Thème Logique des propositions

Une théorie formalisée

Exercice 1 En utilisant la déduction naturelle constructive sans les règles de la négation $\neg$ et de l'anti-té $\bot$, construire la preuve que les formules bien formées suivantes sont des théorèmes. La preuve sera représentée sous la forme d'arbre puis caractérisée par sa trace.

1. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
2. $((A \wedge B) \to C) \to (A \to (B \to C))$
3. $((A \vee B) \to C) \to (B \to C)$
4. $((A \vee B) \wedge (A \to C) \wedge (B \to C)) \to C$

Exercice 2 En utilisant la déduction naturelle constructive avec les règles de la négation $\neg$, construire la preuve que les formules bien formées suivantes sont des théorèmes. La preuve sera représentée sous la forme d'arbre puis caractérisée par sa trace.

1. $A \to \neg\neg A$
2. $(A \to \neg B) \to ((A \to B) \to \neg A)$

Exercice 3 En utilisant la déduction naturelle constructive avec les règles de la négation $\neg$ et de l'anti-té $\bot$, construire la preuve que les formules bien formées suivantes sont des théorèmes. La preuve sera représentée sous la forme d'arbre puis caractérisée par sa trace.

1. $A \to (\neg A \to B)$
2. $(\neg A \vee B) \to (A \to B)$

Exercice 4 En utilisant la déduction naturelle, montrer que la formule bien formée suivante est un théorème. La preuve sera représentée sous la forme d'arbre puis caractérisée par sa trace.

- $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

Exercice 5 En utilisant la déduction naturelle, montrer que la formule bien formées suivante issue de la question 4 de l'exercice 1 du thème 1 est un théorème. La preuve sera représentée sous la forme d'arbre puis caractérisée par sa trace.

$$((E \to (Y \vee R)) \wedge (Y \to R)) \to (\neg R \to \neg E)$$

Rappels de cours distribués lors de l'examen écrit.

1 Logique des propositions : Vision syntaxique

1.1 Déduction naturelle constructive

Hypothèse	$\dfrac{}{\Gamma,\, \varphi \vdash \varphi}\ Hyp(\Gamma, \varphi)$	
Opérateur	**Introduction**	**Elimination**
$\to$	$\dfrac{\Gamma,\, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}\ I_{\to}(\Gamma, \varphi, \psi)$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}\ E_{\to}(\Gamma, \varphi, \psi)$
$\wedge$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}\ I_{\wedge}(\Gamma, \varphi, \psi)$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi}\ E_{\wedge}^{G}(\Gamma, \varphi, \psi) \quad \dfrac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ E_{\wedge}^{D}(\Gamma, \varphi, \psi)$
$\vee$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}\ I_{\vee}^{G}(\Gamma, \varphi, \psi) \quad \dfrac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}\ I_{\vee}^{D}(\Gamma, \varphi, \psi)$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi \quad \Gamma,\, \varphi \vdash \chi \quad \Gamma,\, \psi \vdash \chi}{\Gamma \vdash \chi}\ E_{\vee}(\Gamma, \varphi, \psi, \chi)$
$\neg$	$\dfrac{\Gamma,\, \varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\varphi}\ I_{\neg}(\Gamma, \varphi)$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash \bot}\ E_{\neg}(\Gamma, \varphi)$
$\bot$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash \bot}\ I_{\bot}(\Gamma, \varphi)$	$\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}\ E_{\bot}(\Gamma, \varphi)$

1.2 Déduction naturelle classique

Tiers-exclu	Preuve par l'absurde
$\dfrac{}{\Gamma \vdash \varphi \vee \neg\varphi}\ TE(\Gamma, \varphi)$	$\dfrac{\Gamma,\, \neg\varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}\ Abs(\Gamma, \varphi)$