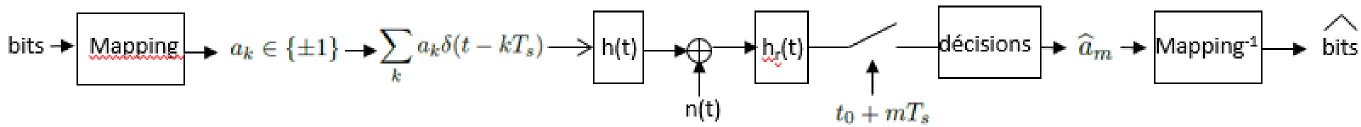
INTRODUCTION AUX TELECOMMUNICATIONS
Première année Sciences du Numérique
2023 – 2024

Correction du TD2

I. ÉTUDE D'UNE CHAINE DE TRANSMISSION EN BANDE DE BASE

Soit la chaine de transmission donnée par la figure suivante :



On considèrera un mapping binaire à moyenne nulle, avec des symboles $a_k \in \{-1, 1\}$ supposés indépendants et équiprobables, des réponses impulsionnelles des filtres de mise en forme et de réception, $h(t)$ et $h_r(t)$, données par la figure 1 et un bruit $n(t)$ supposé additif, blanc et gaussien, de densité spectrale de puissance égale à $\frac{N_0}{2}$ quelle que soit la fréquence. Le résultat du produit de convolution entre $h(t)$ et $h_r(t)$ est donné dans la figure 2.

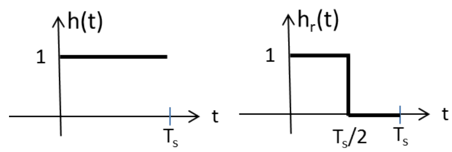


Fig. 1. Réponses impulsionnelles des filtres d'émission et de réception.

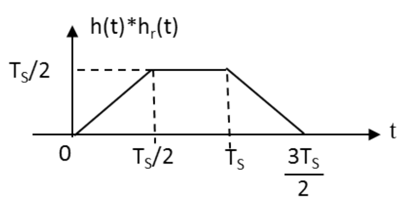
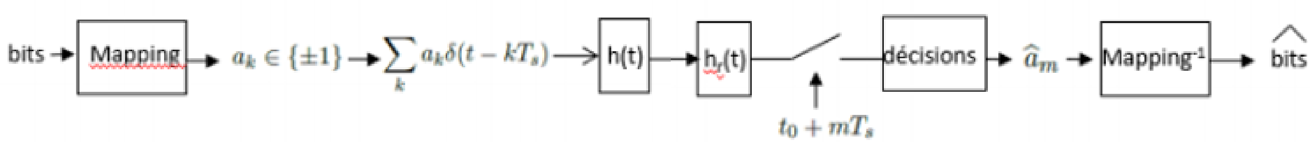


Fig. 2. Produit de convolution entre $h(t)$ et $h_r(t)$.

A. *Étude sans canal*

Nous allons, tout d'abord, étudier la chaine de transmission sans canal de propagation :



1) La chaîne de communication peut-elle vérifier le critère de Nyquist ? Justifiez votre réponse.
   Oui pour $t_0 \in \left[\frac{T_s}{2}, T_s\right]$ car on a alors

$$g(t_0) \neq 0$$
$$g(t_0 + pT_s) = 0 \;\forall\, p \in Z^*$$

2) Tracer le signal $z(t)$ en sortie du filtre de réception $h_r(t)$ pour la suite de bits émise suivante : 0110100. Retrouve-t-on sur ce signal le fait que la chaine de transmission puisse respecter le critère de Nyquist ?
   Le signal $z(t)$ est tracé en rouge sur la figure 3. On voit bien qu'en échantillonnant à t_0+mT_s, $m = 0, 1, 2, ...$, avec $t_0 \in \left[\frac{T_s}{2} T_s\right]$, on retrouve les symboles émis (au facteur $\frac{T_s}{2}$ près, représentant $g(t_0)$)

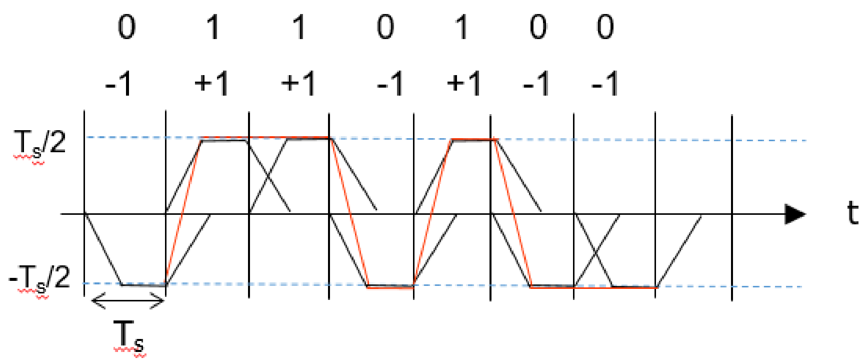


Fig. 3. Signal $z(t)$ en sortie du filtre de réception $h_r(t)$ pour la suite de bits émise suivante : 0110100.

3) Tracer le diagramme de l'oeil avec une base de temps de T_s. Retrouve-t-on sur le diagramme de l'oeil le fait que la chaine de transmission puisse respecter le critère de Nyquist ?
   Le diagramme de l'oeil est tracé sur la figure 4. Il représente, sur un même tracé, tout ce qui peut se produire sur le signal pendant T_s. On peut en déduire s'il existe, quoi qu'il arrive sur le signal en question, un instant sans interférence entre symboles à chaque T_s. La réponse est oui. On retrouve le fait qu'on doive échantillonner à $t_0 + mT_s$, $m = 0, 1, 2, ...$, avec $t_0 \in \left[\frac{T_s}{2} T_s\right]$. A ces instants là nous aurons toujours, sans bruit, $\pm\frac{T_s}{2}$

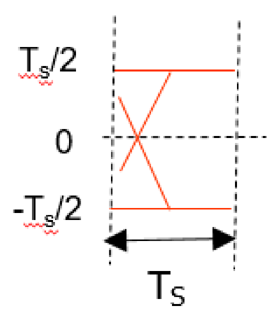
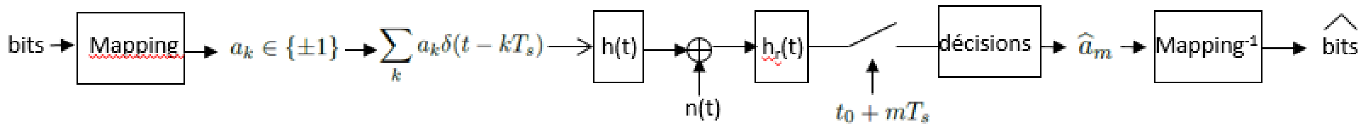


Fig. 4. Diagramme de l'oeil avec une base de temps de T_s

4) Si on échantillonne en prenant $t_0 = \frac{T_s}{4}$, aura t-on un taux d'erreur binaire nul ?
   Le TEB ne sera pas nul car nous aurons de l'interférence entre symboles. Même sans canal de propagation, il est possible d'avoir un TEB non nul si l'émetteur et le récepteur ne sont pas optimisés.

B. Étude avec canal AWGN

Ajoutons maintenant le canal à bruit additif, blanc et Gaussien :



1) En supposant que l'on vérifie le critère de Nyquist sur la transmission, calculer le rapport signal sur bruit aux instants d'échantillonnage (on admettra que la puissance du bruit échantillonné et filtré est identique à celle du bruit filtré et on calculera donc cette puissance en sortie du filtre de réception).
En prenant $t_0 \in \left[\frac{T_s}{2}, T_s\right]$, on obtient en sortie de l'échantillonneur à $t_0 + mT_s$: $a_m g(t_0) + w_m$.
On a donc

$$SNR = \frac{E\left[|a_m g(t_0)|^2\right]}{\sigma_w^2}$$

avec

$$\sigma_w^2 = \int_R \frac{N_0}{2} |H_r(f)|^2 \, df \text{ (relation de Wiener Lee)}$$

mais aussi

$$\sigma_w^2 = \frac{N_0}{2} \int_R |h_r(t)|^2 \, dt \text{ (Egalité de Parseval)}$$

D'où :

$$SNR = \frac{E\left[|a_m g(t_0)|^2\right]}{\frac{N_0}{2}\int_R |H_r(f)|^2 \, df} = \frac{E\left[|a_m|^2\right] g^2(t_0)}{\frac{N_0}{2}\int_R |h_r(t)|^2 \, dt} = \frac{\left(\frac{1}{2}|-1|^2 + \frac{1}{2}|+1|^2\right) \times \left(\frac{T_s}{2}\right)^2}{\frac{N_0}{2}\frac{T_s}{2}} = \frac{T_s}{N_0}$$

2) On choisira d'utiliser un détecteur à seuil. Déterminer le seuil optimal à utiliser en expliquant votre choix.
Seuil en 0 car :
   - pour $z_m = a_m g(t_0) + w_m < 0$: $p(z_m|a_m = -1) > p(z_m|a_m = +1)$
   - pour $z_m = a_m g(t_0) + w_m > 0$: $p(z_m|a_m = +1) > p(z_m|a_m = -1)$.

(règle du maximum de vraisemblance). En effet (loi des probabilités totales et symboles équiprobables) :

$$p(z_m) = \frac{1}{2} p(z_m|a_m = -1) + \frac{1}{2} p(z_m|a_m = +1)$$

donne le mélange de Gaussiennes donné par la figure 5.

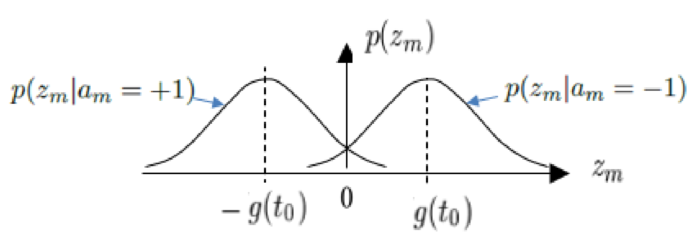


Fig. 5. Densité de probabilité de z_m

3) En supposant que l'on échantillonne aux instants optimaux et que l'on utilise le seuil optimal de décision, donner le taux d'erreur binaire de la transmission en fonction de T_s et σ_w, σ_w^2 représentant la puissance du bruit en sortie du filtre de réception $h_r(t)$.
$TEB = Q\left(\frac{g(t_0)}{\sigma_w}\right)$ car le critère de Nyqusit est respecté et émission de symboles ± 1. D'où ici

$$TEB = Q\left(\frac{T_s}{2\sigma_w}\right)$$

4) Calculer la puissance du bruit en sortie du filtre de réception σ_w^2 en fonction de N_0 et de T_s.
Déjà fait plus haut :
$$\sigma_w^2 = \frac{N_0}{2}\int_R |H_r(f)|^2\, df = \frac{N_0}{2}\int_R |h_r(t)|^2\, dt = \frac{N_0 T_s}{4}$$
.

5) Calculer l'énergie des symboles à l'entrée du récepteur, E_s, en fonction de T_s.
$$E_s = P_r T_s$$
si P_r représente la puissance du signal reçu,
$$r(t) = \sum_k a_k h_e(t - kT_s)$$
avec $h_e(t) = h(t) * h_c(t)$ qui représente la forme d'onde reçue. On a donc
$$P_r = \int_R S_r(f) df$$
avec
$$S_r(f) = \frac{\sigma_a^2}{T_s}|H_e(f)|^2 \text{ (symboles } a_k \text{ à moyenne nulle et indépendants)}$$
et
$$H_e(f) = H(f)H_c(f) = H(f) \text{ (pas de filtre canal)}$$
D'où
$$E_s = \int_R |H(f)|^2\, df = \int_R |h(t)|^2\, dt = T_s \text{ (Parseval)}$$

6) Déduire des questions précédentes l'expression du taux d'erreur binaire (TEB) en fonction de E_b/N_0, rapport signal sur bruit par bit à l'entrée du récepteur, pour la chaine étudiée.
En reportant les expressions de σ_w^2 et E_s dans l'expression du TEB obtenue plus haut :
$$TEB = Q\left(\frac{T_s}{2\sigma_w}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$
(un symbole code un bit ici : $E_b = E_s$)

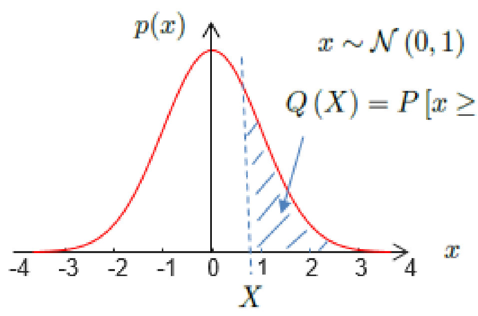


Fig. 6. Définition de la fonction $Q(X)$

7) Ce TEB est-il optimal ? Si oui pourquoi, si non que pourrait-on modifier dans la chaine de transmission pour qu'il le devienne ? Expliquez votre réponse.
On a
$$Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) > Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$
(voir fonction $Q(X)$: figure 6). Or $Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$ est le TEB optimal pour une chaine de transmission avec symboles binaires. Il est atteint quand les symboles sont indépendants, à moyenne nulle, que le critère de Nyquist est vérifié et que le filtre de réception est adapté à la forme d'onde reçue. Ce dernier point n'est pas vérifié ici : la forme d'onde reçue est rectangulaire de durée T_s, le filtre de réception devrait donc être un filtre de réponse impulsionnelle rectangulaire de durée T_s pour être adapté, ce qui n'est pas le cas ici. Le SNR aux instants de décision n'est donc pas maximisé et le TES (=TEB ici) n'est donc pas minimisé.