INTRODUCTION AUX TELECOMMUNICATIONS
Première année sciences du numérique
2023 – 2024

Correction du TD3

I. EXERCICE 1 : IMPACT D'UN CANAL DE PROPAGATION À BANDE PASSANTE LIMITÉE

Soit un signal émis $x(t)$ qui se compose de symboles équiprobables et indépendants appartenant à l'alphabet $\{\pm 1\}$ mis en forme par un filtre en racine de cosinus surélevé de roll off égal à $0,2$. On transmet ce signal en bande de base dans un canal de transmission idéal de bande 1200 Hz. Le filtre de réception est identique au filtre de mise en forme.

1) Le critère de Nyquist peut-il être respecté pour cette transmission ? Si oui à quelle condition ?
Si on note $H(f)$ la réponse en fréquence du filtre d'émission et $H_r(f)$ la réponse en fréquence du filtre de réception, alors $H(f)H_r(f)$ est un filtre en cosinus surélevé qui permet de respecter le critère de Nyquist (un tracé de $H(f)H_r(f)$ et de ses versions décalées tous les $\frac{1}{T_s}$ montre que cette forme permet de respecter le critère de Nyquist car l'ajout de tous ces décalages est bien constant : critère de Nyquist vu dans le domaine fréquentiel).
Attention cependant le critère de Nyquist doit être respecté sur $G(f) = H(f)H_c(f)H_r(f)$, si $H_c(f)$ représente la réponse en fréquence du canal de propagation.
Ici, le canal est idéal sur une bande de 1200 Hz, ce qui veut dire que sa réponse en fréquence est donné par la figure 1.

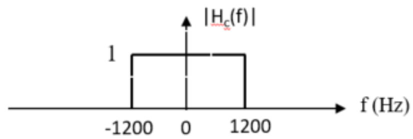

Fig. 1. Réponse en fréquence du canal de transmission.

Pour pouvoir respecter le critère de Nyquist sur cette transmission il faudra donc que

$$\frac{1+\alpha}{2}R_s = 0.6R_s < 1200\ Hz$$

$R_s = \frac{1}{T_s}$ représentant le débit symbole. Cette condition permet que le canal de propagation ne vienne pas "perturber" la forme $H(f)H_r(f)$ permettant de respecter le critère de Nyquist.

2) En déduire le débit symbole R_s maximal qui pourra être transmis sans apparition d'interférence entre symboles aux instants optimaux d'échantillonnage.

$$R_s \leq 2000\ bauds \Rightarrow (R_s)_{max} = 2000\text{bauds}$$

3) Si l'on veut transmettre avec un débit binaire $R_b = 4$ Kbps, quels ordres de modulations pourront être utilisés sans apparition d'interférence entre symboles aux instants optimaux d'échantillonnage ?

$$R_s = \frac{R_b}{log_2(M)}$$

où M représente l'ordre de la modulation (nombre de symboles possibles). Il faudra ici $M \geq 4$ si on veut continuer à assurer le critère de Nyquist sur la transmission.

II. Exercice 1 : Comparaison de systèmes de transmission sur fréquence porteuse

On considère les trois systèmes de transmission définis dans le tableau suivant ("SRRCF" signifie "Square Root Raised Cosine Filter" ou filtre en racine de cosinus surélevé en français) :

Modulation :	16-QAM	16-PSK	16-ASK
Filtre d'emission :	SRRCF, $\alpha = 0,5$	SRRCF, $\alpha = 0,5$	SRRCF, $\alpha = 0,5$
Filtre de reception :	SRRCF, $\alpha = 0,5$	SRRCF, $\alpha = 0,5$	SRRCF, $\alpha = 0,5$
Debit binaire :	32 kbps	32 kbps	32 kbps
TEB :	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}

1) Dans les trois systèmes proposés la transmission se fait-elle en bande de base ou sur fréquence porteuse ?
La transmission se fait sur fréquence porteuse. Les modulations de type ASK, PSK et QAM sont des modulations numériques sur porteuse.

2) Donner le schéma des modulateurs pour les trois systèmes de transmission considérés.
On peut utiliser le schéma de la figure 2 en changeant le mapping pour obtenir une modulation :
   - 16-ASK : $d_k = a_k \in \{\pm 15, \pm 13, \pm 11, \pm 9, \pm 7, \pm 5, \pm 3, \pm 1\}$
   - 16-PSK : $d_k \in \left\{ e^{j\left(\frac{\pi}{16} + l\frac{\pi}{16}\right)} \right\}$, $l = 0, ..., 15$
   - 16-QAM : $d_k = a_k + jb_k$ avec $a_k \in \{\pm 3, \pm 1\}$ et $b_k \in \{\pm 3, \pm 1\}$

Le filtre de mise en forme étant le même dans les 3 cas.

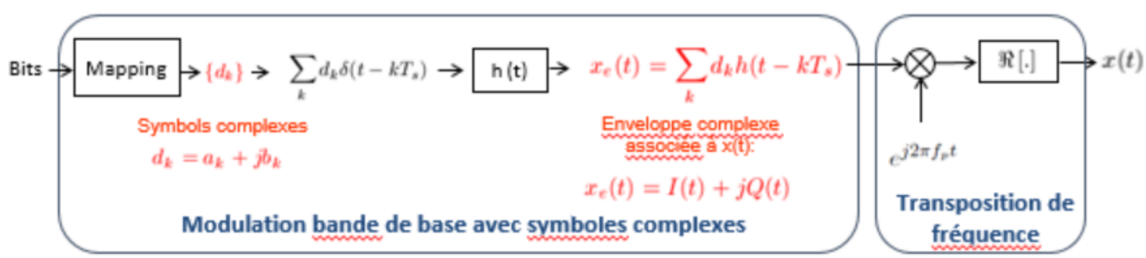

Fig. 2. Schéma général d'un modulateur sur fréquence porteuse.

3) Donner l'ordre de la modulation dans les trois systèmes de transmission considérés. A quoi correspond il ?
Les 3 modulations sont d'ordre $M = 16$. Cela correspond au nombre de symboles possibles issus du mapping, chaque symbole codant ici 4 bits ($M = 16 = 2^4$)

4) Tracer les constellations des trois modulations considérées.
Voir diapositives de cours pour $16-$QAM et $16-$PSK.
Pour tracer la constellation de la 16-ASK il faut positionner les 16 valeurs possibles pour les symboles sur l'axe réel (modulation mono-dimensionnelle). On choisit, en général, des symboles à moyenne nulle, ce qui donnerait 8 points à placer de chaque côté de l'axe imaginaire, à équi-distance les uns les autres pour assurer la même protection aux différents symboles.

5) Déterminer le débit symbole transmis (R_s) dans les trois cas.

$$R_s = \frac{R_b}{\log_2(M)} = 8 \text{ kbauds car } M = 16 \text{ , dans les 3 cas}$$

6) Calculer les efficacités spectrales des trois systèmes de transmission proposés. Pouvait-on s'attendre à un tel résultat ?

$$\eta = \frac{\log_2(M)}{k}$$

où k est donné par la bande occupée par le signal transmis :

$$B = kR_s$$

Ici

$$B = 2 \times \frac{1+\alpha}{2T_s} = (1+\alpha)\, R_s$$

On a donc

$$k = 1 + \alpha$$

et

$$\eta \simeq 2.67 \text{ bits/s/Hz dans les 3 cas}$$

On pouvait s'attendre à ce résultat identique pour les 3 systèmes de transmission car ils ont le même nombre de symboles possibles (même ordre de la modulation) et le même filtre de mise en forme, ce dont dépend l'efficacité spectrale.

7) En modifiant la valeur du roll off, déterminer quelle est la borne maximale en termes d'efficacité spectrale pour les trois systèmes de transmission proposés.
On aura l'efficacité spectrale maximale pour un roll off de 0 (bande occupée la plus faible avec ce filtre de mise en forme pour un débit binaire donné).
Ce qui donne

$$\eta_{max} = \frac{\log_2(M)}{1+\alpha} = 4 \text{ bits/s/Hz pour une modulation sur porteuse d'ordre} 16$$

8) Le canal de propagation à traverser est supposé AWGN sur une bande de 15 kHz.
   a) Tracer la fonction de transfert du canal de propagation.
   On a ici un canal de type passe-bande (transmission sur fréquence porteuse). La figure 3 trace le module de la réponse en fréquence de ce canal. Pour un canal "idéal" sa phase est linéaire en fréquence sur la bande passante.

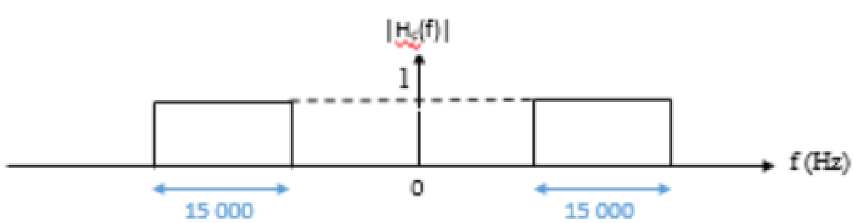

Fig. 3. Tracé du module de la réponse en fréquence du canal de propagation.

b) Sera-t-il possible de réaliser chaque transmission en trouvant, au niveau du récepteur, des instants d'échantillonnage sans interférence entre symboles ? Expliquer votre réponse.
Pour pouvoir réaliser la transmission en trouvant des instants d'échantillonnage sans interférence entre symboles il faut que $G(f) = H(f)H_c(f)H_r(f)$ soit une forme qui permette de respecter le critère de Nyquist. Ici $H(f)H_r(f)$ est un cosinus surélevé et respecte donc le critère de Nyquist. Afin que $G(f) = H(f)H_c(f)H_r(f)$ continue à le respecter il faut que

$$2 \times \frac{1+\alpha}{2T_s} = (1+\alpha)\, R_s \leq 15000 \text{ Hz}$$

soit

$$R_s \leq 10000 \text{ bauds, ce qui est bien le cas ici (voir question 5)}$$

9) La figure 4 donne les courbes de TEB obtenus en fonction du rapport signal à bruit par bit à l'entrée du récepteur (E_b/N_0) en dB pour les trois modulations considérées. En déduire les E_b/N_0 nécessaires pour satisfaire à la spécification du TEB ? Quel est le système le plus efficace en terme de puissance ? Justifier votre réponse.

$$E_b/N_0(16ASK) \simeq 22dB > E_b/N_0(16PSK) \simeq 17dB > E_b/N_0(16QAM) \simeq 13dB$$

Le système le plus efficace en puissance est celui qui demande le E_b/N_0 le plus faible pour atteindre le TEB fixé. Ici c'est donc le système utilisant la modulation $16 - QAM$.

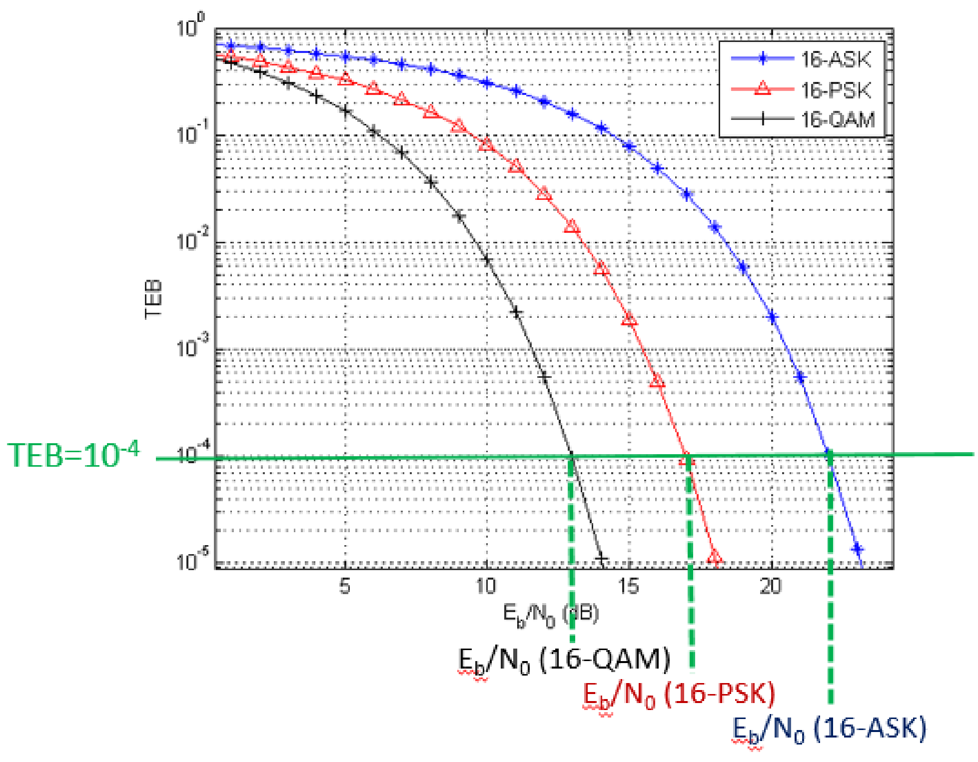

Fig. 4. Comparaison des TEB pour les modulations ASK, PSK et QAM pour $M = 16$