Année universitaire 2020-2021

Licence $1^{\text{ère}}$ année - Mention MI - Ma0102

UNIVERSITÉ DE REIMS CHAMPAGNE-ARDENNE

Chapitre 4
Applications - Injections - Surjections - Bijections

Liste des paragraphes

I - Définitions et exemples

Définition 1 :

1/ Une application f est la donnée de deux ensembles E et F non vides et une façon d'associer à chaque élément $x \in E$ un unique élément $y \in F$, noté $f(x)$.

On dit alors que f est une ***application de E vers F*** et on la note :

$$f\ : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \qquad \text{ou bien} \qquad f : E \longrightarrow F,\ x \longmapsto f(x)$$

On peut également la noter plus simplement : $f : E \longrightarrow F$ ou bien encore $E \xrightarrow{\ f\ } F$

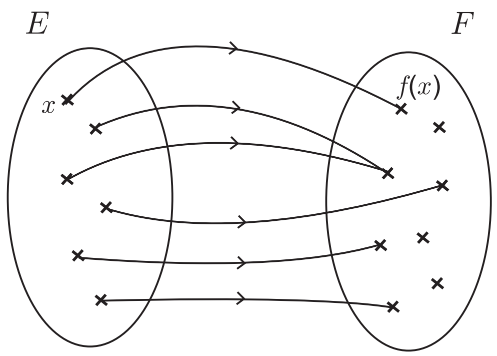
2/ E s'appelle l'***ensemble de départ de f*** , F l'***ensemble d'arrivée de f***.

3/ Pour tout $x \in E$, $f(x)$ s'appelle l'***image de x par f***.

4/ Pour $y \in F$, on appelle ***antécédent de y par f***, tout élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

5/ On appelle ***image de f*** (noté $\mathrm{Im}f$) l'ensemble défini par : $\mathrm{Im}f = \big\{f(x) \mid x \in E\big\}$

Représentation sagittale :



Remarques :

1/ $\mathrm{Im}f \subset F$ et $\mathrm{Im}f \neq \emptyset$

2/ On a : $\forall y \in F,\ \Big[y \in \mathrm{Im}f \iff \Big(\exists x \in E,\ f(x) = y\Big)\Big]$

Exemples 1 :

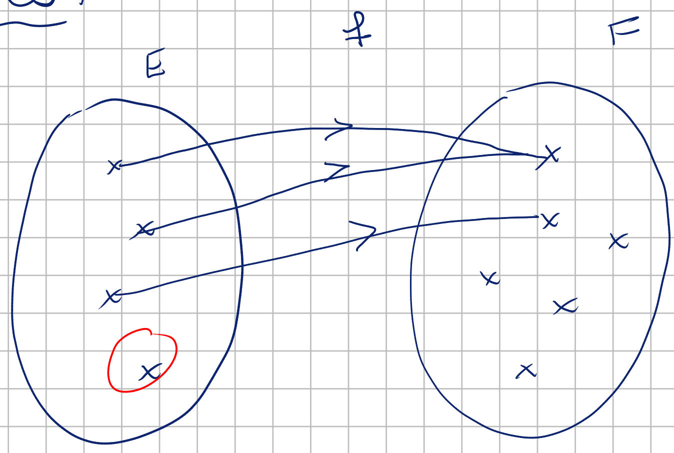
1/ Soit E un ensemble non vide et A une partie de E. Alors :

$$\varphi\ : \begin{array}{rcl} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ X & \longmapsto & X \cap A \end{array}$$

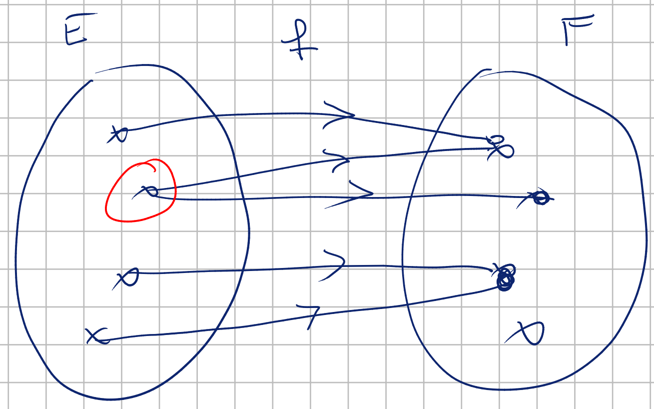
est une application. On a $\mathrm{Im}\varphi = \mathscr{P}(A)$

2/ $\sin\ : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$ est une application et $\mathrm{Im}(\sin) = [-1, 1]$.

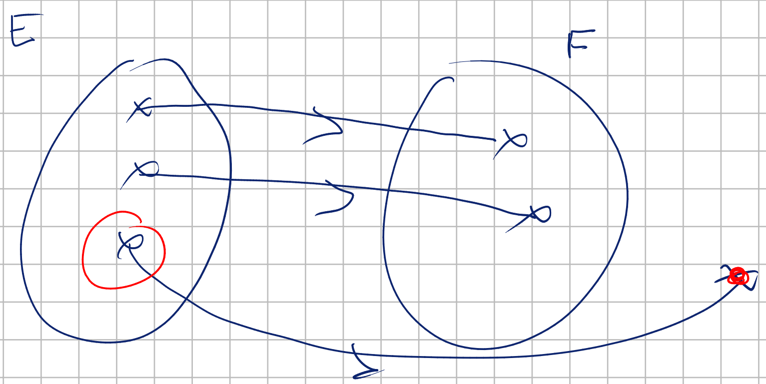
Exemples :



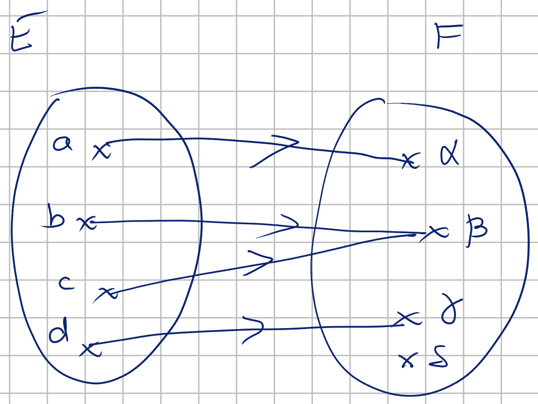
f n'est pas une application



f n'est pas une application



f n'est pas une application

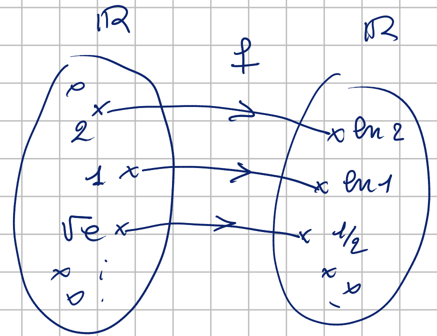


f est une application

Antécédents de α : a
" β : b, c
" γ : d
" δ : aucun

$$\left[\forall x \in E,\ \forall y \in F,\ \left(x \text{ est antécédent de } y \iff f(x) = y\right)\right]$$

$$f : \overset{E}{\mathbb{R}} \longrightarrow \overset{F}{\mathbb{R}}$$
$$x \longmapsto f(x) = \ln x$$



f n'est pas une application.
car par exemple -1 n'a pas d'image ($\ln(-1)$ n'existe pas)

$$g :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \ln x$$

g est une application

<u>Par rapport à Ma0101</u>

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{\sqrt{x}}{x-1}$$

n'est pas une application

$\mathcal{D}_f = ?$ $\qquad \mathcal{D}_f = [0,1[\cup]1,+\infty[$

$$g : [0,1[\cup]1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{\sqrt{x}}{x-1}$$

g est une application

$$f : \overbrace{\mathbb{R}}^{E} \longrightarrow \overbrace{\mathbb{R}}^{F}$$
$$x \longmapsto \sin x$$

est une application

$$f : \overbrace{\mathbb{R}}^{E} \longrightarrow \overbrace{[-1,1]}^{F}$$
$$x \longmapsto \sin x$$

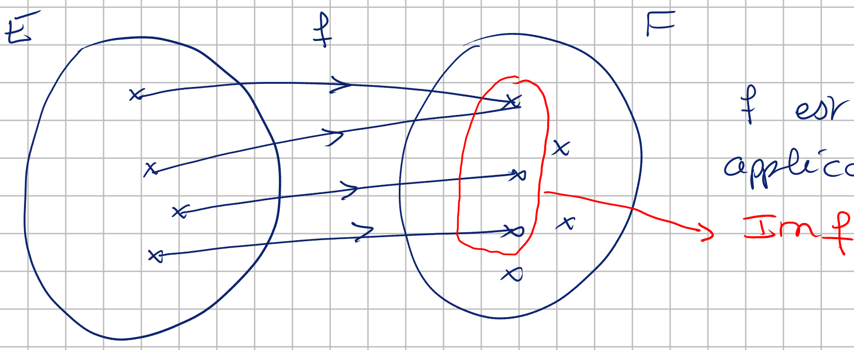
est une application

$$f : \overbrace{\mathbb{R}}^{E} \longrightarrow \overbrace{[-1,0]}^{F}$$
$$x \longmapsto \sin x$$

n'est pas une application

$x = \pi/2 \in \underbrace{\mathbb{R}}_{E}$, $f(x) = \sin(\pi/2) = 1 \notin \underbrace{[-1,0]}_{F}$

Im f ?

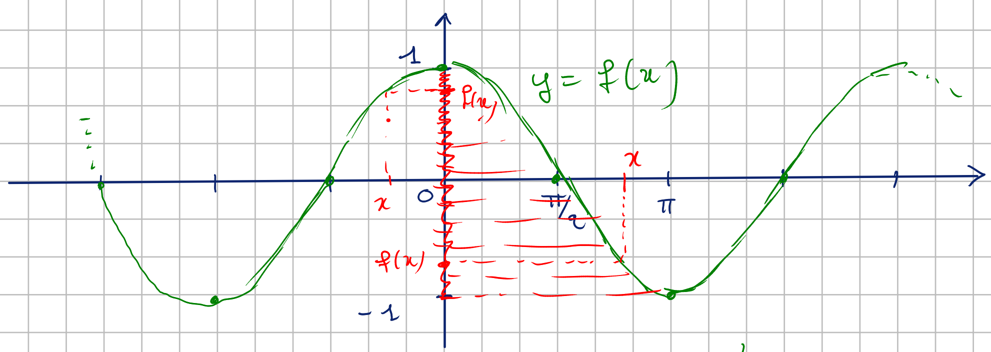


f est une application

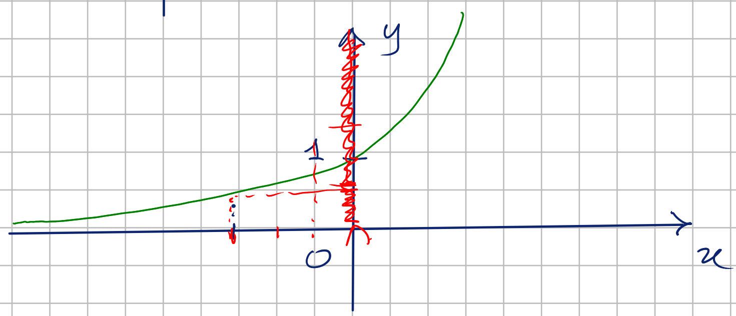
$$\mathrm{Im}\, f = \{ f(x),\ x \in E \}$$

- $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos x \end{array}$ est une application

$$\mathrm{Im}\, f = \{ \cos x,\ x \in \mathbb{R} \} = [-1, 1]$$



- $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{x} \end{array}$



f est une application

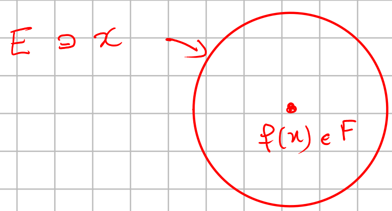
$$\mathrm{Im}\, f =]0, +\infty[$$

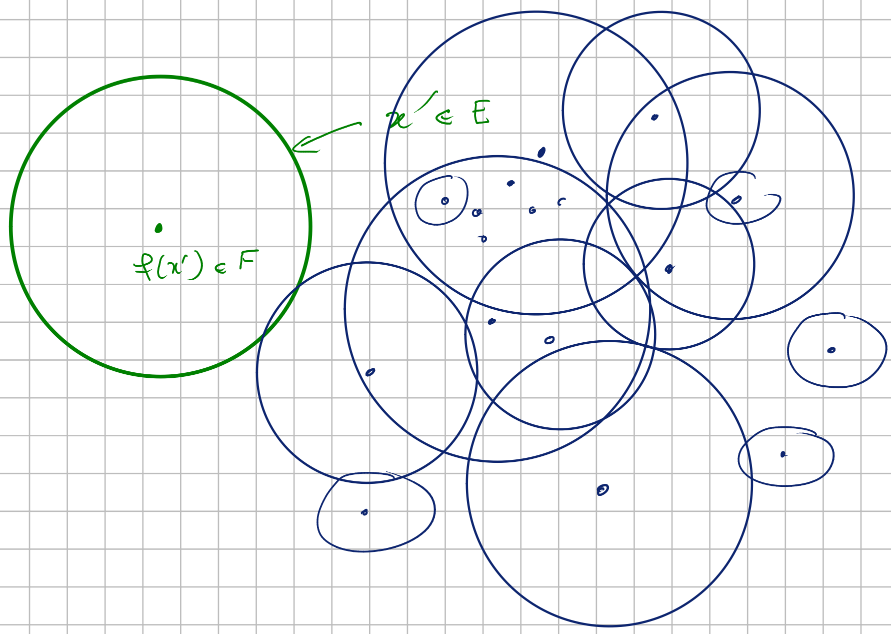
$$\forall y \in F, \quad y \in \operatorname{Im} f \iff \left(\exists x \in E,\ y = f(x)\right)$$

- $\begin{cases} E = \text{Tous les cercles que l'on peut dessiner sur la feuille} \\ F = \text{Tous les pts de la feuille} \end{cases}$

$$f : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) = \text{centre du cercle } x \end{array}$$

est une application





$$\operatorname{Im} f = F$$

$$\begin{cases} E = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ F = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \end{cases} \qquad A = \{1,3,5\}$$

$$\left(\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \ldots, \{0,1\}, \{0,2\}, \ldots, \{1,2\}, \{1,3\} \ldots, \{2, \ldots\}, \ldots, \{0,1,2\} \ldots \} \right)$$

$$\begin{aligned} f : \; & E \longrightarrow F \\ & X \longmapsto f(X) = X \cap A \end{aligned}$$

$X \in E$: $X \subset \mathbb{N}$ et $A \subset \mathbb{N}$

$f(X) = X \cap A \subset \mathbb{N}$

$f(X) \in F$

$$f(\underbrace{\{2,3\}}_{X \in E}) = \{2,3\} \cap \{1,3,5\} = \{3\} \in F$$

3/ Si on désigne par $\mathscr{P}$ un plan et par $\mathscr{C}$ l'ensemble des cercles de ce plan, on peut définir l'application notée par exemple g, de $\mathscr{C}$ vers $\mathscr{P}$, qui à chaque cercle associe le centre de ce cercle. On a :

$$\begin{array}{rcl} g\ :\mathscr{C} & \longrightarrow & \mathscr{P} \\ x & \longmapsto & g(x) = \text{Centre du cercle } x \end{array}$$

On a $\text{Im}(g) = \mathscr{P}$

4/ $\begin{array}{rcl} h\ :\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & h(x) = \ln x \end{array}$ n'est pas une application.

5/ $\begin{array}{rcl} k\ :\mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & k(x) = y \text{ où } y \in \mathbb{R} \text{ et } y^2 = x \end{array}$ n'est pas non plus une application.

NOTATIONS :

1/ Si E est un ensemble non vide, on note Id_E l'application suivante :

$$\begin{array}{rcl} \text{Id}_\text{E}\ : E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \text{Id}_E(x) = x \end{array}$$

2/ Si E et F sont deux ensembles non vides, l'ensemble de toutes les applications de E vers F se note : F^E. Autrement dit :

$$f \in F^E \iff \Big[f \text{ est une application de } E \text{ vers } F \Big]$$

EXEMPLES 2 :

1/ Écrire $f = \text{Id}_{[0,1]}$ signifie que $\begin{array}{rcl} f\ :[0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & f(x) = x \end{array}$

2/ Si $\begin{array}{rcl} f\ :[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & f(x) = x^4 \end{array}$, on écrira : $f \in (\mathbb{R}^+)^{[0,1]}$.

DÉFINITION 2 :

Soient $f_1 : E_1 \longrightarrow F_1$ et $f_2 : E_2 \longrightarrow F_2$ des applications. On dit que f_1 et f_2 sont ***égales*** et on écrit $f_1 = f_2$ si :

$$\Big[E_1 = E_2 \Big] \text{ et } \Big[F_1 = F_2 \Big] \text{ et } \Big[\forall x \in E_1,\ f_1(x) = f_2(x) \Big]$$

REMARQUE : On a $f_1 \neq f_2$ si $E_1 \neq E_2$ ou bien si $F_1 \neq F_2$ ou bien si $E_1 = E_2$ et $F_1 = F_2$ et $\exists x \in E_1$ tel que $f_1(x) \neq f_2(x)$.

EXEMPLES 3 :

1/ Les applications f et g suivantes sont distinctes :

$$\begin{array}{rcl} f\ :\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g\ :\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & g(x) = x^2 \end{array}$$

2/ Même résultat pour les deux applications suivantes :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad g : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \sin x \qquad\qquad x \longmapsto g(x) = \sin x$$

3/ Les applications f et g suivantes sont égales :

E F E' F'

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \sqrt{x^2} \qquad\qquad x \longmapsto g(x) = |x|$$

$E = E'$, $F = F'$, $\forall x \in E$, $f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$
$= g(x)$

II - Composition d'applications

Définition 3 :
Soient deux applications $f : E \longrightarrow F$ et $g : F' \longrightarrow G$ telles que $F \subset F'$. On appelle ***application composée de f par g***, que l'on note $g \circ f$, l'application définie par :

$$g \circ f : E \longrightarrow G$$
$$x \longmapsto (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

Remarque :

$\in F'$

1/ Cette définition est justifiée par le fait que : $\forall x \in E$, $f(x) \in F'$ (car $f(x) \in F$ et $F \subset F'$) et donc $g\big(f(x)\big)$ a un sens.

2/ On retient la définition de $g \circ f$ grâce au schéma suivant : $x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x))$, $x \xrightarrow{g \circ f} g(f(x))$

$g \circ f$: Ens d'arrivée de f $\subset$ Ens de départ de G
F'

3/ En général $g \circ f \neq f \circ g$

Théorème 1 : (Associativité de la composition des applications)
Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F' \longrightarrow G$ et $h : G' \longrightarrow H$ des applications. On suppose que $F \subset F'$ et $G \subset G'$. Alors : $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$. Cette application est alors simplement notée $h \circ g \circ f$ et on a :

$$h \circ g \circ f : E \longrightarrow H$$
$$x \longmapsto (h \circ g \circ f)(x) = h\Big(g\big(f(x)\big)\Big)$$

Notation : Si f est une application de E vers E et $n \in \mathbb{N}^*$, on notera (si aucune confusion n'est possible) par f^n l'application $\underbrace{f \circ f \circ \ldots \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$ et par convention, on pose $f^0 = \mathrm{Id}_E$.

$h \circ g$: ens de départ : F' $\qquad$ $(h \circ g) \circ f$
f : ens d'arrivée : F

Demo : $\begin{cases} f : E \to F \\ g : F' \to G \\ h : G' \to H \end{cases}$ $F \subset F'$ $G \subset G'$

- $h \circ g$ existe : $\underbrace{\text{Ens d'arrivée de } g}_{G} \subset \underbrace{\text{Ens de départ de } h}_{G'}$

$$h \circ g : F' \longrightarrow H$$
$$x \longmapsto (h \circ g)(x) = h(g(x))$$

$(h \circ g) \circ f$ existe : $\underbrace{\text{Ens d'arrivée } f}_{F} \subset \underbrace{\text{Ens de départ}(h \circ g)}_{F'}$

$$\boxed{\begin{aligned} (h \circ g) \circ f : \ & E \longrightarrow H \\ & x \longmapsto ((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) \\ & \qquad = h(g(f(x))) \end{aligned}}$$

- $g \circ f$ existe : $\underbrace{\text{Ens d'arrivée de } f}_{F} \subset \underbrace{\text{Ens de départ de } g}_{F'}$

$$g \circ f : E \longrightarrow G$$
$$x \longmapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

- $h \circ (g \circ f)$ existe : $\underbrace{\text{Ens d'arrivée de } g \circ f}_{G} \subset \underbrace{\text{Ens de départ de } h}_{G'}$

$$\boxed{\begin{aligned} h \circ (g \circ f) : \ & E \longrightarrow H \\ & x \longmapsto (h \circ (g \circ f)) = h((g \circ f)(x)) \\ & \qquad = h(g(f(x))) \end{aligned}}$$

Donc $\underbrace{(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)}_{h \circ g \circ f}$

Pour mardi prochain :

A chercher $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ex 4 :} \\ \text{Ex 5 : 1) , } \underline{\underline{2)}} \end{array} \right.$

III - Injections - Surjections - Bijections

Définition 4 :

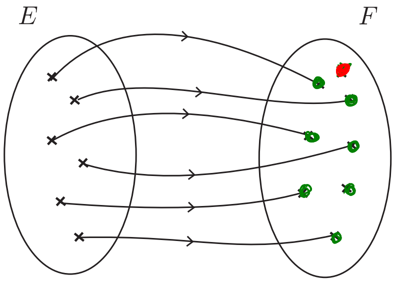
Soit une application $f : E \longrightarrow F$.

1/ On dit que f est ***injective*** (ou que : f est une ***injection***), si tout élément de F admet au plus un antécédent par f.

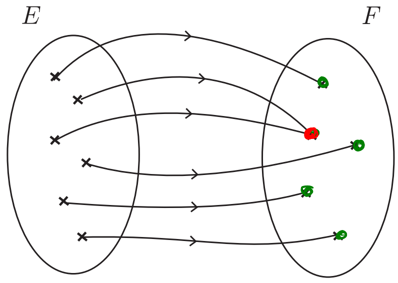
2/ On dit que f est ***surjective*** (ou que : f est une ***surjection***), si tout élément de F admet au moins un antécédent par f.

3/ On dit que f est ***bijective*** (ou que : f est une ***bijection***), si tout élément de F admet un et un seul antécédent par f.

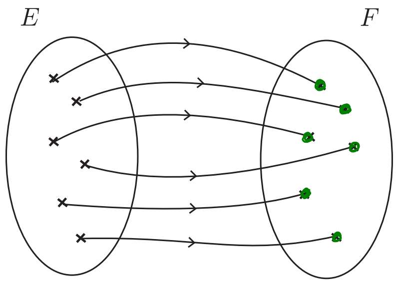
Illustrations :



Cas où f est injective
(f non surjective)



Cas où f est surjective (f non injective)



Cas où f est bijective

Exemples 4 :

1/ L'application $\left| \begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array} \right.$ est injective, mais n'est ni surjective, ni bijective.

2/ L'application $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1, 1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array} \right.$ est surjective, mais n'est ni injective, ni bijective.

3/ L'application $\left| \begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array} \right.$ est injective, surjective et bijective.

Théorème 2 :

Soit une application $f : E \longrightarrow F$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) f est injective.

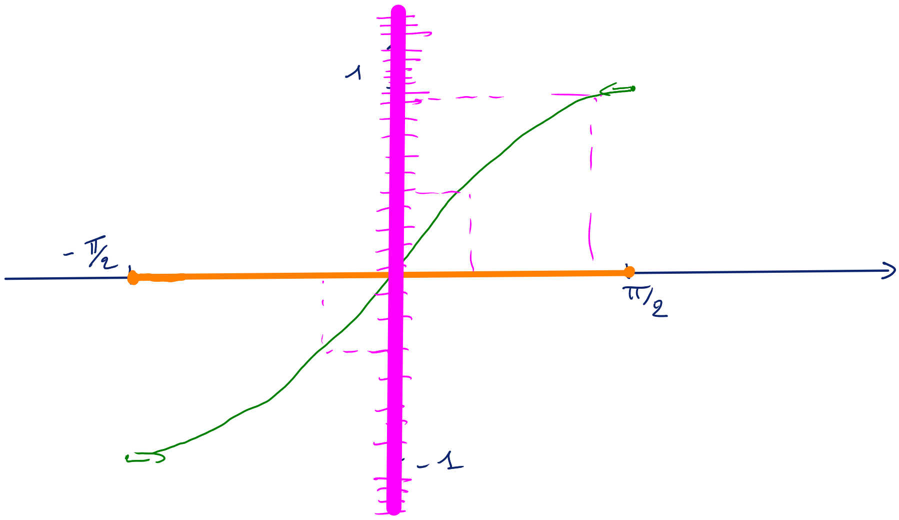
Exemples 4 :

1/ $f : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = \sin x$

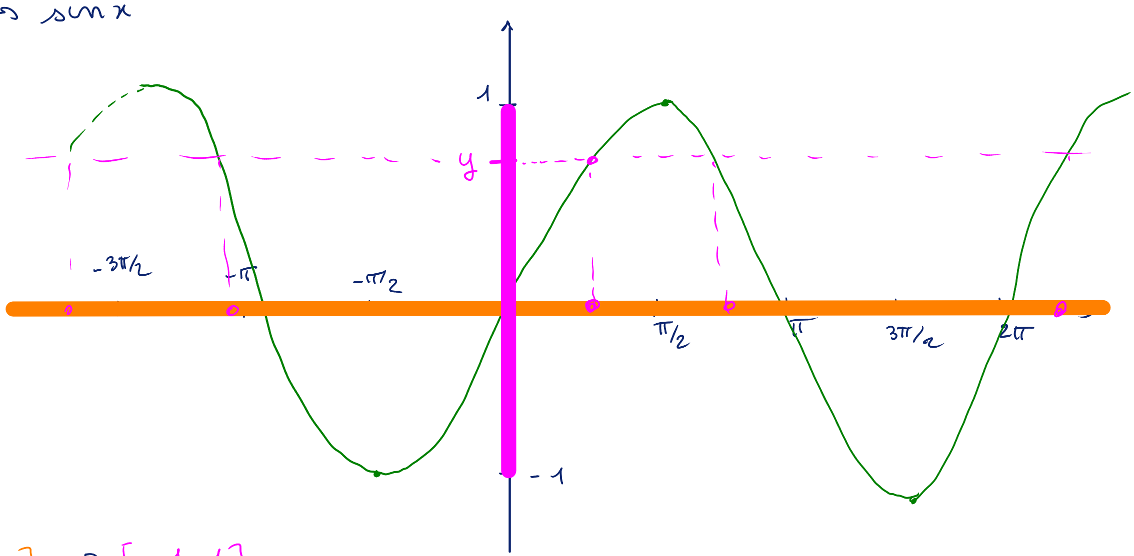
Représentation graphique de f

$y \in \mathbb{R}$



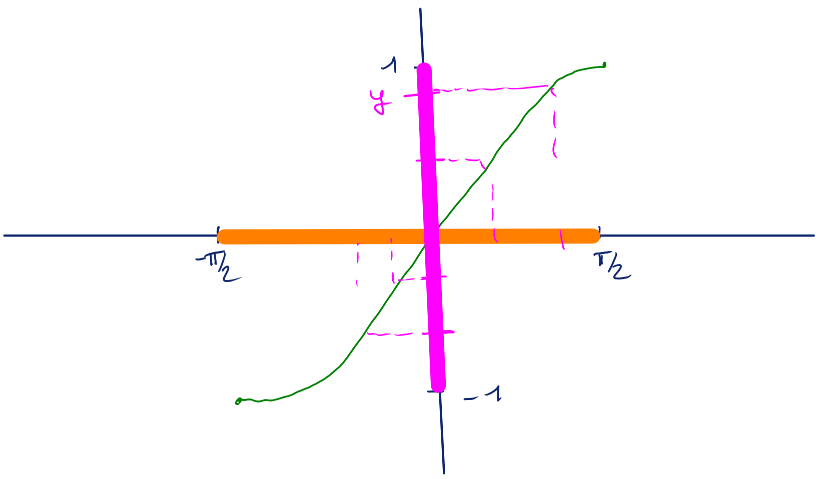
2) $g : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$

$x \longmapsto \sin x$



3) $h : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$

$x \longmapsto h(x) = \sin x$



ii) $\forall (x,x') \in E^2,\ \left[f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'\right]$

iii) $\forall (x,x') \in E^2,\ \left[x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')\right]$ (contraposée de ii))

Corollaire 1 :

Soit une application $f : E \longrightarrow F$. Alors :

$$\Big[f \text{ n'est pas injective}\Big] \iff \Big[\exists (x,x') \in E^2,\ x \neq x' \text{ et } f(x) = f(x')\Big]$$

Théorème 3 :

Soit une application $f : E \longrightarrow F$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) f est surjective.

ii) $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)$

iii) $\cancel{\mathrm{Im} f = F}$

Corollaire 2 :

Soit une application $f : E \longrightarrow F$. Alors :

$$\Big[f \text{ n'est pas surjective}\Big] \iff \Big[\exists y \in F,\ \forall x \in E,\ f(x) \neq y\Big] \cancel{\iff \Big[\mathrm{Im} f \neq F\Big]}$$

Théorème 4 :

Soit une application $f : E \longrightarrow F$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

i) f est bijective.

ii) $\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ y = f(x)$

iii) f est surjective et f est injective.

Corollaire 3 :

Soit une application $f : E \longrightarrow F$. Alors :

$$\Big[f \text{ n'est pas bijective}\Big] \iff \Big[f \text{ n'est pas surjective ou } f \text{ n'est pas injective}\Big]$$

Proposition - Définition : *(Application réciproque)*

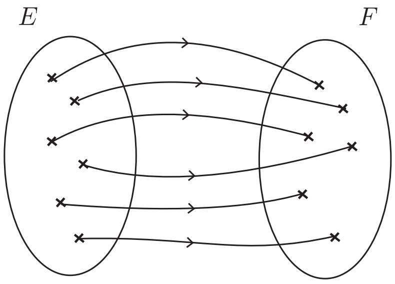
Si $f : E \longrightarrow F$ est une application bijective, on peut définir l'application notée f^{-1}, appelée ***application réciproque de*** f et définie de F dans E par :

$$\begin{array}{rccl} f^{-1} : & F & \longrightarrow & E \\ & y & \longmapsto & f^{-1}(y) = \text{l'unique antécédent de } y \text{ par } f \end{array}$$

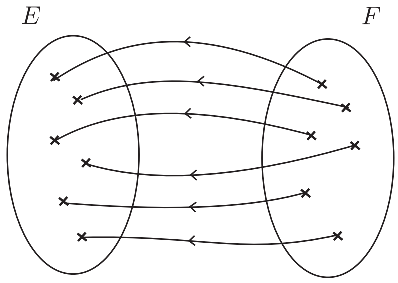
Autrement dit :

$$\forall y \in F, \forall x \in E, \ \left[f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow y = f(x) \right]$$

Illustrations :



Représentation de f



Représentation de f^{-1}

EXEMPLES 5 :

1/ Si E est un ensemble non vide, l'application $\left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ A & \longmapsto & \complement_E A \end{array} \right.$ est bijective. Elle est égale à son application réciproque.

2/ L'application $\ln : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{*+} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln x \end{array}$ est bijective et sa réciproque est l'application $\exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{*+} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^x \end{array}$

3/ L'application $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array} \right.$ est bijective et sa réciproque est l'application $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt[3]{x} \end{array} \right.$

PROPOSITION 1 :

Soit une application $f : E \longrightarrow F$ bijective. Alors :

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E \qquad \text{et} \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$$

Autrement dit :

$$\forall x \in E, \ f^{-1}\big(f(x)\big) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in F, \ f\big(f^{-1}(y)\big) = y$$

PROPOSITION 2 : *(Caractérisation fonctionnelle de la bijectivité)*

Soit une application $f : E \longrightarrow F$. S'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$, alors f est bijective et $g = f^{-1}$.

EXEMPLE 6 : Considérons l'application f définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{*-} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{*+} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^2} \end{array}$$

Définissons l'application g par :

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{*+} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{*-} \\ x & \longmapsto & -\dfrac{1}{\sqrt{x}} \end{array}$$

On a alors : $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{*-}}$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{*+}}$. Par conséquent, l'application f est bijective et f^{-1} et donnée par :

$$\begin{array}{rccl} f^{-1} : & \mathbb{R}^{*+} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{*-} \\ & x & \longmapsto & -\frac{1}{\sqrt{x}} \end{array}$$

Corollaire 4 :

Si $f : E \longrightarrow F$ est bijective, alors f^{-1} est bijective et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$

Corollaire 5 :

Si $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

IV - Fonctions réciproques en analyse

Soit I un intervalle ayant pour bornes a et b, où a et b sont des nombres réels ou bien l'un des deux symboles $-\infty$ ou $+\infty$

Ex 13 : $g : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ $(I = [-1,1], a = -1, b = 1)$
g strictement $\nearrow$ sur I

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue et strictement monotone sur I. Alors :

1) a) $f(I)$ est un intervalle. $\left(g(I) = \mathrm{Im}\, g = [-1,1] \right)$

   b) Les bornes de l'intervalle $f(I)$ sont $\lim\limits_{a} f$ et $\lim\limits_{b} f$. $\left(\lim\limits_{-1} g = g(-1) = -1,\ \lim\limits_{1} g = g(1) = 1 \right)$

   c) Si I est fermé en a (resp : b) alors $f(I)$ est fermé en $\lim\limits_{a} f$ (resp : $\lim\limits_{b} f$) et si I est ouvert en a (resp : b) alors $f(I)$ est ouvert en $\lim\limits_{a} f$ (resp : $\lim\limits_{b} f$)

2) L'application f réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle $f(I)$. (g bijection de $I = [-1,1]$ sur $g(I) = [-1,1]$

3) L'application réciproque f^{-1} est définie sur $f(I)$ par :

$$\begin{array}{rccl} f^{-1} : & f(I) & \longrightarrow & I \\ & y & \longmapsto & x = f^{-1}(y) \quad \textit{où } y \textit{ et } x \textit{ sont liés par la relation } y = f(x) \end{array}$$

4) f^{-1} est continue sur $f(I)$, strictement monotone et de même sens de variation que f.

5) Soit $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0)$.

   a) Si f est dérivable en x_0 et si :

      i) $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en y_0 et : $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ (que l'on peut également écrire $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}$)

      ii) $f'(x_0) = 0$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en y_0.

   b) Si f n'est pas dérivable en x_0 et si :

      i) $\lim\limits_{x \to x_0} \left| \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| = +\infty$ alors f^{-1} est dérivable en y_0 et : $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = 0$.

      ii) $\lim\limits_{x \to x_0} \left| \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right|$ n'existe pas alors f^{-1} n'est pas dérivable en y_0.

****