→ SI A3
→ 30/09/2020

TD n°2

MA0102 :

Exercice 19 :

2) Mq $\exists! \, x \in \mathbb{R}^+ , x^2 - x - 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = 9 > 0$

$x_1 = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$x_2 = \frac{1-3}{2} = -1 = -1 \notin \mathbb{R}^+$

Donc $\exists! \, x \in \mathbb{R}^+ \; (x = x_1)$ tel que $x^2 - x - 2 = 0$

2) Mq : $\exists \, x \in \mathbb{R} , x^2 + 2x = \pi$

$x^2 + 2x = \pi \Rightarrow x^2 + 2x - \pi = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \times (-\pi) = 4 + 4\pi > 0$

Donc il existe une solution réel à l'équation

Exercice 21 :

1) Mq : $\forall x \in \mathbb{R} / \{-1\}, \left[x \geq 1 \Rightarrow \frac{2}{1+x} \leq 1 \right]$

Démontrer que $\boxed{A \Rightarrow B}$ Vrai

* Par un raisonnement direct
  - (H) Supposons que A et vrai
  - (D)
  - (C) Donc B Vrai

* Par un raisonnement par contraposée
  - (H) Supposons que ¬B est vrai
  - (D)
  - (C) Donc ¬A et vrai

Rappel : $(A \Rightarrow B) \longmapsto \neg A$ ou B

$(\neg B \Rightarrow \neg A) \longmapsto (B$ ou $\neg A)$

* **Par l'absurde :**

(H) On suppose que A et vrai et B et faux

(D)

(C) On a une contradiction

1) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \left(x \geq 1 \Rightarrow \frac{2}{1+x} \leq 1\right)$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

(H) Supposons que $x \geq 1$

(D) Donc $x+1 \geq 2 > 0$

Donc $\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{2}$ Donc $\frac{2 \times 1}{x+1} \leq 2 \times \frac{1}{2}$ Donc $\frac{2}{x+1} \leq 2$

(C) Donc $\frac{2}{1+x} \leq 1$

2) Mq $\forall (x,y) \in]-1;+\infty[^2, \left(x < y \Rightarrow \frac{x+2}{x+1} > \frac{y+2}{y+1}\right)$

Soient $x, y \in]-1, +\infty[$

(H) Supposons que $x < y$

(C) Donc $\frac{x+2}{x+1} > \frac{y+2}{y+1}$

(D) On a : $\frac{x+2}{x+1} - \frac{y+2}{y+1} = \frac{(x+2)(y+1) - (y+2)(x+1)}{(x+1)(y+1)}$

$= \frac{(xy+x+2y+2) - (xy+y+2x+2)}{(x+1)(y+1)} = \frac{y-x}{(x+1)(y+1)}$

On a d'après l'hypothèse : $y - x > 0$

et $x+1 > 0$ et $y+1 > 0$ car $x > 1$ et $y > -1$

Donc $\frac{x+2}{x+1} - \frac{y+2}{y+1} > 0$

(C) Donc $\frac{x+2}{x+1} > \frac{y+2}{y+1}$

4) Mq $(x,y) \in]-1;+\infty[^2, \left(x \neq y \Rightarrow \frac{x+2}{x+} \neq \frac{y+2}{y+1}\right)$

Soit $(x,y) \in]-1+\infty[^2$

(H) Supposons que $\frac{x+2}{x+1} = \frac{y+2}{y+1}$

(D) Donc $\frac{x+2}{x+1} \times (x+1)(y+1) = \frac{y+2}{y+1} \times (x+1)(y+1)$

Donc $(x+2)(y+1) = (y+2)(x+1)$

Donc $x\cancel{y} + x + 2y + 2 = \cancel{y}x + y + 2x + 2$

Donc $y = x$

(C) Donc $x = y$

Exemple : Mq $\forall x \in \mathbb{R}, |x-2| < x^2 - 2x + 3$

Soit $x \in \mathbb{R}$

1er cas : $x \geq 2$

Alors $|x-2| = x-2$

Alors $x^2 - 2x + 3 - |x-2|$

$= x^2 - 2x + 3 - (x-2)$

$= x^2 - 3x + 5$

$\Delta = 9 - 20 = -11 < 0$

2ème cas : $x \leq 2$

Alors $|x-2| = -(x-2)$

Donc $x^2 - 2x + 3 - |x-2|$

$= x^2 - 2x + 3 + (x-2)$

$= x^2 - x + 1$

$\Delta = 1 - 4 < 0$

5) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \min(x,y) = \frac{1}{2}(x + y - |x-y|)$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$

1er cas : Si $x > y$:

Alors $\begin{cases} \min(x,y) = y \\ \frac{1}{2}(x+y-|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y-(x-y)) = y \end{cases}$

$|x-y| = x-y$ car $x > y$ (donc $x - y \geq 0$)

2eme cas : Si $x < y$

Alors $\begin{cases} \min(x, y) = x \\ 1/2\,(x+y-|x-y|) = 1/2\,(x+y-(-(x-y))) = x \end{cases}$

(car $x<y$ donc $x-y<0$ donc $|x-y| = -(x-y)$)

3eme cas : Si $x = y$

Alors : $\begin{cases} \min(x, y) = x \\ 1/2\,(x+y-|x-y|) = 1/2\,(x+y) = 1/2\,(\underbrace{x+x}_{x+y}) = x \end{cases}$

C) $\min(x, y) = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|)$

Exercice 12 :

1) a) $(\neg P \vee Q) \wedge (R \Rightarrow (P \Leftrightarrow Q))$

P	Q	R	¬P ou Q	$P \Leftrightarrow Q$	$R \Rightarrow (P \Leftrightarrow Q)$	a)
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	F	V	F
F	V	V	V	F	F	F
F	V	F	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V

b) $P \Rightarrow ((Q \vee R) \Rightarrow (R \Rightarrow \neg P))$

P	Q	R	$Q \vee R$	$R \Rightarrow \neg P$	$(Q \vee R) \Rightarrow (R \Rightarrow \neg P)$	b)
V	V	V	V	F	F	F
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	F	F	F
V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V

2)

P	Q	R	a)
V	V	V	F
V	V	F	F
V	F	V	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	F

a) $\neg P$ et Q et R