Exercice 11 :

5) $\neg(\neg P \text{ et } \neg Q) \dashv\vdash \neg(\neg P) \text{ ou } \neg(\neg Q) \dashv\vdash P \text{ ou } Q$

6) $[(P \text{ et } Q) \Rightarrow (\neg P)] \dashv\vdash [(P \text{ ou } Q) \text{ ou } (\neg P)]$

$\dashv\vdash (\neg P \text{ ou } \neg Q) \text{ ou } \neg P)$

$\dashv\vdash (\neg P \text{ ou } \neg Q \text{ ou } \neg P)$

$\dashv\vdash (\neg P \text{ ou } \neg Q)$

$\dashv\vdash \neg(P \text{ et } Q)$

P	Q	P et Q	¬(P et Q)
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

7) $[(P \Rightarrow \neg Q) \text{ ou } (Q \Rightarrow \neg P)] \dashv\vdash [(\neg P \text{ ou } \neg Q) \text{ ou } (\neg Q \text{ ou } \neg P)]$

$\dashv\vdash [\underbrace{\neg P}_{\neg P} \text{ ou } \underbrace{\neg Q \text{ ou } \neg Q}_{\neg Q} \text{ ou } \neg P]$

$\dashv\vdash (\neg P \text{ ou } \neg Q)$ Voir tableau du 6

8) $(P \text{ ou } \neg Q) \text{ et } (\neg P \text{ ou } Q) \dashv\vdash (Q \Rightarrow P) \text{ et } (P \Rightarrow Q)$

$\dashv\vdash (P \Leftrightarrow Q)$

P	Q	P ⇔ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exercice 15

1. $P \vdash$ " $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| > \eta$ ou $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ "

2. $\neg P \vdash$ " $\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in \mathbb{R}, |x - x_0| \leq \eta$ et $|f(x) - f(x_0)| > \varepsilon$ "

Exercice 16 :

4) P ↔ " $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists a \in \mathbb{N}^*, a \mid n$ "

$\neg$P ↔ " $\exists n \in \mathbb{N}^*, \forall a \in \mathbb{N}^*, a \nmid n$ "

5) $\neg$P ↔ " Il pleuvra demain ou il aura mal au genoux et Jean ira courir "

6) <u>Négation</u> : Il existe un triangle équilatéral sans angle droit

7) <u>Négation</u> : 1024 n'est pas divisible par 3 ou 1024 est une puissance de 2

Exercice 18 :

a) P ⟺ "$\forall x \in \mathbb{R} / \{ \frac{5}{2} \}, \frac{2x-5}{6x-15} = \frac{1}{3}$"

¬P ⟺ "$\exists x \in \mathbb{R} / \{ \frac{5}{2} \}, \frac{2x-5}{6x-15} \neq \frac{1}{3}$"

Mq P est vrai

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{ \frac{5}{2} \}$

Alors : $\frac{2x-5}{6x-15} = \frac{2x-5}{3(2x-5)} = \frac{1}{3}$

b) P ⟺ "$\exists x \in \mathbb{R}, \frac{2x-5}{6x-15} = \frac{1}{3}$" V

¬P ⟺ "$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{2x-5}{6x-15} \neq \frac{1}{3}$" F

Mq P est vrai

Par exemple, pour $x = 3$, on a : $\frac{2x-5}{6x-15} = \frac{1}{3}$

c) P ⟺ "$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, 3x+2y-6=0$"

¬P ⟺ "$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, 3x+2y-6 \neq 0$"

P est vrai ; Montrons le :

Soit $x \in \mathbb{R}$, Posons $y = \frac{1}{2}(6-3x)$

Alors :

$3x+2y-6 = 3x + \cancel{2} \times \left(\frac{1}{\cancel{2}}(6-3x)\right) + 6$

$= \cancel{3x} + (\cancel{6} - \cancel{3x}) \cancel{-6}$

$= 0$

d) P ⟺ "$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, 3x+2y-6=0$"

¬P ⟺ "$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, 3x+2y-6 \neq 0$"

Mq P est faux

On fait, mq ¬P est vrai

Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $y = 1/2\,(6-3x)$

Alors $3x + 2y - 6 = \cancel{3x} + (\cancel{6} - \cancel{3x}) + 2 - \cancel{6}$

$= 2 \neq 0$

e) $P \mapsto$ " $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x+y=0 \Rightarrow x=0)$ " F

$\neg P \mapsto$ " $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x+y=0$ et $x \neq 0$ " V

Mq P est faux, c'est-à-dire mq ¬P est vrai

Choisissons par exemple $x = -2$ et $y = 2$

Alors $x \neq 0$ et $x + y = 0$

f) $P \mapsto$ " $\forall x \in \mathbb{R}, ((\forall y \in \mathbb{R}, x+y=0) \Rightarrow x=0)$ " V

$\neg P \mapsto$ " $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x+y=0$ et $x \neq 0$ " F

Démontrons que P est vrai.

Soit $x \in \mathbb{R}$

Mq $\underbrace{A \Rightarrow B}_{\neg A \text{ ou } B}$ est vrai

1er cas : A est faux alors $A \Rightarrow B$ est vrai

2e cas : A est vrai alors il faut que B soit vrai

H Supposons que A vrai

D

C Donc B est vrai

Soit $x \in \mathbb{R}$

H Supposons que : $\forall y \in \mathbb{R}, x + y = 0$

(b) Donc en particulier pour $y = 0$, on a $\overbrace{x+y}^{x} = 0$

(c) Donc $x = 0$

Exercice 19

1) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

Mq $(\forall x \in \mathbb{R},\ ax+bx^2=0) \Leftrightarrow (a=b=0)$

- Mq $(\forall x \in \mathbb{R},\ ax+bx^2=0) \Rightarrow (a=b=0)$

H Supposons que $\forall x \in \mathbb{R},\ ax+bx^2=0$

D En particulier pour $x=1$ $ax+bx^2=0$

Donc $0=0$

et pour $x=-1$ $ax+bx^2=0$

c'est-à-dire $-a+b=0$

On a $\begin{cases} a+b=0 & ① \\ -a+b=0 & ② \end{cases}$ Donc ① + ② $=2b=0$ donc $b=0$

Donc dans ① $a+0=0$, donc $a=0$

C Donc $a=b=0$

- Mq $\boxed{\Leftarrow}$ est vrai

(Mq : $(a=b=0) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R},\ ax+bx^2=0)$

H Supposons que $a=b=0$

D Alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ ax+bx^2 = 0x+0x^2=0$

C Donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ ax+bx^2=0$