Projeto 1 – Equações Analíticas e Resultado Numérico

Perfil de Poiseuille

2025.1 : Tópicos especiais de mecânica dos fluidos

Professora : RAQUEL JAHARA LOBOSCO

Aluno : Quentin Devorsine

Politécnica UFRJ

1. Introdução

O objetivo do projeto é de comparar as soluções analíticas com os resultados obtidos por métodos numéricos aplicados a problemas clássicos da Mecânica dos Fluidos. O problema escolhido é o perfil de Poiseuille. Primeiramente indicaremos com o desenvolvimento a solução analítica do problema, com todos os passos matemáticos devidamente apresentados. Seguido da implementação duma solução numérica utilizando OpenFoam e da comparação dos resultados analíticos com os resultados numéricos, analisando a convergência, o erro relativo e possíveis fontes de discrepância.

Sumário

1. Solução analítica

O perfil de Poiseuille representa o perfil de velocidade dum escoamento dum fluido num tubo, sua solução é :

$$u(r) = 2.u_m.\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

Com :

- $u(r)$: A velocidade em $\vec{x}$
- u_m : A velocidade media em $\vec{x}$
- r : A distancia ao eixo do tubo
- R : O raio do tubo

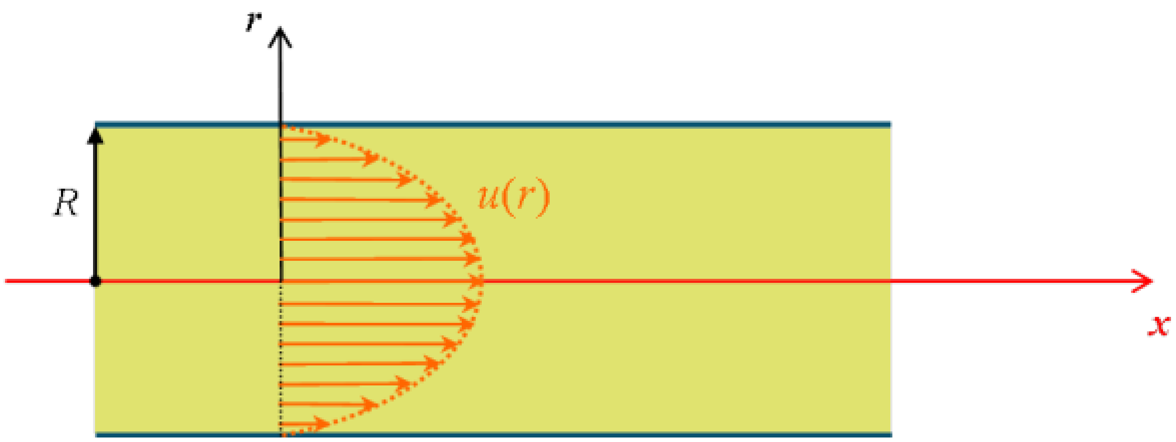

Figura 1 : escoamento de Poiseuille

Essa solução funciona com algumas condições :

- Em regime permanente.
- O escoamento é laminar e é hidrodinamicamente desenvolvido.
- O fluido tem propriedades constante.
- As forças de campo são desprezíveis.
- A condição de contorno : velocidade nula nas paredes

Vamos partir das equações do momentum :

Em $\vec{x}$: $\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = Fx - \frac{dP}{dx} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$ (1a)

Em $\vec{r}$: $\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial r}\right) = Fr - \frac{dP}{dr} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)$ (1b)

As forças de campo são desprezíveis então $Fr = Fx = 0$

O escoamento é laminar e é hidrodinamicamente desenvolvido então $\begin{cases} v = 0 \\ u \equiv u(r) \end{cases}$

(1b) : $\frac{\partial p}{\partial r} = 0$ (2)

(1a) : $-\frac{dP}{dx} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{dP}{dx} + \mu\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0\ (3a) \\ u(r = R) = 0\ (3b) \end{cases}$

Balanço de forças em $\vec{x}$, em um elemento do de comprimento dx do cilindro :

$P(x)\frac{\pi D^2}{4} = P(x + dx)\frac{\pi D^2}{4} - \tau_\omega \pi D dx$ (4)

Com : $P(x + dx) = P(x) + \frac{dP}{dx}dx$ (5) e $\tau_\omega = -\mu\frac{\partial u}{\partial r}_{r=R}$ (6)

(5) e (6) em (4) $\Leftrightarrow \frac{dP}{dx} = \frac{4\mu}{D}\frac{\partial u}{\partial r}_{r=R}$ (7)

Como o escoamento é hidrodinamicamente desenvolvido, $\frac{dP}{dx} = constante$ (8).

Integrando (3a) com (8) :

$\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{dP}{dx}\frac{r^2}{2\mu} + C1 \Leftrightarrow u(r) = \frac{1}{\mu}\frac{dP}{dx}\frac{r^2}{4} + C1\ln r + C2$ (9)

Para a solução ser limitada em $r = 0$, $C1 = 0$ e com a equação (3b), deduzimos C2 :

$C2 = -\frac{1}{\mu}\frac{dP}{dx}\frac{R^2}{4}$ (10) então $u(r) = \frac{1}{4\mu}\frac{dP}{dx}(r^2 - R^2)$ (11)

Definindo a velocidade media como :

$u_m = \frac{1}{\pi R^2}\int_{r=0}^{R} u(r) 2\pi r dr$ (12) e usando (11) : $u_m = -\frac{1}{8\mu}R^2\frac{dP}{dx}$ (12)

Então : $\frac{dP}{dx} = -\frac{8\mu u_m}{R^2}$ (13)

Usando (13) em (11) :

$$u(r) = 2.u_m.\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

2. Simulação Openfoam

Vamos usar o solver simpleFoam, porque é um bom solver para problemas em regime permanente, com fluidos incompressíveis.

Como nosso problema tem uma simetria axial, podemos simplificar a geometria trabalhando sobre só no plano $(\vec{x}, \vec{r})$. Assim fazemos uma simulação em 2D.

Para ter um escoamento laminar e hidrodinamicamente desenvolvido, é precisado ter :

$$\begin{cases} R_e = \dfrac{Du_m}{\nu} < 2300 \\ L > 0.05 R_e D \end{cases}$$

Vamos considerar um escoamento de agua ($\nu = 10^{-6}\, m^2/s$) com uma velocidade de 0.05 m/s, um diâmetro de 20 cm :

$$R_e = \frac{0.02 * 0.05}{10^{-6}} = 1000$$

$$L > 0.05 * 1000 * 0.02 = 1m$$

Vamos simular com um comprimento de L = 1.5m.

O blockmesh no paraview :

Figura 2 : O blockmesh no paraview

3. Resultados

Usando um plotoverline no final do modelo (x=1.5m), podemos observar o perfil de velocidade ao longo do raio :

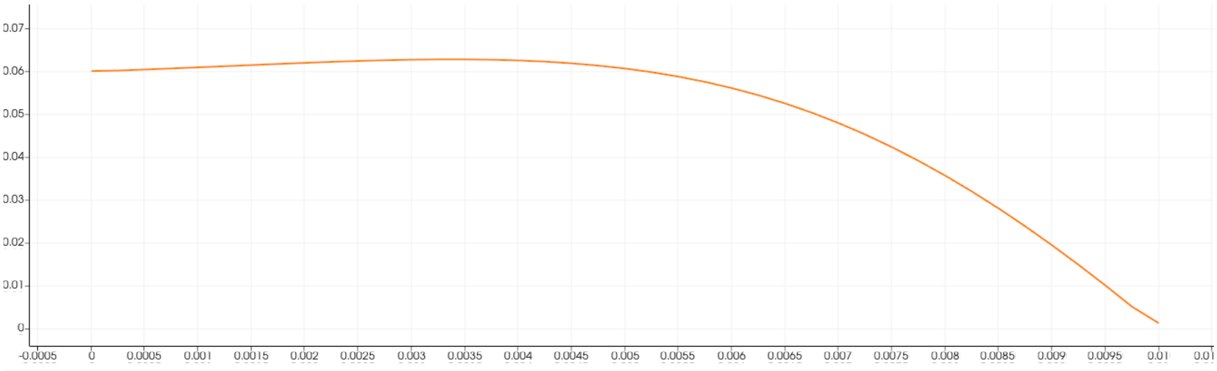

Figura 3 : perfil de velocidade ao longo do raio

O perfil de velocidade não parece a solução analítica.

Vamos exportar os dados em CSV para comparar eles com a solução analítica com um programo python.

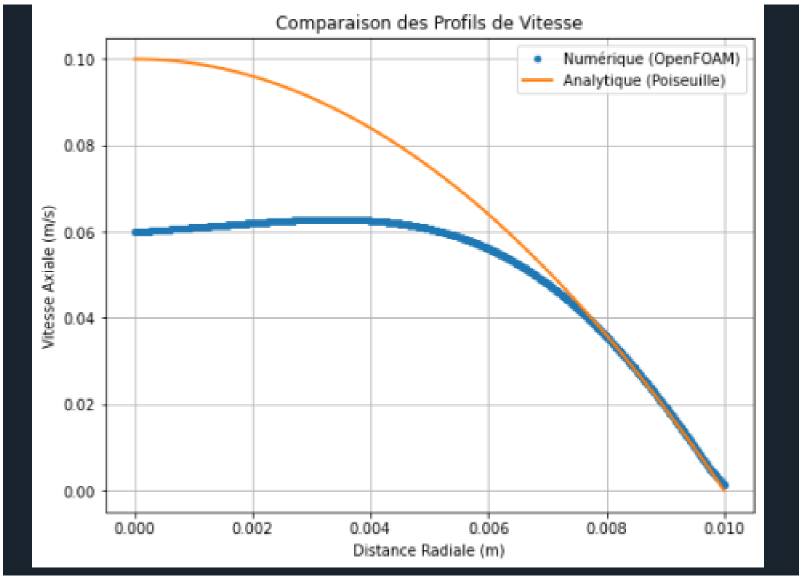

Figura 4 : comparação entre o perfil analítico e o perfil da simulação

Calculamos também a velocidade media da nossa simulação e o erro relativo :

```
velocidade media da simulaçao :  0.04996373936063936
erro relativo :  0.07252127872128811 %
```

Podemos ver que o perfil de velocidade é muito diferente mas a velocidade media é quase igual.

4. Conclusão

Pudemos observar resultados bem diferentes entre a solução analítica e a simulação. Não sei porque deu esse resultado mas parece que o escoamento começa a ficar turbulento com a velocidade que baixa no centro do duto. Mas é estranho porque calculamos o Reynolds bem inferior à limite de 2300. Então talvez pode ser um erro no pré-processamento.