Feuille de TD N°1

MA0102 SIA3
09/09/20

Ex 3

a) $a(x) = \dfrac{e^{3x}(x^2-1)}{e^{-2x}} \times e$

$*$ $a(x)$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$

$*$ $a(x) = e^{3x-(-2x)+1}(x^2-1) = e^{5x+1}(x^2-1)$

b) $b(x) = \dfrac{x+\sqrt{x}}{1+\dfrac{x+1}{x+2}} \times \dfrac{\dfrac{2x-1}{\sqrt{x}}}{x^2+\sqrt{x}+1}$

$\sqrt{x}$ est défini pour $x \geq 0$

$*$ $b(x)$ défini pour : $\begin{cases} x+2 \neq 0 & (1) \\ 1+\dfrac{x+1}{x+2} \neq 0 & (2) \\ x \geq 0 \\ x > 0 \\ x^2+\sqrt{x}+1 \neq 0 & (3) \end{cases}$

(1) $x+2 \neq 0 \iff x \neq -2$

(2) ? $1+\dfrac{x+1}{x+2} = 0 \iff \dfrac{x+2+x+1}{x+2} = 0 \iff \dfrac{2x+3}{x+2} = 0$

$\iff 2x+3 = 0$

$\iff x = -3/2$

Il faut donc que $x \neq -3/2$

(3) $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ x^2+\sqrt{x}+1 \neq 0$ (car $x^2 \geq 0$, $\sqrt{x} \geq 0$ donc $x^2+\sqrt{x}+1 \geq 1$)

$b(x)$ est défini pour $x > 0$
(b est définie sur $]0,+\infty[$)

$*$ $b(x) = \dfrac{x+\sqrt{x}}{\dfrac{2x+3}{x+2}} \times \dfrac{2x-1}{\sqrt{x}\,(x^2+\sqrt{x}+1)}$

$= \dfrac{\cancel{\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1)}{2x+3} \times \dfrac{(x+2)(2x-1)}{\cancel{\sqrt{x}}(x^2+\sqrt{x}+1)}$

$= \dfrac{(\sqrt{x}+1)(x+2)(2x-1)}{(2x+3)(x^2+\sqrt{x}+1)}$ CQFD

c) $c(x) = \dfrac{(e^{2x})^3 \times e^{-x^2+x}}{e^x + e^{2x}}$

$*$ $c(x)$ est défini pour $x \in \mathbb{R}$ (car $\underbrace{e^x}_{>0} + \underbrace{e^{2x}}_{>0} > 0$)

$*$ $c(x) = \dfrac{e^{6x-x^2+x}}{e^x(1+e^x)} = \dfrac{e^{7x-x^2-x}}{1+e^x} = \dfrac{e^{6x-x^2}}{1+e^x}$

d) $d(x) = \dfrac{x^3\sqrt{x} - x^2}{x\sqrt{x}}$

$*$ d est définie sur $\underbrace{]0,+\infty[}_{\mathbb{R}^{*+}}$ $\left(\begin{array}{l} x \neq 0 \\ x \geq 0 \text{ et } x \neq 0 \end{array}\right)$

$*$ $d(x) = \dfrac{\cancel{x\sqrt{x}}\,(x^2 - \sqrt{x})}{\cancel{x\sqrt{x}}}$ $\quad (\sqrt{x}\sqrt{x} = x)$

$= x^2 - \sqrt{x}$

e) $*$ e définie sur $\mathbb{R}$

$*$ $e(x) = \dfrac{(6e^x + 2)(e^{2x} + 12)}{12 + 11e^x}$

f) $*$ f est définie sur $\mathbb{R}$

$*$ $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{(e^{2x}+3)e^{3x}}$

Exercice 5

d) $d(x) = |x| \sqrt{\dfrac{1}{x^2} + 23}$

$*$ d est définie $\mathbb{R}^*$ (Il faut que $x^2 \neq 0$, c.a.d. $x \neq 0$. Dans ce cas $\dfrac{1}{x^2} + 23 \geq 0$)

$*$ $d(x) = \sqrt{x^2} \sqrt{\dfrac{1}{x^2} + 23} = \sqrt{x^2\left(\dfrac{1}{x^2} + 23\right)} = \sqrt{1 + 23x^2}$

car $\sqrt{x^2} = |x|$

e) $e(x) = \dfrac{x + \sqrt{x^2+1}}{x}$

$*$ e est définie sur $\mathbb{R}^*$ (. $x \neq 0$. Pas de pb pour x^2+1 car $x^2+1 \geq 0$ car $x^2+1 \geq 1$)

$*$ $e(x) = \dfrac{x + \sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}}{x} = \dfrac{x + \sqrt{x^2}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x}$

$$= \frac{x + |x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}$$

$$= \frac{x}{x} + \frac{|x|}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$= 1 + \frac{|x|}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

$\left(x^2+1 = x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) \right.$

$x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) = x^2 + \cancel{x^2} \times \cancel{\dfrac{1}{x^2}}$

$\left. = x^2+1 \right)$

Si $x>0$: $e(x) = 1 + \sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ (car $|x| = x$ et donc $\dfrac{|x|}{x} = \dfrac{x}{x} = 1$)

Si $x<0$: $e(x) = 1 - \sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ (car $|x| = -x$ et donc $\dfrac{|x|}{x} = -\dfrac{x}{x} = -1$)

f) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

$*$ $f(x)$ est défini pour $x \neq 0$
(f est définie sur $\mathbb{R}^*$)

$*$ $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x>0 \\ -1 & \text{si } x<0 \end{cases}$

Ex 7

1) * $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{\cancel{x}+1-\cancel{x}}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x(x+1)}$

* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \underbrace{\frac{1}{1\times(1+1)}}_{k=1} + \underbrace{\frac{1}{2\times(2+1)}}_{k=2} + \underbrace{\frac{1}{3\times(3+1)}}_{k=3}$

$\displaystyle + \frac{1}{4\times(4+1)} + \dots\dots + \frac{1}{n(n+1)}$

(n termes dans cette somme)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$$

$$= \left(1 + \cancel{\tfrac{1}{2}} + \cancel{\tfrac{1}{3}} + \tfrac{1}{4} + \dots + \cancel{\tfrac{1}{n-1}} + \cancel{\tfrac{1}{n}}\right) - \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} + \cancel{\tfrac{1}{3}} + \tfrac{1}{4} + \dots + \cancel{\tfrac{1}{n}} + \tfrac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

2) * $\dfrac{1/2}{x} - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1/2}{x+2} = \dfrac{1/2\,(x+1)(x+2) - (x+2)x + 1/2\,x(x+1)}{x(x+1)(x+2)}$

$$= \frac{1/2\,(\cancel{x^2} + \cancel{2x} + \cancel{x} + 2) - (\cancel{x^2} + \cancel{2x}) + 1/2\,(\cancel{x^2} + \cancel{x})}{x(x+1)(x+2)}$$

$$= \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$$

* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1/2}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1/2}{k+2}\right)$

$$\begin{cases} \sum(\cdot + \cdot) = \sum(\cdot) + \sum(\cdot) \\ \cancel{\sum(\cdot \times \cdot) = \sum(\cdot) \times \sum(\cdot)} \end{cases}$$

Faux

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}\right)}_{0}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}}_{\frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{n+2}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\,\frac{(\cancel{n}+1) - (\cancel{n}+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+2)(n+1)}$$

<u>Autre méthode pour simplifier</u>

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} + \frac{1}{2}\sum_{\ell=3}^{n+2} \frac{1}{\ell}$$

$$\begin{cases} j = k+1 \\ k = 1 \to j = 1+1 = 2 \\ k = n \to j = n+1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \ell = k+2 \\ k = 1 \to \ell = 1+2 = 3 \\ k = n \to \ell = n+2 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+2}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k}$$

(Indices muet)

$$= \frac{1}{2}\Big(\underbrace{1+\frac{1}{2}}_{k=1,2} + \underbrace{\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}}\Big) - \Big(\underbrace{\frac{1}{2}}_{k=2} + \underbrace{\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}} + \underbrace{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}}_{k=n+1,\,n+2}\Big)$$

$$+ \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}} + \underbrace{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}}_{k=n+1,\,n+2}\Big)$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}\right)}_{0}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\left(1+1/2\right) - \left(1/2+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$$

$$+ 1/2\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$$

= ....

- Terminer Ex 7
- Ex 8
- Ex 13, 1), 2), 3), 4)