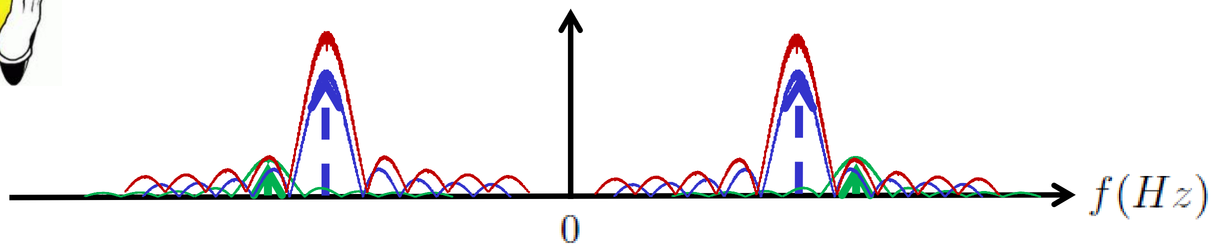



**Exemple 2**

Somme de deux cosinus dont un de faible puissance




!! Un seul cosinus !!




$\Rightarrow$ L'analyse spectrale NUMERIQUE aura :

un certain **pouvoir séparateur** et un certain **taux d'ondulation**

Capacité à séparer des motifs spectraux proches en fréquences

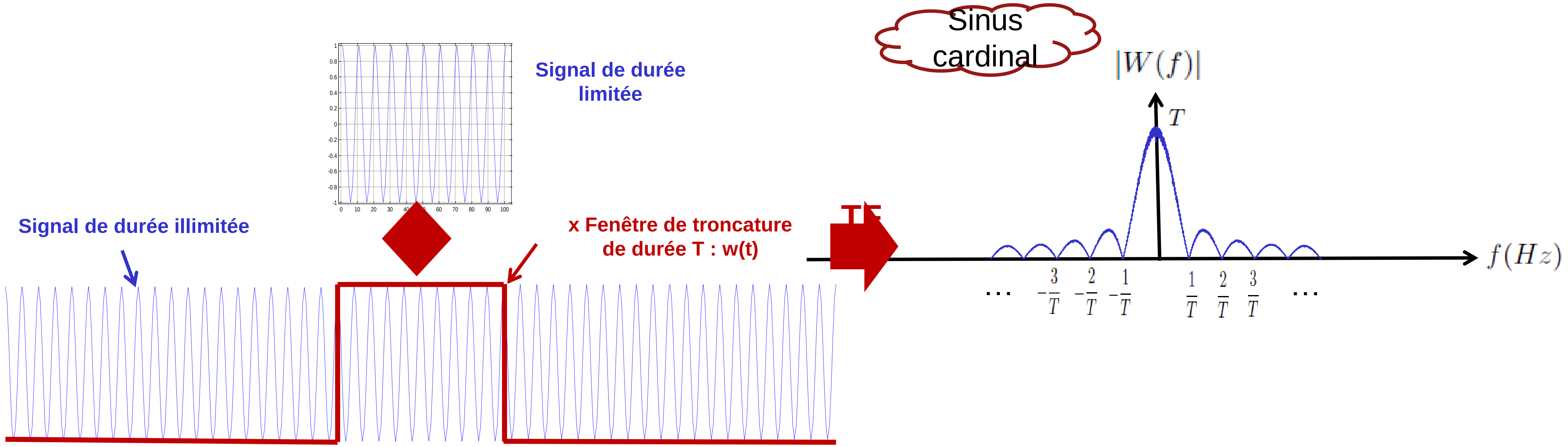
Masquage de motifs spectraux de faibles puissances

# Transformée de Fourier Discrète

## Signal de durée limitée

Exemple

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)\ ;\ \ f_0 = 100\ Hz$$

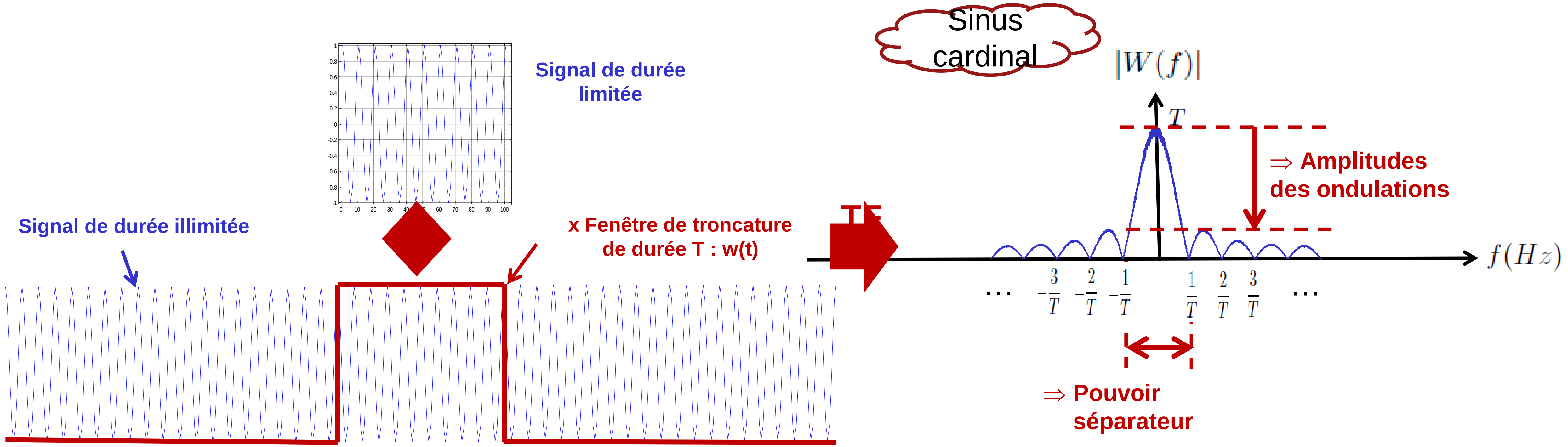


# Transformée de Fourier Discrète

## Signal de durée limitée

Exemple

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)\ ;\ \ f_0 = 100\ Hz$$

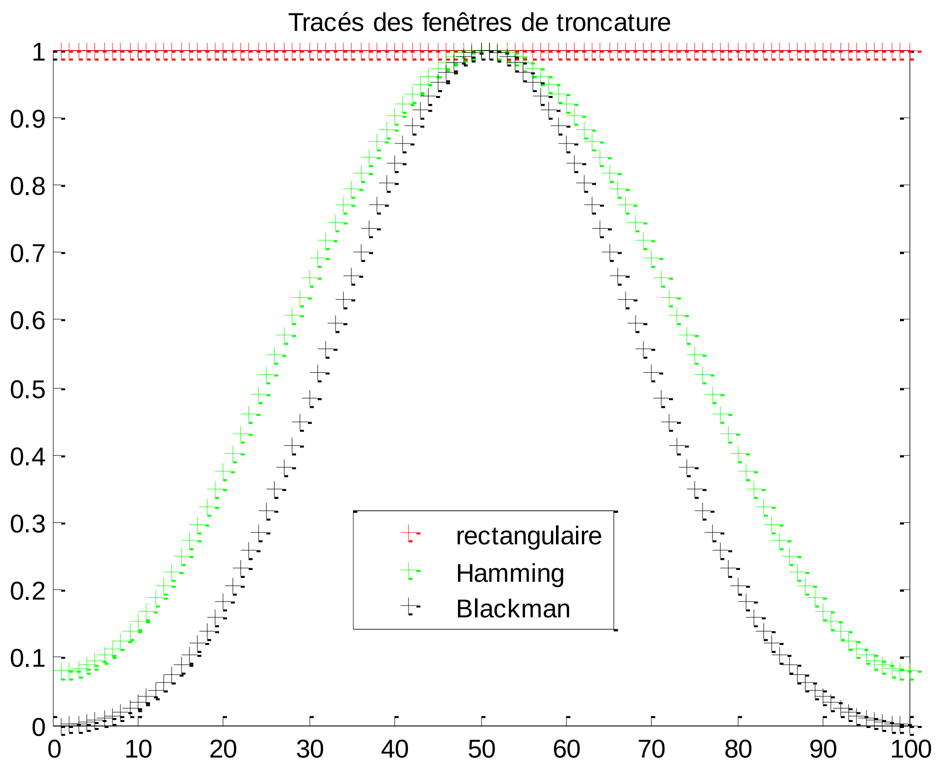


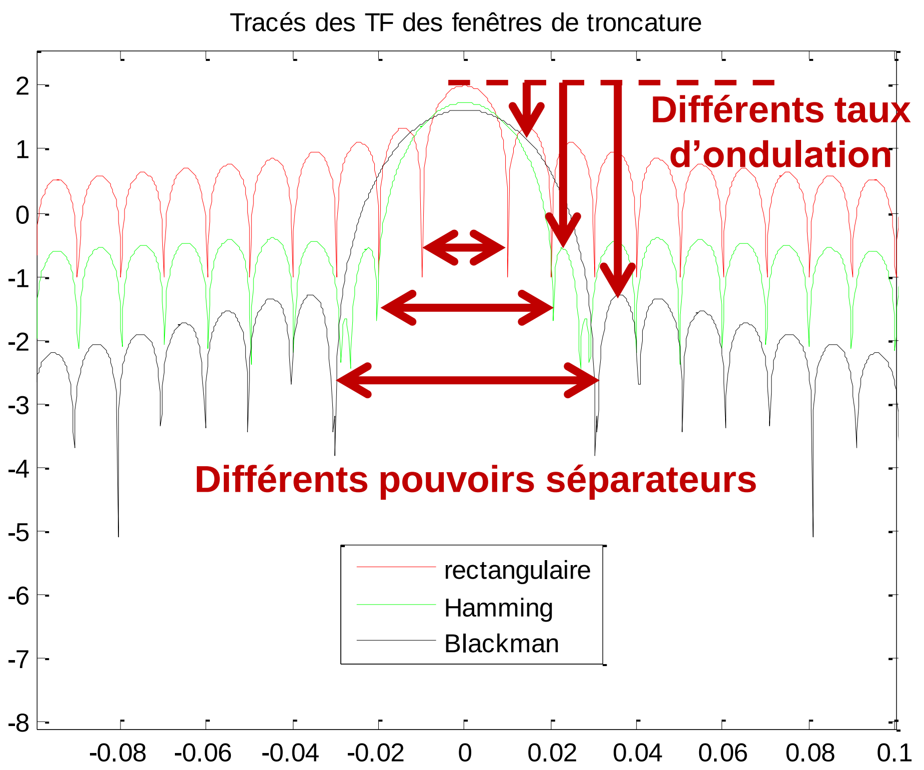
# Transformée de Fourier Discrète

## Signal de durée limitée

Utiliser d'autres fenêtres de troncature (fenêtre de pondération, d'apodisation) ?

Exemples



# Transformée de Fourier Discrète

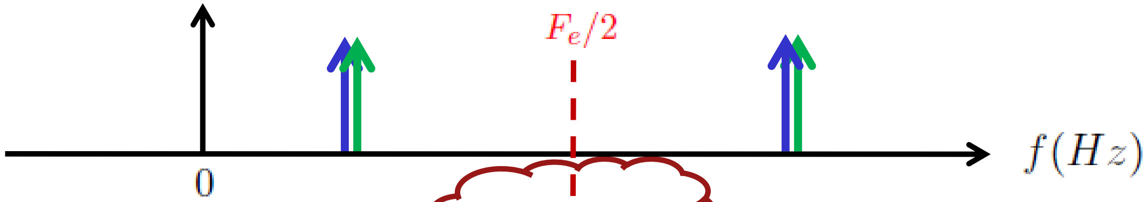
## Signal de durée limitée

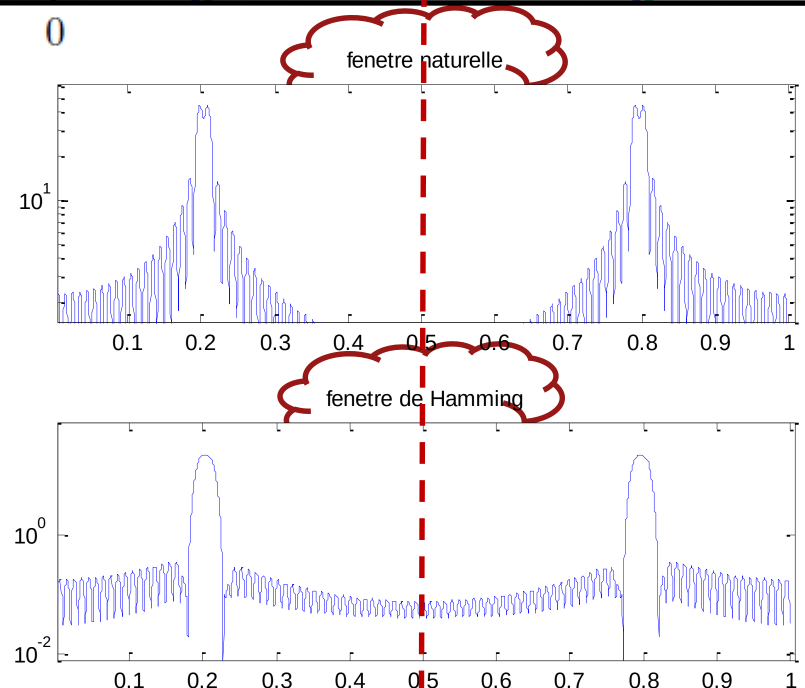
Utiliser d'autres fenêtres de troncature (fenêtre de pondération, d'apodisation) ?

Exemple 1 : somme de deux cosinus proches en fréquences

```
%Exemple1
%Paramètres
f1=200;        %fréquence du cosinus 1
f2=207;        %fréquence du cosinus 2
Fe=1000;       %fréquence d'échantillonnage
Te=1/Fe;       %période d'échantillonnage
N=100;         %nombre d'échantillons

%Génération du signal
x1=cos(2*pi*f1*[0:Te:N*Te]);
x2=cos(2*pi*f2*[0:Te:N*Te]);
```

```
%fenêtre naturelle
x=x1+x2;
X_V1=fft(x,4096);
%fenêtre de hamming
w=window(@hamming,length(x));
x=(x1+x2).*w.';
X_V2=fft(x,4096);
%Tracés
figure
subplot(2,1,1)
plot(linspace(0,1,4096),log10(abs(X_V1)));
title('fenetre naturelle');
subplot(2,1,2)
plot(linspace(0,1,4096),log10(abs(X_V2)));
title('fenetre de Hamming');
```



# Transformée de Fourier Discrète

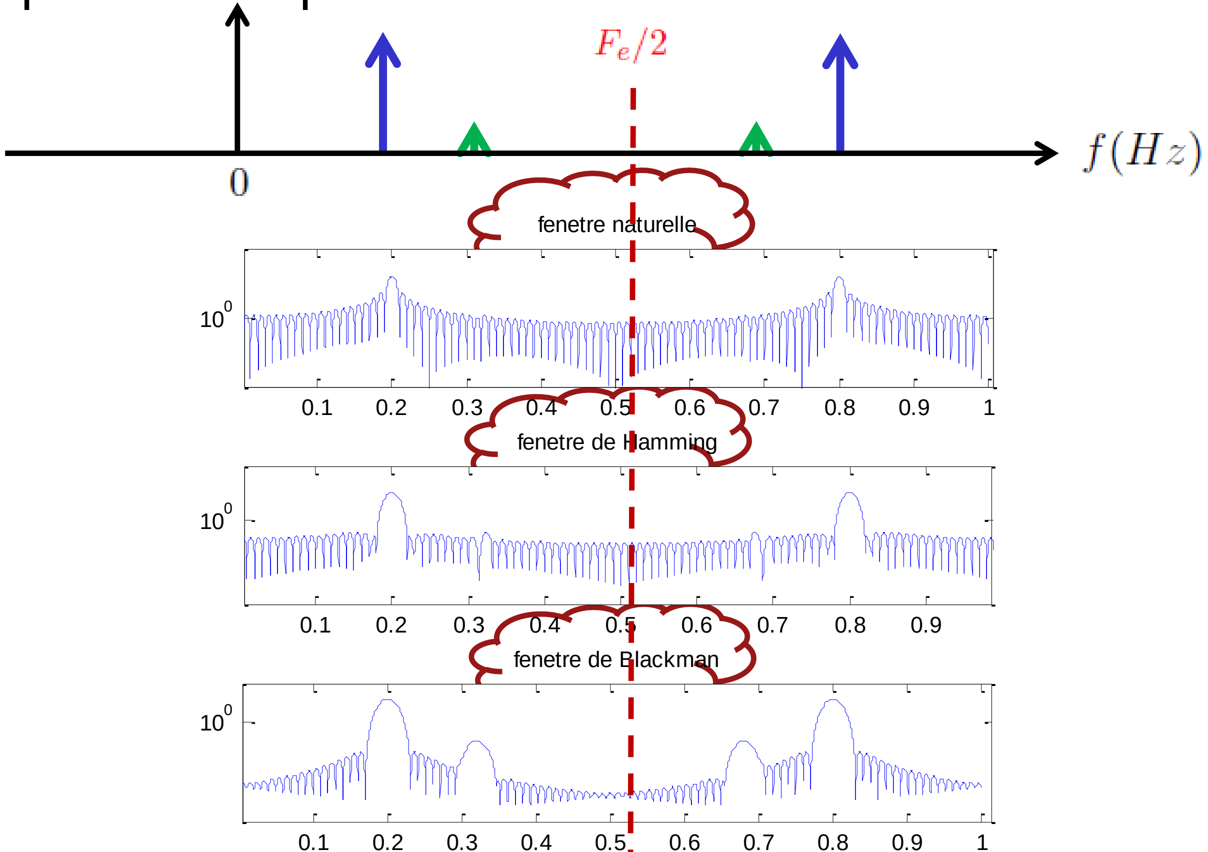
## Signal de durée limitée

Utiliser d'autres fenêtres de troncature (fenêtre de pondération, d'apodisation) ?

Exemple 2 : somme de deux cosinus proches de puissances différentes

```
%Exemple 2
%Paramètres
f1=200;     %fréquence du cosinus 1
f2=320;     %fréquence du cosinus 2
Fe=1000;    %fréquence d'échantillonnage
Te=1/Fe;    %période d'échantillonnage
N=100;      %nombre d'échantillons

%Génération du signal
x1=cos(2*pi*f1*[0:Te:N*Te]);
x2=0.005*cos(2*pi*f2*[0:Te:N*Te]);
x=x1+x2;

%fenetre naturelle
X=fft(x,4096);
figure
subplot(3,1,1)
semilogy(linspace(0,1,4096),abs(X));
axis([0 1 10^-5 10^5])
title('fenetre naturelle');
```

```
%fenetre de hamming
w=window(@hamming,length(x));
x=(x1+x2).*w.';
X=fft(x,4096);
subplot(3,1,2)
semilogy(linspace(0,1,4096),abs(X));
title('fenetre de Hamming');

%fenetre de blackman
w=window(@blackman,length(x));
%w=blackman(N);
x=(x1+x2).*w.';
X=fft(x,4096);
subplot(3,1,3)
semilogy(linspace(0,1,4096),abs(X));
title('fenetre de Blackman');
```



# Transformée de Fourier Discrète

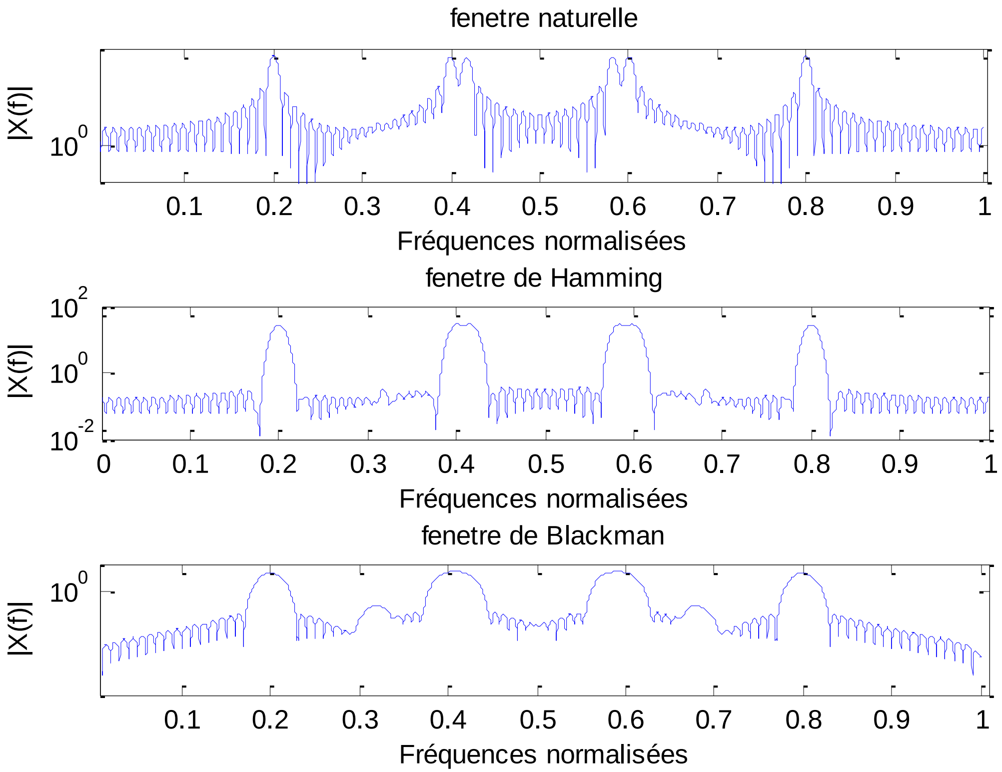
**Signal de durée limitée**

Utiliser d'autres fenêtres de troncature (fenêtre de pondération, d'apodisation) ?

Exemple 3

**Ce signal est une somme de cosinus.**
**Il comprend :**

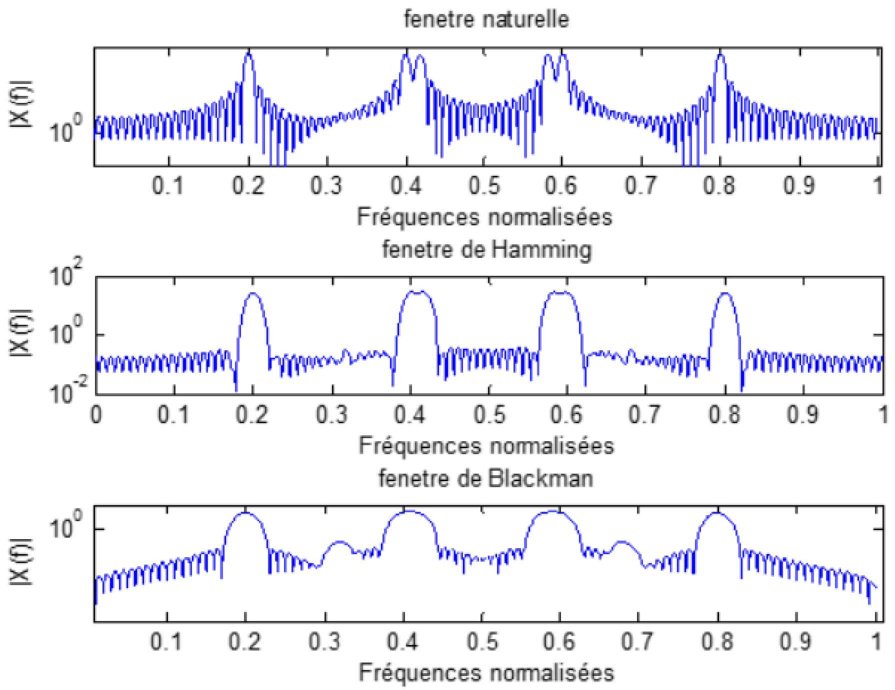
**1- Deux cosinus**
**2- Trois cosinus**
**3- Quatre cosinus**
**4- Je ne sais pas répondre**




**Signal ???**

# QUESTION 4

Allez sur **wooclap.com** et utilisez le code **SIGSEQ2**




Ce tracé représente le module de la transformée de Fourier estimée en numérique d'un signal correctement échantillonné (condition de Shannon respectée). Ce signal est une somme de cosinus. Il s'agit :

1. D'une somme de 2 cosinus
2. D'une somme de 3 cosinus
3. D'une somme de 4 cosinus

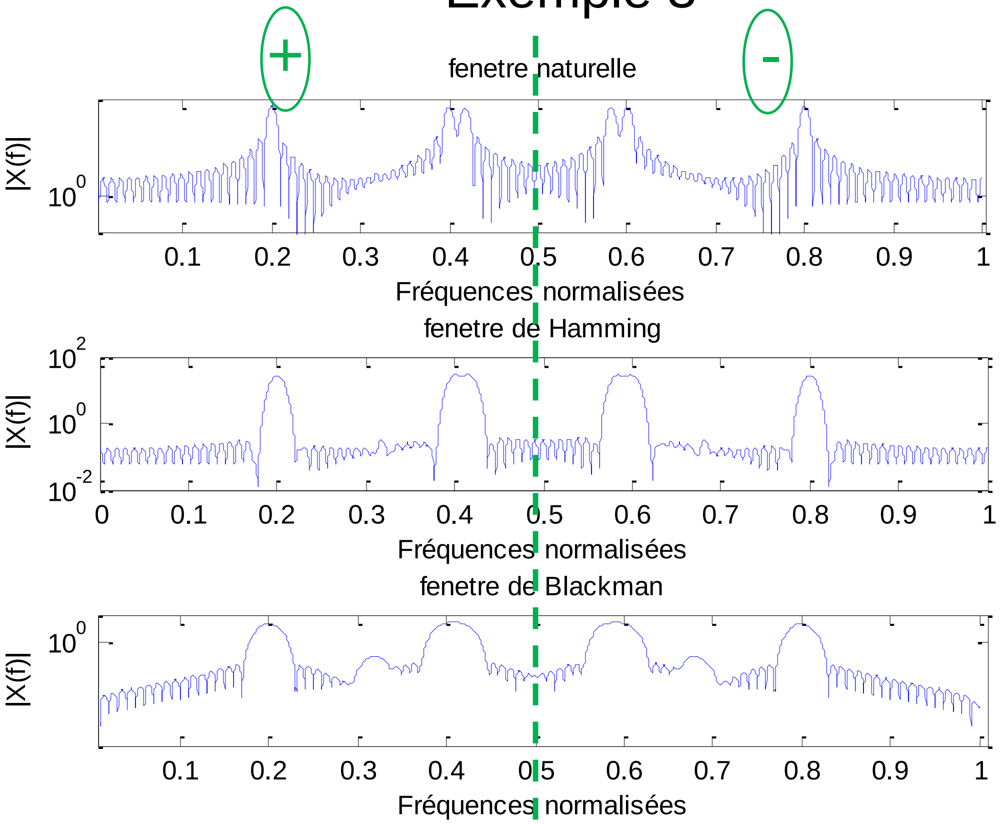
# Transformée de Fourier Discrète

**Signal de durée limitée**

Utiliser d'autres fenêtres de troncature (fenêtre de pondération, d'apodisation) ?

Exemple 3

4 cosinus :
3 de puissances identiques
1 de plus faible puissance




3 cosinus
de puissances identiques

2 cosinus
de puissances identiques
Mais quelque chose de bizarre…

3 cosinus
de puissances différentes

# Transformée de Fourier Discrète

**Transformée de Fourier (TF)** → **Transformée de Fourier Discrète (TFD)**

Signal de durée limitée

$$x(t) \rightarrow x_L(t) = \begin{cases} x(t) & \text{pour } t \in [0, L] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j2\pi f t}\, dt \;\rightarrow\; \int_{0}^{L} x(t) e^{j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) w(t) e^{j2\pi f t}\, dt = X(f) * W(f)$$

Impact : Distorsion de la TFD attendue

=> Analyse spectrale numérique avec pouvoir séparateur limité et apparition d'ondulations

=> Utilisation de plusieurs fenêtres de pondération

# Transformée de Fourier Discrète

**Transformée de Fourier (TF)** → **Transformée de Fourier Discrète (TFD)**

Signal échantillonné et de durée limitée

$$x(t) \rightarrow \{x(kT_e)\}_{k=0,\dots,N-1}$$

$$\boxed{X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{j2\pi ft}\,dt \;\rightarrow\; \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_e)e^{j2\pi fkT_e}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e)w(kT_e)e^{j2\pi fkT_e}$$

$$= X_e(f) * W_e(f)$$

$$X_e(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e)e^{j2\pi fkT_e}$$

Noyau de Dirichlet

$$W_e(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 1 \times e^{j2\pi fkT_e} = e^{-j\pi f(N-1)T_e}\frac{\sin(\pi fNT_e)}{\sin(\pi fT_e)}$$

Impact : Périodisation et distorsion de la TFD

⇒ !! Respecter la condition de Shannon !!

⇒ !! Lecture des tracés et échelle !!

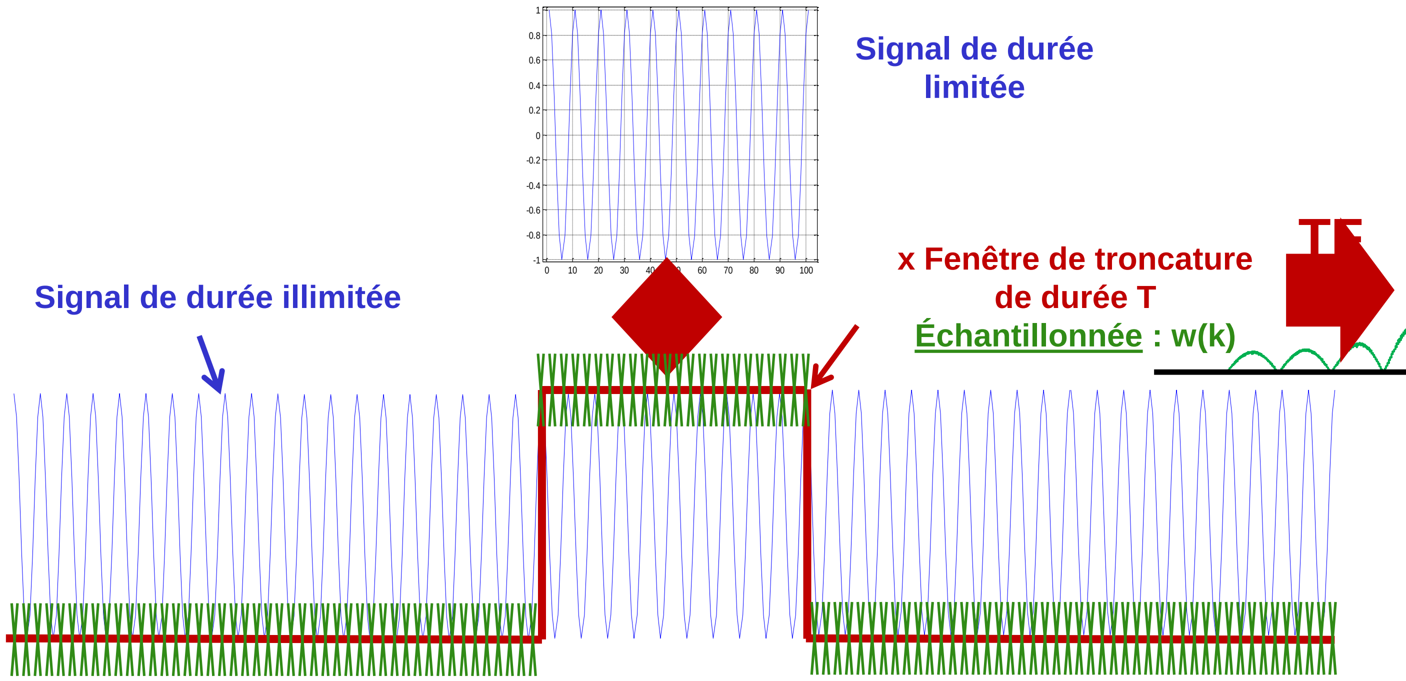
⇒ Utilisation de plusieurs fenêtres de troncature ou fenêtres de pondération

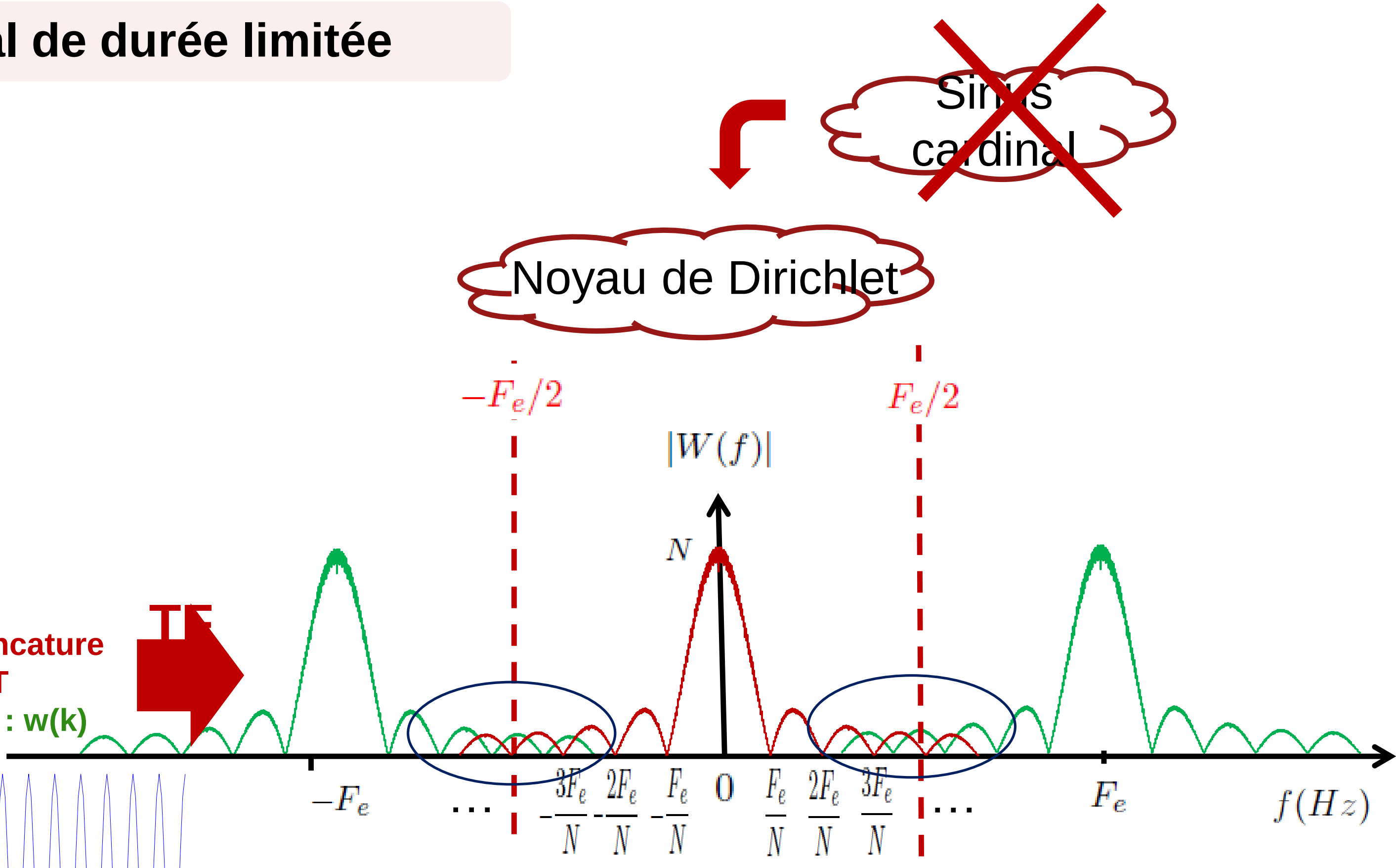
# Transformée de Fourier Discrète

**Signal de durée limitée**

Exemple

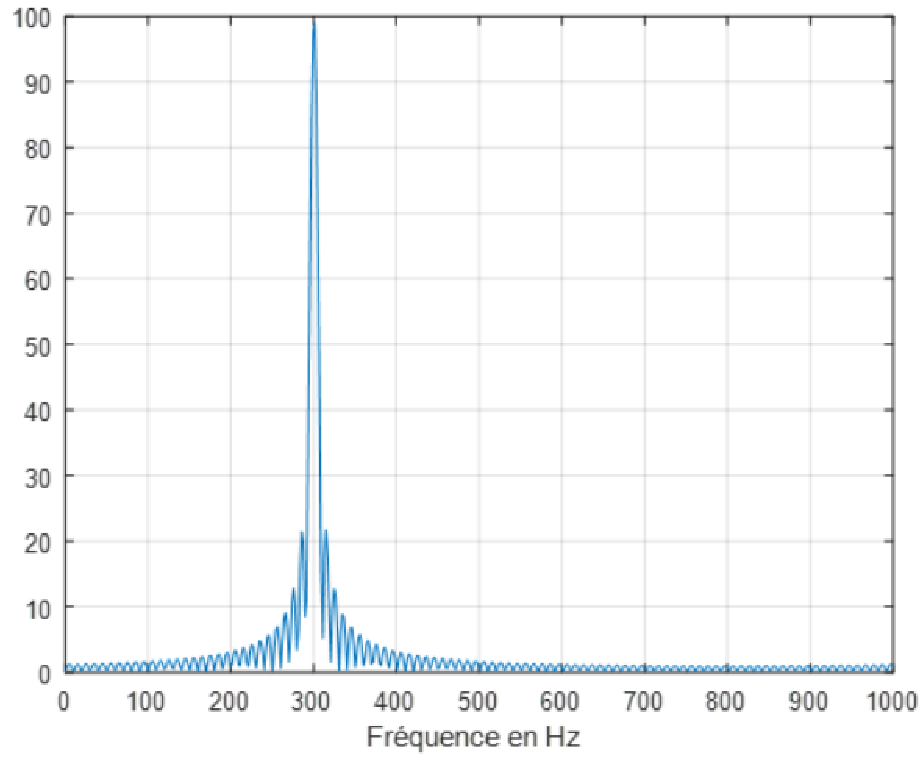
$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)\,;\;\; f_0 = 100\ Hz$$



# QUESTION 5

Allez sur **wooclap.com** et utilisez le code **SIGSEQ2**




Sachant que le signal a été correctement échantillonné avec une fréquence d'échantillonnage Fe=1000 Hz, ce tracé représente le module de la transformée de Fourier estimée en numérique :

1. **d'un cosinus de fréquence 300Hz**

2. **d'une exponentielle de fréquence 300Hz**

3. **d'une fonction porte de largeur 0.05 s**

# Transformée de Fourier Discrète

## Signal échantillonné et de durée limitée

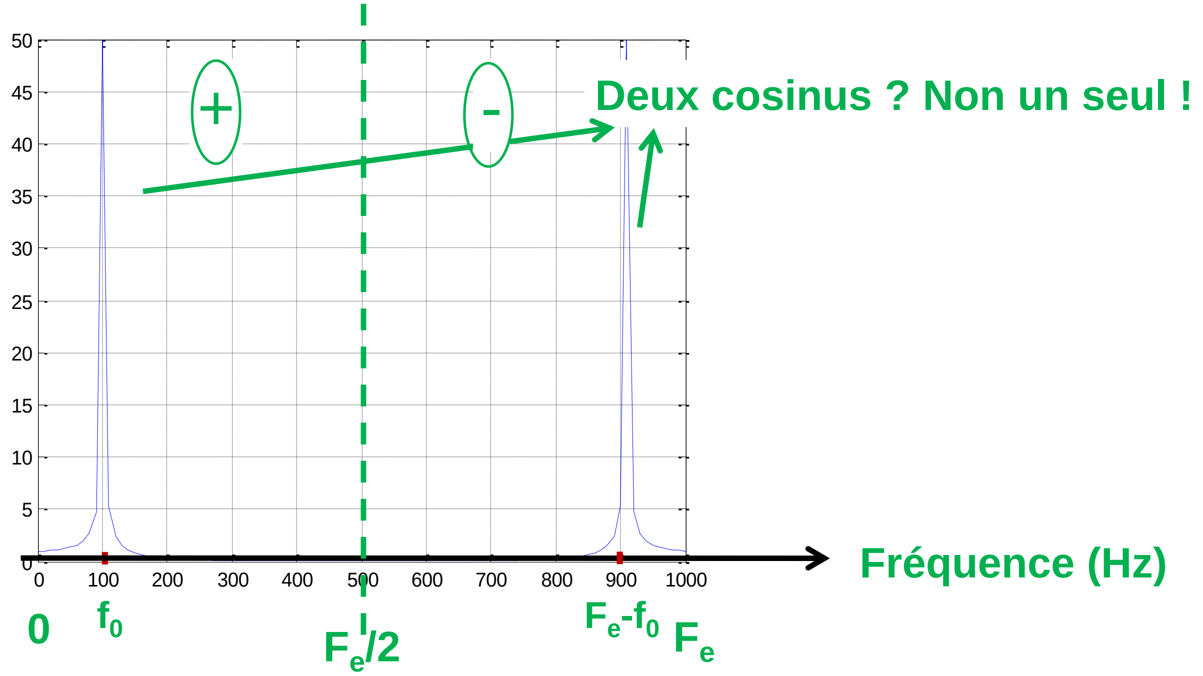
Exemple

$$x(t) = \cos\left(2\pi f_0 t\right)\,;\;\; f_0 = 100\ Hz$$

Code Matlab :

```
%Paramètres
f0=100;      %fréquence du cosinus
Fe=1000;     %fréquence d'échantillonnage
Te=1/Fe;     %période d'échantillonnage
N=101;       %nombre d'échantillons

%Génération du signal
x=cos(2*pi*f0*[0:Te:(N-1)*Te]);

%Tracé du signal
figure, plot(x)

%Calcul de la TFD du signal
X=fft(x);

%Tracé du module de la TFD du signal
figure
plot(linspace(0,Fe,length(X)),abs(X))
```

Tracé du module de la TFD obtenu :



# Transformée de Fourier Discrète

**Signal échantillonné et de durée limitée**

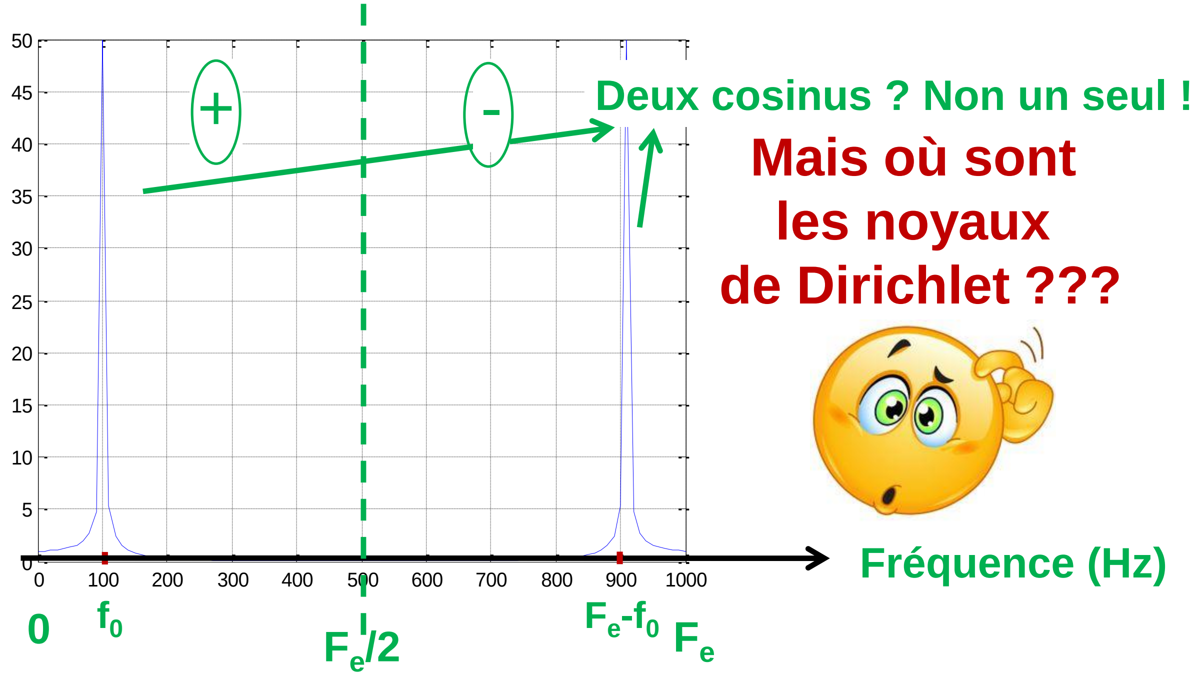
Exemple

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)\,;\;\; f_0 = 100\ Hz$$

Code Matlab :

```
%Paramètres
f0=100;      %fréquence du cosinus
Fe=1000;     %fréquence d'échantillonnage
Te=1/Fe;     %période d'échantillonnage
N=101;       %nombre d'échantillons

%Génération du signal
x=cos(2*pi*f0*[0:Te:(N-1)*Te]);

%Tracé du signal
figure, plot(x)

%Calcul de la TFD du signal
X=fft(x);

%Tracé du module de la TFD du signal
figure
plot(linspace(0,Fe,length(X)),abs(X))
```

Tracé du module de la TFD obtenu :



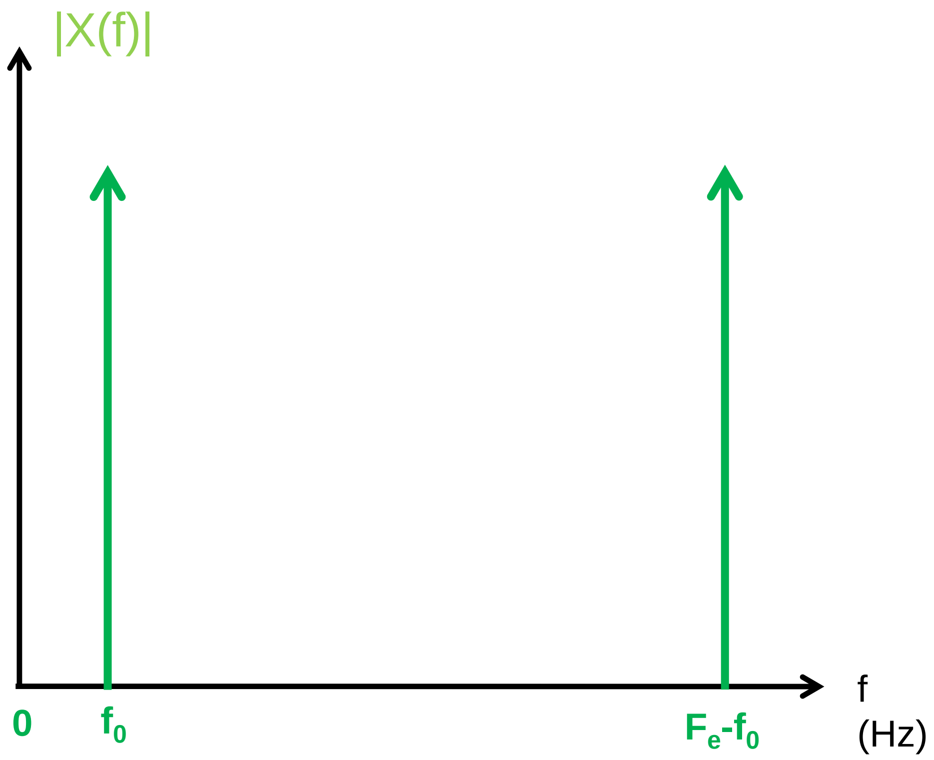

**Mais où sont les noyaux de Dirichlet ???**

# Transformée de Fourier Discrète

## Echantillonnage de la TFD

Exemple

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)\,;\;\; f_0 = 100\ Hz$$

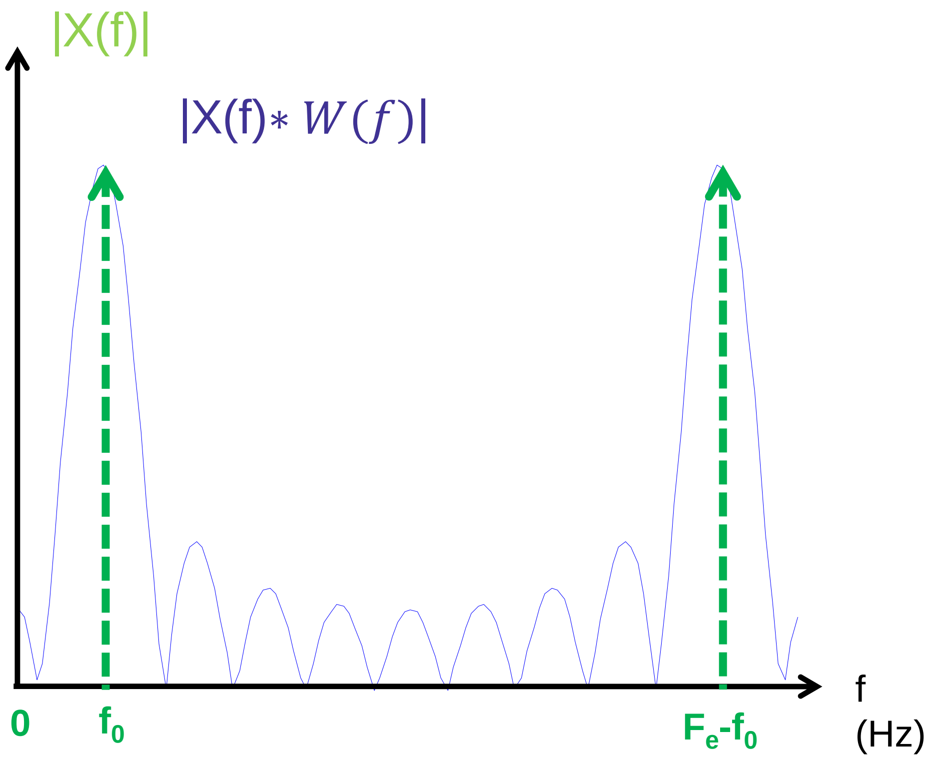


# Transformée de Fourier Discrète

**Echantillonnage de la TFD**

Exemple

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)\,;\ \ f_0 = 100\ Hz$$

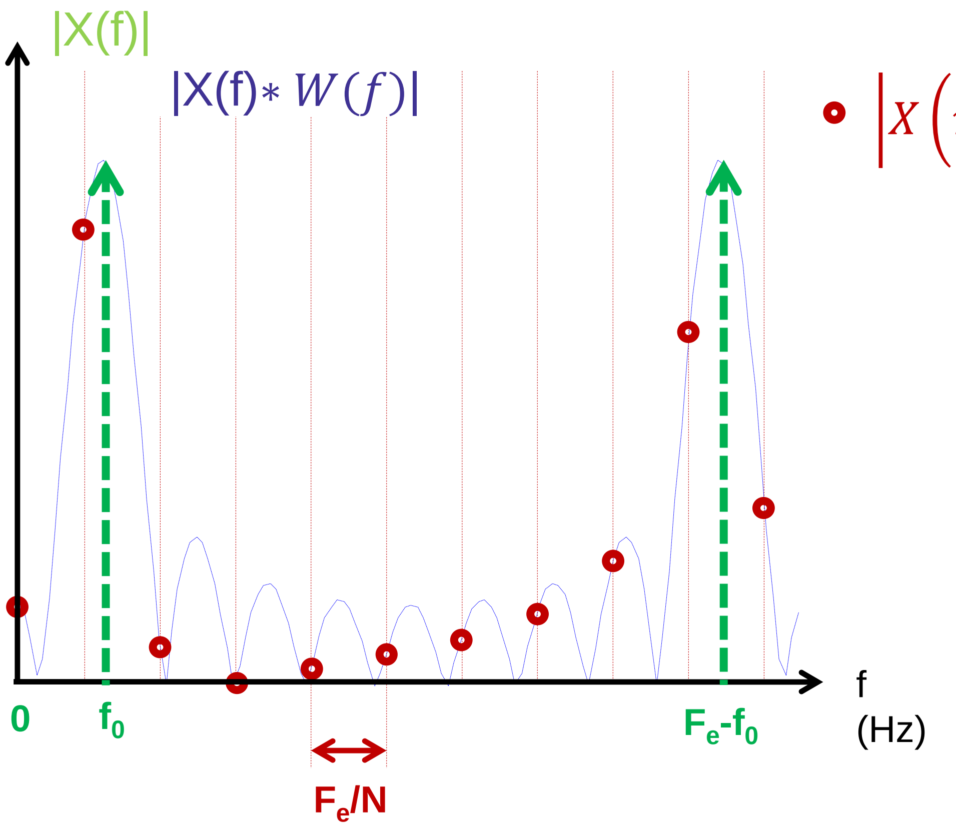


# Transformée de Fourier Discrète

## Echantillonnage de la TFD

Exemple

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)\,;\;\; f_0 = 100\ Hz$$



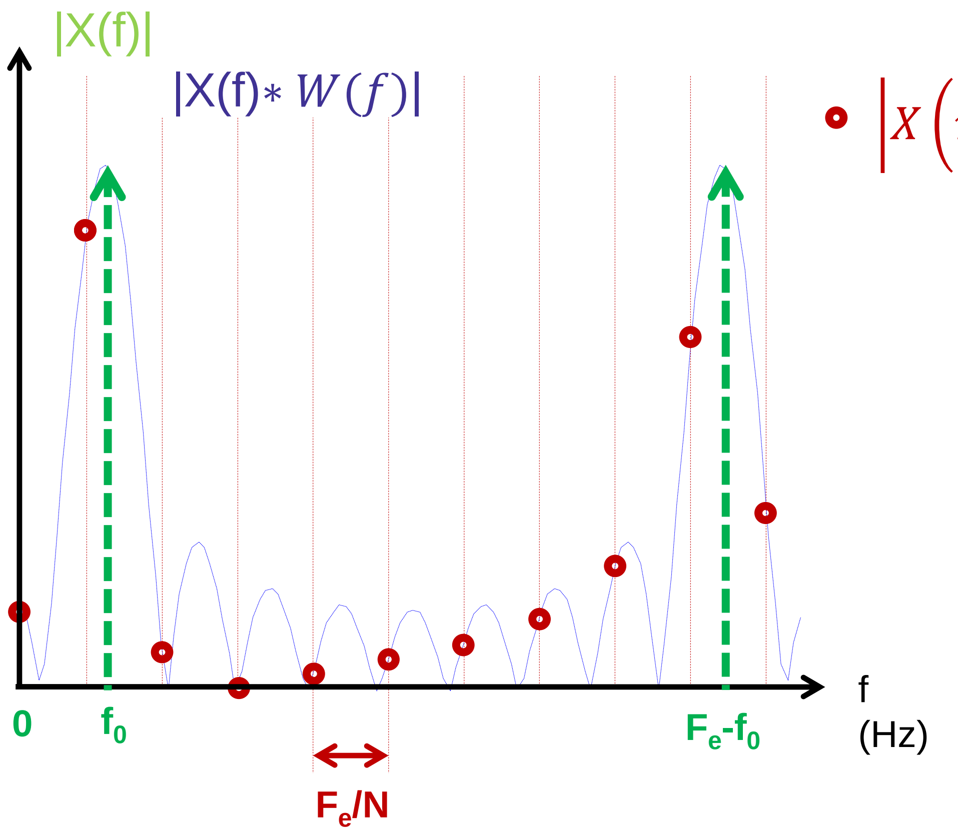

- $\left| X\left(n\frac{F_e}{N}\right)\right|_{n=0,\dots,N-1}$

# Transformée de Fourier Discrète

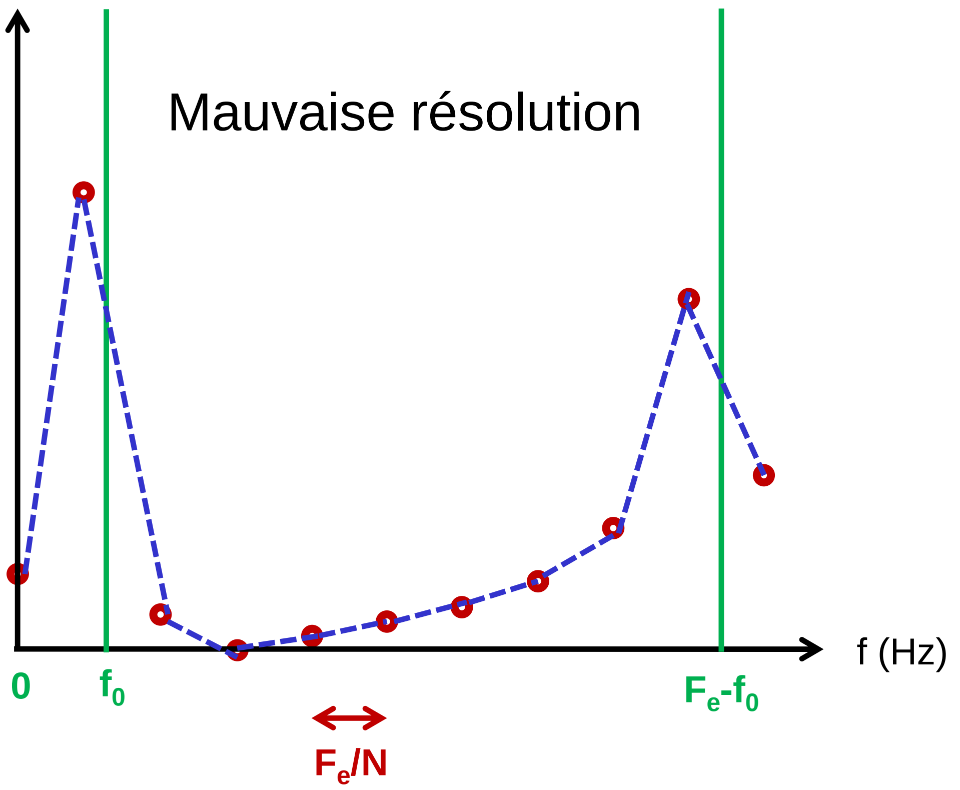
## Echantillonnage de la TFD

Exemple

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)\,;\;\; f_0 = 100\ Hz$$




$\left|X\left(n\frac{F_e}{N}\right)\right|_{n=0,\ldots,N-1}$



# Transformée de Fourier Discrète

## Echantillonnage de la TFD

Exemple

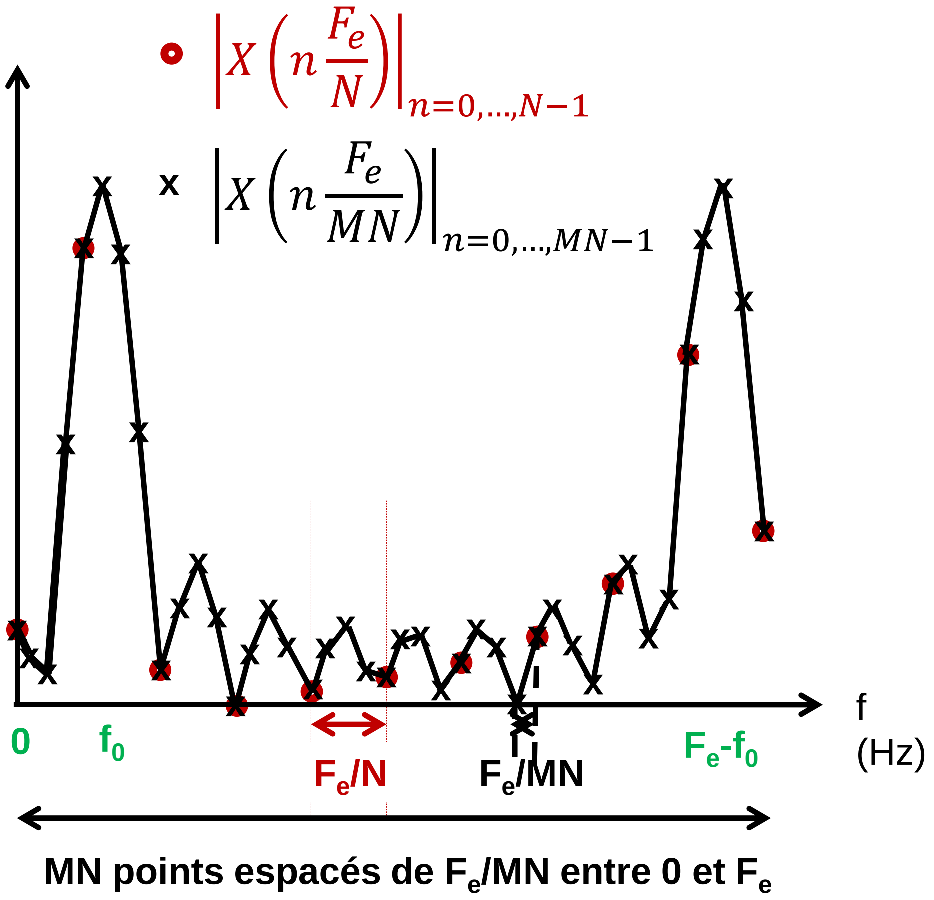
$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)\,;\ \ f_0 = 100\ Hz$$

**Interpolation par Zero padding :**

$$y(k) \begin{cases} = x(k)\ pour\ k = 0, ..., N-1 \\ = 0\ pour\ k = N, ..., MN-1 \end{cases}$$

$$Y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_e) e^{-j2\pi \frac{kn}{MN}} \qquad pour\ k = 0, \dots, MN-1$$

**TFD calculée avec un pas de $\frac{F_e}{MN}$**



# Transformée de Fourier Discrète

## Echantillonnage de la TFD

Exemple

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)\,;\;\; f_0 = 100\ Hz$$

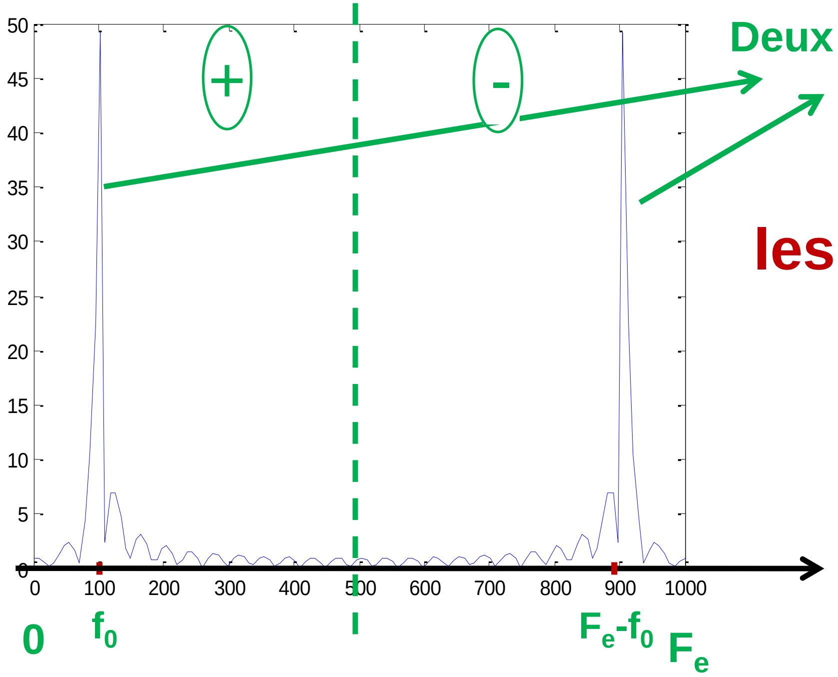
Code Matlab :

```
%Paramètres
f0=100;      %fréquence du cosinus
Fe=1000;     %fréquence d'échantillonnage
Te=1/Fe;     %période d'échantillonnage
N=100;       %nombre d'échantillons

%Génération du signal
x=cos(2*pi*f0*[0:Te:N*Te]);

%Tracé du signal
figure; plot([0:Te:N*Te],x)

%Calcul de la TFD du signal
X=fft(x,128);
```

Utilisation de Zero Padding

```
%Tracé du module de la TFD du signal
figure;
plot(linspace(0,Fe,length(X)),abs(X))
```

Tracé du module de la TFD obtenu :




**Voilà les noyaux de Dirichlet !**

# QUESTION 6

Allez sur **wooclap.com** et utilisez le code **SIGSEQ2**

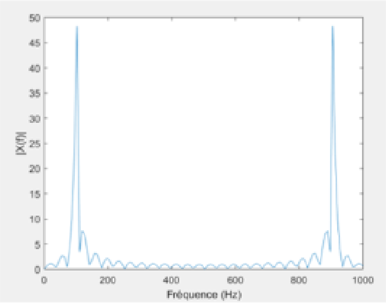


Figure 1 (ZP1)

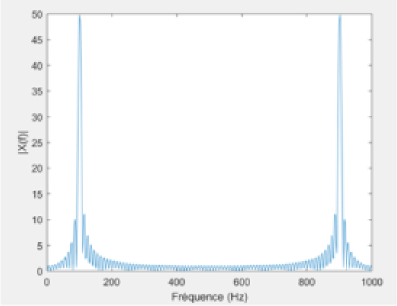


Figure 2 (ZP2)

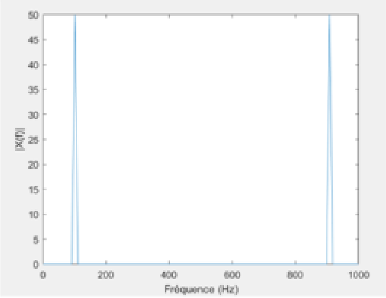


Figure 3 (ZP3)

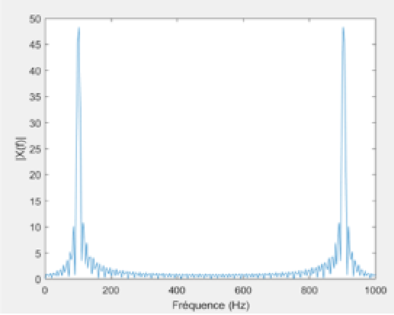


Figure 4 (ZP4)

Les quatre figures représentent le module de la TFD d'un cosinus de fréquence 100 Hz échantillonné à 1000 Hz. Elles utilisent différents paramètres de Zero Padding pour ce tracé (ZP1, ZP2, ZP3, ZP4). A t-on :

1. ZP1>ZP2>ZP3>ZP4
2. ZP2>ZP4>ZP1>ZP3
3. ZP4>ZP3>ZP2>ZP1
4. ZP3>ZP1>ZP4>ZP2

# Transformée de Fourier Discrète

## Echantillonnage de la TFD

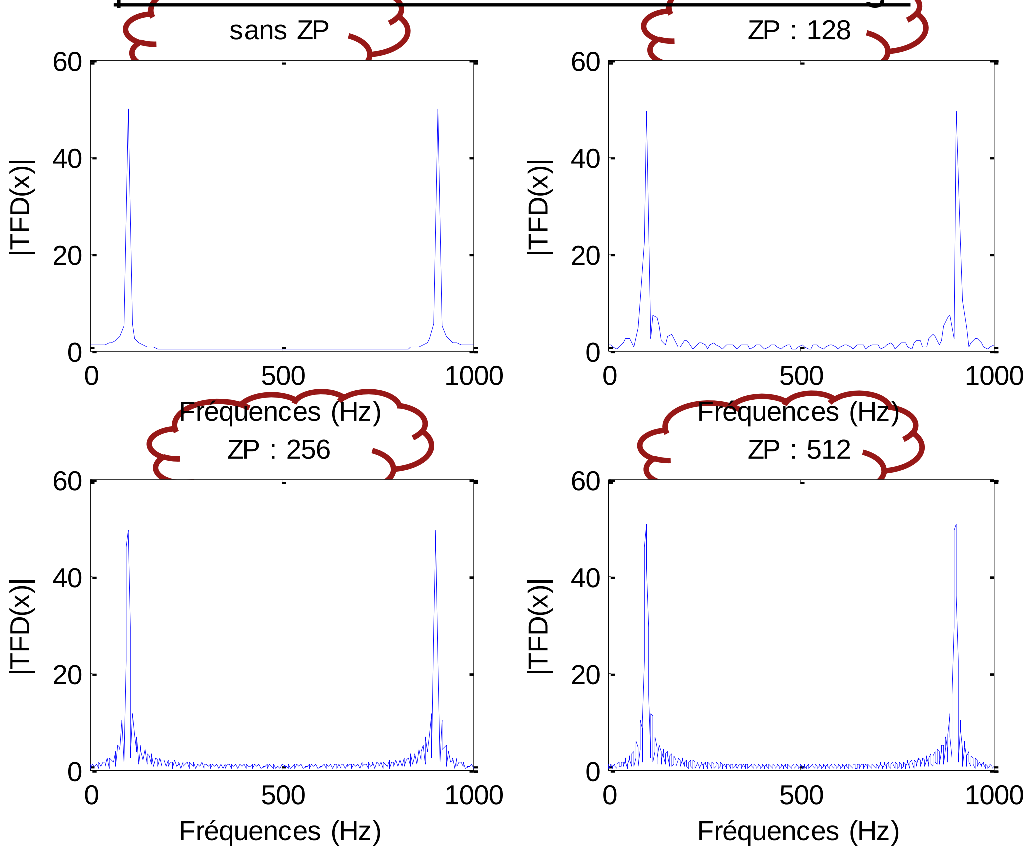
Exemple $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)\,;\;\; f_0 = 100\ Hz$

Simulation sous Matlab :

```
%Paramètres
f0=100;      %fréquence du cosinus
Fe=1000;     %fréquence d'échantillonnage
Te=1/Fe;     %période d'échantillonnage
N=100;       %nombre d'échantillons

%Génération du signal
x=cos(2*pi*f0*[0:Te:N*Te]);

%Tracé du signal
figure; plot([0:Te:N*Te],x)

%Calcul de la TFD du signal
X1=fft(x);
X2=fft(x,128);
X3=fft(x,256);
X4=fft(x,512);
```

```
% Tracé du module de la TFD du signal
figure;
subplot(2,2,1)
plot(linspace(0,Fe,length(X1)),abs(X1))
xlabel('Fréquences (Hz)')
subplot(2,2,2)
plot(linspace(0,Fe,length(X2)),abs(X2))
xlabel('Fréquences (Hz)')
subplot(2,2,3)
plot(linspace(0,Fe,length(X3)),abs(X3))
xlabel('Fréquences (Hz)')
subplot(2,2,4)
plot(linspace(0,Fe,length(X4)),abs(X4))
xlabel('Fréquences (Hz)')
```

Tracé du module de la TFD du signal pour différentes valeurs de Zero Padding :



# Transformée de Fourier Discrète

**Transformée de Fourier (TF)** → **Transformée de Fourier Discrète (TFD)**

Echantillonnage fréquentiel

$$X(f) = \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_e)e^{-j2\pi f kT_e} \to \left\{X\left(n\frac{F_e}{N}\right)\right\}_{n=0,\dots,N-1}$$

$$\boxed{X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{j2\pi ft}\,dt \to \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_e)e^{j2\pi f kT_e} \to \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_e)e^{j2\pi\frac{nk}{N}} \;, n = 0, \dots, N-1}$$

Impact : Mauvaise résolution de la TFD

=> Nécessité d'interpoler dans le domaine des fréquences (Zero Padding)

| Transformée de Fourier (TF) | Transformée de Fourier Discrète (TFD) |
|---|---|
| $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t}$ | $X(n) = \sum_{n=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi\frac{kn}{N}}, n = 0, \dots, N-1$ |
| **Transformée de Fourier inverse ($TF^{-1}$)** | **Transformée de Fourier Discrète inverse ($TFD^{-1}$)** |
| $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{+j2\pi f t}\, df$ | $x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n) e^{+j2\pi\frac{kn}{N}}, k = 0, \dots, N-1$ |

Echantillonnage temporel

$$x(t) \rightarrow \{x(kT_e)\}_{k=-\infty,\dots,+\infty}$$

⇒ Périodisation de la TFD

⇒ !! Respecter la condition de Shannon !!

⇒ !! Lecture des tracés !!

Signal de durée limitée

$$\{x(kT_e)\}_{k=-\infty,\dots,+\infty} \rightarrow \{x(kT_e)\}_{k=0,\dots,N-1}$$

⇒ Distorsion de la TFD attendue (analyse spectrale numérique avec pouvoir séparateur limité et apparition d'ondulations)

⇒ Utilisation de plusieurs fenêtres de pondération

Echantillonnage fréquentiel

$$X(f) = \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_e) e^{-j2\pi f k T_e} \rightarrow \left\{X\left(n\frac{F_e}{N}\right)\right\}_{n=0,\dots,N-1}$$

⇒ Mauvaise résolution de la TFD obtenue

⇒ Interpolation fréquentielle par Zero Padding

# Transformée de Fourier Discrète

## Propriétés

→ Linéarité $TFD\left[x_1(k) + \lambda x_2(k)\right] = TFD\left[x_1(k)\right] + \lambda TFD\left[x_2(k)\right]$

→ Translation => rotation de phase $TFD\left[x(k - k_0)\right] = X(n)e^{-j2\pi\frac{k_0 n}{N}}$

→ Symétrie hermitienne $X(N - n) = X(-n) = X^*(n).$

**!! La TFD et la TFD$^{-1}$ transforment un produit en produit de convolution circulaire !!**

→ Convolution circulaire $X_1(n)X_2(n) \xrightarrow{TFD^{-1}} x_1(k) \otimes x_2(k) = \sum_{p=0}^{N-1} x_1(p)x_2\left([k-p]_{modulo\ N}\right)$

→ Egalité de Parseval $\sum_{k=0}^{N-1} |x(k)|^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |X(n)|^2$

→ Algorithme de calcul rapide (Fast Fourier Transform Algorithm : FFT) : $N\log_2(N)$ MAC << $N^2$ pour N points

# Transformée de Fourier Discrète

## Convolution circulaire

**Convolution linéaire (« classique ») :**

$$(x_1 * x_2)(k) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} x_1(p)x_2(k-p)$$

**Convolution circulaire :**

$$(x_1 \otimes x_2)(k) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} x_1(p)x_2\left((k-p)_{modulo\ N}\right)$$

Exemple

$x_1(p)$ : . . . 0 0 0 1 2 3 0 0 0 . . .
$x_2(p)$ : . . . 0 0 0 1 1 1 0 0 0 . . .

k=-3 . . 0 0 0 1 1 1 0 0 0 . . . ⟶ 0
k=-2 . . . 0 0 0 1 1 **1** 0 0 0 . . . ⟶ 1
k=-1 . . . 0 0 0 1 **1 1** 0 0 0 . . . ⟶ 3
k=0 . . . 0 0 0 **1 1 1** 0 0 0 . . . ⟶ 6
k=1 . . . 0 0 0 **1 1** 1 0 0 0 . . . ⟶ 5
k=2 . . . 0 0 0 **1** 1 1 0 0 0 . . . ⟶ 3
k=3 . . . 0 0 0 1 1 1 0 0 0 . . . ⟶ 0

$x_1(p_{modulo\ N})$ : . . . 1 2 3 1 2 3 1 2 3 . . .
$x_2(p_{modulo\ N})$ : . . . 1 1 1 1 1 1 1 1 1 . . .

k=-3 . . 1 1 1 1 1 1 **1 1 1** . . . ⟶ 6
k=-2 . . . 1 1 1 1 1 **1 1 1** 1 . . . ⟶ 6
k=-1 . . . 1 1 1 1 **1 1 1** 1 1 . . . ⟶ 6
k=0 . . . 1 1 1 **1 1 1** 1 1 1 . . . ⟶ 6
k=1 . . . 1 1 **1 1 1** 1 1 1 1 . . . ⟶ 6
k=2 . . . 1 **1 1 1** 1 1 1 1 1 . . . ⟶ 6
k=3 . . . **1 1 1** 1 1 1 1 1 1 . . . ⟶ 6

# Transformée de Fourier Discrète

## Convolution circulaire

**Convolution lineaire (« classique ») :**

$$(x_1 * x_2)(k) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} x_1(p)x_2(k-p)$$

**Convolution circulaire :**

$$(x_1 \otimes x_2)(k) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} x_1(p)x_2\left((k-p)_{modulo\ N}\right)$$

**En prolongeant les signaux par N zéros**

. . . 0 0 0 1 2 3 0 0 0 . . .
. . . 0 0 0 1 1 1 0 0 0 . . .

. . . 0 0 0 1 1 1 0 0 0 . . . $\longrightarrow$ 0
. . . 0 0 0 1 1 1 0 0 0 . . . $\longrightarrow$ 1
. . . 0 0 0 1 1 1 0 0 0 . . . $\longrightarrow$ 3
. . . 0 0 0 1 1 1 0 0 0 . . . $\longrightarrow$ 6
. . . 0 0 0 1 1 1 0 0 0 . . . $\longrightarrow$ 5
. . . 0 0 0 1 1 1 0 0 0 . . . $\longrightarrow$ 3
. . . 0 0 0 1 1 1 0 0 0 . . . $\longrightarrow$ 0

. . . 1 2 3 0 0 0 1 2 3 0 0 0 1 2 3 0 0 0. . .
. . . 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 . . .

. . . 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 . . . $\longrightarrow$ 0
. . . 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 . . . $\longrightarrow$ 1
. . . 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 . . . $\longrightarrow$ 3
. . . 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 . . . $\longrightarrow$ 6
. . . 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 . . . $\longrightarrow$ 5
. . . 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 . . . $\longrightarrow$ 3
. . . 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 . . . $\longrightarrow$ 0
. . . 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 . . . $\longrightarrow$ 0

# Transformée de Fourier Discrète

## Algorithme de la FFT (Cooley Tuckey)

TFD d'ordre $\boldsymbol{N = 2^p} \Rightarrow N^2$ opérations (+/x)

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \times e^{-j2\pi \frac{kn}{MN}} = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \times W_N^{-kn} \quad n = 0, ..., N-1$$

# Transformée de Fourier Discrète

## Algorithme de la FFT (Cooley Tuckey)

TFD d'ordre $N = 2^p \Rightarrow N^2$ opérations (+/x)

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \times e^{-j2\pi\frac{kn}{MN}} = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \times W_N^{-kn} \quad n = 0, \dots, N-1$$

Première décomposition $\Rightarrow N + 2(N/2)^2 = N + N^2/2 < N^2$ opérations (+/x)

$$X(n) = X_1(n) + W_N^{-n} \times X_2(n), \quad n = 0, \dots, N-1$$

*N opérations (+/x)*

Indices pairs (TFD d'ordre N/2)

$$X_1(n) = \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i) W_{N/2}^{-in}, \quad i = 0, \dots, N/2-1$$

$$X_2(n) = \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i+1) W_{N/2}^{-in}, \quad i = 0, \dots, N/2-1$$

Indices impairs TFD d'ordre N/2

# Transformée de Fourier Discrète

## Algorithme de la FFT (Cooley Tuckey)

TFD d'ordre $N = 2^p$ $\Rightarrow N^2$ opérations (+/x)

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \times e^{-j2\pi \frac{kn}{MN}} = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \times W_N^{-kn} \quad n = 0, \ldots, N-1$$

Première décomposition $\Rightarrow N + 2(N/2)^2 = N + N^2/2 < N^2$ opérations (+/x)

$$X(n) = X_1(n) + W_N^{-n} \times X_2(n), \quad n = 0, \ldots, N-1$$

N opérations (+/x)

Indices pairs
(TFD d'ordre N/2)

$$X_1(n) = \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i) W_{N/2}^{-in}, \; i = 0, \ldots, N/2-1$$

$$X_2(n) = \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i+1) W_{N/2}^{-in}, \; i = 0, \ldots, N/2-1$$

Indices impairs
TFD d'ordre N/2

Deuxième décomposition $\Rightarrow 2(N/2) + 4(N/4)^2 = N + N^2/4 < N^2$ opérations (+/x)

$$X_1(n) = X_{11}(n) + W_{N/2}^{-n} X_{12}(n) \qquad X_2(n) = X_{21}(n) + W_{N/2}^{-n} X_{22}(n)$$

Indices pairs — Indices impairs — Indices pairs — Indices impairs

4 TFDs d'ordre N/4

# Transformée de Fourier Discrète

## Algorithme de la FFT (Cooley Tuckey)

TFD d'ordre $\boldsymbol{N = 2^p} \Rightarrow N^2$ opérations (+/x)

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \times e^{-j2\pi \frac{kn}{MN}} = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \times W_N^{-kn} \quad n = 0, \ldots, N-1$$

Première décomposition $\Rightarrow N + 2(N/2)^2 = N + N^2/2 < N^2$ opérations (+/x)

$$X(n) = X_1(n) + W_N^{-n} \times X_2(n), \quad n = 0, \ldots, N-1$$

*N opérations (+/x)*

Indices pairs (TFD d'ordre N/2) $X_1(n) = \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i) W_{N/2}^{-in}, \; i = 0, \ldots, N/2-1$

$X_2(n) = \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i+1) W_{N/2}^{-in}, \; i = 0, \ldots, N/2-1$ Indices impairs TFD d'ordre N/2

Deuxième décomposition $\Rightarrow 2(N/2) + 4(N/4)^2 = N + N^2/4 < N^2$ opérations (+/x)

$X_1(n) = X_{11}(n) + W_{N/2}^{-n} X_{12}(n)$

Indices pairs Indices impairs

$X_2(n) = X_{21}(n) + W_{N/2}^{-n} X_{22}(n)$

Indices pairs Indices impairs

4 TFDs d'ordre N/4

⋮

$$p\frac{N}{2}\ TFD\ d'ordre\ 2 \Rightarrow p \times \frac{N}{2} \times 2 = Nlog_2(N)\ opérations\ (+/\times) \ll N^2$$

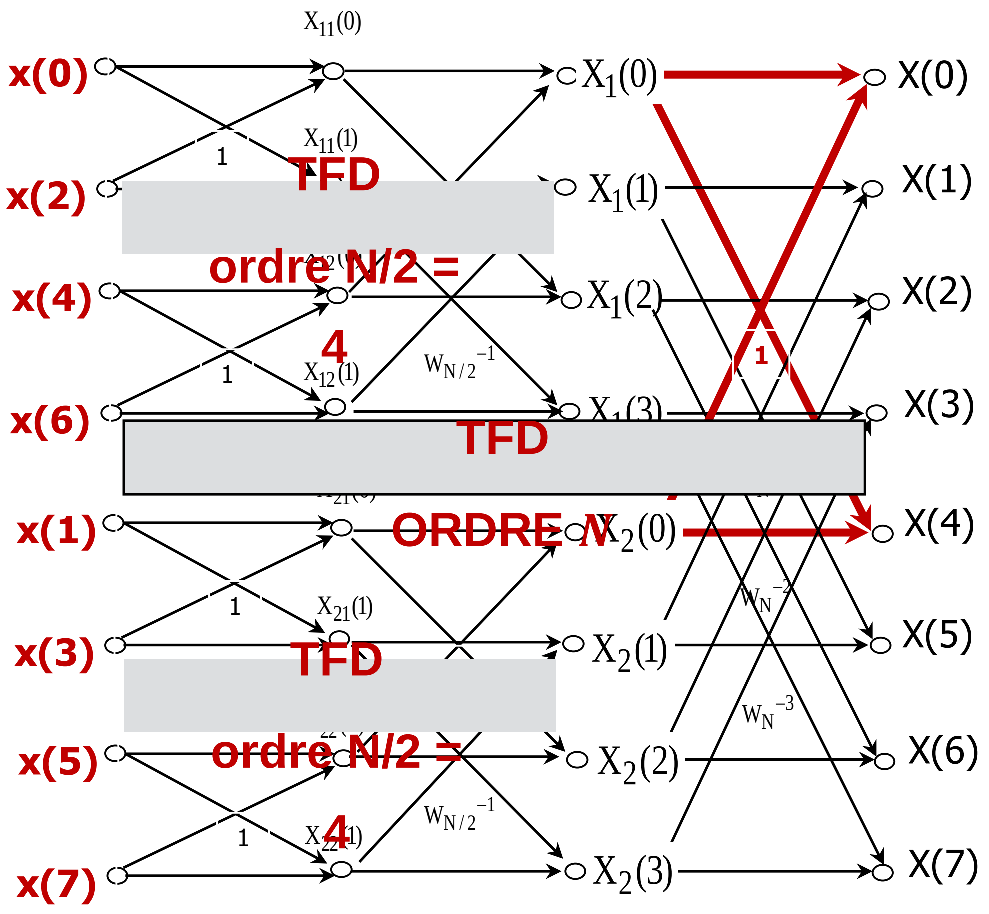
# Transformée de Fourier Discrète

**Algorithme de la FFT (Cooley Tuckey)**

Exemple pour $N = 2^p = 2^3 = 8$ points de signal

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}}, \; n = 0, \ldots, N-1$$

$N^2 = 64$ *opérations d'addition/multiplication* $(+/\times)$



# Transformée de Fourier Discrète

## Algorithme de la FFT (Cooley Tuckey)

Exemple pour $N = 2^p = 2^3 = 8$ points de signal

$$X(n) = X_1(n) + W_N^{-n} X_2(n),\ n = 0, \dots, 7$$

Etape 1

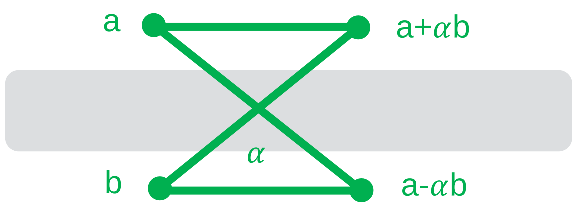
$sur\ x(0), x(2), x(4), x(6)$

Indices pairs
(TFD d'ordre N/2 = 4)

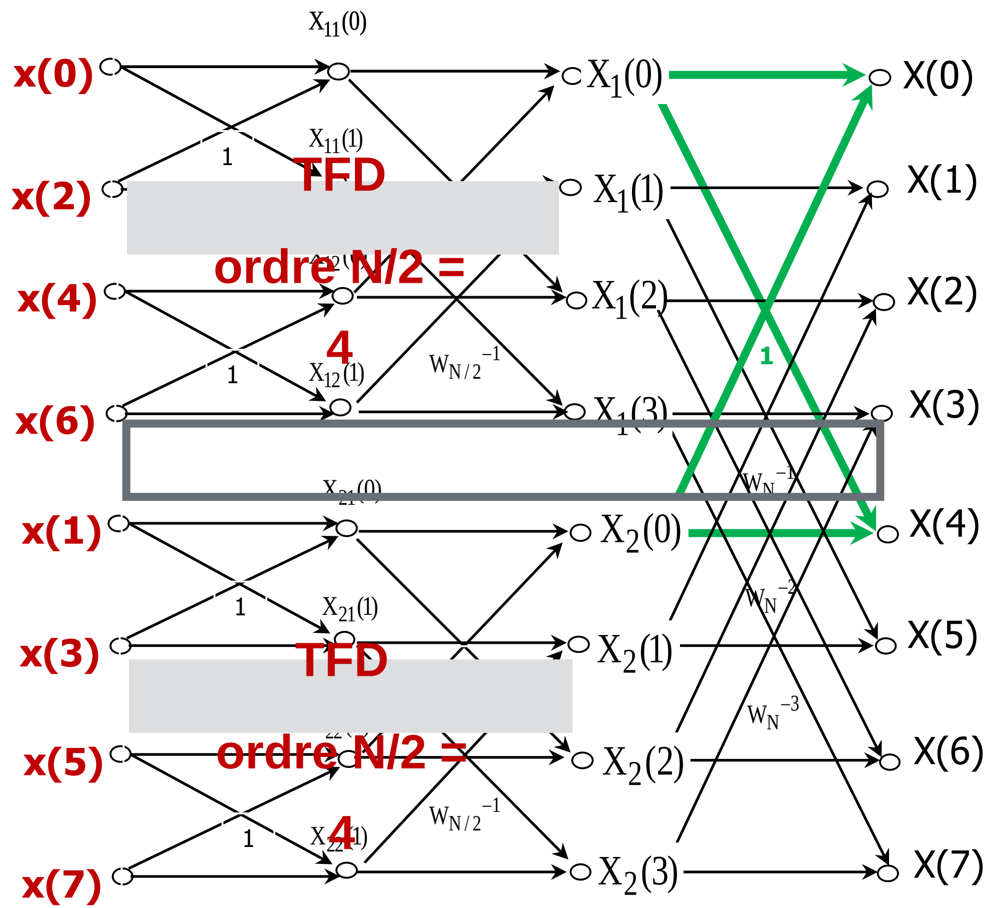
$sur\ x(1), x(3), x(5), x(7)$

Indices impairs
(TFD d'ordre N/2 = 4)

$$2 \times \left(\frac{N}{2}\right)^2 + N = \frac{N^2}{2} + N = 40 < N^2 = 64\ opérations\ (+/\times)$$




Papillon de la FFT
= 2 opérations +/x



# Transformée de Fourier Discrète

## Algorithme de la FFT (Cooley Tuckey)

Exemple pour $N = 2^p = 2^3 = 8$ points de signal

$$X(n) = X_1(n) + W_N^{-n} X_2(n),\ n = 0, \dots, 7$$

Etape 1

$sur\ x(0), x(2), x(4), x(6)$

Indices pairs
(TFD d'ordre N/2 = 4)

$sur\ x(1), x(3), x(5), x(7)$

Indices impairs
(TFD d'ordre N/2 = 4)

$$X_1(n) = X_{11}(n) + W_{N/2}^{-n} X_{12}(n),\ n = 0, \dots, 3 \qquad X_2(n) = X_{21}(n) + W_{N/2}^{-n} X_{22}(n),\ n = 0, \dots, 3$$

Etape 2

$sur\ x(0), x(4)$

Indices pairs
(TFD d'ordre N/4=2)

$sur\ x(2), x(6)$

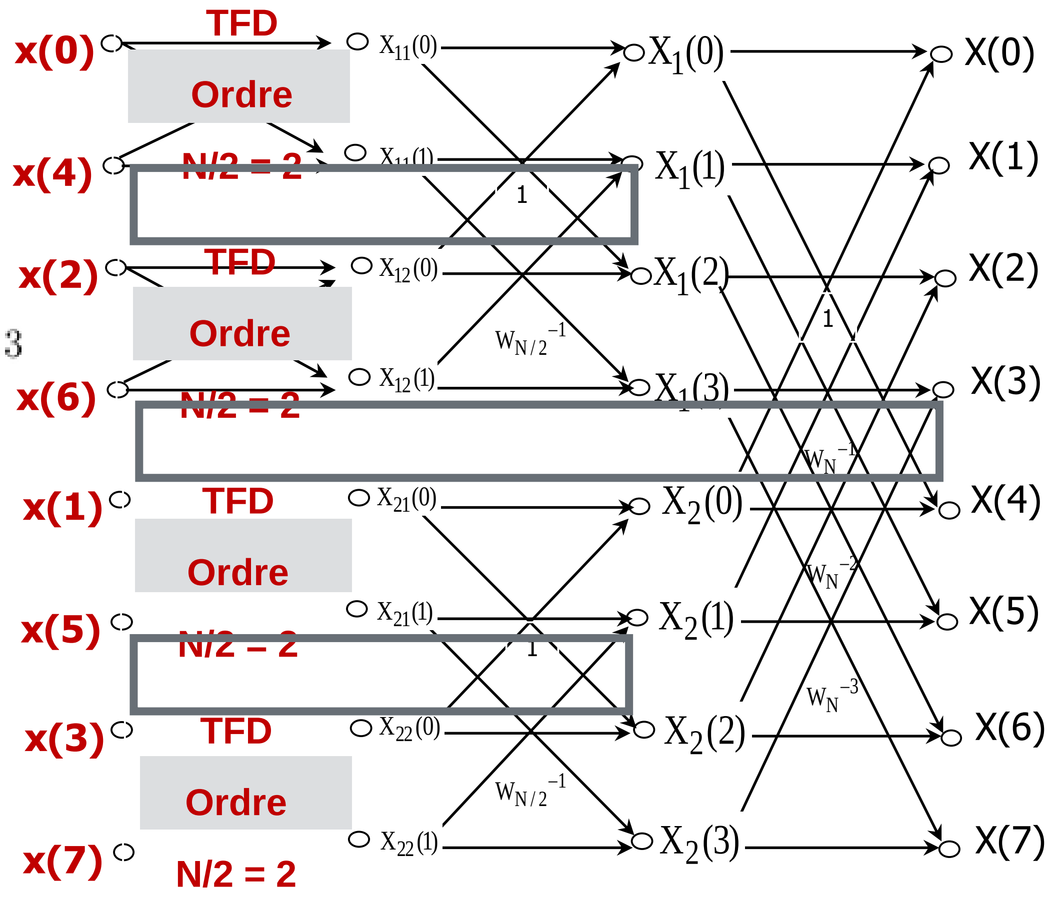
Indices impairs
(TFD d'ordre N/4=2)

$sur\ x(1), x(5)$

Indices pairs
(TFD d'ordre N/4=2)

$sur\ x(3), x(7)$

Indices impairs
(TFD d'ordre N/4=2)



# Transformée de Fourier Discrète

## Algorithme de la FFT (Cooley Tuckey)

Exemple pour $N = 2^p = 2^3 = 8$ points de signal

$$X(n) = X_1(n) + W_N^{-n} X_2(n),\ \ n = 0, \ldots, 7$$

Etape 1

$sur\ x(0), x(2), x(4), x(6)$

Indices pairs
(TFD d'ordre N/2 = 4)

$sur\ x(1), x(3), x(5), x(7)$

Indices impairs
(TFD d'ordre N/2 = 4)

$$X_1(n) = X_{11}(n) + W_{N/2}^{-n} X_{12}(n),\ \ n = 0, \ldots, 3 \qquad X_2(n) = X_{21}(n) + W_{N/2}^{-n} X_{22}(n),\ \ n = 0, \ldots, 3$$

Etape 2

$sur\ x(0), x(4)$

Indices pairs
(TFD d'ordre N/4=2)

$sur\ x(2), x(6)$

Indices impairs
(TFD d'ordre N/4=2)

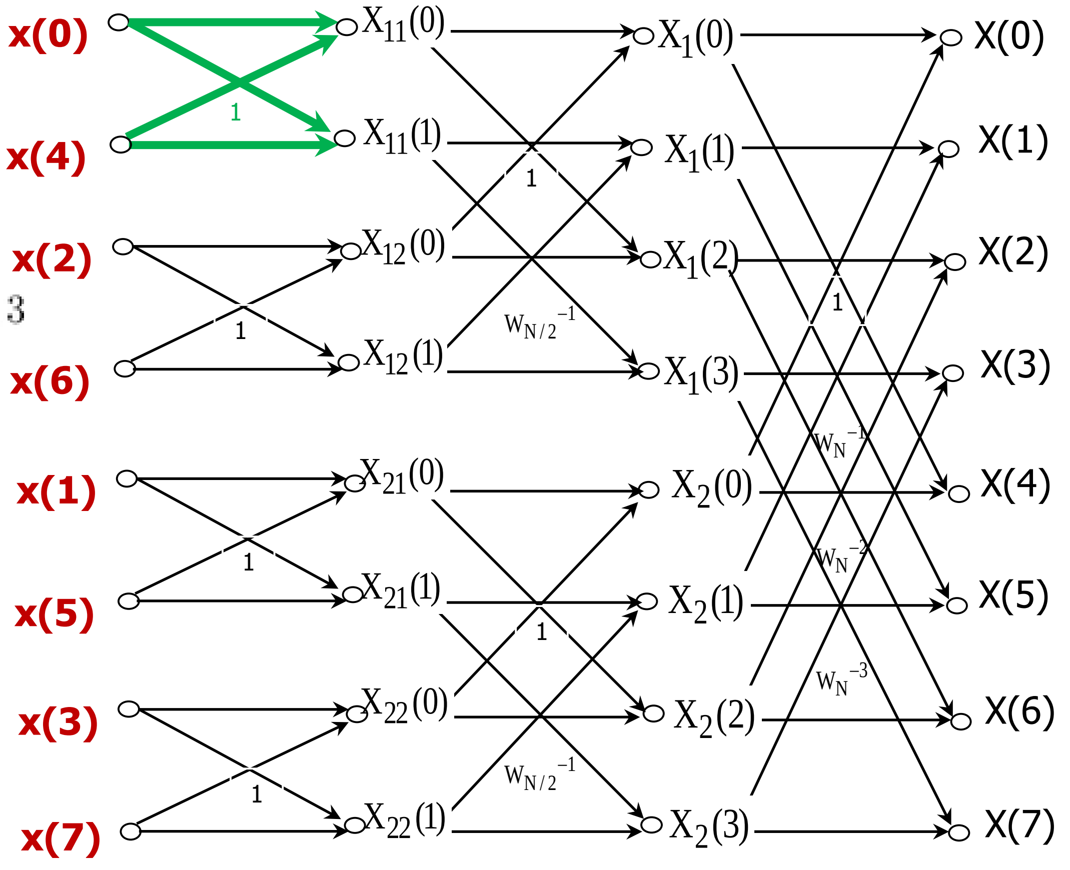
$sur\ x(1), x(5)$

Indices pairs
(TFD d'ordre N/4=2)

$sur\ x(3), x(7)$

Indices impairs
(TFD d'ordre N/4=2)


$$4 \times \left(\frac{N}{4}\right)^2 + 2 \times \left(\frac{N}{2}\right) = \frac{N^2}{4} + N = 24 < N^2 = 64\ \textit{opérations}\ (+/\times)$$



# Transformée de Fourier Discrète

## Algorithme de la FFT (Cooley Tuckey)

<u>Exemple pour $N = 2^p = 2^3 = 8$ points de signal</u>

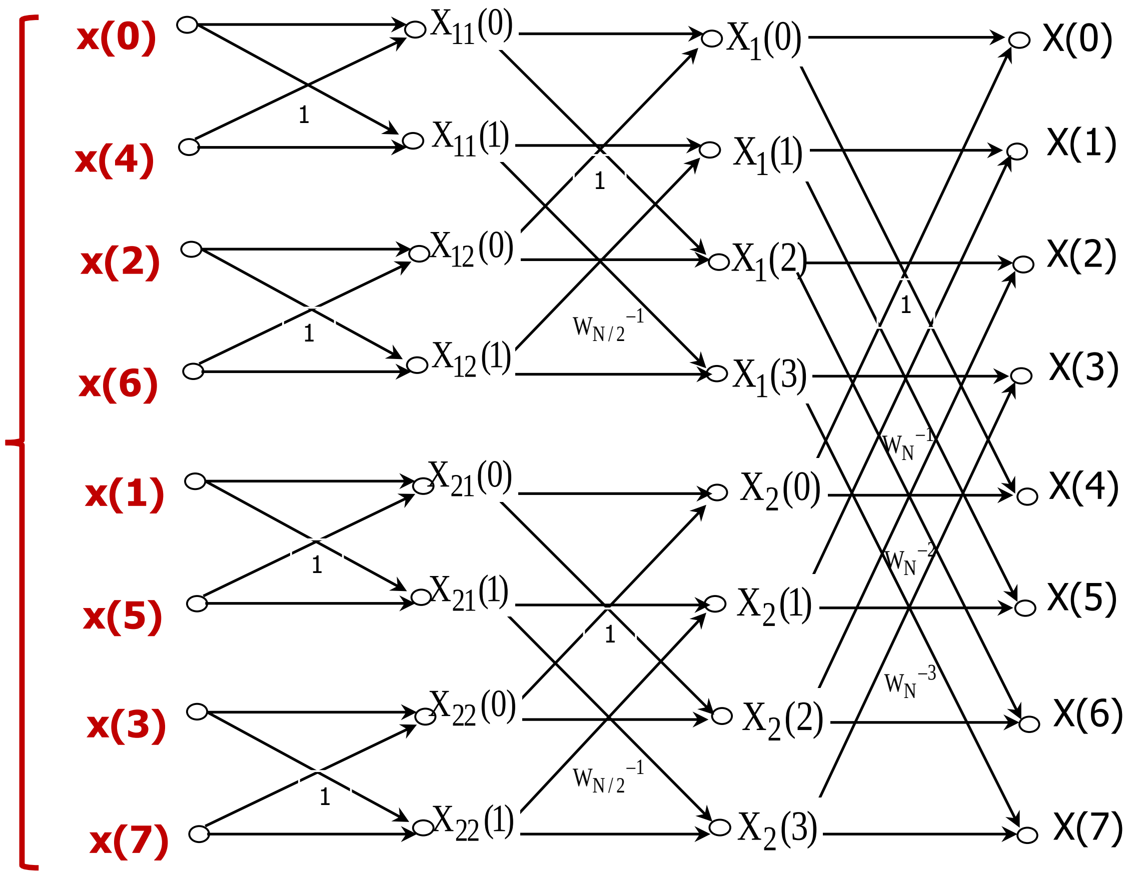
$$\boldsymbol{p \times \left(\frac{N}{2}\right) \times 2 = 24 < N^2 = 64\ opérations}\ (+/\times)$$

Présentation des données à l'algorithme :

**Entrelacement temporel**

| k | rep. binaire | renv. Bits | nouvel ind. | echantillon |
|---|---|---|---|---|
| 0 | "000" | "000" | 0 | x(0) |
| 1 | "001" | "100" | 4 | x(4) |
| 2 | "010" | "010" | 2 | x(2) |
| 3 | "011" | "110" | 6 | x(6) |
| 4 | "100" | "001" | 1 | x(1) |
| 5 | "101" | "101" | 5 | x(5) |
| 6 | "110" | "011" | 3 | x(3) |
| 7 | "111" | "111" | 7 | x(7) |
| | | | | |

algorithme de renversement de l'adresse binaire
(« bit reversal »)



# Transformée de Fourier Discrète

## En résumé

→ Echantillonnage temporel => périodisation spectrale

- Respecter la condition de Shannon
- Attention à la lecture des tracés de la TFD, à la lecture de l'échelle fréquentielle

→ Signal de durée limitée => distorsion de la TFD attendue (analyse spectrale numérique avec un pouvoir séparateur limité, apparition d'ondulations)

- Utiliser plusieurs fenêtres de pondération du signal

  => différents pouvoirs séparateurs, différents taux d'ondulation pour l'analyse spectrale numérique

→ Echantillonnage spectral

- Attention à la mauvaise visualisation de la TFD (résolution insuffisante)

  => nécessité d'interpoler (méthode du zero padding)
- TFD et TFD$^{-1}$ transforment un produit en produit de convolution circulaire

  => si besoin, convolution linéaire = convolution circulaire en prolongeant les signaux par des zéros

→ Algorithme de calcul rapide : FFT = Fast Fourier Transform

- Condition nombre de points de signal $N=2^p$ => décomposition en sous suites entrelacées