→ S1A3

→ 26/10/2020

MA0102

# TD n°3

## Exercice 5 :

2) Si $A \cup B = A \cap B$ alors $A = B$ Vrai

(H) Supposons que $\underbrace{A \cup B = A \cap B}_{X}$

(D) Mq $A \subset B$ :

On sait que $\underbrace{A \cap B}_{X} \subset B$

et $A \subset \underbrace{A \cup B}_{X}$

Donc $A \subset X$ et $X \subset A$

Donc d'après la transitivité de l'inclusion : $A \subset B$

Mq $B \subset A$ :

On sait (d'après le cours) que $B \subset A \cup B$ et $A \cap B \subset A$

Donc par transitivité de l'inclusion, $B \subset A$.

(C) Donc $A = B$

## Exercice 7 :

1) Mq : $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, $A \cap (A \cup B) = A \cup (A \cap B) = A$

Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$

On a : $A \cap (A \cup B) = (A \cap A) \cup (A \cup B)$ (distributivité de $\cap$ sur $\cup$)

$= A \cup (A \cup B)$ (cours : $X \cap X = X$)

Mq $A \subset A \cap (A \cup B)$ :

D'après le cour :

$$\begin{cases} X \subset X \\ X \subset X \cup Y \end{cases}$$

Donc ici :

$$\begin{cases} A \subset A \\ A \subset A \cup B \end{cases}$$

Par conséquent, $A \subset A \cap (A \cup B)$

$((X \subset Y \text{ et } X \subset Z) \Leftrightarrow X \subset Y \cap Z)$ Théorème 1.3B

Mq $A \cap (A \cap B) \subset A$.

(cours : $X \cap Y \subset X$)

et $X \cap Y \subset Y$)

Résulte du cours

Donc $A = A \cap (A \cup B)$

Autre Méthode :

D'après le cours : $X \subset Y \Leftrightarrow X \cup Y = Y$ théorème 2, 2) c)

Prenons $\begin{cases} X = A \cap B \\ Y = A \end{cases}$

Donc $(A \cap B) \cup A = A$

2)

b) $\left[\begin{array}{l} \text{Mq : } \forall A, B, C \in \mathcal{P}(E) \\ A \cup [B \cap (A \cup C)] = A \cup (B \cap C) \end{array}\right.$

$A \cup [(B \cap A) \cup (B \cap C)]$

$(A \cup (B \cap A)) \cup (B \cap C)$

$A \cup (B \cap C)$

c) $\left[\begin{array}{l} \text{Mq } \forall A, B, C \in \mathcal{P}(E) \\ (A \cup B = A \cap B) \Leftrightarrow (B \subset A \text{ et } A \subset C) \end{array}\right.$

Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$

Mq : $(A \cup B = A \cap C) \Rightarrow (B \subset A \text{ et } A \subset C)$

Mq : $(B \subset A \text{ et } A \subset C) \Rightarrow (A \cup B = A \cap C)$

H Supposons que $B \subset A$ et $A \subset C$

D Alors $\begin{cases} A \cup B = A & (\text{car } B \subset A) \\ A \cap C = A & (\text{car } A \subset A \end{cases}$

C Donc $(A \cup B) = (A \cap C)$

Mq $(A \cup B = A \cap C) \Rightarrow (B \subset A$ et $A \subset C)$

(H) Supposons que $A \cup B = A \cap C$

(D) Mq $B \subset A$

D'après le cours : $\begin{cases} B \subset \boxed{A \cup B} \\ \boxed{A \cap C} \subset A \end{cases}$

Donc $B \subset X$ et $X \subset A$. Donc $B \subset A$ (transitivité de $\subset$)

Mq $A \subset C$ :

D'après le cours $\begin{cases} A \subset \boxed{A \cup B} \\ \text{et} \\ \boxed{A \cap C} \subset C \end{cases}$

Donc comme $\underbrace{A \cup B = A \cap C}_{X}$, par transitivité de $\subset$ on déduit que $A \subset C$

## Exercice 8 :

Mq $\forall (A, A', B, B') \in \mathcal{P}(E)^4$, $(A \subset B$ et $A' \subset B') \Rightarrow (A \cup A' \subset B \cup B'$ et $A \cap A' \subset B \cap B')$

Mq : $(A \cup A') \subset (B \cup B')$

(H) Supposons que $A \subset B$ et $A' \subset B'$

(D) On $\begin{cases} A \subset B & \text{donc } A \cup B = B \\ A' \subset B' & \text{donc } A' \cup B' = B' \end{cases}$

Donc $B \cup B' = A \cup B \cup A' \cup B'$

$= (A \cup A') \cup (B \cup B')$

On $(A \cup A') \subset (A \cup A') \cup (B \cup B')$

C'est à dire $(A \cup A') \subset (B \cup B')$ (car $(A \cup A') \cup (B \cup B') = (B \cup B')$)

Mq $A \cap A' \subset B \cap B'$ :

On a $A \subset B$ donc $A \cap B = A$ et on a $A' \subset B'$ donc $A' \cap B' = A'$

Donc : $A \cap A' = (A \cap B) \cap (A' \cap B')$
$= A \cap B \cap A' \cap B'$
$= (A' \cap A) \cap (B \cap B')$
$(A \cap A') \cap (B \cap B') \subset (A \cap A')$
(car d'après le cours $X \cap Y \subset Y$)
D'après ①
$(A \cap A') \cap (B \cap B') = (A \cap A')$
Donc en remplaçant dans ②
On obtient : $(A \cap A') \subset (B \cap B')$

Autre Méthode :

(H) Supposons que $A \subset B$ et $A' \subset B'$

D Mq : $(A \cup A') \subset (B \cup B')$

On a $A \subset B$ ; donc $A \subset B \cup B'$

On a $A' \subset B'$ ; donc $A' \subset B \cup B'$

Donc $(A \cup A') \subset (B \cup B')$

Si $X \subset Y$ alors comme $Y \subset Y \cup Z$
On en déduit : $X \subset Y \cup Z$

Mq $A \cap A' \subset B \cap B'$

On a $\begin{cases} \underbrace{A \cap A' \subset A}_{\text{cours}} \text{ et } \underbrace{A \subset B}_{H} & \text{donc } A \cap A' \subset B \\ \underbrace{A \cap A' \subset A'}_{\text{cours}} \text{ et } \underbrace{A' \subset B'}_{H} & \text{donc } A \cap A' \subset B' \end{cases}$

Th 1 3/6
$(X \subset Y$ et $X \subset Z) \Leftrightarrow$
$X \subset (Y \cap Z)$

Donc $(A \cap A') \subset (B \cap B')$

## Exercice 10 :

a) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

$A \setminus (B \cap C) = A \cap C_E(B \cap C)$ $\quad (X \setminus Y = X \cap C_E^Y)$

$= A \cap (C_E B \cup C_E C)$ (loi de Morgan)

$= (A \cap C_E B) \cup (A \cap C_E C)$ (distributivité de $\cap$ sur $\cup$)

$$= (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \qquad \left( X \cap \complement_E^Y = X \setminus Y \right)$$

b) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

On a : $A \cap (B \setminus C) = A \cap (B \cap \complement_E^C) = A \cap B \cap \complement_E^C$

et

$(A \cap B) \setminus (A \cap C) = A \cap B \cap \complement_E^{(A \cap B)}$ $\left( x \setminus y = x \cap \complement_E^y \right)$

$= A \cap B \cap \left( \complement_E^A \cup \complement_E^C \right)$ (De Morgan)

$= \left( A \cap B \cap \complement_E^A \right) \cup \left( A \cap B \cap \complement_E^C \right)$ (Distributivité de $\cap$ sur $\cup$)

$= \emptyset \cup \left( A \cap B \cap \complement_E^C \right)$

$= A \cap B \cap \complement_E^C$