Cours:

1) $$\boxed{S_n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ \text{ou} \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}}$$

2) $\boxed{(P \Rightarrow Q) \longmapsto (\neg P \text{ ou } Q)}$

P	Q	P ⇒ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ex 1

1) • a existe ssi $\begin{cases} e^x + 1 \neq 0 \text{ ssi } e^x \neq -1 \\ 1 + \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} \neq 0 \text{ ssi } \dfrac{e^x + 1 + e^x - 1}{e^x + 1} \neq 0 \text{ ssi } \dfrac{2e^x}{e^x+1} \neq 0 \end{cases}$

qui est toujours vrai car $e^x > 0$; donc $\boxed{\mathcal{D}_a = \mathbb{R}}$

• $$a = \frac{e^x(e^{2x}+e^x)}{1 + \frac{e^x - 1}{e^x+1}} = \frac{e^x(e^{2x}+e^x)}{\frac{2e^x}{e^x+1}} = \frac{e^x(e^{2x}+e^x)(e^x+1)}{2e^x}$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^x(e^x+1)\right)(e^x+1) = \boxed{\frac{1}{2} e^x (e^x+1)^2}$$

2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $$f'(x) = \frac{e^x(e^{3x}+3e^x) - (e^x-1)(3e^{3x}+3e^x)}{(e^{3x}+3e^x)^2}$$

$$= \frac{e^{4x} + 3e^{2x} - (3e^{4x} + 3e^{2x} - 3e^{3x} - 3e^x)}{(e^{3x}+3e^x)^2}$$

$$= \frac{-2e^{4x} + 3e^{3x} + 3e^x}{e^{2x}(e^{2x}+3)^2} = \boxed{\frac{-2e^{3x} + 3e^{2x} + 3}{e^x(e^{2x}+3)^2}}$$

3) i) $\begin{cases} \boxed{\mathcal{D}_a = \mathbb{R}} \\ a(x) = (|x|^2 + 4|x| + 4) - 4|x| = |x|^2 + 4 = \boxed{x^2+4} \end{cases}$

ii) $\begin{cases} \boxed{\mathcal{D}_b = \mathbb{R}^*} \\ b(x) = \sqrt{x^2}\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \boxed{\sqrt{x^2+1}} \end{cases}$

4) $$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{j=3}^{n+2} \frac{1}{j}$$

$(j = k+2)$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} = \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$$

$$\boxed{S_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}}$$

5) i) $P_1 = \frac{7!}{5!} \times \frac{1}{3!} = 7 \times 6 \times \frac{1}{6} = \boxed{7}$.

ii) $P_2 = \frac{n!}{(n-1)!} \times \frac{(n+2)!}{(n+1)!} = \boxed{n \times (n+2)}$.

iii) $$P'_n = \frac{\prod_{k=1}^{n} k \cdot \prod_{k=1}^{n} (k+2)}{\prod_{k=1}^{n} (k+1)^2} = \frac{\prod_{k=1}^{n} k \cdot \prod_{j=3}^{n+2} j}{\prod_{\ell=2}^{n+1} \ell} \qquad \left(\begin{array}{l} j = k+2 \\ \ell = k+1 \end{array}\right)$$

$$= \frac{\prod_{k=1}^{n} k}{\prod_{k=2}^{n+1} k} \times \frac{\prod_{k=3}^{n+2} k}{\prod_{k=2}^{n+1} k} = \frac{1}{n+1} \times \frac{n+2}{2} = \boxed{\frac{n+2}{2(n+1)}}$$

Ex 2

1) a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in]0,+\infty[,\ x = \ln y$

Négation : $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in]0,+\infty[,\ x \neq \ln y$

b) $\forall z \in \mathbb{C},\ z^2 \in \mathbb{C}$

Négation : $\exists z \in \mathbb{C},\ z^2 \notin \mathbb{C}$

2) (a) est vraie car $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin x \in \mathbb{R}$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin x > 0$ ou $\sin x \leqslant 0$

(b) est fausse car $\neg(b)$ est vraie.

En effet : $\neg(b) \longmapsto \left[(\exists x \in \mathbb{R}, \sin x \leqslant 0) \text{ et } (\exists x' \in \mathbb{R}, \sin x' > 0)\right]$

Il suffit de choisir $x = 0$ et $x' = \pi/2$ pour justifier que $\neg(b)$ est vraie

Donc $\boxed{\text{(a) et (b) ne sont pas équivalentes}}$

3)

a)

P	Q	R	$P\wedge Q$	$P \Rightarrow R$	(a)	$P\vee Q$	$R\wedge(P\vee Q)$	(b)
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	V	V	F	F
V	F	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V	F	F
F	F	V	F	V	V	F	F	V
F	F	F	F	V	V	F	F	F

Ex3

1) a) Soit $\varepsilon > 0$.

Choisissons $\eta = 1 > 0$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$

(H) Supposons que $|x-y| < \eta$

(D) Alors $|f(x) - f(y)| = |c-c| = 0 < \varepsilon$

(C) $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

b) $\boxed{\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ |x-y| < \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon}$

2) . $\boxed{\neg P \longmapsto \left[\exists (a,b,c) \in \mathbb{C}^3, \ (a+b+c)^2 \neq a^2+b^2+c^2\right]}$

- $\neg P$ est vraie ; il suffit de choisir par exemple $a = b = c = 1$ car $\begin{cases} (a+b+c)^2 = 9 \\ a^2+b^2+c^2 = 3 \end{cases}$ et donc

$(a+b+c)^2 \neq a^2+b^2+c^2$