Séance du 19/11/20

Ex 11 :

$\boxed{\text{1ère méthode}}$

- Mq f est injective :

Soient $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$

(H) Supposons que $f(x,y) = f(x',y')$

(D) Alors $(x+y, x+2y) = (x'+y', x'+2y')$

Donc $\begin{cases} x+y = x'+y' & (L_1) \\ x+2y = x'+2y' & (L_2) \end{cases}$ (Egalité de 2 couples)

D'après $(L_2)-(L_1)$, on déduit : $\underbrace{(\cancel{x}+2y)-(\cancel{x}+y)}_{y} = \underbrace{(\cancel{x'}+2y')-(\cancel{x'}+y')}_{y'}$

c'est à dire : $y = y'$.

En remplaçant dans (L_1), on a : $x+\cancel{y'} = x'+\cancel{y'}$ (car $y=y'$)

Donc $x = x'$.

(C) Par conséquent $(x,y) = (x',y')$

- Mq f est surjective :

Soit $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$. Posons $(x,y) = (2X-Y, Y-X)$

Alors $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et :

$$f(x,y) = (x+y, x+2y) = ((2X-\cancel{Y}) + (\cancel{Y}-X), (\cancel{2X}-Y)+2(Y-\cancel{X}))$$
$$= (X, Y)$$

Donc (x,y) est un antécédent de (X,Y)

Donc tout élément $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$ admet un antécédent.

Comme f est surjective et injective, on en déduit que f est bijective. De plus (d'après le calcul de l'antécédent de (X,Y))

on a :
$$f^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(X,Y) \longmapsto (2X-Y, Y-X)$$

$$\left(f^{-1} : F \longrightarrow E \quad y \longmapsto f^{-1}(y) = \text{antécédent de } y \right)$$

$\boxed{\text{2ème méthode}}$

Posons $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \longmapsto g(x,y) = (2x-y, y-x)$$

Alors $\boxed{g \circ f = Id_{\mathbb{R}^2}}$ car $g \circ f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}(x,y) \longmapsto (g \circ f)(x,y) &= g(f(x,y)) \\ &= g(x+y, x+2y) \\ &= (2(x+y)-(x+2y), (x+2y)-(x+y)) \\ &= (x,y)\end{aligned}$$

et

$\boxed{f \circ g = Id_{\mathbb{R}^2}}$ car $f \circ g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}(x,y) \longmapsto (f \circ g)(x,y) &= f(g(x,y)) \\ &= f(2x-y, y-x) \\ &= ((2x-y)+(y-x), (2x-y)+2(y-x)) \\ &= (x,y)\end{aligned}$$

Donc f est bijective et $f^{-1} = g$

Exercice 14 :

1) f est injective. En effet :

Soient $x, x' \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Hypothèse : Supposons que $f(x) = f(x')$.

Démonstration :

Alors $\frac{x+1}{x-2} = \frac{x'+1}{x'-2}$; donc $(x+1)(x'-2) = (x'+1)(x-2)$ (Produit en croix)

donc $\cancel{xx'} - 2x + x' \cancel{-2} = \cancel{x'x} - 2x' + x \cancel{-2}$

donc $-2x - x = -2x' - x'$

donc $-3x = -3x'$

ce qui donne, en simplifiant par -3 :

Conclusion : $x = x'$ CQFD

f n'est pas surjective. En effet :

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f(x) - 1 = \frac{x+1}{x-2} - 1 = \frac{(\cancel{x}+1) - (\cancel{x}-2)}{x-2} = \frac{3}{x-2} \neq 0$

Autrement dit : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f(x) \neq 1$.

Donc le nombre 1, n'a pas d'antécédent par f CQFD

2) Posons : $f_1 : \mathbb{R} \setminus \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$x \longmapsto f_1(x) = f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

Déterminer $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}$ telle que : $g \circ f_1 = Id_{\mathbb{R} \setminus \{2\}}$

Rq : f_1 est bien une application (car étant donné que $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $x - 2 \neq 0$ et donc $\frac{x+1}{x-2}$ existe et on sait que $\frac{x+1}{x-2} \neq 1$, donc $f(x) \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$)

Posons $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$x \longmapsto g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

g est une application car :

Si $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ alors $x - 1 \neq 0$, donc $\frac{2x+1}{x-1}$ existe

De plus : $\frac{2x+1}{x-2} - 2 = \frac{\cancel{2x}+1 - 2(\cancel{x}-2)}{x-2} = \frac{5}{x-2} \neq 0$

donc $\frac{2x+1}{x-2} \neq 2$; donc $\frac{2x+1}{x-1} \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

De plus :

$$g\circ f_1 : \mathbb{R}\setminus\{2\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{2\}$$

$$x \longmapsto (g\circ f_1)(x) = g(f_1(x))$$

$$= g\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$$

$$= \frac{2\cdot\frac{x+1}{x-2}+1}{\frac{x+1}{x-2}-1}$$

$$= \frac{\frac{2(x+\cancel{1})+(x-\cancel{2})}{\cancel{x-2}}}{\frac{\cancel{x}+1-(\cancel{x}-2)}{\cancel{x-2}}}$$

$$= \frac{3x}{3} = x$$

Donc $g\circ f_1 = Id_{\mathbb{R}\setminus\{2\}}$

Chercher Ex 15 du TD N°4 : Caomlin

Terminer Ex 2 du TD N°5 : Quentin J., Riad, ~~Romain~~ Absent, Sara

FIN

Ex 2

2) m divise $n \longleftrightarrow \left[\exists k\in\mathbb{Z},\ n = km\right]$

$$\begin{cases} 2 \text{ divise } 6 \text{ car } 6 = \underset{\underset{3\in\mathbb{Z}}{\uparrow}}{k}\times 2 \\ \\ 5 \text{ ne divise } 6 \text{ car } \nexists k\in\mathbb{Z},\ 6 = k\times 5 \quad \left(k = \frac{6}{5}\notin\mathbb{Z}\right) \end{cases}$$