Université de Reims Champagne Ardenne
UFR Sciences Exactes et Naturelles

Année universitaire **2019-20**
L1 mathématiques informatique

MA0102 Outils mathématiques II
Durée : 1 h 30 mn

Documents, portables, calculatrices interdits.
Les exercices peuvent être traités dans l'ordre qui vous convient. Il est possible d'admettre le résultat d'une question avant de passer à la suivante.
Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Questions de cours

1. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E non vide. Rappeler la définition de : "$\mathcal{R}$ est réflexive".
2. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E non vide.
   (a) Soit x un élément de E. Donner la définition de la classe d'équivalence de x, notée $\bar{x}$ ou $\mathrm{Cl}_{\mathcal{R}}(x)$.
   (b) Donner la définition de l'ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$.
3. Donner la définition d'une matrice inversible.

Exercice 1 Relations

Dans cet exercice on considère l'ensemble $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ (ensemble des couples d'entiers relatifs (a, b) tels que b soit non nul).

1. Soit la relation $\sim$ sur l'ensemble E définie par

$$\forall(\ (a,b),(a',b')\ ) \in E^2, \quad (a,b) \ \sim \ (a',b') \quad \text{si} \quad ab' = a'b.$$

   (a) Montrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence.
   (b) Donner la classe d'équivalence du couple $(1, 5)$.
2. Soit la relation $\mathcal{R}$ sur l'ensemble E définie par

$$\forall(\ (a,b),(a',b')\ ) \in E^2, \quad (a,b) \ \mathcal{R} \ (a',b') \quad \text{si} \quad ab' = -a'b.$$

   La relation $\mathcal{R}$ est-elle une relation d'équivalence ? Justifier.

Exercice 2 On note A, B, C les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Le produit matriciel CB est-il défini ? Et le produit matriciel AB ? Justifier.
2. Calculer la somme $2B + I_3$, où I_3 est la matrice identité de dimension 3.
3. Calculer les produits AC et CA
4. Calculer B^2.

Exercice 3

1. En justifiant, donner le nombre de solutions des systèmes suivants, et dire s'ils sont de Cramer, impossibles ou indéterminés. **On ne demande pas de calculer la ou les solutions, s'il en existe.**

$$S_1 : \left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & -z & = & 1 \\ & 2y & +z & = & 6 \\ & & 3z & = & -27 \end{array}\right. \quad S_2 : \left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & -z & = & 1 \\ & 2y & +z & = & 12 \end{array}\right. \quad S_3 : \left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & -z & = & 5 \\ & 2y & +z & = & 15 \\ & -4y & -2z & = & 0 \end{array}\right.$$

2. Soient a, b, c des réels. Résoudre le système suivant :

$$S : \left\{\begin{array}{rrrcl} x & +2y & +3z & = & a \\ & y & +z & = & b \\ 2x & -y & & = & c \end{array}\right.$$

3. En déduire que la matrice P suivante est inversible et préciser son inverse P^{-1}

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. En effectuant un produit matriciel, vérifier que le résultat obtenu pour P^{-1} est correct.

Exercice 4 On considère les deux fonctions suivantes :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & 2n \end{array} \qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} \frac{n}{2} \text{ si } n \text{ est pair,} \\ 0 \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases} \end{array}$$

1. Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$.
2. g est-elle injective, surjective et/ou bijective ?

Pour nous : la matrice du dernier exo

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et son inverse

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -2 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$