→ S1A3
→ 6/10/2020

TD2

MATH 0102

Exercice 12 :

2)

V V V	F	V	F
V V F	F	F	F
V F V	F	F	F
V F F	F	F	F
F V V	V	V	F
F V F	F	F	F
F F V	F	V	F
F F F	F	F	F
P Q R	a)	b)	c)

a) ¬P et Q et R

b) (P et Q et R) ou (¬P et Q et R) ou (¬P et ¬Q et R)

c) P et ¬P et Q

Exercice 13

1) Mq : $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Leftrightarrow (Q \Rightarrow (P \Rightarrow R))$ est vrai

$\forall Q, P, R$

P	Q	R	$Q \Rightarrow R$	$P \Rightarrow R$	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$	$Q \Rightarrow (P \Rightarrow R)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V

2)

a) $\forall P, Q, \ (P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$ est vrai
$\exists P, Q, \ (P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$ est faux

Exemple : $\begin{cases} P \text{ et vrai} \\ Q \text{ et faux} \end{cases}$ Alors $\begin{cases} P \vee Q \text{ Vrai} \\ P \wedge Q \text{ Faux} \end{cases}$

Donc $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$ et faux

b) $\exists P, Q \ \ (P \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$ et faux
Choisissons par exemple
$\begin{cases} Q : \text{vrai} \\ P : \text{faux} \end{cases}$ Alors $\begin{cases} (P \Rightarrow Q) \text{ et vrai} \\ (Q \Rightarrow P) \text{ et faux} \end{cases}$ Donc $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$ et faux

Exercice 21 :

6) Mq : $\forall n \in \mathbb{N}, [(n^2 \text{ pair}) \Rightarrow (n \text{ pair})]$
$\iff [\forall n \in \mathbb{N}, (n \text{ impair}) \Rightarrow (n^2 \text{ impaire})]$

Soit $n \in \mathbb{N}$.
H Supposons que n et impaire
D Donc n s'écrit $n = 2k+1$ $(k \in \mathbb{N})$
Alors $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$
$= 2(k^2 + 2k) + 1 = 2K + 1 \qquad (K \in \mathbb{N})$
C Donc n^2 et impaire

7) Mq : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^+), [(x \neq 0 \text{ ou } y \neq 0) \Rightarrow (x + y \neq 0)]$

Soit $x, y \in \mathbb{R}^+$
H Supposons que $x \neq 0$ ou $y \neq 0$
D

(D) 1er cas : Si $x=0$ et $y>0$ | 2e cas ; $x>0$ et $y=0$ | 3e cas $x>0$ et $y>0$

Alors $x+y=y>0$ | Alors $x+y=x>0$ | Alors $x+y>0$

Donc $x+y\neq 0$ | Donc $x+y\neq 0$ | Donc $x+y\neq 0$

(C) Donc $x+y\neq 0$

2) $\forall a\in\mathbb{R}, [\forall h>0, |a|<h) \Rightarrow (a=0)]$

$\Leftrightarrow (\forall a\in\mathbb{R}\ (a\neq 0) \Rightarrow (\exists h>0, |a|\geq h))$

Soit $a\in\mathbb{R}$

(H) Supposons que $a\neq 0$

(D) Choisissons $h=|a|$, on a $\neq a$ donc $|a|>0$ et de plus $|a|\geq h$.

(C) Donc : $\exists h>0$, tel que $|a|\geq h$

3) Mq, $\forall x\in\mathbb{R}$, $(x^2-1\in[0,1] \Leftrightarrow x\in[1,\sqrt{2}]\cup[-\sqrt{2};-1])$

* Mq : $\forall x\in\mathbb{R}$, $(x^2-1\in[0,1] \Rightarrow x\in[1;\sqrt{2}]\cup[-\sqrt{2};-1])$

Soit $x\in\mathbb{R}$

Mq $(x^2-1\in[0,1] \Rightarrow x\in[1;\sqrt{2}]\cup[-\sqrt{2};-1]$

(H) Supposons que $x^2-1\in[0,1]$ $(0\leq x^2-1\leq 1)$

(D) Donc $x^2\in[1,2]$ $(1\leq x^2\leq 2)$

Donc $\sqrt{1}\leq\sqrt{x^2}\leq\sqrt{2}$

Donc $1\leq|x|\leq\sqrt{2}$

Donc $1\leq x\leq\sqrt{2}$ ou $\begin{cases}1\leq -x\leq\sqrt{2}\\ -1\geq x\geq -\sqrt{2}\end{cases}$

(C) Donc $x\in[1,\sqrt{2}]\cup[-\sqrt{2};1]$

Mq : $x \in [1;\sqrt{2}] \cup [-\sqrt{2};-1] \Rightarrow x^2-1 \in [0;1]$

(H) Supposons que $x \in [1;\sqrt{2}] \cup [-\sqrt{2};-1]$

(D) Donc $x \in [1;\sqrt{2}]$ ou $x \in [-\sqrt{2};-1]$ $(1 \leq x \leq \sqrt{2}$ ou $-\sqrt{2} \leq x \leq -1)$

Donc $x^2 \in [1;2]$ ou $x \in [1, 2]$ $(1^2 \leq x^2 \leq (\sqrt{2})^2$ ou $(-\sqrt{2})^2 \leq x^2 \leq (-1)^2)$

(C) Donc $x^2 - 1 \in [0, 1]$

Mq $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2-1) \in [0,1]$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$x^2 - 1 \in [0,1] \Rightarrow 0 \leq x^2 - 1 \leq 1$

$\Leftrightarrow 1 \leq x^2 \leq 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{1} \leq \sqrt{x^2} \leq \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 1 \leq |x| \leq \sqrt{2}$

$\forall x \in \mathbb{R}, (x^2-1) \in [0,1] \Leftrightarrow x \in [1,\sqrt{2}] \cup [-\sqrt{2};-1] \Leftrightarrow (1 \leq x \leq \sqrt{2}$ ou $1 \leq -x \leq \sqrt{2})$

$\Leftrightarrow (x \in [1,\sqrt{2}]$ ou $x \in [-\sqrt{2};1])$

$\Leftrightarrow (x \in [1,\sqrt{2}] \cup [-\sqrt{2};-1])$

Exercice 23:

1) Soient $x, y, z \in]0;+\infty[$

(H) Supposons que $x+y+z < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

(D) et que $x \geq 1$ et $y \geq 1$ et $z \geq 1$

(C) Donc $x < 1$ ou $y < 1$ ou $z < 1$

Mq $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ vrai

$\mathbb{N}^* \Rightarrow P(1)$

$P(n) \mapsto n$ est faire

$P(n) \mapsto n^2 + 5n - 3 < 2n + 1$

① Initialisation :

On vérifie $P(0)$ est vrai

② Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $P(n)$ est vrai, mq $P(n+1)$ est vrai

Exercice 24 :

1) Mq : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\underbrace{\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}_{P(n)}$

Initialisation :

$\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0$

$\frac{0(0+1)(2\times 0+1)}{6} = 0$

Donc $\sum_{k=0}^{0} k^2 = \frac{0(0+1)(2\times 0+1)}{6}$ Donc $P(0)$ est vrai

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$, Supposons que $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ est vrai

$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

Alors $\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+1)}{6}$