

MA0102

TD n°2

### Exercice 2:

(négation)

- 6)  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 \neq 0$  Vrai calcul de  $\Delta$  ( $\Delta = 3 < 0$ )  $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 = 0$  Faux
- 7)  $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, z + z' \in \mathbb{R}$  Faux (en  $z = i, z' = i, z + z' = 2i \notin \mathbb{R}$ )  $\exists (z, z') \in \mathbb{C}^2, z + z' \notin \mathbb{R}$  Vrai
- 8)  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{Z}, x < y$  Vrai  $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{Z}, x \geq y$  Faux
- 9)  $\forall (a, b, c) \in \mathbb{Q}^3, abc \in \mathbb{Q}$  Vrai voir plus bas  $\exists (a, b, c) \in \mathbb{Q}^3, abc \notin \mathbb{Q}$  Faux
- 10)  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a + b = \max(a, b)$  Faux  $a = 3, b = 4, a + b = 7, \max(a, b) = 4$   $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, a + b \neq \max(a, b)$  Vrai
- 11)  $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, a + b = \min(a, b)$  Vrai  $a = b, b = -1, a + b = -1, \min(a, b) = -1$   $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a + b \neq \min(a, b)$  Faux

$\Rightarrow a, b, c \in \mathbb{Q}$

Donc  $a$  s'écrit  $a = \frac{a_1}{a_2}$   
 $b = \frac{b_1}{b_2}$   
 $c = \frac{c_1}{c_2}$

Donc  $abc = \frac{a_1 b_1 c_1}{a_2 b_2 c_2}$

$abc \in \mathbb{Q}$

### Exercice 3:

- 1) " $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y = 25$ " = P Faux  
" $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x + y = 25$ " = Q Vrai

Q Vrai: Soit  $y \in \mathbb{R}$

Prenons  $x = 25 - y$

Alors  $x \in \mathbb{R}$  et

$x + y = (25 - y) + y = 25$

P Faux:

TP = " $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = 25$ "

Rq TP est vraie

Soit  $x \in \mathbb{R}$

Prenons  $y = -x \in \mathbb{R}$

Alors  $x + y = x + (-x) = 0 \neq 25$

3)  $P \rightarrow 1^{\text{er}} \text{ phrase}$   
 $Q \rightarrow 2^{\text{em}} \text{ phrase}$

### Exercice 8:

1)  $P = " \forall x \in \mathbb{R}, [(x \leq 0) \text{ ou } (x \geq 0)] "$  Vrai  
 $Q = "( \forall x \in \mathbb{R}, x \leq 0 ) \text{ ou } ( \forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0 ) "$  Faux  
 $\neg Q = "( \exists x \in \mathbb{R}, x > 0 ) \text{ et } ( \exists x \in \mathbb{R}, x < 0 ) "$  et vrai car  
 $\begin{cases} x > 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} -1 \in \mathbb{R} \\ -1 < 0 \end{cases}$

3) Illustration de la règle de distributivité

### Partie Cours:

Def 3:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
F	V	V
F	F	V
V	V	V
V	F	F

(Réciproque de  $P \Rightarrow Q$ )  
 (contraposée de  $P \Rightarrow Q$ )  
 $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

P	Q	$\neg P \text{ ou } Q$
F	V	V
F	F	V
V	V	V
V	F	F

$(P = Q) \Leftrightarrow (\neg P \text{ ou } Q)$   
 $(\neg Q \Rightarrow \neg P) \Leftrightarrow (\neg(\neg Q) \text{ ou } \neg P)$   
 $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

$\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P \text{ ou } Q)$   
 $\Leftrightarrow \neg(\neg P) \text{ et } \neg Q$   
 $\Leftrightarrow (P \text{ et } \neg Q)$

$$P \Leftrightarrow Q \equiv [(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P)]$$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

### Exercice 9:

- 1) Vrai
- 2) Vrai
- 3) Vrai
- 4) Vrai
- 5) Faux
- 6) Vrai
- 7)  $\forall x \in \mathbb{R}, (x \geq 1) \Rightarrow (x \geq 0)$  Vrai
- 8)  $n = 5$
- 9) Vrai

### Exercice 11

1)	P	Q	$\neg P \text{ et } Q$	$P \Rightarrow Q$ faut q <sup>d</sup> = P(V) et Q(F) $(\neg P \text{ et } Q) \vdash \neg(P \Rightarrow Q)$ $\neg(P \Rightarrow Q) \vdash \neg(\neg P \text{ et } Q)$ $\vdash (P \text{ et } \neg Q)$
	V	V	F	
	V	F	F	
	F	V	V	
	F	F	F	

2)

P	Q	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg(P \wedge Q) \vdash (\neg P \vee \neg Q)$ $\vdash (P \Rightarrow \neg Q)$
V	V	F	
V	F	V	
F	V	V	
F	F	V	$(A \Rightarrow B) \vdash (\neg A \vee B)$

3)

P	Q	$\neg P$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow (P \vee Q)$
V	V	F	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	V	V
F	F	V	F	F

$$[\neg P \Rightarrow (P \vee Q)] \vdash [\neg(\neg P) \vee (P \vee Q)] \vdash (P \vee (P \vee Q))$$

$$(P \vee P \vee Q)$$

$$(P \vee Q)$$

4)

$$[(P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)] \vdash [\neg(P \vee Q) \vee (\neg Q \vee P)]$$

$$\vdash (\neg P \vee \neg Q \vee \neg Q \vee P)$$

$$\vdash (\neg P \vee P \vee \neg Q \vee \neg Q)$$

Sera toujours Vrai *tautologie*

### Exercice 16.

- 1) Tout quadrilatère est un losange ou un rectangle
- 2)  $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y \leq x$
- 3)  $\forall a \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, |a| \geq \varepsilon$