Séance du 10/11/20

Exercice 4 :

- Compositions de la forme $f_k \circ f_1$ $(k \in [[1,6]])$

Pour que $f_k \circ f_1$ existe il faut et suffit que $\mathbb{R}^2$ (ensemble d'arrivée de f_1) soit inclus dans l'ensemble de départ de f_k. Donc

Les seules applications de la forme $f_k \circ f_1$ qui existent sont $f_3 \circ f_1$ et $f_4 \circ f_1$.

De plus : $f_3 \circ f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \underbrace{f_3(f_1(x))}_{(f_3 \circ f_1)(x)}$ et $f_4 \circ f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $x \longmapsto \underbrace{f_4(f_1(x))}_{(f_4 \circ f_1)(x)}$

- Compositions de la forme $f_k \circ f_2$ $(k \in [[1,6]])$

Pour que $f_k \circ f_2$ existe il faut et suffit que $\mathbb{R}^2$ (ensemble d'arrivée de f_2) soit inclus dans l'ensemble de départ de f_k. Donc

Les seules applications de la forme $f_k \circ f_2$ qui existent sont $f_1 \circ f_2$, $f_2 \circ f_2$ et $f_6 \circ f_2$.

De plus : $f_1 \circ f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $x \longmapsto \underbrace{f_1(f_2(x))}_{(f_1 \circ f_2)(x)}$, $f_2 \circ f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \underbrace{f_2(f_2(x))}_{(f_2 \circ f_2)(x)}$ et $f_6 \circ f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $x \longmapsto \underbrace{f_6(f_2(x))}_{(f_6 \circ f_2)(x)}$

- Compositions de la forme $f_k \circ f_3$ $(k \in [[1,6]])$

Pour que $f_k \circ f_3$ existe il faut et suffit que $\mathbb{R}$ (ensemble d'arrivée de f_3) soit inclus dans l'ensemble de départ de f_k. Donc

Les seules applications de la forme $f_k \circ f_3$ qui existent sont $f_1 \circ f_3$, $f_2 \circ f_3$ et $f_6 \circ f_3$.

De plus : $f_1 \circ f_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $x \longmapsto \underbrace{f_1(f_3(x))}_{(f_1 \circ f_3)(x)}$, $f_2 \circ f_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \underbrace{f_2(f_3(x))}_{(f_2 \circ f_3)(x)}$ et $f_6 \circ f_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $x \longmapsto \underbrace{f_6(f_3(x))}_{f_6(f_3(x))}$

- <u>Compositions de la forme $f_k \circ f_4$ ($k \in [[1,6]]$)</u>

Pour que $f_k \circ f_4$ existe il faut et suffit que $\mathbb{R}^2$ (ensemble d'arrivée de f_4) soit inclus dans l'ensemble de départ de f_k. Donc

Les seules applications de la forme $f_k \circ f_4$ qui existent sont $f_3 \circ f_4$ et $f_4 \circ f_4$.

De plus : $f_3 \circ f_4 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \underbrace{f_3(f_4(x))}_{(f_3 \circ f_4)(x)}$ et $f_4 \circ f_4 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $x \longmapsto \underbrace{f_4(f_4(x))}_{(f_4 \circ f_4)(x)}$

- <u>Compositions de la forme $f_k \circ f_5$ ($k \in [[1,6]]$)</u>

Pour que $f_k \circ f_5$ existe il faut et suffit que $\mathbb{R}^2$ (ensemble d'arrivée de f_5) soit inclus dans l'ensemble de départ de f_k. Donc

Les seules applications de la forme $f_k \circ f_5$ qui existent sont $f_3 \circ f_5$ et $f_4 \circ f_5$.

De plus : $f_3 \circ f_5 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \underbrace{f_3(f_5(x))}_{(f_3 \circ f_5)(x)}$ et $f_4 \circ f_5 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $x \longmapsto \underbrace{f_6(f_5(x))}_{(f_4 \circ f_5)(x)}$

- <u>Compositions de la forme $f_k \circ f_6$ ($k \in [[1,6]]$)</u>

Pour que $f_k \circ f_6$ existe il faut et suffit que $\mathbb{R}_+$ (ensemble d'arrivée de f_6) soit inclus dans l'ensemble de départ de f_k. Donc

Les seules applications de la forme $f_k \circ f_6$ qui existent sont $f_1 \circ f_6$, $f_2 \circ f_6$ et $f_6 \circ f_6$

De plus : $f_1 \circ f_6 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $x \longmapsto \underbrace{f_1(f_6(x))}_{(f_1 \circ f_6)(x)}$, $f_2 \circ f_6 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \underbrace{f_2(f_6(x))}_{(f_2 \circ f_6)(x)}$ et $f_6 \circ f_6 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $x \longmapsto \underbrace{f_6(f_6(x))}_{(f_6 \circ f_6)(x)}$

<u>Attention</u> : $\mathbb{R} \not\subset \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2 \not\subset \mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ ...

Exercice 5 :

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = 2x^2 - 4x - 1$; $x \longmapsto g(x) = x^2$

1) (h et k applications affines) $\Longrightarrow$ ($k \circ h$ est une application affine)

$u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $(a, b \in \mathbb{R})$

$x \longmapsto u(x) = ax + b$

représentation graphique de u : Droite d'équation $y = ax + b$

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 5x + 1$ est affine

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x$ //

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2 + x$ n'est pas affine

(H) Supposons que h et k soient deux applications affines. Alors il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que

$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto h(x) = ax + b$ et $k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto k(x) = cx + d$

(D) Alors $k \circ h$ existe et

$k \circ h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto (k \circ h)(x) = k(h(x)) = k(ax + b)$$
$$= c(ax + b) + d$$
$$= ac\, x + (bc + d)$$
$$= A\, x + B$$

où $A = ac \in \mathbb{R}$ et $B = bc + d \in \mathbb{R}$

(C) Donc $k \circ h$ est une application affine.

2) a) Existe-t-il h et k affines telles que : $f = h \circ g \circ k$?

$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 2x - 3$ et $k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x - 1$

$h \circ g \circ k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto (h \circ g \circ k)(x) = h(g(k(x)))$$
$$= h(g(x - 1))$$
$$= h((x-1)^2)$$
$$= 2(x-1)^2 - 3 = 2(x^2 - 2x + 1) - 3$$
$$= 2x^2 - 4x - 1 = f(x)$$

Oui : il en existe.

Correction

De façon générale : $\forall a \neq 0$,

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto h(x) = \frac{2}{a^2}x - 3 \qquad k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto k(x) = ax - a$$

Posons : $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto h(x) = ax+b$ et $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto k(x) = \alpha x + \beta$

Dire qu'il existe h, k affines telles que $f = h \circ g \circ k$ revient à dire qu'il existe a, b, α, β tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (h \circ g \circ k)(x)$$

or, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}(h \circ g \circ k)(x) &= h(g(k(x))) \\ &= h(g(\alpha x + \beta)) \\ &= h((\alpha x + \beta)^2) \\ &= a(\alpha x + \beta)^2 + b \\ &= a\alpha^2 x^2 + 2a\alpha\beta x + a\beta^2 + b\end{aligned}$$

Donc le problème revient à chercher s'il existe $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.q

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{2x^2 - 4x - 1}_{f(x)} = \underbrace{a\alpha^2 x^2 + 2a\alpha\beta x + a\beta^2 + b}_{(h \circ g \circ k)(x)}$$

ce qui revient à chercher s'il existe $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.q

$$(S) \begin{cases} a\alpha^2 = 2 & (L_1) \\ 2a\alpha\beta = -4 & (L_2) \\ a\beta^2 + b = -1 & (L_3) \end{cases}$$

(car 2 polynômes sont égaux sur $\mathbb{R}$ ssi ils ont les mêmes coefficients)

or $(S) \iff \begin{cases} a\alpha^2 = 2 \\ a\alpha^2\beta = -2\alpha \\ a\beta^2 + b = -1 \end{cases}$ (on a multiplié (L_2) par $\alpha/2$)

$\iff \begin{cases} a\alpha^2 = 2 \\ 2\beta = -2\alpha \\ a\beta^2 + b = -1 \end{cases}$ (on a remplacé $a\alpha^2$ dans (L_2) par 2)

$\iff \begin{cases} a\alpha^2 = 2 \\ \beta = -\alpha \\ b = -1 - a\beta^2 \end{cases}$ (simplification de (L_2) par 2)

$\iff \begin{cases} a\alpha^2 = 2 \\ \beta = -\alpha \\ b = -1 - a(-\alpha)^2 = -1 - a\alpha^2 = -1 - 2 = -3 \end{cases}$ (on a remplacé β par $-\alpha$ dans L_3, puis remplacé $a\alpha^2$ par 2)

$$\iff \begin{cases} a\alpha^2 = 2 \\ \beta = -\alpha \\ b = -1 - a(-\alpha)^2 = -1 - a\alpha^2 = -1 - 2 = -3 \end{cases}$$

(on a remplacé β par $-\alpha$ dans L_3, puis remplacé $a\alpha^2$ par 2)

$$\iff \begin{cases} a = 2/\alpha^2 \\ \beta = -\alpha \\ b = -3 \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{R}^*)$$

Il existe donc une infinité d'applications affines h et k telles que $f = h \circ g \circ k$.

Ce sont toutes applications h et k de la forme :

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto h(x) = \frac{2}{\alpha^2}x - 3 \qquad \text{et} \qquad k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto k(x) = \alpha x - \alpha$$

où $\alpha \in \mathbb{R}^*$ (Il y a donc une infinité de telles applications)

(Par exemple, on peut choisir :

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto 2x - 3 \qquad \text{et} \qquad k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x - 1 \qquad (\text{cas où } \alpha = 1)$$

ou

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{2}x - 3 \qquad \text{et} \qquad k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto 2x - 2 \qquad (\text{cas où } \alpha = 2)$$

ou ....)

Exercice 6 :

1.) Dans cette question, pour chaque application $f : E \to F$, on a choisi une couleur pour l'ensemble de départ et ses éléments (E) et une autre pour l'ensemble d'arrivée et ses éléments (F)

- $\boxed{\text{Pour } f_1}$

f_1 est injective : En effet, $\begin{cases} 1 \text{ admet } 0 \text{ antécédent} \\ 8 \text{ '' } 1 \text{ ''} \\ -1 \text{ '' } 1 \text{ ''} \\ 12 \text{ '' } 1 \text{ ''} \end{cases}$

Donc tout élément de $\{1, 8, -1, 12\}$ admet au plus un antécédent.

f_1 n'est pas surjective : car 1 n'a pas d'antécédent.

f_1 n'est pas bijective : car f_1 n'est pas surjective.

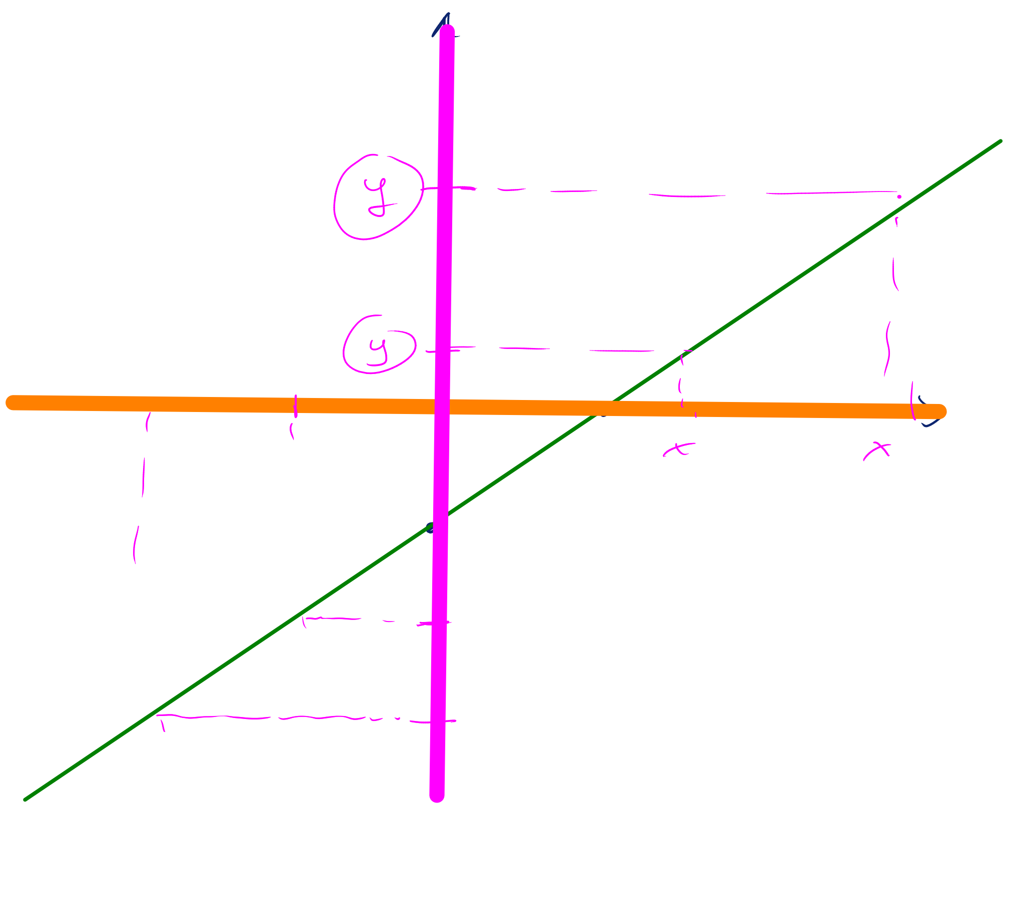
- $\boxed{\text{Pour } f_2}$

f_2 n'est pas injective : car 8 admet au moins deux antécédents (En fait, 8 admet une infinité d'antécédents) : $\underbrace{f(0)}_{8} = \underbrace{f(1)}_{8}$ et $0 \neq 1$

f_2 n'est pas surjective : car 0 n'a pas d'antécédent (puisque : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\underbrace{f(x)}_{8} \neq 0$)

f_2 n'est pas bijective : car f_2 n'est pas surjective.

- $\boxed{\text{Pour } f_3}$



• $\boxed{\text{Pour } f_3}$

f_3 est injective : En effet :

Soient $x, x' \in \mathbb{R}$

(H) Supposons que $f_3(x) = f_3(x')$

(D) Alors $3x - \cancel{7} = 3x' - \cancel{7}$; donc $\cancel{3}x = \cancel{3}x'$; donc :

(C) $x = x'$

f_3 est surjective : En effet

Soit $y \in \mathbb{R}$. Posons $x = \frac{1}{3}(y+7)$. Alors $x \in \mathbb{R}$ et

$f_3(x) = 3x - 7 = 3\left(\frac{1}{3}(y+7)\right) - 7 = y$

Donc : $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f_3(x) = y$

f_3 est bijective : car f_3 est injective et surjective.

• $\boxed{\text{Pour } f_7}$

f_7 n'est pas injective : Choisissons $x = 2$ et $x' = -2$. Alors :

$$\begin{cases} x, x' \in \mathbb{R} \\ x \neq x' \\ \underbrace{f_7(x)}_{4} = \underbrace{f_7(x')}_{4} \end{cases}$$

Il existe donc $x, x' \in \mathbb{R}$ tels que $x \neq x'$ et $f_7(x) = f_7(x')$

Donc f_7 n'est pas injective.

f_7 n'est pas surjective : Choisissons $y = -1$. Alors :

$y \in \mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ \underbrace{f_7(x)}_{\oplus} \neq \underbrace{y}_{\ominus \text{ strictement}}$

Donc : $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_7(x) \neq y$

Donc f_7 n'est pas surjective

FIN

A chercher : Ex 6 1) ; Ex 8 ; Ex 12

Notation : Id_E (voir p 2 cours)

$$Id_E : E \longrightarrow E$$
$$x \longmapsto Id_E(x) = x$$

Application "identique de E" ou Application "identité de E"

$$Id_{\mathbb{R}^+} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$x \longmapsto Id_{\mathbb{R}^+}(x) = x$$