Traitement Numérique du Signal

Nathalie Thomas

IRIT/ENSEEIHT
Nathalie.Thomas@enseeiht.fr

Traitement Numérique du signal

1- Signaux numériques
2- Transformée de Fourier Discrète (TFD)
3- Estimation des fonctions d’inter et d’auto corrélation
4- Estimation de la densité spectrale de puissance (DSP)
5- Filtrage numérique linéaire

Numérisation du signal

Signal analogique :
signal défini à tout instant par des valeurs réelles

Signal numérique :
signal défini à des instants discrets par un nombre fini de valeurs

Numérisation du signal

Signal analogique :

signal défini à tout instant par des valeurs réelles

⬇

Numérisation :

Échantillonnage + quantification

⬇

Signal numérique :

signal défini à des instants discrets par un nombre fini de valeurs

Numérisation du signal : Echantillonnage

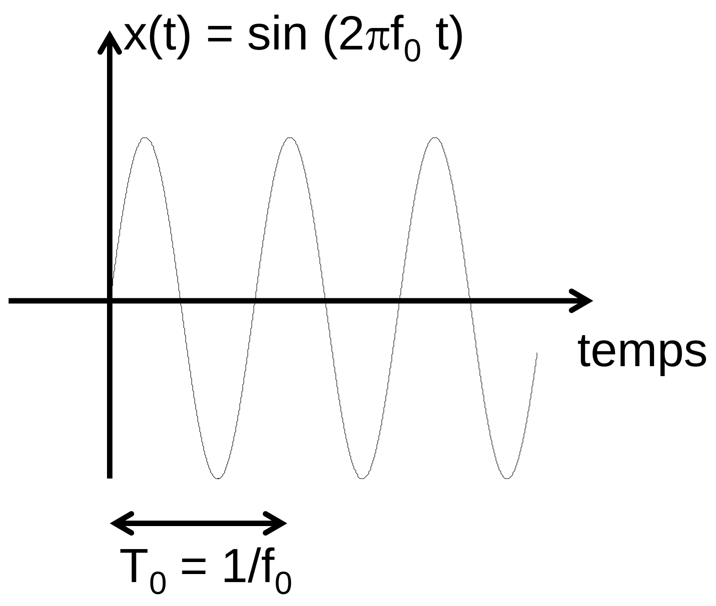
Signal échantillonné :
signal défini à des instants discrets par des valeurs réelles

Numérisation du signal : Echantillonnage

Signal échantillonné :

signal défini à des instants discrets par des valeurs réelles

<u>Exemple :</u>



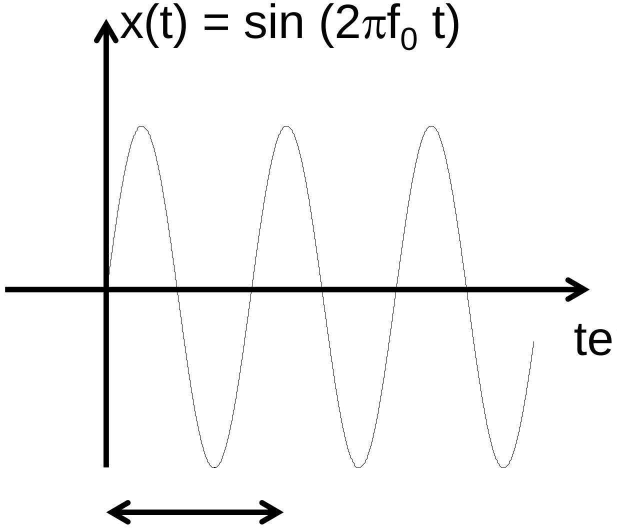
Numérisation du signal : Echantillonnage

Signal échantillonné :

signal défini à des instants discrets par des valeurs réelles

<u>Exemple :</u>

$x(t) = \sin(2\pi f_0\, t)$

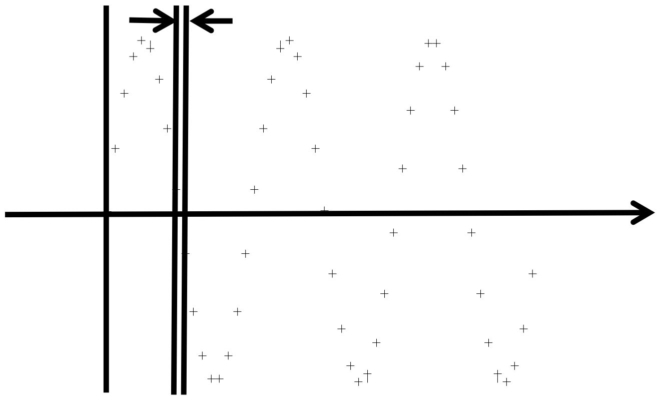


$T_0 = 1/f_0$

k = indice de l'échantillon

$x(kT_e) = \sin(2\pi f_0\, kT_e)$

T_e : période d'échantillonnage



Numérisation du signal : Echantillonnage

Est-il possible de conserver toute l'information dans la suite d'échantillons prélevés ?

0. Slide de connexion

1 **Allez sur wooclap.com**

2 **Entrez le code d'événement dans le bandeau supérieur**

Code d'événement

SIGSEQ1

https://app.wooclap.com/SIGSEQ1

Copier le lien de participation

QUESTION 1

Allez sur **wooclap.com** et utilisez le code **SIGSEQ1**

Soit un signal x(t) échantillonné à Te. Est-il possible de garder tout l'information du signal de départ dans la suite d'échantillon ?

1. Oui
2. Non

Numérisation du signal : Echantillonnage

Est-il possible de conserver toute l'information dans la suite d'échantillons prélevés ?

Modélisation de l'échantillonnage :

$$x_e(t) = x(t)\,\text{Ш}_{T_e}(t)$$

$$X_e(f) = \frac{1}{T_e} X(f) * \text{Ш}_{\frac{1}{T_e}}(f) = F_e \sum_n X(f - kF_e)$$

Numérisation du signal : Echantillonnage

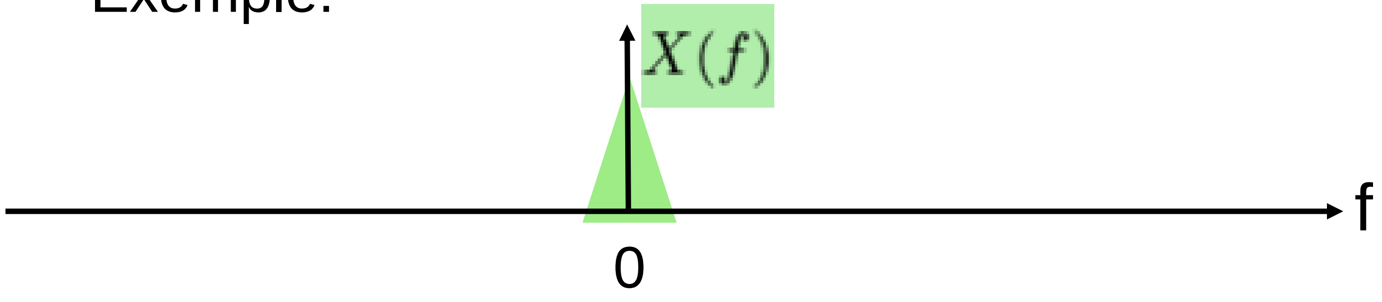
Est-il possible de conserver toute l’information dans la suite d’échantillons prélevés ?

Modélisation de l’échantillonnage :

$$x_e(t) = x(t)\,\text{Ш}_{T_e}(t)$$

$$X_e(f) = \frac{1}{T_e} X(f) * \text{Ш}_{\frac{1}{T_e}}(f) = F_e \sum_n X(f - kF_e)$$

Exemple:



Numérisation du signal : Echantillonnage

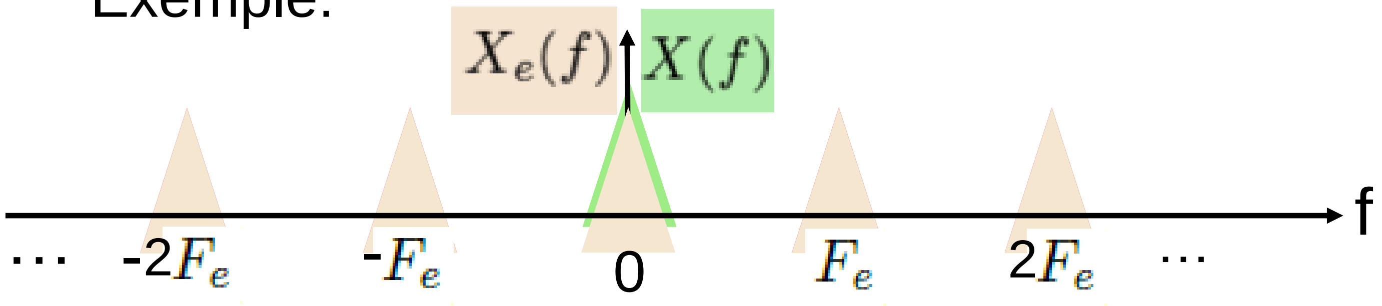
Est-il possible de conserver toute l'information dans la suite d'échantillons prélevés ?

Modélisation de l'échantillonnage :

$$x_e(t) = x(t)\,\text{Ш}_{T_e}(t)$$

$$X_e(f) = \frac{1}{T_e} X(f) * \text{Ш}_{\frac{1}{T_e}}(f) = F_e \sum_n X(f - kF_e)$$

Exemple:



Numérisation du signal : Echantillonnage

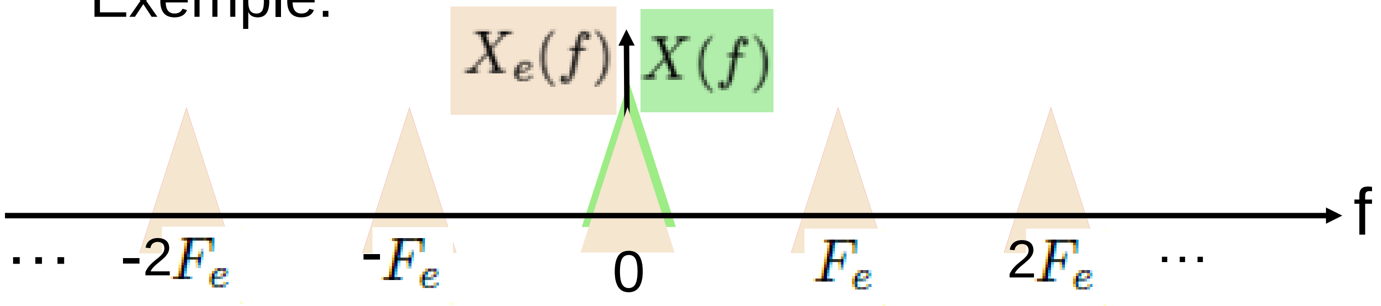
Est-il possible de conserver toute l'information dans la suite d'échantillons prélevés ?

Modélisation de l'échantillonnage :

$$x_e(t) = x(t)\,Ш_{T_e}(t)$$

$$X_e(f) = \frac{1}{T_e} X(f) * Ш_{\frac{1}{T_e}}(f) = F_e \sum_n X(f - kF_e)$$

Exemple:



QUESTION 2

Allez sur **wooclap.com** et utilisez le code **SIGSEQ1**

Soit un signal x(t) échantillonné à Te. Est-il possible de garder tout l'information du signal de départ dans la suite d'échantillon ?

1. Oui
2. Non

Numérisation du signal : Echantillonnage

Est-il possible de conserver toute l'information dans la suite d'échantillons prélevés ?

Modélisation de l'échantillonnage :

$$x_e(t) = x(t)\,\text{Ш}_{T_e}(t)$$

$$X_e(f) = \frac{1}{T_e} X(f) * \text{Ш}_{\frac{1}{T_e}}(f) = F_e \sum_n X(f - kF_e)$$

Oui ça l'est !

A une condition :

$$F_e = \frac{1}{T_e} > 2F_{max}$$

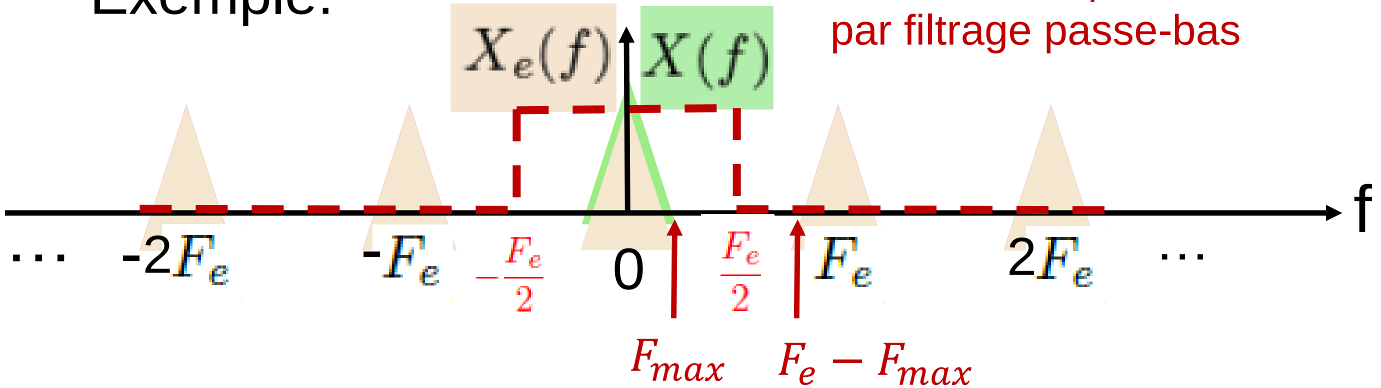
Condition de Shannon

Oberwolfach Photo Collection

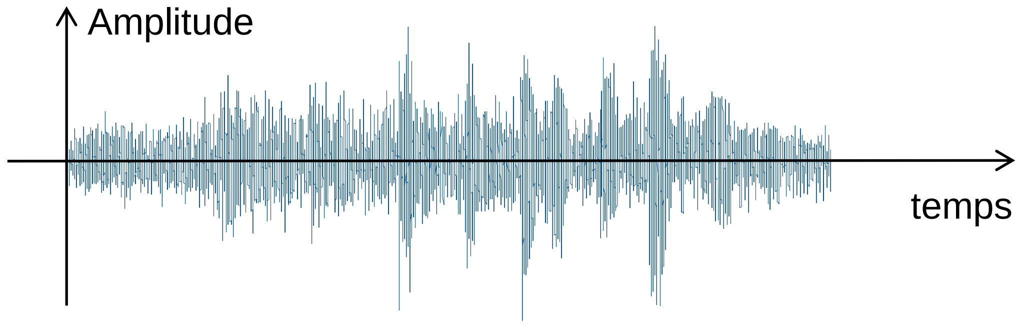
Claude Elwood Shannon
(1916 -2001)

Exemple:

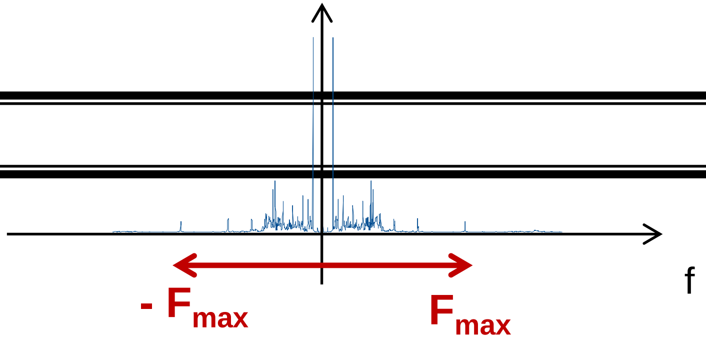
Possibilité d'isoler le spectre d'ordre 0 par filtrage passe-bas



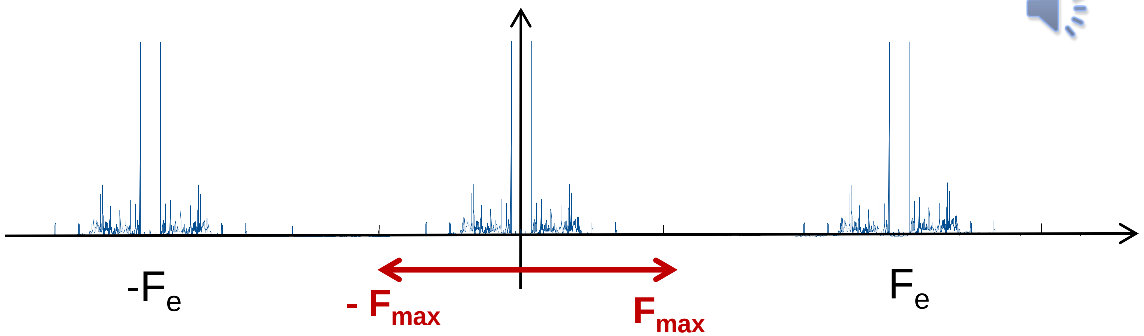
Exemple 1



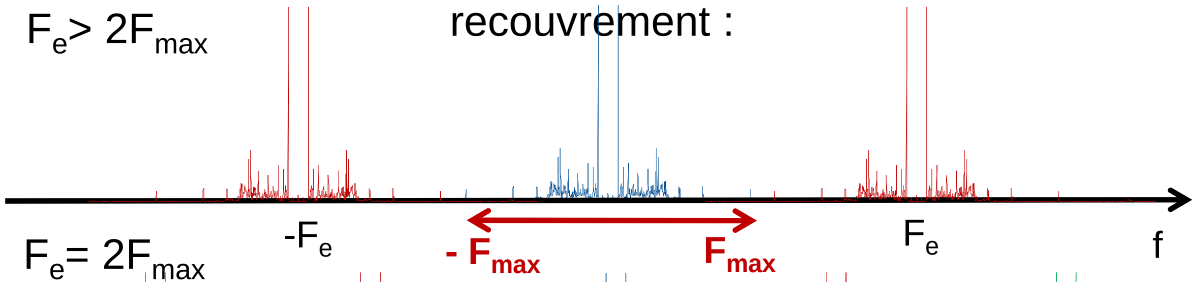
Transformée de Fourier :

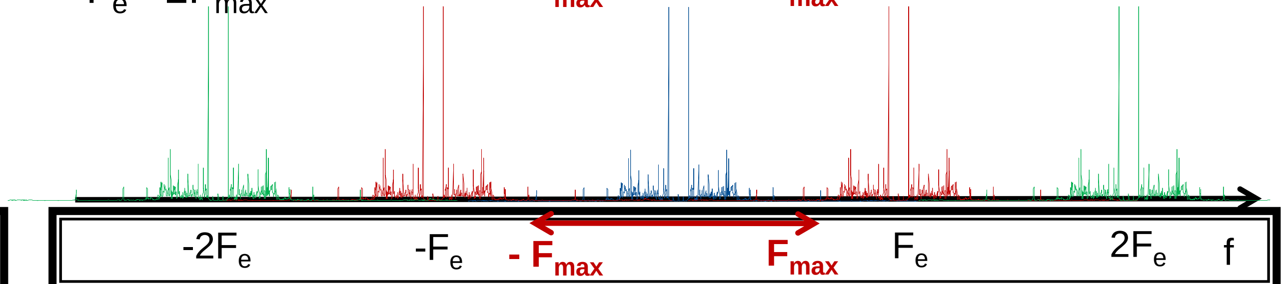


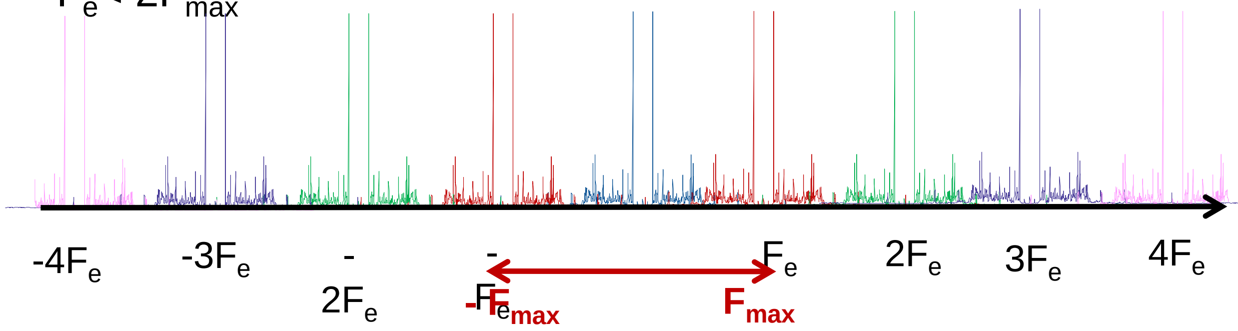
Transformée de Fourier du signal correctement échantillonné :



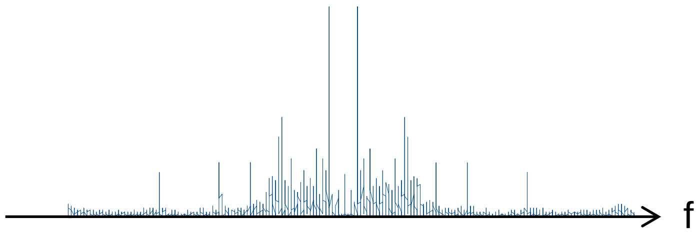
Quand on diminue la fréquence d'échantillonnage, les périodisations se rapprochent et finissent par apparaitre dans la bande occupée par le signal générant du recouvrement :







Transformée de Fourier du signal échantillonné à $F_e = F_{max} / 12$:



Exemple 2

Image d'origine :
512*512 pixels, quantifiée sur 8 bits

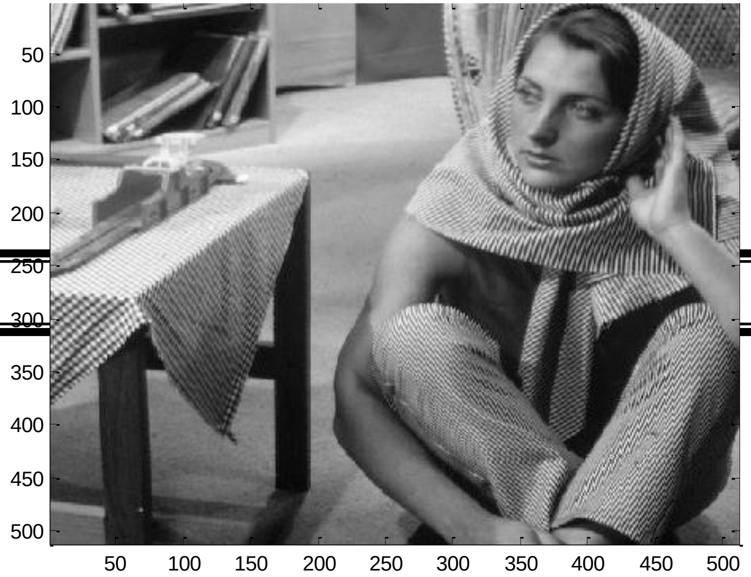
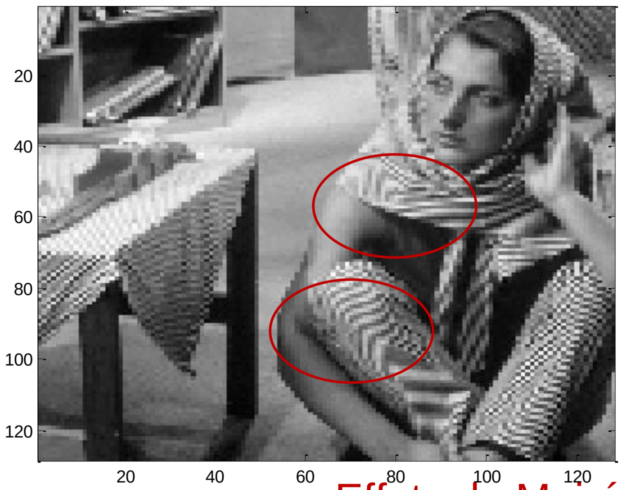


Image sous échantillonnée d'un facteur 2 :
256*256 pixels, quantifiée sur 8 bits

Image sous échantillonnée d'un facteur 4 :
128*128 pixels, quantifiée sur 8 bits



Effets de Moiré

QUESTION 3

Allez sur **wooclap.com** et utilisez le code **SIGSEQ1**

On échantillonne un cosinus de fréquence 100 Hz en utilisant une fréquence d'échantillonnage de 500 Hz. La suite d'échantillons obtenue contient-elle la même information que le signal de départ ?

1. Oui
2. Non

QUESTION 4

Allez sur **wooclap.com** et utilisez le code **SIGSEQ1**

Un signal $x(t)=B\mathrm{sinc}(\pi Bt)$, $B=200$ Hz, est échantillonné avec une fréquence d'échantillonnage $F_e= 300$ Hz. La suite d'échantillons générée contient-elle la même information que le signal de départ ?

1. Oui
2. Non

QUESTION 5

Allez sur **wooclap.com** et utilisez le code **SIGSEQ1**

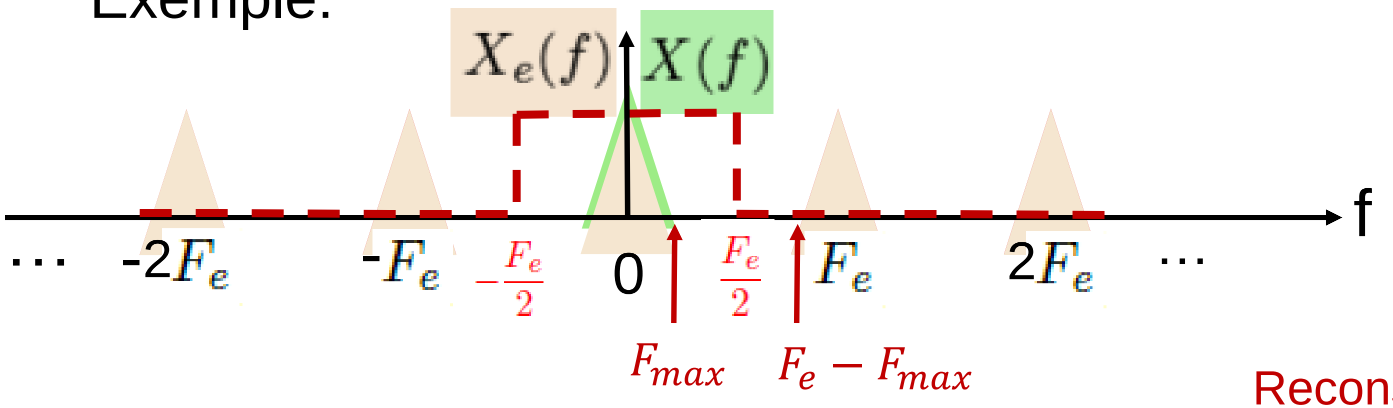
Soit un cosinus de fréquence 100 Hz échantillonné en utilisant une fréquence d'échantillonnage Fe=1000 Hz. Le cosinus de départ peut-il être parfaitement reconstruit, à partir de la suite d'échantillons, en bloquant la valeur de chaque échantillon pendant Te secondes (Te=1/Fe) ?

1. Oui
2. Non

Numérisation du signal : Echantillonnage

Reconstruction du signal par filtrage à partir de la suite d'échantillons

Exemple:



Reconstruction idéale

$$\boxed{X_e(f) \times \prod_{F_e}(f) \xrightarrow{TF^{-1}} x_e(t) * F_e sinc(\pi t F_e) = F_e \sum_k x(kT_e) sinc(\pi(t - kT_e)F_e)}$$

$$X_e(f) \times H(f) \xrightarrow{TF^{-1}} x_e(t) * h(t) = F_e \sum_k x(kT_e) h(t - kT_e)$$

Numérisation du signal : Quantification

Signal quantifié :

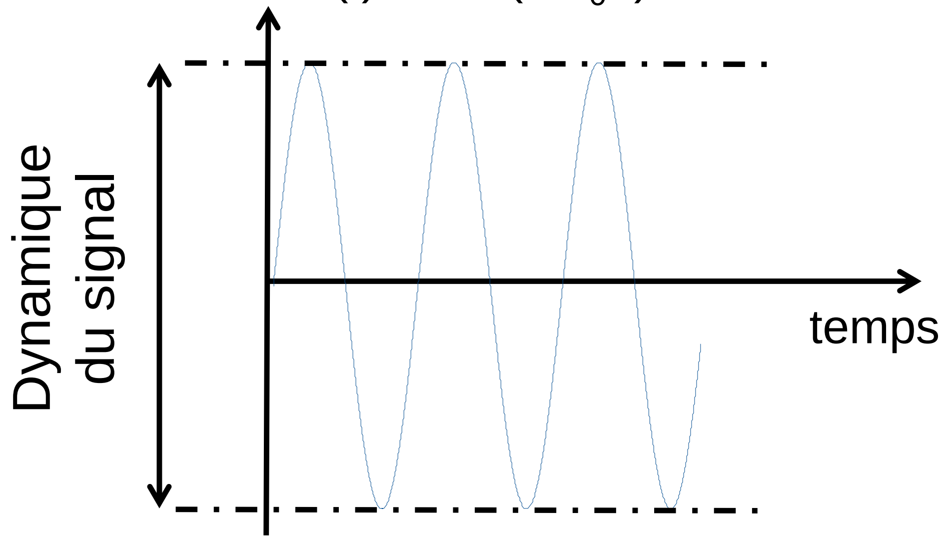
signal défini à chaque instant par un nombre fini de valeurs

Numérisation du signal : Quantification

Signal quantifié :
signal défini à chaque instant par un nombre fini de valeurs

<u>Exemple :</u>

$x(t) = \sin(2\pi f_0\, t)$

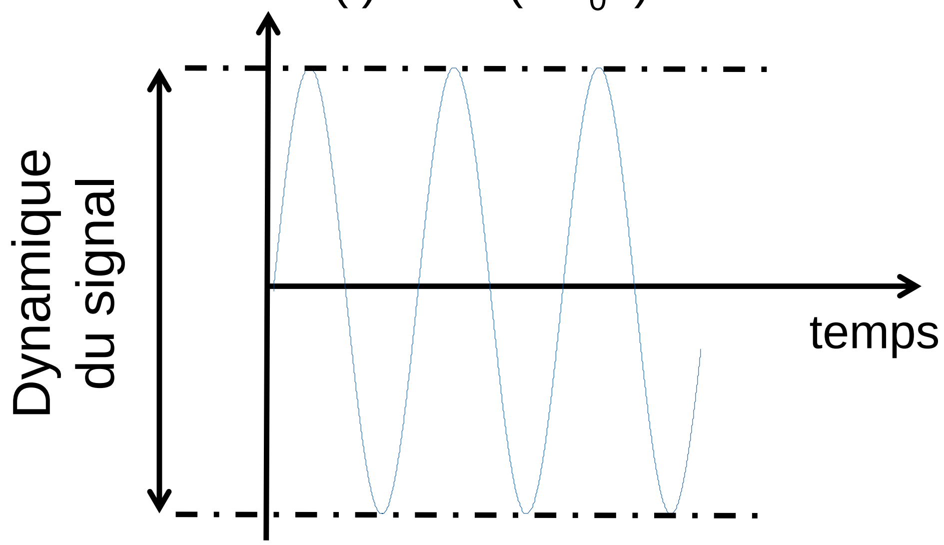


Numérisation du signal : Quantification

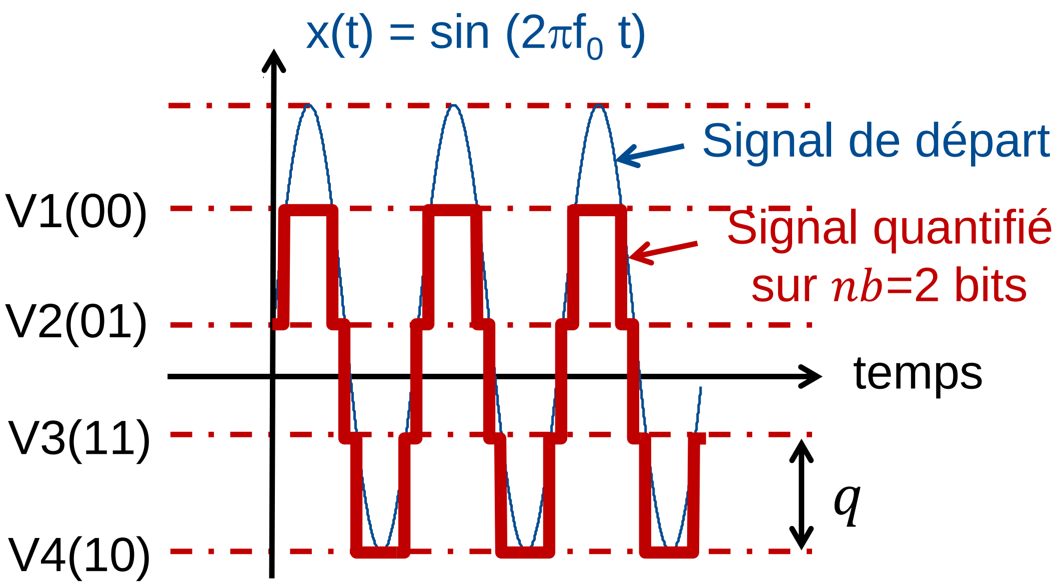
Signal quantifié :
signal défini à chaque instant par un nombre fini de valeurs

Exemple :

$x(t) = \sin(2\pi f_0\, t)$



$x(t) = \sin(2\pi f_0\, t) \in \{V1, V2, V3, V4\}$



Pas de quantification : $q = \dfrac{Dynamique\ du\ signal}{2^{nb}}$

Numérisation du signal : Quantification

Peut-on conserver la même information dans le signal quantifié ?

QUESTION 6

Allez sur **wooclap.com** et utilisez le code **SIGSEQ1**

Après quantification, le signal obtenu (signal quantifié) contient-il la même information que le signal de départ ?

1. Oui

2. Non

Numérisation du signal : Quantification

Peut-on conserver la même information dans le signal quantifié ?

Non,
L’opération de quantification est une opération irréversible.

Numérisation du signal : Quantification

Peut-on conserver la même information dans le signal quantifié ?

Mais le signal quantifié et le signal non quantifié peuvent cependant être très proches…

Non,
L'opération de quantification est une opération irréversible.

Une opération de quantification correctement réalisée va ajouter un bruit, dit *bruit de quantification*, au signal de départ (non quantifié).

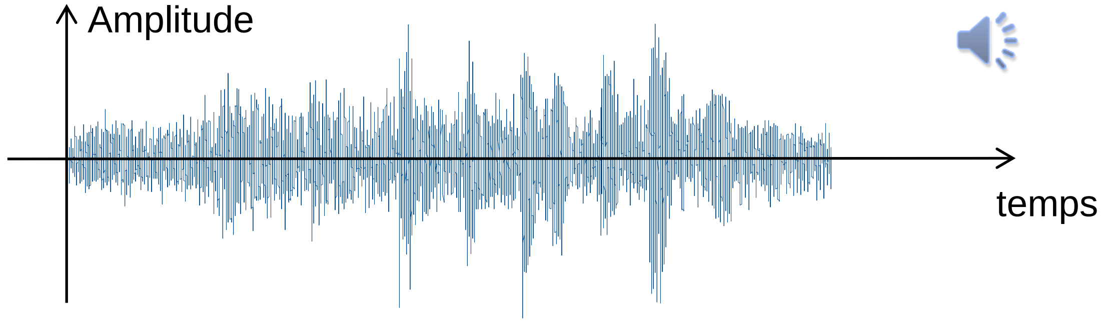
On montre que le rapport signal sur bruit (ou SNR) de quantification est donné par :

$$SNR_Q(dB) = 10\,log\,\frac{P_{signal\ non\ quantifié}}{P_{bruit\ de\ quantification}} = 6nb + constante$$

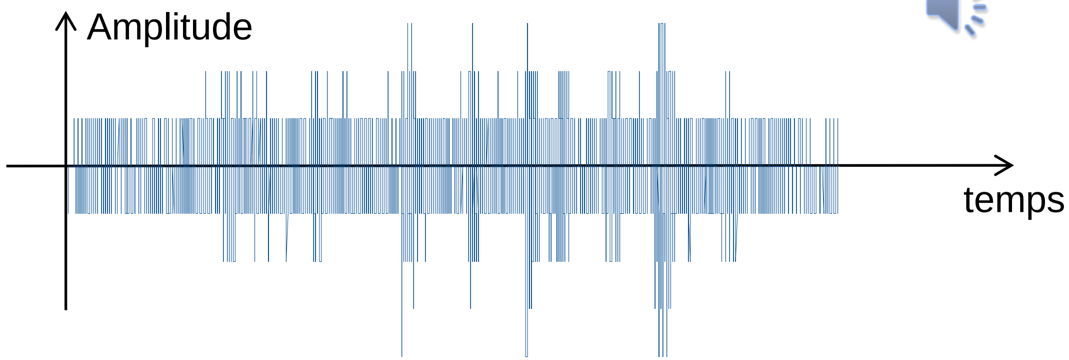
La constante dépendant du signal considéré

Exemple 1

→ Signal quantifié sur nb=16 bits => 2^{16}=65536 niveaux :



→ Signal quantifié sur nb = 4 bits => 2^4 = 16 niveaux :



Exemple 2

Image d'origine
512*512,
Quantifiée sur 8 bits

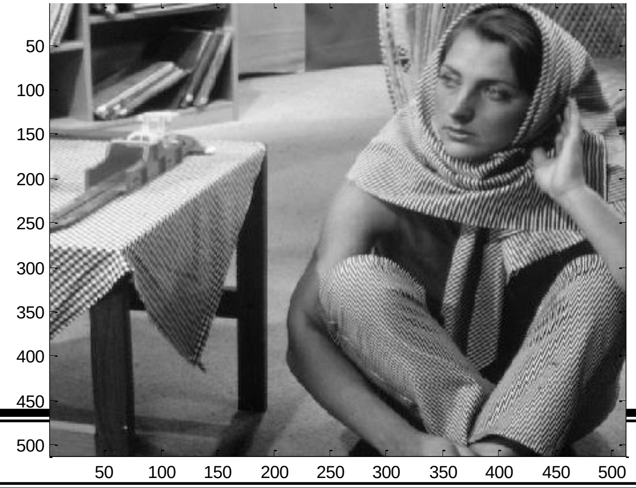


Image quantifiée **sur 4 bits**

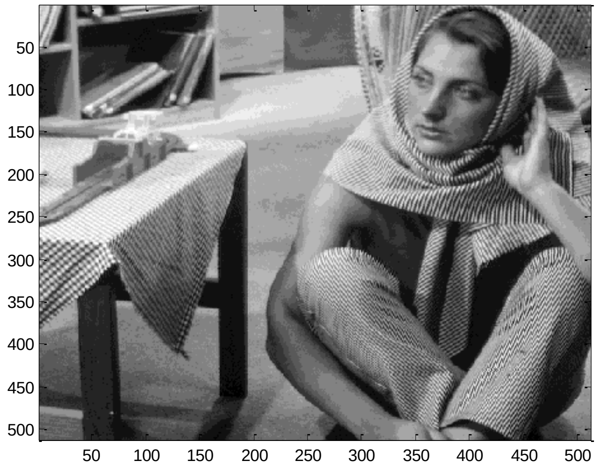
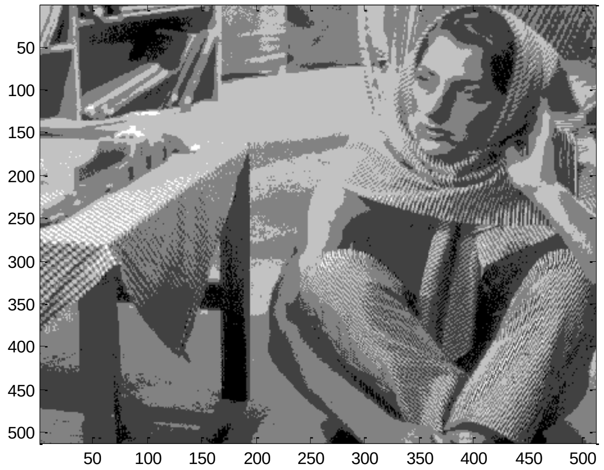


Image quantifiée **sur 2 bits**



Numérisation du signal : Echantillonnage + Quantification

Signal numérique :

signal défini à des instants discrets par un nombre fini de valeurs

= signal échantillonné et quantifié

Numérisation du signal : Echantillonnage + Quantification

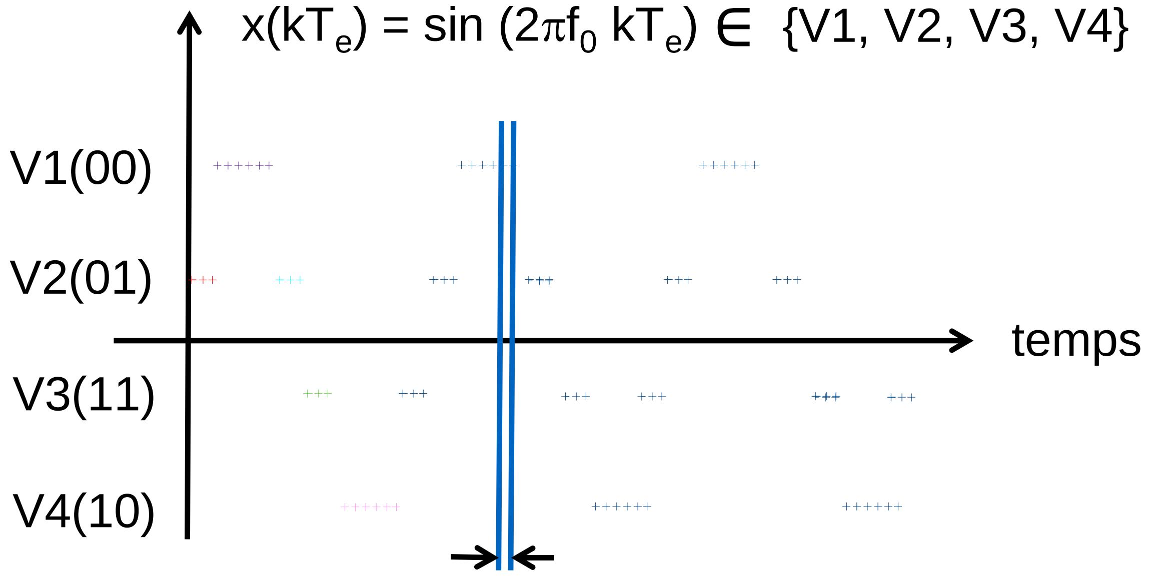
Signal numérique :

signal défini à des instants discrets par un nombre fini de valeurs

= signal échantillonné et quantifié

Exemple 1 :

$x(kT_e) = \sin(2\pi f_0 kT_e) \in \{V1, V2, V3, V4\}$



T_e : période d'échantillonnage

Finalement l'information binaire associée à cette sinusoïde, ou sinusoïde numérisée, va être donnée par :

010101000000000000010101111111101010101010

Numérisation du signal : Echantillonnage + Quantification

Signal numérique :

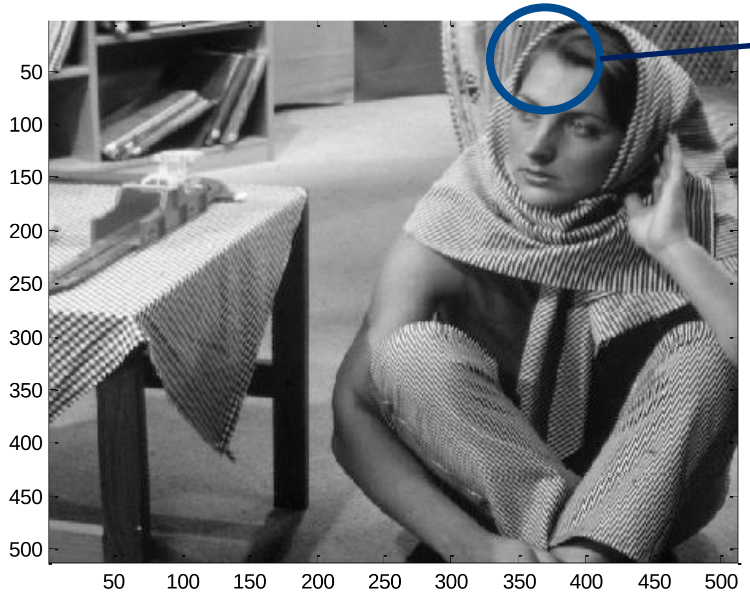
signal défini à des instants discrets par un nombre fini de valeurs

= signal échantillonné et quantifié

Exemple 2 :

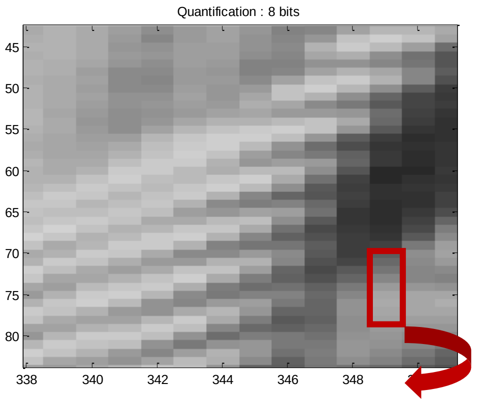
Original image:
512*512,
Quantized on 8 bits

512 pixels



512 pixels

Zoom



Un niveau de gris parmi 256 (2^8)

Génération d'un signal numérique

Exemple

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)\,;\;\; f_0 = 100\ Hz$$

Génération du signal :

$$t \rightarrow [0 : T_e : (N-1)\,T_e]$$

T_e ?

1- T_e = 100 Hz
2- T_e > 5 ms
3- T_e < 5 ms

QUESTION 7

Allez sur **wooclap.com** et utilisez le code **SIGSEQ1**

Je souhaite générer un cosinus de fréquence 100 Hz en numérique. Je dois utiliser comme période d'échantillonnage Te :

1. Te=200 Hz
2. Te<5 ms
3. Te>5 ms

Génération d'un signal numérique

Exemple

$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)\,;\;\; f_0 = 100\ Hz$

Génération du signal :

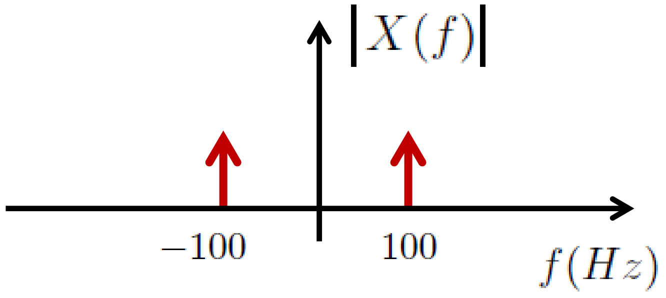
$t \rightarrow [0 : T_e : (N-1)\,T_e]$

T_e ?

1- T_e = 100 Hz
2- T_e > 5 ms
3- T_e < 5 ms

Transformée de Fourier :

$$X(f) = \frac{1}{2}\left(\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)\right)$$



Génération d’un signal numérique

Exemple

$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)\,;\;\; f_0 = 100\ Hz$

Génération du signal :

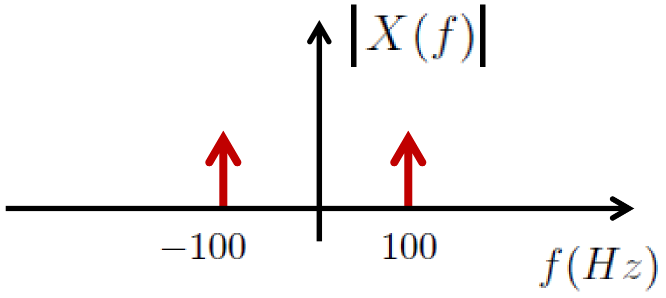
$t \rightarrow [0 : T_e : (N-1)\,T_e]$

T_e ?

1- T_e = 100 Hz
2- T_e > 5 ms
3- T_e < 5 ms

Transformée de Fourier :

$$X(f) = \frac{1}{2}\left(\delta\left(f + f_0\right) + \delta\left(f - f_0\right)\right)$$



F_{max}=100 Hz

Génération d'un signal numérique

Exemple

$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)\,;\ \ f_0 = 100\ Hz$

Génération du signal :

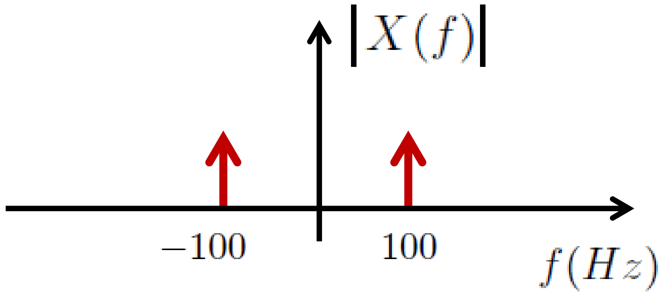
$t \rightarrow [0 : T_e : (N-1)\,T_e]$

T_e ?

1- T_e = 100 Hz
2- T_e > 5 ms
3- T_e < 5 ms

Transformée de Fourier :

$$X(f) = \frac{1}{2}\left(\delta\left(f + f_0\right) + \delta\left(f - f_0\right)\right)$$



F_{max}=100 Hz

$$F_e = \frac{1}{T_e} > 2F_{max} \Rightarrow T_e < 5\ ms$$

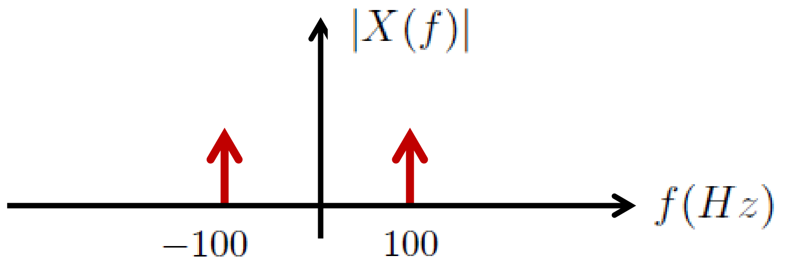
Génération d'un signal numérique

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)\ ;\ \ f_0 = 100\ Hz$$

TF du signal :

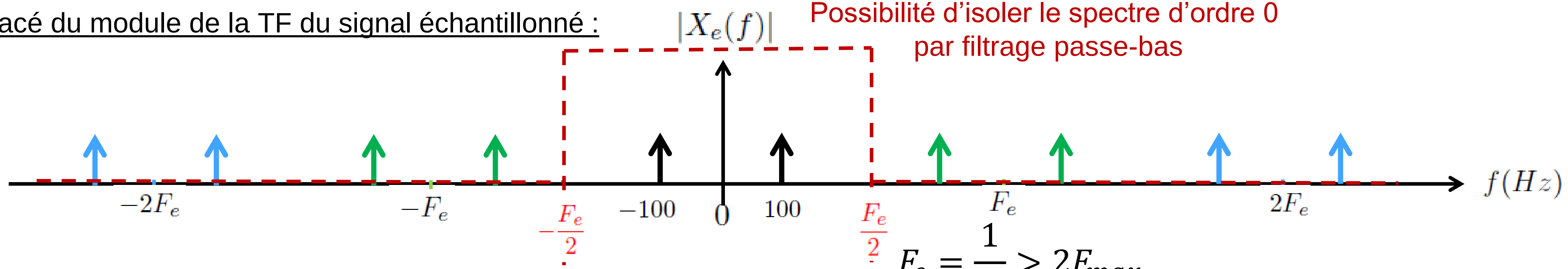
$$X(f) = \frac{1}{2}\left(\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)\right)$$

Tracé du module de la TF du signal :



$\Rightarrow F_{max}$=100 Hz

Tracé du module de la TF du signal échantillonné :



Possibilité d'isoler le spectre d'ordre 0 par filtrage passe-bas

$$F_e = \frac{1}{T_e} > 2F_{max}$$

Génération d'un signal numérique

Exemple

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)\,;\;\; f_0 = 100\ Hz$$

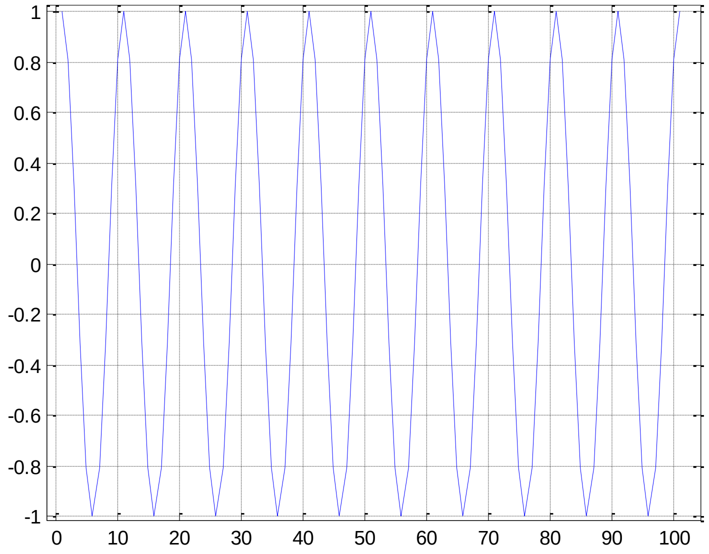
Code Matlab
(Suréchantillonnage d'un facteur 5)

```
%Paramètres
f0=100;      %fréquence du cosinus
Fe=1000;     %fréquence d'échantillonnage
Te=1/Fe;     %période d'échantillonnage
N=101;       %nombre d'échantillons

%Génération du signal
x=cos(2*pi*f0*[0:Te:(N-1)*Te]);

%Tracé du signal
figure; plot(x)
```

Signal obtenu :



Génération d'un signal numérique

Exemple

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)\,;\ \ f_0 = 100\ Hz$$

<u>Code Matlab</u>

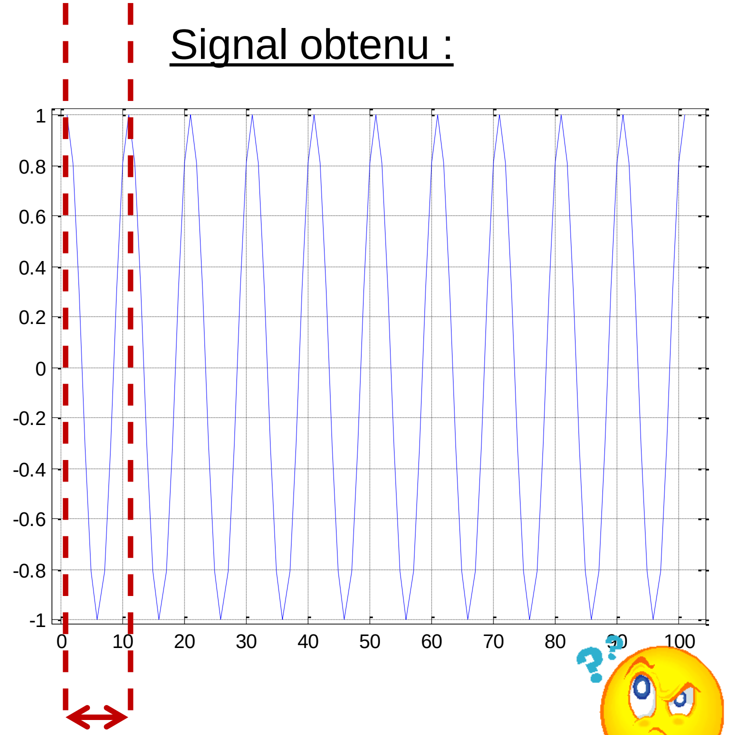
<u>(Suréchantillonnage d'un facteur 5)</u>

```
%Paramètres
f0=100;       %fréquence du cosinus
Fe=1000;    %fréquence d'échantillonnage
Te=1/Fe;     %période d'échantillonnage
N=101;        %nombre d'échantillons

%Génération du signal
x=cos(2*pi*f0*[0:Te:(N-1)*Te]);

%Tracé du signal
figure; plot(x)
```

<u>Signal obtenu :</u>



Une période = 10 secondes ??

Génération d’un signal numérique

Exemple

1 période = 10 échantillons de signal

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)\;;\;\; f_0 = 100\ Hz$$

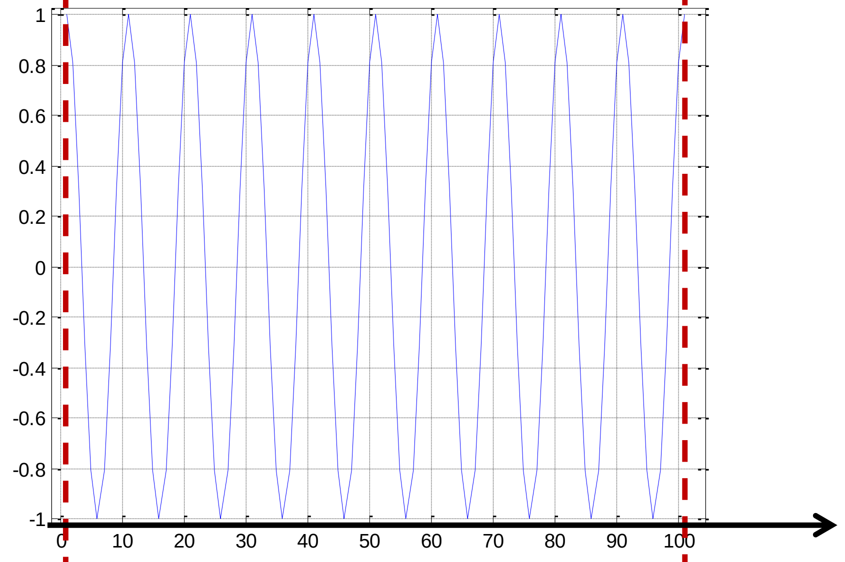
Code Matlab
(Suréchantillonnage d’un facteur 5)

```
%Paramètres
f0=100;       %fréquence du cosinus
Fe=1000;      %fréquence d'échantillonnage
Te=1/Fe;      %période d'échantillonnage
N=100;        %nombre d'échantillons

%Génération du signal
x=cos(2*pi*f0*[0:Te:(N-1)*Te]);

%Tracé du signal
figure; plot(x)
```

Signal obtenu :



n° d’échantillon !!

Taille du vecteur = 100 échantillons

Génération d'un signal numérique

Exemple

$$x(t) = \cos\left(2\pi f_0 t\right);\ \ f_0 = 100\ Hz$$

Code Matlab

(Suréchantillonnage d'un facteur 5)

```
%Paramètres
f0=100;       %fréquence du cosinus
Fe=1000;      %fréquence d'échantillonnage
Te=1/Fe;      %période d'échantillonnage
N=100;        %nombre d'échantillons

%Génération du signal
x=cos(2*pi*f0*[0:Te:(N-1)*Te]);

%Tracé du signal
figure; plot([0:Te:(N-1)*Te],x)
```

!! Echelle ~~temporelle~~ à donner !!

Signal obtenu :