Corrigé du TD N°1 - Exercices 6 à 10

Exercice 6 :

• cos(3θ) ? On utilise la formule de Moivre et la formule du binôme.

$$\cos(3\theta) + i\sin(3\theta) = e^{3i\theta} = (e^{i\theta})^3 = \underbrace{(\cos\theta + i\sin\theta)^3}_{(a+b)^3}$$

(où $a = \cos\theta$ et $b = i\sin\theta$)

D'après la formule du binôme :

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1

← Triangle de Pascal

Donc :

$$\cos(3\theta) + i\sin(3\theta) = (\cos\theta)^3 + 3(\cos\theta)^2(i\sin\theta) + 3\cos\theta\,(i\sin\theta)^2 + (i\sin\theta)^3$$

Or : $\begin{cases}(i\sin\theta)^2 = i^2\sin^2\theta = -\sin^2\theta \\ (i\sin\theta)^3 = i^3\sin^3\theta = -i\sin^3\theta\end{cases}$. Donc :

$$\cos(3\theta) + i\sin\theta = \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta$$

$$= (\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta) + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)$$

Donc, par identification de la partie réelle :

$$\cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$$

(et par identification de la partie imaginaire :

$$\sin(3\theta) = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$$)

• sin(7θ) ?

$$\cos(7\theta) + i\sin(7\theta) = \underbrace{(\cos\theta + i\sin\theta)^7}_{(a+b)^7}$$

où $a = \cos\theta$ et $b = i\sin\theta$

Le Triangle de Pascal est :

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

Donc :

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

On en déduit que :

$$\cos(7\theta) + i\sin(7\theta) = (\cos\theta)^7 + 7(\cos\theta)^6(i\sin\theta) + 21(\cos\theta)^5(i\sin\theta)^2$$
$$+ 35(\cos\theta)^4(i\sin\theta)^3 + 35(\cos\theta)^3(i\sin\theta)^4$$
$$+ 21(\cos\theta)^2(i\sin\theta)^5 + 7\cos\theta\,(i\sin\theta)^6 + (i\sin\theta)^7$$

Or $\begin{cases} (i\sin\theta)^2 = i^2\sin^2\theta = -\sin^2\theta \\ (i\sin\theta)^3 = i^3\sin^3\theta = -i\sin^3\theta \\ (i\sin\theta)^4 = i^4\sin^4\theta = \sin^4\theta \\ (i\sin\theta)^5 = i^5\sin^5\theta = i\sin^5\theta \\ (i\sin\theta)^6 = i^6\sin^6\theta = -\sin^6\theta \\ (i\sin\theta)^7 = i^7\sin^7\theta = -i\sin^7\theta \end{cases}$

Donc :

$$\cos(7\theta) + i\sin(7\theta) = \cos^7\theta + 7i\cos^6\theta\sin\theta - 21\cos^5\theta\sin^2\theta - 35i\cos^4\theta\sin^3\theta + 35\cos^3\theta\sin^4\theta + 21i\cos^2\theta\sin^5\theta - 7\cos\theta\sin^6\theta - i\sin^7\theta$$

$$= \left(\cos^7\theta - 21\cos^5\theta\sin^2\theta + 35\cos^3\theta\sin^4\theta - 7\cos\theta\sin^6\theta\right) + i\left(7\cos^6\theta\sin\theta - 35\cos^4\theta\sin^3\theta + 21\cos^2\theta\sin^5\theta - \sin^7\theta\right)$$

Donc :

$$\sin(7\theta) = 7\cos^6\theta\sin\theta - 35\cos^4\theta\sin^3\theta + 21\cos^2\theta\sin^5\theta - \sin^7\theta$$

(et $\cos(7\theta) = \cos^7\theta - 21\cos^5\theta\sin^2\theta + 35\cos^3\theta\sin^4\theta - 7\cos\theta\sin^6\theta$)

Pour continuer à s'entraîner :

- $\cos(4\theta)$ et $\sin(4\theta)$?

$$\cos(4\theta) + i\sin(4\theta) = e^{4i\theta} = (e^{i\theta})^4 = \underbrace{(\cos\theta + i\sin\theta)^4}_{(a+b)^4 \text{ où } \begin{cases} a = \cos\theta \\ b = i\sin\theta \end{cases}}$$

Or $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

(Voir triangle de Pascal ci-dessus)

Donc :

$$\cos(4\theta) + i\sin(4\theta) = (\cos\theta)^4 + 4(\cos\theta)^3(i\sin\theta) + 6(\cos\theta)^2(i\sin\theta)^2 + 4\cos\theta\,(i\sin\theta)^3 + (i\sin\theta)^4$$

Or $\begin{cases} (i\sin\theta)^2 = i^2\sin^2\theta = -\sin^2\theta \\ (i\sin\theta)^3 = i^3\sin^3\theta = -i\sin^3\theta \\ (i\sin\theta)^4 = i^4\sin^4\theta = \sin^4\theta \end{cases}$

D'où :

$$\cos(4\theta) + i\sin(4\theta) = \cos^4\theta + 4i\cos^3\theta\sin\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta - 4i\cos\theta\sin^3\theta + \sin^4\theta$$

$$= \left(\cos^4\theta - 6\cos^2\theta \sin^2\theta + \sin^4\theta\right)$$
$$+ i\left(4\cos^3\theta \sin\theta - 4\cos\theta \sin^3\theta\right)$$

Donc : $\begin{cases} \cos(4\theta) = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta \\ \text{et} \\ \sin(4\theta) = 4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta \end{cases}$

- $\cos(6\theta)$? $\sin(6\theta)$?

$$\cos(6\theta) + i\sin(6\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^6$$
$$= (\cos\theta)^6 + 6(\cos\theta)^5(i\sin\theta) + 15(\cos\theta)^4(i\sin\theta)^2$$
$$+ 20(\cos\theta)^3(i\sin\theta)^3 + 15(\cos\theta)^2(i\sin\theta)^4$$
$$+ 6(\cos\theta)(i\sin\theta)^5 + (i\sin\theta)^6$$
$$= \cos^6\theta + 6i\cos^5\theta\sin\theta - 15\cos^4\theta\sin^2\theta$$
$$- 20i\cos^3\theta\sin^3\theta + 15\cos^2\theta\sin^4\theta$$
$$+ 6i\cos\theta\sin^5\theta - \sin^6\theta$$
$$= \left(\cos^6\theta - 15\cos^4\theta\sin^2\theta + 15\cos^2\theta\sin^4\theta - \sin^6\theta\right)$$
$$+ i\left(6\cos^5\theta\sin\theta - 20\cos^3\theta\sin^3\theta + 6\cos\theta\sin^5\theta\right)$$

D'où :

$$\begin{cases} \cos(6\theta) = \cos^6\theta - 15\cos^4\theta\sin^2\theta + 15\cos^2\theta\sin^4\theta - \sin^6\theta \\ \text{et} \\ \sin(6\theta) = 6\cos^5\theta\sin\theta - 20\cos^3\theta\sin^3\theta + 6\cos\theta\sin^5\theta \end{cases}$$

Exercice 7 :

- $\sin^3 x$?

D'après une des deux formules d'Euler : $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

Donc :

$$\sin^3 x = (\sin x)^3 = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \frac{1}{(2i)^3}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^3$$

or $(2i)^3 = 2^3 i^3 = -2^3 i$ et :

$(e^{ix} - e^{-ix})^3 = (a-b)^3$ où $a = e^{ix}$ et $b = e^{-ix}$

On a : $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$. Donc

$$(e^{ix}-e^{-ix})^3 = (e^{ix})^3 - 3(e^{ix})^2(e^{-ix}) + 3(e^{ix})(e^{-ix})^2 - (e^{-ix})^3$$
$$= e^{3ix} - 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} - e^{-3ix}$$
$$= e^{3ix} - 3e^{2ix-ix} + 3e^{ix-2ix} - e^{-3ix}$$
$$= e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}$$

Donc :

$$\sin^3 x = -\frac{1}{2^3 i}\left(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}\right)$$
$$= -\frac{1}{2^2} \times \frac{1}{2i}\left(e^{3ix} - e^{-3ix} - 3(e^{ix} - e^{-ix})\right)$$
$$= -\frac{1}{2^2}\left(\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i} - 3\,\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)$$
$$= -\frac{1}{4}\left(\sin(3x) - 3\sin x\right)$$

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin(3x)$$

- $\cos^5 x = ?$

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \quad \text{(Formule d'Euler)}$$

Donc : $\cos^5 x = (\cos x)^5 = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^5 = \frac{1}{2^5}(e^{ix}+e^{-ix})^5$

$= \frac{1}{2^5}(a+b)^5$ où $a = e^{ix}$ et $b = e^{-ix}$

Or : $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Donc :

$$(e^{ix}+e^{-ix})^5 = (e^{ix})^5 + 5(e^{ix})^4e^{-ix} + 10(e^{ix})^3(e^{-ix})^2 + 10(e^{ix})^2(e^{-ix})^3 + 5e^{ix}(e^{-ix})^4 + (e^{-ix})^5$$
$$= e^{5ix} + 5e^{4ix}e^{-ix} + 10e^{3ix}e^{-2ix} + 10e^{2ix}e^{-3ix} + 5e^{ix}e^{-4ix} + e^{-5ix}$$
$$= e^{5ix} + 5e^{4ix-ix} + 10e^{3ix-2ix} + 10e^{2ix-3ix} + 5e^{ix-4ix} + e^{-5ix}$$
$$= e^{5ix} + 5e^{3ix} + 10e^{ix} + 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} + e^{-5ix}$$

Donc :

$$\cos^5 x = \frac{1}{2^5}\left(e^{5ix} + 5e^{3ix} + 10e^{ix} + 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} + e^{-5ix}\right)$$
$$= \frac{1}{2^4} \times \frac{1}{2}\left(e^{5ix} + e^{-5ix} + 5(e^{3ix}+e^{-3ix}) + 10(e^{ix}+e^{-ix})\right)$$

$$= \frac{1}{2^4}\left(\frac{e^{5ix}+e^{-5ix}}{2} + 5\,\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2} + 10\,\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \right)$$

$$\cos^5 x = \frac{1}{16}\left(\cos(5x) + 5\cos(3x) + 10\cos x \right)$$

- $\underline{\sin(5x)\cos(6x)}$?

$$\sin(5x)\cos(6x) = \frac{e^{5ix}-e^{-5ix}}{2i} \times \frac{e^{6ix}+e^{-6ix}}{2}$$

$$= \frac{e^{5ix}e^{6ix}+e^{5ix}e^{-6ix} - e^{-5ix}e^{6ix} - e^{-5ix}e^{-6ix}}{2i\times 2}$$

$$= \frac{e^{11ix}+e^{-ix}-e^{ix}-e^{-11ix}}{2\times 2i}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{e^{11ix}-e^{-11ix}}{2i}}_{\sin(11x)} - \underbrace{\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}}_{\sin x} \right)$$

$$\sin(5x)\cos(6x) = \frac{1}{2}\sin(11x) - \frac{1}{2}\sin x$$

$\underline{\cos x \sin^4 x}$?

$$\cos x \sin^4 x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \times \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \right)^4$$

$$= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \times \frac{1}{(2i)^4} \times \left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^4$$

$$= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \times \frac{1}{2^4}\left((e^{ix})^4 - 4(e^{ix})^3e^{-ix} + 6(e^{ix})^2(e^{-ix})^2 - 4(e^{ix})(e^{-ix})^3 + (e^{-ix})^4 \right)$$

$$= \frac{1}{2^5}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\left(e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right)$$

$$= \frac{1}{2^5}\left(e^{5ix} - 4e^{3ix} + 6e^{ix} - 4e^{-ix} + e^{-3ix} + e^{3ix} - 4e^{ix} + 6e^{-ix} - 4e^{-3ix} + e^{-5ix} \right)$$

$$= \frac{1}{2^5}\left(e^{5ix}+e^{-5ix} - 3\left(e^{3ix}+e^{-3ix}\right) + 2\left(e^{ix}+e^{-ix}\right) \right)$$

$$= \frac{1}{2^4}\left(\frac{e^{5ix}+e^{-5ix}}{2} - 3\,\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2} + 2\,\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \right)$$

c'est à dire :

$$\cos x \sin^4 x = \frac{1}{16}\left(\cos(5x) - 3\cos(3x) + 2\cos x \right)$$

<u>Pour continuer à s'entraîner</u> :

- $\underline{\sin^4 x}$?

$$\sin^4 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \right)^4$$

$$= \frac{1}{(2i)^4}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^4$$

$$= \frac{1}{2^4}\left((e^{ix})^4 - 4(e^{ix})^3 e^{-ix} + 6(e^{ix})^2(e^{-ix})^2 - 4e^{ix}(e^{-ix})^3 + (e^{-ix})^4\right)$$

$$= \frac{1}{2^4}\left(e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right)$$

$$= \frac{1}{2^3}\left(\frac{e^{4ix}+e^{-4ix}}{2} - 4\,\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2} + \frac{6}{2}\right)$$

$$\sin^4 x = \frac{1}{8}\left(\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3\right)$$

- $\cos^6 x$?

$$\cos^6 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^6$$

$$= \frac{1}{2^6}\Big(e^{6ix} + 6e^{5ix}e^{-ix} + 15e^{4ix}e^{-2ix} + 20e^{3ix}e^{-3ix} + 15e^{2ix}e^{-4ix} + 6e^{ix}e^{-5ix} + e^{-6ix}\Big)$$

$$= \frac{1}{2^6}\left(e^{6ix} + 6e^{4ix} + 15e^{2ix} + 20 + 15e^{-2ix} + 6e^{-4ix} + e^{-6ix}\right)$$

$$= \frac{1}{2^5}\left(\frac{e^{6ix}+e^{-6ix}}{2} + 6\,\frac{e^{4ix}+e^{-4ix}}{2} + 15\,\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2} + \frac{20}{2}\right)$$

$$\cos^4 x = \frac{1}{32}\left(\cos(6x) + 6\cos(4x) + 15\cos(2x) + 10\right)$$

- $\cos^2 x \sin^3 x$? (On va commencer par utiliser une formule de duplication afin de simplifier un peu les calculs)

$$\cos^2 x \sin^3 x = (\cos x \sin x)^2 \sin x$$

$$= \left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right)^2 \sin x$$

$$= \frac{1}{2^2}\sin^2(2x)\sin x$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}\right)^2 \times \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{(2i)^3}\left(e^{4ix} - 2 + e^{-4ix}\right)\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)$$

$$= -\frac{1}{32i}\left(e^{5ix} - e^{3ix} - 2e^{ix} + 2e^{-ix} + e^{-3ix} - e^{-5ix}\right)$$

$$= -\frac{1}{16}\left(\frac{e^{5ix}-e^{-5ix}}{2i} - 2\,\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} - \frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i}\right)$$

$$= -\frac{1}{16}\left(\sin(5x) - 2\sin x - \sin(3x)\right)$$

C'est à dire :

$$\cos^2 x \sin^3 x = \frac{1}{8}\sin x + \frac{1}{16}\sin(3x) - \frac{1}{16}\sin(5x)$$