

Rapport de stage  
Algorithmes de minimisation du regret et  
intégrales de Choquet  
LABORATOIRE DE RECHERCHE EN  
INFORMATIQUE

Quentin LIEUMONT

18 Juin 2019

Sous la direction de : Johanne COHEN  
Martine THOMAS

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
1.1	Présentation du LRI . . . . .	3
1.2	Équipe GALAC . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Contexte et motivations</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Un petit point théorique...</b>	<b>4</b>
3.1	Réseaux de neurones . . . . .	4
3.1.1	Un neurone . . . . .	4
3.1.2	Un réseau . . . . .	6
3.1.3	L'apprentissage . . . . .	7
3.2	Intégrales de Choquet . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Matériel et méthodes</b>	<b>10</b>
4.1	Keras . . . . .	10
4.2	Implementation d'un réseau de Choquet . . . . .	13
4.3	Données réelles . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Résultats et discussion</b>	<b>16</b>
5.1	Moyenne : . . . . .	16
5.1.1	Étude de l'apprentissage : . . . . .	16
5.2	Étude de la resistance aux perturbations . . . . .	17
5.3	Base de données réelle . . . . .	18
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>20</b>
	<b>Références</b>	<b>21</b>

# 1 Introduction

Mon stage c'est déroulé au laboratoire de recherche en informatique, son sujet était le suivant : *Algorithmes de minimisation du regret et intégrales de Choquet*. Je n'avais jamais fait d'informatique fondamentale (excepté IA) et n'ayant jamais vu la théorie de la mesure, il m'était d'appréhender en totalité la notion d'intégrale de Choquet (découlant des intégrale de Lebesgue). C'est pourquoi, durant ce rapport, la partie mathématique théorique ne sera pas vue en détail.

Ce papier se décompose en cinq grandes parties : Premièrement, une introduction présentera le LRI. Puis le sujet du stage sera expliqué avec un point sur le vocabulaire technique. Ensuite, la partie matériel et méthodes présentera les expériences menées. Enfin les résultats seront présentés et discutés. Ce rapport se terminera par une conclusion de la recherche et une discussion des apprentissages de ce stage.

## 1.1 Présentation du LRI

Le Laboratoire de Recherche en Informatique (LRI) est une unité de recherche de l'Université Paris-Sud et du CNRS. Créé il y a plus de 40 ans, le laboratoire est localisé sur le plateau du Moulon depuis début 2013. Il accueille plus de 250 personnes dont environ un tiers de doctorants.

Organisés en neuf équipes, les recherches du laboratoire incluent à la fois des aspects théoriques et appliqués (ex : algorithmique, réseaux et bases de données, graphes, bio-informatique, interaction homme-machine...). De part cette diversité, le laboratoire favorise les recherches aux frontières de différents domaines, là où le potentiel d'innovation est le plus grand. En plus de son activité de publication (2000 publications entre début 2008 et mi 2013), le LRI développe de nombreux logiciels.

Pour plus d'informations, je vous invite à aller regarder sur leur site ou une présentation détaillée est continuellement tenue à jour [1].

## 1.2 Équipe GALAC

Durant mon stage, j'ai travaillé sous la direction de Johanne COHEN qui est la responsable de l'équipe GALAC.

L'équipe GALAC est une équipe du LRI composée d'environ 20 chercheurs issus du CNRS, de l'Université Paris-Sud et de Centrale Supélec qui travaillent sur des thématiques théoriques comme l'algorithmique, la théorie des graphes ou les systèmes en réseaux. Mon travail s'intègre dans cette équipe puisqu'il réside dans l'étude du fonctionnement d'un algorithme.

## 2 Contexte et motivations

Le but du stage était de manipuler les intégrales de Choquet et les réseaux de neurones. La prédiction du prix des maisons en fonction de leurs caractéristiques a été étudiée grâce à une base de données trouvée sur internet [2].

## 3 Un petit point théorique...

Afin de mieux comprendre les interactions entre les différentes notions, un petit point théorique est nécessaire :

- Compréhension du fonctionnement d'un réseau de neurones
- Fonctionnement des intégrales de Choquet
- Pourquoi les intégrales de Choquet associées aux réseaux de neurones sont particulièrement efficace pour résoudre certains problèmes

### 3.1 Réseaux de neurones

Les médias parlent souvent d'intelligence artificielle et de réseaux de neurones, ces deux notions sont radicalement différentes mais elles sont souvent mélangées et confondues sur la place publique...

L'intelligence artificielle est un concept informatique, un paradigme de programmation, cette notion n'a pas été abordée durant mon stage, il n'en sera pas question ici. Cependant si vous voulez en savoir plus, je vous redirige vers la chaîne youtube de LÊ NGUYỄN HOANG. Anciennement chercheur en mathématiques et aujourd'hui vulgarisateur sur internet et à l'EPFL ses vidéos sont à regarder sans modération [3].

Un réseau de neurones est une architecture informatique inventée en 1950 et remis à la mode grâce aux travaux de Yan LE CUN durant les années 1980 permettant de faire des régressions de fonctions, de la généralisation et de l'optimisation. Il est composé, comme son nom l'indique, de neurones mis en réseau grâce à des connexions.

#### 3.1.1 Un neurone

Un neurone est une unité de base du réseau, il se décompose en trois phases :

- L'entrée
- La fonction interne
- La fonction d'activation

Elles s'agencent de la manière suivante :

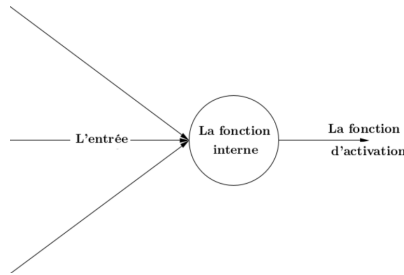


FIGURE 1 – Un neurone

**L'entrée :** Un neurone prend des informations en entrée, de manière générale un nombre réel entre 0 et 1 mais d'autres objets sont envisageables (image, pixel, son...). Il n'y a pas de nombre minimum ou maximums (il peut être conçu un neurone ne prenant pas d'entrée, ou au contraire en prenant une infinité), ni de contrainte sur les différents objets.

**Exemple(s) :**

Un neurone prenant :

- les trois valeur de couleur d'un pixel (entier entre 0 et 255).
- les trois valeur de couleur d'un pixel (réel  $[0, 1]$ ).
- une sequence ADN en entrée

Le vecteur entrée est noté  $X$  et chacun de ses element  $x_1 \dots x_i \dots x_n$ .

**La fonction interne :** Le réseau va donc faire un calcul à partir des entrées et de poids, des valeurs définies pour chaque neurones qui peuvent varier durant l'apprentissage.

Le vecteur poids se note  $W$  et chacun de ses elements  $w_1 \dots w_i \dots w_n$ .

**Exemple(s) :**

$$f(X) = W.X = \sum_{i=1}^n w_i \times x_i$$

$$f(X) = e^{w_1 + x_1} \times w_2$$

$$f(X) = \max(X)$$

$$f(X) = \text{"nombre de A sur les } w_1 \text{ premières bases de } x_1 \text{"}$$

(avec  $x_1$  une sequence ADN)

La fonction interne est noté  $f(X)$  (avec  $X$  le vecteur d'entrée).

**La fonction d'activation :** Comme vu précédemment, ces neurones sont mis en réseau, il est donc intéressant d'avoir une norme pour l'entrée et la sortie afin de pouvoir lier des neurones entre eux sans distinctions.

La norme qui a été choisie est, comme précédement cité, un réel entre 0 et 1.

Or, il peut être remarqué que les fonctions ci-dessus ne renvoient pas forcément des nombre entre 0 et 1...La fonction d'activation est utilisée pour normaliser les sorties.

#### Exemple(s) :

Pour le cas précédent sur l'ADN :  $f(X)/w_1$   
Pour une fonction dans  $\mathbb{R}$  : fonction sigmoïde  
Pour une fonction dans  $[0, 1]$  : fonction identité

La fonction d'activation est noté  $f_{act}$ .

**Pour resumer :** Un neurone prend *des entrées*, les passe dans sa *fonction principale*, puis le résultat dans la *fonction d'activation*.  
Formellement, l'équation suivante est obtenue :

$$f_{act}(f(X)) \quad (1)$$

Le tout dépendant bien évidemment du vecteur  $W$  qui varie afin de modifier la fonction du neurone.

#### Exemple(s) :

Prenons un neurone avec deux entrées :  $x_1$  et  $x_2$ ,  
de fonction principale  $f(X) = X.W$   
et de fonction d'activation identité.  
Si  $W = (1, 1)$ , ce neurone fait une somme.  
Mais si  $W = (0.5, 0.5)$  ce neurone fait une moyenne.

### 3.1.2 Un réseau

Une fois que nous avons de nombreux neurones faisant chacun des actions bien spécifiques, il pourrait être intéressant de les relier afin de gérer des comportements plus complexes comme faire une somme de moyenne (ou contrôler un drone, prédire les mouvements boursiers...).

Il suffit donc de relier les neurones entre eux, de manière générale de manière linéaire de gauche à droite. De nombreuses manières de relier les neurones existent (récurrent, convolution...), ici sera abordé en détail que de la connexion dite *Dense* ou *fully connected* : le réseau se découpe en  $n$  couches de neurones, chacune composée de neurones dont les entrées sont les sorties des neurones de la couche précédente.

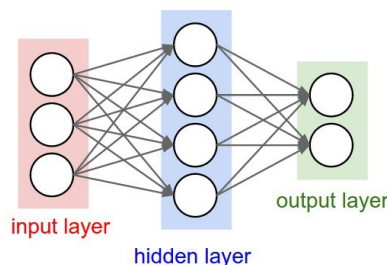


FIGURE 2 – Réseau dense simple

[techburst.io/experiment-finding-objects-with-a-neural-network-caa4cec7d2c4](https://techburst.io/experiment-finding-objects-with-a-neural-network-caa4cec7d2c4)

La FIGURE 2 représente un réseau fully connected : les neurones les plus à gauche sont les neurones d'entrée (capteurs) et ceux les plus à droite ceux de sortie (contrôle des moteurs, affichage d'une note...). Tous les autres neurones sont "cachés", ils n'interagissent pas directement avec l'environnement.

### 3.1.3 L'apprentissage

Jusqu'ici il a été abordé la création d'une architecture modulable permettant de générer une fonction à paramètres. Mais une question se pose toujours : Quel est l'intérêt ? Pourquoi ne pas directement écrire la fonction "en dur" ? La réponse tient en trois mots : *Descente de gradient stochastique* (ou SGD en anglais).

Ce concept est ce qui fait que les réseaux de neurones sont les architectures favorites des data scientists et des chercheurs en IA.

L'idée est assez simple, une fonction générale est cherchée à partir de certaines valeurs discrètes. Posons une fonction nommée "loss function" qui décrit la précision du réseau actuel : elle prend en entrée deux valeurs : la valeur théorique et la valeur obtenue. Elle retourne un réel positif, plus il est faible, plus le réseau est proche de la fonction théorique.

**Exemple(s) :**

$$\begin{aligned} \text{loss}(\text{exp}, \text{obt}) &= |\text{exp} - \text{obt}| \\ \text{loss}(\text{exp}, \text{obt}) &= (\text{exp} - \text{obt})^2 \end{aligned}$$

Le problème de régression se résume donc à minimiser la fonction de perte, c'est ici que la descente de gradient stochastique fait son entrée :

**Descente de gradient :** Pour minimiser loss, il serait bien de descendre sa pente, c'est à dire dériver suivant les différentes variables<sup>1</sup>, en déduire l'orientation de la pente et la descendre. Étant donné que de manière générale, il y a plusieurs variables, la dérivée se transforme en gradient. Des applications linéaires sont privilégiées dans les fonctions des neurones, afin de pouvoir calculer facilement les gradients.

**Stochastique :** Il a été expliqué d'où vient la descente de gradient, mais que veut dire stochastique ? Ce mot est synonyme de hasard. En effet le temps de calcul du gradient est exponentiel vu que chaque neurone est relié à  $n$  neurones, eux même reliés à  $n$  autres neurones...

Donc lorsque le réseau est grand (un réseau peut facilement atteindre le million de neurones voir même des milliards [4]) il est inimaginable de calculer la totalité du gradient (les calculs peuvent parfois dépasser plusieurs fois la durée de l'univers...), le gradient stochastique est donc utilisé pour rendre le calcul réalisable.

---

1. NB : Ici les variables suivant lesquelles la dérivée se fait sont les  $w_i$  (pas les  $x_i$ ).

Cette descente de gradient est bien plus rapide, il est donc possible de l'itérer de nombreuses fois pour tenter de minimiser la fonction de perte. L'espaces des solutions étant rarement idéal (rarement une "cuvette" mais constitué de "bosses" et de "trous" chaotiques) il n'est pas obligatoire d'arriver à atteindre le minimum global, mais au moins minimum local sera atteint. Avec plusieurs apprentissages il peut donc être approximé très efficacement quasiment toutes les fonctions.



### 3.2 Intégrales de Choquet

L'intégrale de Choquet est une intégrale découlant de la théorie de la mesure [5]. Ici modèle discret est utilisé.

Pour l'expliquer simplement, prenons un exemple : Supposons qu'une entreprise veuille conseiller des personnes sur l'achat d'ordinateurs. Ces personnes ne connaissent absolument rien en informatique. La seule chose qu'ils veulent est une note, plus elle est élevée, plus l'ordinateur est performant. Essayons de faire un algorithme assez simple pour résoudre ce problème : Chaque composant se voit attribué une note (en fonction de la puissance, la qualité de fabrication...), cette note est nommée *l'utilité* du composant. Une fois toutes les utilités étudiées, un poids est associé à chaque famille de composants (RAM, processeur, carte mère...). Enfin la somme des utilités fois poids pour tous les composant permet d'obtenir cette note.

De ce fait, si un ordinateur a de meilleurs composant ou plus de puissance, sa note sera supérieure.

Ce modèle paraît raisonnable dans la plupart des cas, mais il est permettra mauvais dans les cas extrêmes : Supposons qu'un constructeur peu scrupuleux propose un ordinateur assez étrange : Le processeur le moins cher du marché (assez mauvais) mais énormément de RAM, par exemple 128Go. Ce classement le placera forcément en haut de la liste, même si cet ordinateur est assez mauvais...

Il faudrait donc trouver un autre système modélisant les interactions entre les composants. Ce modèle est exactement celui sur lequel j'ai travaillé durant mon stage : *les intégrales de Choquet*. En plus de donner un poids aux utilités, un poids est donné aux interactions des utilités par le biais des fonctions min et max. Ces interactions peuvent être faites deux à deux, trois à trois voir à plus. Mais pour des raisons de temps de calcul, ces interactions se sont limitées à l'interaction simple (deux à deux) durant ce travail. En effet, la taille du calcul évolue exponentiellement avec les interactions.

Voici donc la fonction qui va être approximée :

$$C(X) = \sum_{i=1}^n w_i \times x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \left( w_{M\,ij} \times \max(x_i, x_j) + w_{m\,ij} \times \min(x_i, x_j) \right) \quad (2)$$

Avec  $X$  le vecteur des utilités et  $W$ ,  $W_m$  et  $W_M$  les vecteurs des poids.

## 4 Matériel et méthodes

Ce travail s'est déroulé en deux principales phases : Une étape de développement durant laquelle des données et la fonction à apprendre ont été générées. Et une étape plus appliquée durant laquelle une base de données réelle a été étudiée.

Afin d'implémenter informatiquement les concepts théoriques vu précédemment, il a été choisi d'utiliser la librairie Keras [6], une référence en python pour faire du machine learning. La partie sur les intégrales de Choquet a été entièrement recodée en python avec la librairie numpy [7] pour optimiser le temps de calcul. L'ensemble du code est disponible gratuitement et sous licence libre sur github [8].

### 4.1 Keras

La librairie Keras est une interface Python/TensorFlow [9] permettant de manipuler des réseaux de neurones. Ici, seul les fonctionnalités principales seront étudiées, à savoir création d'un réseau simple, régression par SGD et évaluation de performances.

Voici un exemple de réseau de neurone simple (FIGURE 3) qui va tenter d'apprendre l'application linéaire suivante :  $f(X) = W.X$ . Avec :

$X$  : le vecteur d'entrée tel que :  $\dim(X) = 2$ .

$W$  : le vecteur de poids tel que :  $w_1 = 0.2$  et  $w_2 = 0.8$ .

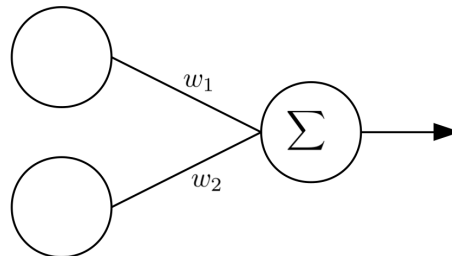


FIGURE 3 – Réseau simple

Avec  $w_1 = 0.2$  et  $w_2 = 0.8$ .

Pour créer ce réseau et lui faire apprendre la fonction précédemment citée, le code suivant est nécessaire :

```
1 # imports
2 from keras import Sequential, optimizers, layers
3 import numpy as np
4 from random import random
5
6 def f(X):
7     W = np.array([0.2, 0.8]) # La fonction que l'on cherche
8     return W @ X           # Le vecteur poids
9                             # Produit scalaire
10
11 act = "linear" # Fonction d'activation
12 n_input = 2    # Nombre de neurones
13 # generation des questions/reponses attendues
14 questions = np.array([np.array([random(), random()])
15                         for i in range(10000)])
```

```

15 reponses = np.array([f(q) for q in questions])
16
17 sgd = optimizers.SGD(lr=0.01, decay=1e-6, momentum=0.9, nesterov=
    True)
18 neurones = layers.Dense(1, activation=act, input_dim=n_input,
    use_bias=False)
19 model = Sequential()
20 model.add(neurones)
21 model.compile(optimizer=sgd,
22               loss="mean_squared_error")
23 model.fit(questions, reponses)
24
25 for i, weight in enumerate(model.get_weights()[0]):
26     # on affiche les poids
27     print(f"w{i} : {weight[0]}")

```

code/reseau1.py

En exécutant ce code une fois, le résultat suivant est obtenu :

```

1 w0 : 0.19988934695720673
2 w1 : 0.8001111745834351

```

Comme il peut être remarqué ci-dessus, les résultats obtenus sont proches de ceux attendus (0.2 et 0.8). La syntaxe de la librairie keras est cependant assez lourde. Une librairie a donc été codée pour simplifier son utilisation. Elle pourra être appelée avec de nombreux paramètres qui seront abordés dans les parties suivantes.

Pour tester la robustesse de cet apprentissage, une fonction avec perturbations a été étudiée : Une fonction simple a été générée comme précédemment, il y a été ajouté une perturbation aléatoire équiprobable. L'erreur d'apprentissage en fonction de cette valeur a donc été étudiée.

**Un problème se pose :** Prenons l'équation (2) avec, par exemple, un vecteur de taille 2 :

$$C_n(X) = \sum_{i=1}^n w_i \times x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \left( w_{Mij} \times \max(x_i, x_j) + w_{mij} \times \min(x_i, x_j) \right)$$

$$C_2(X) = w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + w_M \cdot \max(x_1, x_2) + w_m \cdot \min(x_1, x_2)$$

Étant donné que les données d'apprentissage sont des réels aléatoires indépendants entre 0 et 1 :

$$P(x_1 > x_2) = P(x_1 < x_2) = \frac{1}{2} \quad (3)$$

Donc :

$$C_2(X) = w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + w_M \cdot \max(x_1, x_2) + w_m \cdot \min(x_1, x_2)$$

$$\mathbb{E}(C_2(X)) = w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + w_M \cdot \frac{x_1 + x_2}{2} + w_m \cdot \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Et donc :

$$\mathbb{E}(C_2(X)) = x_1 \times \left( w_1 + \frac{w_m + w_M}{2} \right) + x_2 \times \left( w_2 + \frac{w_m + w_M}{2} \right) \quad (4)$$

Le réseau va donc tenter d'atteindre les valeurs solutions de l'équation (4) sans garantir l'exactitude des coefficients.

#### Exemple(s) :

Les deux quadruplés de valeurs suivantes vont genrer ce problème :

Les bonne valeurs : (0.5, 0.25, 0.1, 0.15)

D'autres valeurs : (0.28, 0.2, 0.33, 0.37)

Si l'équation (4) est appliquée sur cet exemple, le résultat suivant est obtenu :

Vecteur	$w_1 + \frac{w_m + w_M}{2}$	$w_2 + \frac{w_m + w_M}{2}$
(0.5, 0.25, 0.1, 0.15)	62.5	37.5
(0.28, 0.2, 0.33, 0.37)	63	37

TABLE 1 – Valeurs retournées par les réseaux

Les résultats du tableau précédent sont similaires : en moyenne, le réseau ne les différenciera pas. Il va donc apprendre a de mauvaises valeurs, car en moyenne, le réseau à meilleurs résultats qu'avec des poids aléatoires. C'est un minimum local de la fonction de perte.

Pour résoudre ce problème, il faut ne pas satisfaire l'équation (3) pour supprimer l'équation (4) et donc tirer un learning set statistiquement différent du testing set. De ce fait, si le réseau apprend ces mauvais poids, il sera instantanément pénalisé par le testing set.

Dans l'optique de minimiser le temps de calcul, différentes fonctions de pertes ont été testées et comparées (moindres carrés et erreur absolue). Il a été étudié la variation de la precision du réseau en fonction des différentes fonctions de perte, de si les données était triées et de la taille de la base de données.

## 4.2 Implementation d'un réseau de Choquet

Nous appellerons ici *réseau de Choquet* un réseau de neurones ayant une architecture adaptée à la régression d'une intégrale de Choquet. Comme vu précédemment (3.2), une fonction de Choquet a une architecture complexe. Voici l'intégrale de Choquet entièrement développée pour un vecteur d'entrée taille 3 :

$$\begin{aligned} C = & w_1 \times x_1 + w_2 \times x_2 + w_3 \times x_3 \\ & + w_{m1} \times \min(x_1, x_2) + w_{m2} \times \min(x_1, x_3) + w_{m3} \times \min(x_2, x_3) \\ & + w_{M1} \times \max(x_1, x_2) + w_{M2} \times \max(x_1, x_3) + w_{M3} \times \max(x_2, x_3) \end{aligned}$$

Voici l'architecture d'un réseau de Choquet entièrement générée par un réseau de neurones :

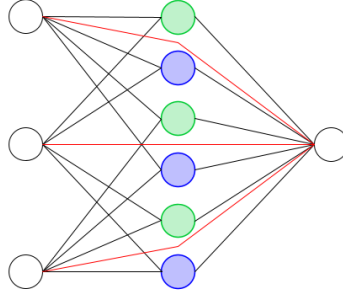


FIGURE 4 – Architecture d'un réseau de Choquet

*En bleu, des neurone de fonction principale  $\min(X)$ .  
En vert, des neurone de fonction principale  $\max(X)$ .*

Ici, trois problèmes non triviaux se posent (*cf.* 3.1) :

- Les neurones collorées n'appliquent pas une simple application linéaire.
- Les neurones ne sont pas reliés en mode Dense mais en convolution.
- Certains neurones passent des informations en sautant une couche de neurones.

**Une autre piste à donc été envisagée :** Créer un réseau simple comme dans la figure 5. Dans ce réseau, aucuns neurone n'a de fonction complexe : ceux de gauche sont les entrées et celui de droite fait le produit scalaire avec un vecteur poids.



FIGURE 5 – Réseau alternatif

Ce réseau est bien plus simple à générer : c'est un réseau *Dense* de taille 9 en entrée. Et plus généralement  $n^2$  pour un vecteur de taille  $n$ .

**Démonstration :**

Prenons un vecteur de taille  $n$ , Le but est d'énumérer le nombre de neurones utiles à l'équation (2). Le résultat est le suivant :

$$n + \binom{n}{2} + \binom{n}{2} = n + 2 \times \frac{n(n-1)}{2} = n^2 \quad (5)$$

Il faut donc créer un vecteur d'entrée à partir d'une base de données d'apprentissage. Cela se fait simplement en concaténant le vecteur  $X$  avec les éléments pris deux à deux passés dans les fonctions min et max.

Lors de la descente de gradient, le réseau traite les poids indifféremment, pour récupérer les poids de l'équation (2) il suffit de prendre les  $n$  premiers pour  $W$ , les  $\frac{n(n-1)}{2}$  suivants pour  $W_m$  et les  $\frac{n(n-1)}{2}$  derniers pour  $W_M$ .

### 4.3 Données réelles

Une base de données disponible en ligne sur KAGGLE a aussi été étudiée [10]. La base de données traite des prix de maisons vendues entre 2014 et 2015 dans le King Country, WA, USA.

Pour rechercher les fonctions d'utilités, une liste de fonctions possible a été dressée :

- Polynomes de degrés allant de 1 à 3
- Exponentiel
- Logarithme
- Hyperbolique
- Racine
- Sigmoïde
- Gaussienne

Une fois toutes ces fonctions codées, chaque plage de données a essayé d'être régressée grâce à celles-ci. La fonction obtenant le meilleur  $R^2$  a été conservée si celui-ci était supérieur à 0.3 afin de retirer les données n'agissant pas sur le prix.

En utilisant les fonctions d'utilités trouvées précédemment, un réseau de Choquet a été créé puis entraîné sur cette base de données. L'entraînement est cependant long, environ 8h sur cluster de calcul du LRI. Ce temps a pu être réduit grâce à de l'optimisation et de la programmation parallèle.

## 5 Résultats et discussion

### 5.1 Moyenne :

Il a été demandé au réseau de régresser une fonction moyenne à deux dimensions : Les poids qui sont censés être obtenus sont les suivants :

$$m(X) = \frac{x_1 + x_2}{2} = 0.5 \times x_1 + 0.5 \times x_2 \quad (6)$$

Le graphique à trois dimensions des valeurs attendues (gauche) et obtenues (droite) est le suivant :

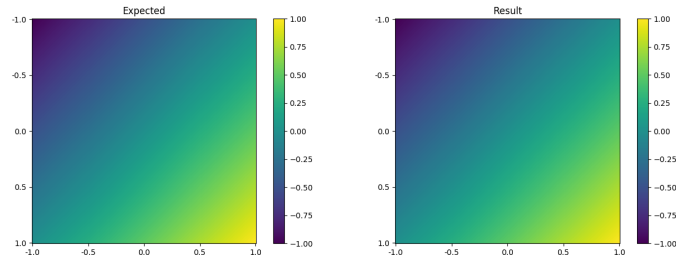


FIGURE 6 – Apprentissage de la moyenne

*Les axes  $x$  et  $y$  correspondent respectivement à  $x_1$  et  $x_2$ . La valeur en tout point de la fonction est représentée par un gradient de couleur dont l'échelle est sur la droite du graphique.*

Aucune différence n'est visible, en effet les poids associés aux deux noeuds sont les suivants :

$$w_1 = 0.50000010 \quad w_2 = 0.50000024$$

Aux approximations processeur, les poids sont les mêmes que dans (6).

#### 5.1.1 Étude de l'apprentissage :

Théoriquement, l'écart type de l'erreur d'apprentissage devrait diminuer quand la taille de la base de données augmente. Pour tester cette hypothèse, des graphiques ont été générés avec différentes tailles de base de données :

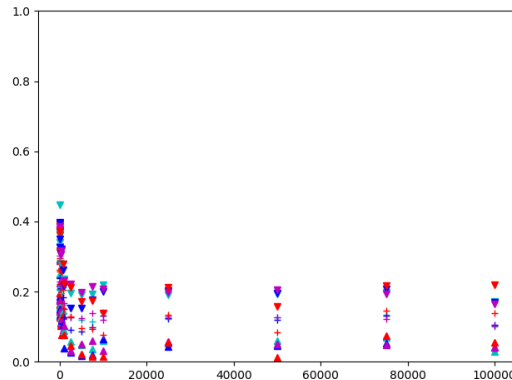


FIGURE 7 – Écart type de l'apprentissage en fonction de la taille de la base de données



Ici, l'erreur d'apprentissage s'amointrit avec l'augmentation de la taille de la base de données. Cette évolution s'arête vers les 1000 données, dépassé ce cap, l'écart type stagne.

Un graphique a taille de base de données fixée de l'écart type de l'apprentissage en fonction du nombre d'apprentissages réalisés par le réseau. Cette technique permet de ne pas stagner dans un minimum local.

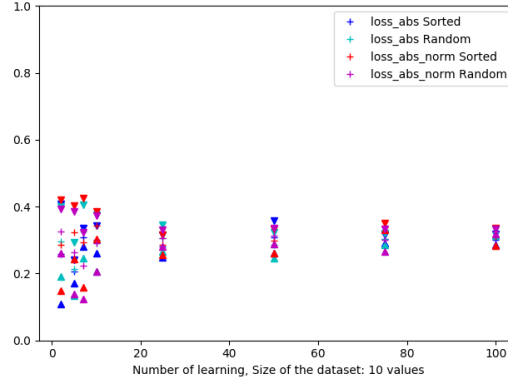


FIGURE 8 – écart type de l'apprentissage moyen en fonction du nombre d'apprentissages

Ici, contrairement à la FIGURE 7, la moyenne ne varie pas significativement mais l'écart type diminue drastiquement. Ce paramètre combiné au précédent permettra d'augmenter la précision du réseau dans la partie 5.3.

## 5.2 Étude de la résistance aux perturbations

Le réseau essaye de régresser une fonction toute simple :

$$\frac{1}{3} \times x + \frac{2}{3} \times y \quad (7)$$

Ici, les poids  $1/3$  et  $2/3$  ont été choisis pour casser la symétrie. Une perturbation random équiprobable entre  $-err$  et  $err$  est ajouté aux données. Voici un graphique de l'erreur de l'apprentissage en fonction de cette erreur (allant de 0 à  $\pm$  le maximum de la fonction) :

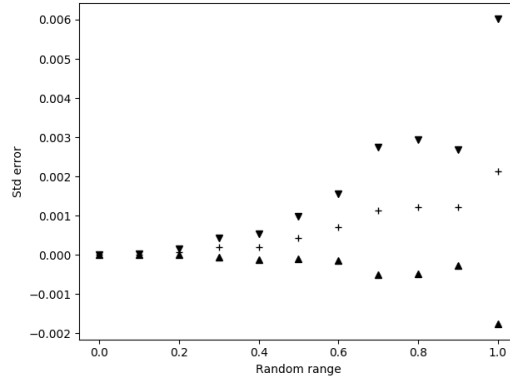


FIGURE 9 – Variation d'apprentissage en fonction de la perturbation

Même si l'erreur moyenne augmente exponentiellement avec la perturbation, elle reste extrêmement faible  $R^2 > 0.99$ .

Cet exemple illustre très bien l'extrême robustesse des réseaux de neurones aux perturbations. Ce réseau n'aura donc pas trop de mal à apprendre sur des données réelles (souvent très ébruitées).

### 5.3 Base de données réelle

Les données ont été passées dans un réseau de neurones sans traitement spécifique. Voici le résultat de l'apprentissage :

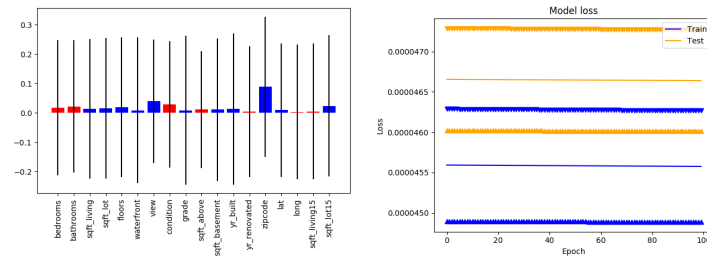


FIGURE 10 – Apprentissage sur les données réelles

L'apprentissage est ici totalement cahotique. Ce résultat était attendu étant donné que les fonctions d'utilité n'ont pas été calculées et que le prix d'une maison n'est pas un calcul simple. Ici, il est impossible de calculer le prix avec un simple  $Surface \times Prix/m^3$ .

Les fonctions d'utilités ont donc été calculées. Voici le résultat :

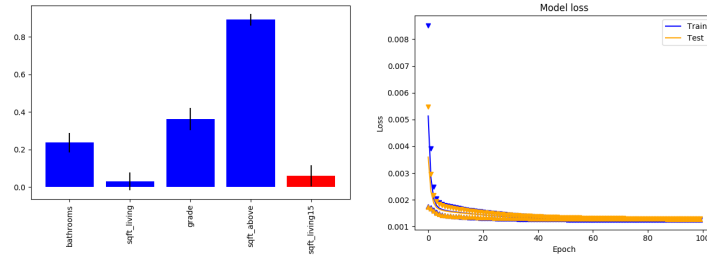


FIGURE 11 – Apprentissage sur les données réelles

Il peut être remarqué que l'apprentissage est bien plus précis. En effet, l'espace des poids étant bien plus restreint, le réseau explore cet espace bien plus rapidement.

Les résultats sont donc passés dans un réseau de Choquet afin d'en calculer tout ces coefficients :

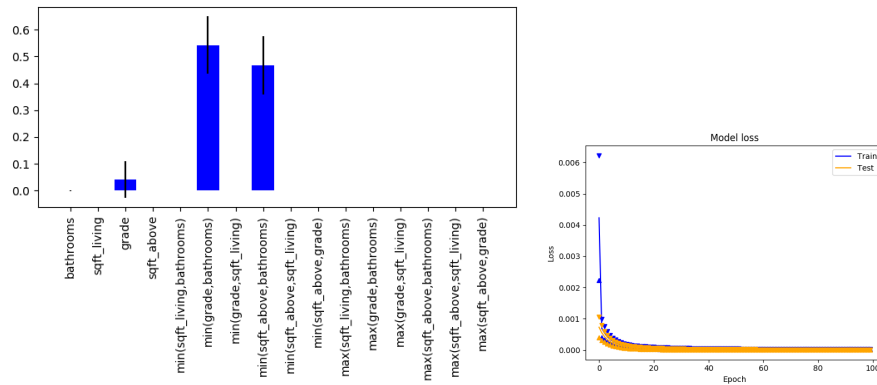


FIGURE 12 – Apprentissage avec le réseau de Choquet

En observant la FIGURE 12, il est visible que seul deux paramètres ont des valeurs significativement différentes de 0. Ces paramètres sont les suivants :

min(note, nombre de salles de bains) : La note est un indicateur donné par l'état sur le niveau de la maison.

Et les maisons ayant beaucoup de salles de bains sont plus chères dans cette base de données.

min(superficie, nombre de salles de bains) : La taille de la maison est donc prise en compte, mais ce n'est pas le facteur déterminant pour donner un prix à une maison.

## 6 Conclusion

Il faut cependant nuancer les résultats obtenus dans la partie 5.3. En effet, il se peut que cette base de données soit biaisée, il n'est donc pas possible de tirer des conclusions générales à partir de ce cas particulier. De plus, toutes les fonctions d'utilités n'ont pas été obtenues. Il est possible que certaines fonctions qui ne sont pas présentes dans 4.3 soient d'excellentes fonctions d'utilités.

### Développement personnel :

Ce stage m'a appris de nombreuses choses sur le monde de la recherche tel que la manipulation de modèles mathématiques théoriques et leurs applications en informatique fondamentale.

J'ai aussi pu implémenter mon premier réseau de neurones. J'avais déjà des connaissances théoriques mais je n'avais jamais eu l'occasion de manipuler ce genre d'objets.

L'utilisation scientifique de python a aussi été une part très importante de mon stage. Des problématiques qui n'avaient jamais été abordées en cours tel que l'optimisation ce sont posées. Les échanges avec les autres stagiaires/thésards ont été très instructifs (découverte de nouvelles librairies, bonnes méthodes à adopter. . . ). J'ai aussi eut l'opportunité d'utiliser un cluster de calcul du LRI.

Enfin, durant ce stage, j'ai pu échanger avec des universitaires et des enseignants chercheurs sur ma poursuite d'études. J'ai par exemple pu découvrir les doctorats CIFRE [11] : Ce sont des doctorats en partenariat avec une entreprise c'est donc l'une des meilleures orientations pour faire de la recherche développement au sein d'une entreprise.

## Références

- [1] “Laboratoire de recherche en informatique.” [www.lri.fr](http://www.lri.fr).
- [2] “House sales in king county, USA.” [kaggle.com/harlfoxem/housesalesprediction](https://kaggle.com/harlfoxem/housesalesprediction).
- [3] “Science4all.” [www.youtube.com/playlist?list=PLtzmb84AoqRTl0m1b82gVLcGU38miqdrC](https://www.youtube.com/playlist?list=PLtzmb84AoqRTl0m1b82gVLcGU38miqdrC).
- [4] “Spectrum ieee.” [spectrum.ieee.org/tech-talk/computing/software/biggest-neural-network-ever-pushes-ai-deep-learning](https://spectrum.ieee.org/tech-talk/computing/software/biggest-neural-network-ever-pushes-ai-deep-learning).
- [5] A. Fallah Tehrani, C. Labreuche, and E. Hüllermeier, “Choquistic utilitarianistic regression,” 11 2014.
- [6] “KERAS : The python deep learning library.” <https://keras.io/>.
- [7] “NUMPY.” [www.numpy.org](http://www.numpy.org).
- [8] “GITHUB.” [github.com/QuentinN42/Stage\\_LRI](https://github.com/QuentinN42/Stage_LRI).
- [9] “Tensorflow.” [tensorflow.org](https://tensorflow.org).
- [10] “KAGGLE.” [kaggle.com](https://kaggle.com).
- [11] “CIFRE : faire son doctorat en entreprise.” [orientation-education.com/article/cifre-doctorat-entreprise](https://orientation-education.com/article/cifre-doctorat-entreprise).