MA0101

Licence de Mathématiques - L1
version du 28 août 2020
Corrigé proposé par *julien.rouyer@univ-reims.fr*
Merci de signaler à cette adresse toute erreur ou coquille présente dans ce document

Université de Reims Champagne-Ardenne
Faculté de Sciences Exactes et Naturelles

CHAPITRE 2

CORRECTIONS DES EXERCICES

Exercice 1

Remarques préliminaires :

Pour déterminer l'ensemble de définition d'une fonction, on doit systématiquement se préoccuper des trois points suivants, car ce sont ceux qu'on rencontre le plus régulièrement :

- Un **quotient** est défini quand son dénominateur est non nul.
- Une **racine carrée** est définie quand ce à quoi elle s'applique (ce qu'elle contient) est positif ou nul.
- Un **logarithme** (néperien, binaire, décimal ou autre) est défini quand ce à quoi il s'applique (ce qu'il contient) est strictement positif.

Il faudra toutefois avoir en tête que d'autres fonctions ne sont pas définies sur $\mathbb{R}$: principalement la fonction **tangente** (notée tan, voir l'exercice 8) mais également les fonctions **arcsin, arccos, argch** et **argth** que vous rencontrerez peut-être plus tard (nous n'en parlerons pas en MA0101).

- On note souvent $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition d'une fonction f mais dans la suite on notera $\mathcal{D}_n$ l'ensemble de définition et $\mathcal{D}'_n$ l'ensemble de dérivabilité de la fonction f_n, où $n \in \mathbb{N}$.
- On utilise la notation ":=" pour dire "est égal par définition à"
- Une fonction f est paire (respectivement impaire) quand chacune des deux conditions suivantes sont respectées :
  1) $\mathcal{D}_f$ est **symétrique par rapport à** 0 (c'est à dire $x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow -x \in \mathcal{D}_f$) : il est inutile de chercher à vérifier le point suivant si celui-ci ne l'est pas !
  2) $\forall x \in \mathcal{D}_f\ ,\ f(-x) = f(x)$ (respectivement $f(-x) = -f(x)$)

---

1) La seule condition à vérifier est que le dénominateur $x + 5$ soit non nul.

$$x + 5 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -5$$

$$\mathcal{D}_1 = \mathbb{R}\backslash\{-5\} =]-\infty; -5[\cup]-5; +\infty[$$

$\mathcal{D}_1$ n'est pas symétrique par rapport à 0 (car $5 \in \mathcal{D}_1$ mais $-5 \notin \mathcal{D}_1$) donc f_1 n'est ni paire ni impaire.

---

2) Ici encore, la seule condition à vérifier est que le dénominateur soit non nul.
On peut remarquer que $1 \times 4 = 4$ et $1 + 4 = 5$ et obtenir ainsi directement la factorisation $x^2 + 5x + 4 = (x + 1)(x + 4)$

On peut aussi calculer le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$ du trinôme $ax^2 + bx + c$ avec ici $\begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \\ c = 4 \end{cases}$

et en déduire les deux racines $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5 - \sqrt{9}}{2} = -4$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5 + \sqrt{9}}{2} = -1$

puis obtenir la factorisation $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = (x + 1)(x + 4)$

On a donc

$$x^2 + 5x + 4 \neq 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x + 4) \neq 0 \Leftrightarrow x \notin \{-4; -1\}$$

$$\mathcal{D}_2 = \mathbb{R}\backslash\{-4; -1\} =]-\infty; -4[\cup]-4; -1[\cup]-1; +\infty[$$

$\mathcal{D}_2$ n'est pas symétrique par rapport à 0 (car $4 \in \mathcal{D}_2$ mais $-4 \notin \mathcal{D}_2$. On peut aussi remarquer que $1 \in \mathcal{D}_2$ mais $-1 \notin \mathcal{D}_2$) donc f_2 n'est ni paire ni impaire.

---

3) Ici, le contenu de la racine doit être positif ou nul.
On utilise l'identité remarquable (à connaître par cœur) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ pour factoriser $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ et en déduire les racines 2 et -2 de $x^2 - 4$ puis, si on veut, le tableau de signe de $x^2 - 4$:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
signe de $x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x+2$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

On peut aussi utiliser la règle suivante (plus rapide) :

Le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a SAUF entre ses éventuelles racines réelles x_1 et x_2.

Ici $a = 1 > 0$

$$x^2 - 4 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \notin]-2;2[$$

$$\mathcal{D}_3 = \mathbb{R}\backslash]-2;2[=]-\infty;-2] \cup [2;+\infty[$$

$\mathcal{D}_3$ est symétrique par rapport à 0 et

$$\forall x \in \mathcal{D}_3, f_3(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 4} = \sqrt{x^2 - 4} = f_3(x)$$

La fonction f_3 est donc paire.

---

4) Ici non seulement le dénominateur $x^2 + 5x + 4$ doit être non nul mais le quotient $\dfrac{2-3x-2x^2}{x^2+5x+4}$ doit également être positif ou nul.
Il faut donc étudier le signe du numérateur, celui du dénominateur et en déduire le signe du quotient.
Le numérateur $2 - 3x - 2x^2 = -2x^2 - 3x + 2$ a pour racines $\dfrac{1}{2}$ et -2 (le détail des calculs est laissé à votre discrétion) et il est positif ou nul sur $\left[-2;\dfrac{1}{2}\right]$
Le dénominateur $x^2 + 5x + 4$ est strictement positif sur $\mathbb{R}\backslash[-4;-1]$ (voir la question 2))
On obtient le tableau de signe :

x	$-\infty$		-4		-2		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $2-3x-2x^2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
signe de x^2+5x+4		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $\frac{2-3x-2x^2}{x^2+5x+4}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Ainsi :

$$\frac{2-3x-2x^2}{x^2+5x+4} \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \mathcal{D}_4 =]-4;-2] \cup \left]-1;\frac{1}{2}\right]$$

$\mathcal{D}_4$ n'étant pas symétrique par rapport à 0, f_4 n'est ni paire ni impaire.

---

5) On reprend les résultats précédents mais cette fois-ci on a les deux conditions :

$$\begin{cases} 2 - 3x - 2x^2 \geqslant 0 \\ x^2 + 5x + 4 > 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{D}_5 = \left]-1;\frac{1}{2}\right]$$

$\mathcal{D}_5$ n'étant pas symétrique par rapport à 0, f_5 n'est ni paire ni impaire.

---

6) Le contenu du logarithme doit être strictement positif :

$$-x > 0 \Leftrightarrow x < 0$$

$$\mathcal{D}_6 =]-\infty; 0[= \mathbb{R}_-^*$$

$\mathcal{D}_6$ n'étant pas symétrique par rapport à 0, f_6 n'est ni paire ni impaire.

---

7) Le contenu du logarithme doit être strictement positif :

$$3 + x > 0 \Leftrightarrow x > -3$$

$$\mathcal{D}_7 =]-3; +\infty[$$

$\mathcal{D}_7$ n'étant pas symétrique par rapport à 0, f_7 n'est ni paire ni impaire.

---

8) Le contenu du logarithme doit être strictement positif. **Une valeur absolue est toujours positive ou nulle**. La seule condition ici est donc qu'elle soit non nulle.

$$|x+5| > 0 \Leftrightarrow |x+5| \neq 0 \Leftrightarrow x+5 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -5$$

$$\mathcal{D}_8 =]-\infty; -5[\cup]-5; +\infty[= \mathbb{R}\backslash\{-5\}$$

$\mathcal{D}_8$ n'étant pas symétrique par rapport à 0, f_8 n'est ni paire ni impaire.

---

9) Ici, puisque on a deux logarithmes, on a la double condition :

$$\begin{cases} x > 0 \\ 2 - \ln x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < e^2 \text{ (par croissance de la fonction exponentielle sur } \mathbb{R}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \mathcal{D}_9 = \left]0; e^2\right[$$

$\mathcal{D}_9$ n'étant pas symétrique par rapport à 0, f_9 n'est ni paire ni impaire.

---

10) Ici on a la double condition

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{x-3} > 0 \\ \ln\left(\dfrac{x-1}{x-3}\right) \geqslant 0 = \ln(1) \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x-3} \geqslant 1 \text{ car la fonction logarithme néperien est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$\Leftrightarrow \dfrac{x-3+2}{x-3} = 1 + \dfrac{2}{x-3} \geqslant 1 \Leftrightarrow \dfrac{2}{x-3} \geqslant 0 \Leftrightarrow x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3 \Leftrightarrow x \in \mathcal{D}_{10} =]3; +\infty[$$

On peut aussi résoudre l'inéquation $\dfrac{x-1}{x-3} \geqslant 1$ grâce au tableau de variations

x	$-\infty$		3		$+\infty$
signe de $\left(\frac{x-1}{x-3}\right)' = \frac{-2}{(x-3)^2}$		$-$	‖	$-$	
variations de $x \mapsto \frac{x-1}{x-3}$	1^-	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1^+

$\mathcal{D}_{10}$ n'étant pas symétrique par rapport à 0, f_{10} n'est ni paire ni impaire.

---

11) Le contenu de la racine doit être positif mais comme cette racine est au dénominateur, son contenu doit de plus être non nul.

$$\mathcal{D}_{11} =]0; +\infty[= \mathbb{R}_+^*$$

$\mathcal{D}_{11}$ n'étant pas symétrique par rapport à 0, f_{11} n'est ni paire ni impaire.

---

12)

$$\sqrt{5}^x := e^{x\ln\sqrt{5}} = e^{\frac{x\ln 5}{2}}$$

La fonction exponentielle est déifnie sur $\mathbb{R}$ donc $\mathcal{D}_{12} = \mathbb{R}$.
$\mathcal{D}_{12} = \mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 mais f_{12} n'est ni paire ni impaire car par exemple : $f_{12}(-1) \neq \pm f_{12}(1)$.

---

13)

$$x^{\sqrt{5}} := e^{\sqrt{5}\ln x}$$

La fonction logarithme néperien est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\mathcal{D}_{13} = \mathbb{R}_+^*$.
$\mathcal{D}_{13} = \mathbb{R}_+^*$ n'est pas symétrique par rapport à 0 et donc f_{13} n'est ni paire ni impaire.

---

14)

$$x^x := e^{x\ln x}$$

$\mathcal{D}_{14} = \mathbb{R}_+^*$ n'est pas symétrique par rapport à 0 et donc f_{14} n'est ni paire ni impaire.
N.B. (facultatif) : On pourrait en fait étendre $\mathcal{D}_{14}$ à $\mathbb{R}_+^* \cup \left\{ -\dfrac{p}{q} \quad / \quad p \in \mathbb{N}^*; q \in \mathbb{N}^* \text{ impair}\right\}$, avec la convention d'écriture $x^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{x}$. Par exemple, pour $x = -\dfrac{2}{3}$, on a : $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\frac{4}{9}}} = \sqrt[3]{\dfrac{9}{4}}$
Et il en va de même pour tous les nombres du type $-\dfrac{p}{q}$ donnés ci-dessus :

$$\left(-\frac{p}{q}\right)^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{\left(-\frac{p}{q}\right)^{\frac{p}{q}}} = \frac{1}{\sqrt[q]{\left(-\frac{p}{q}\right)^p}} = \frac{1}{\sqrt[q]{(-1)^p\frac{p^p}{q^p}}} = (-1)^p\sqrt[q]{\frac{q^p}{p^p}}$$

Ces éléments rationnels sont tout de même en nombre infini et grâce à eux on peut approcher tout réel négatif aussi près qu'on le veut (on dit qu'ils forment une partie dense de $\mathbb{R}_-^*$).
Nous n'évoquerons plus cette subtilité par la suite (voir la question 15) ci-dessous puis les fonctions f_4, f_5 et f_6 de l'exercice 10)

---

15)

$$(1+4x)^x := e^{x\ln(1+4x)} \quad \text{est défini } \Leftrightarrow 1+4x > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{4}$$

$\mathcal{D}_{15} = \left]-\dfrac{1}{4}; +\infty\right[$ n'est pas symétrique par rapport à 0 et donc f_{15} n'est ni paire ni impaire.

Pour continuer à s'entraîner : les réponses

$$\begin{cases} \mathcal{D}_1 = \mathbb{R}\backslash\{-1;0;1\} =]-\infty;-1[\cup]-1;0[\cup]0;1[\cup]1;+\infty[& \text{fonction ni paire ni impaire} \\ \mathcal{D}_2 = \mathbb{R}\backslash]-1;1[=]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[& \text{fonction paire} \\ \mathcal{D}_3 = \left]-\frac{3}{2}\,;\,2-\sqrt{3}\right[\bigcup \left]2+\sqrt{3}\,;\,+\infty\right[& \text{fonction ni paire ni impaire} \\ \mathcal{D}_4 = \left]0;e^3\right] & \text{fonction ni paire ni impaire} \\ \mathcal{D}_5 =]\ln 2\,;\,+\infty[& \text{fonction ni paire ni impaire} \\ \mathcal{D}_6 = \mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[& \text{fonction ni paire ni impaire} \\ \mathcal{D}_7 = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3} \quad / \quad k\in\mathbb{Z}\right\} & \text{fonction paire} \\ \mathcal{D}_8 =]-\infty\,;\,-1[\cup]0\,;\,2[& \text{fonction ni paire ni impaire} \\ \mathcal{D}_9 = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{4}+k\pi\,;\,\frac{\pi}{4}+k\pi\right[& \text{fonction paire} \\ \mathcal{D}_{10} = \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{\pi}{12}+k\pi\,;\,\frac{\pi}{12}+k\pi \quad / \quad k\in\mathbb{Z}\right\} & \text{fonction paire} \end{cases}$$

Exercice 2

Remarques préliminaires :

— Les principales formes indéterminées sont des expressions dans lesquelles, en passant à la limite naïvement, on obtient des résultats d'un des types suivants : $+\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0 \times \infty$, 1^{∞}.
Il faut bien comprendre qu'aucune de ces expressions n'a de signification et qu'on ne peut répondre immédiatement, quand on les rencontre, que le résultat est 0 ou 1 ou ∞ ou quoi que ce soit d'autre. Le résultat dépend intimement de tous les éléments présents dans l'expression dont on cherche à calculer la limite.

— Pour les polynômes comme pour les fractions rationnelles (c'est à dire le quotient de deux polynômes), on factorise par les monômes de plus haut degré et on simplifie (les limites en $\pm\infty$ sont donc données par les monômes de plus haut degré).

— si on a une forme indéterminée du type : "$\frac{0}{0}$" on factorise puis on simplifie par le ou les facteurs communs ou on essaie de faire apparaître un taux d'accroissement

— si on obtient : "$\frac{a}{0}$" avec $a \neq 0$, la limite est $\pm\infty$ et on fait une étude de signe pour préciser

— si on a une forme indéterminée du type : "$\frac{\infty}{\infty}$" ou "$+\infty - \infty$" : on factorise par le terme dominant et si besoin on utilise les résultats de croissances comparées

— si aucune forme indéterminée n'apparaît, le résultat est immédiat. En particulier, l'expression suivante n'est pas indéterminée : $\frac{\infty}{0} = \infty$ mais reste à déterminer le signe de cet infini en fonction des signes du numérateur et du dénominateur.

On remplace x par 1 car la fonction est définie (et continue) en cette valeur :

$$\lim_{x\to 1}(-x^5 + 3x + 1) = -1 + 3 + 1 = 3$$

$$\lim_{x\to -\infty}(-x^5 + 3x + 1) = \lim_{x\to -\infty} x^5 \left(-1 + \frac{3}{x^4} + \frac{1}{x^5}\right) = +\infty$$

$$\text{car} \qquad \lim_{x\to -\infty}(x^5) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{3}{x^4}\right) = \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{x^5}\right) = 0$$

De même

$$\lim_{x\to +\infty}(-x^5 + 3x + 1) = -\infty$$

$$\text{car} \qquad \lim_{x\to +\infty}(x^5) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3}{x^4}\right) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x^5}\right) = 0$$

On remplace simplement x par 3 car la fonction est définie (et continue) en cette valeur :

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}\right) = \frac{8}{2} = 4$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \frac{2}{-1} = -2$$

Ici la factorisation puis la simplification par $x - 1$ ont permis de lever la forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$.

La limite étant finie (c'est un nombre réel et pas l'infini), la fonction est prolongeable par continuité en $x = 1$ en posant $f(1) = -2$.

$$\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}\right) = \lim_{x\to 2^-}\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = -\infty \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim_{x\to 2^-}(x+1) = 3 \\ \lim_{x\to 2^-}(x-2) = 0^- \end{cases}$$

Pour continuer à s'entraîner : les réponses

$$\begin{cases} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\infty \end{cases}$$

Exercice 3

On remplace x par 5 car la fonction est définie (et continue) en cette valeur :

$$\lim_{x\to 5}\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{21}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x+1}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=+\infty$$

$$\text{car}\qquad \lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty\qquad\text{et}\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0\qquad\text{et}\qquad \lim_{u\to+\infty}\sqrt{u}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-3\sqrt{x}+2\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)\right)+2=+\infty\qquad\text{car}\qquad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x}-3)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1+x+4x^2}{9x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2\left(4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(9-\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{9-\frac{1}{x^2}}}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}\qquad\text{car}\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$$

On remplace x par 7 car la fonction est définie (et continue) en cette valeur :

$$\lim_{x\to 7}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\sqrt{56}-7=2\sqrt{14}-7$$

Pour cette limite, on multiplie $\sqrt{a}-b$ par sa quantité conjuguée $\sqrt{a}+b$: cela permet de faire disparaître la forme indéterminée du type "$+\infty-\infty$"

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)&=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x-x^2}{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}\right)=\frac{1}{2}\qquad\text{car}\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=+\infty\qquad\text{car}\qquad \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)=+\infty$$

On remplace x par 2 car la fonction est définie (et continue) en cette valeur :

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}\right)=\frac{\sqrt{2}-2}{-2}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}\right)=\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{\sqrt{x}-2}{(x-1)(x-4)}\right)=-\infty$$

Car le numérateur a pour limite -1 et le dénominateur 0^+ car $\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)=0^-$ et $\lim\limits_{x\to 1^-}(x-4)=-3$

Pour continuer à s'entraîner : les réponses

$$\begin{cases} 0 \\ +\infty \\ \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{3} \\ -\infty \\ \frac{-9}{\sqrt{21}-5} \\ 25 \end{cases}$$

Exercice 4

On remplace x par 1 car la fonction est définie (et continue) en cette valeur :

$$\lim_{x\to 1} \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\left(\frac{\pi x^2+7x-5}{3x^2-11x+1}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\cos\left(\frac{x^2\left(\pi+\frac{7}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(3-\frac{11}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\cos\left(\frac{\pi+\frac{7}{x}-\frac{5}{x^2}}{3-\frac{11}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\tan\left(\frac{3x^2+7x-5}{5x^3-x+1}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\tan\left(\frac{x^2\left(3+\frac{7}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}{x^3\left(5-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\tan\left(\frac{3+\frac{7}{x}-\frac{5}{x^2}}{x\left(5-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}\right)\right) = \tan(0) = 0$$

Les quatre limites suivantes peuvent être obtenues en observant des taux d'accroissement associés à des fonctions dérivables :

$$f'(a) := \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$$

Par définition, la dérivée d'une fonction est cette limite, à condition que celle-ci existe.

Cette égalité permet de lever la forme indéterminée $\frac{0}{0}$: il faut penser aux taux d'accroissement quand on y est confronté.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x-\frac{\pi}{4}}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin x-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}\right) = \sin'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(4x)}{5x}\right) = \frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(4x)}{x}\right) = \frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(4x)-\sin(4\times 0)}{x-0}\right) = \frac{1}{5}\left(x\mapsto\sin(4x)\right)'(0) = \frac{1}{5}\left(x\mapsto 4\cos(4x)\right)(0) = \frac{1}{5}4\cos(0) = \frac{4}{5}$$

Par un calcul similaire, d'une part $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(7x)}{x}\right) = 7$ et d'autre part $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(5x)}{x}\right) = 5$, d'où :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(7x)}{\sin(5x)}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin(7x)}{x}}{\frac{\sin(5x)}{x}}\right) = \frac{7}{5}$$

De manière identique

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sin(\pi x)}{\sin(2\pi x)}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{\sin(\pi x)-\sin(\pi\times 1)}{x-1}}{\frac{\sin(2\pi x)-\sin(2\pi\times 1)}{x-1}}\right) = \frac{\pi\cos\pi}{2\pi\cos 2\pi} = \frac{-\pi}{2\pi} = -\frac{1}{2} \qquad \text{car} \qquad \begin{cases}\sin(\pi)=\sin(2\pi)=0\\ \cos(\pi)=-1\\ \cos(2\pi)=1\end{cases}$$

Pour continuer à s'entraîner : les réponses

$$\begin{cases}0\\ -1\\ \frac{1}{4}\\ \frac{3}{4}\end{cases}$$

Exercice 5

Dans cet exercice et le suivant on utilise souvent les formules usuelles de **croissances comparées** (ces quatre formules sont équivalentes entre elles : à partir de l'une on peut retrouver les autres) : elles permettent de lever des formes indéterminées du type $\frac{\infty}{\infty}$ ou $0 \times \infty$

$$\forall \alpha > 0 : \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \quad \text{et donc} \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0^+ \\ \lim\limits_{x \to -\infty} |x|^\alpha e^x = 0^+ \quad \text{et en particulier, si } \alpha \in \mathbb{N}^* \lim\limits_{x \to -\infty} x^\alpha e^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0^+ \quad \text{et donc} \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{\ln x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha \ln x = 0^- \end{cases}$$

N.B. : si $\alpha < 0$ il n'y a pas de formes indéterminées mais on n'obtient pas les mêmes résultats pour les deux dernières.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\left(x^2 - 7x + 1\right) e^{4x} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\left(x^2 \left(1 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \right) e^{4x} \right) = +\infty \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{4x}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x^2 - 7x + 1\right) e^{4x} = \lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \frac{1}{16} (4x)^2 e^{4x} = 0 \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} (4x)^2 e^{4x} = \lim\limits_{u \to -\infty} u^2 e^u = 0 \text{ par croissances comparées} \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{\sqrt{x^4 + x^3 + 1}} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4}}} \right) = +\infty \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x^2}\right) = +\infty \text{ par croissances comparées} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^4} = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{e^x}{\sqrt{x^4 + x^3 + 1}} \right) = 0 \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x^4 + x^3 + 1 = \lim\limits_{x \to -\infty} x^4 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4}\right) = +\infty \text{ car...} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(e^x - x^7 + x - 1\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(e^x \left(1 - \frac{x^7}{e^x} + \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} \right) \right) = +\infty \text{ car} \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^7}{e^x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{e^x}\right) = 0 \text{ par croissances comparées} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(e^x - x^7 + x - 1\right) = +\infty \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} -x^7 + x - 1 = \lim\limits_{x \to -\infty} x^7 \left(-1 + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^7}\right) = +\infty \text{ car ...} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \left(x e^{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{e^t}{t} \right) = +\infty \qquad \text{par croissances comparées, en posant } t = \frac{1}{x} \text{ et donc } x = \frac{1}{t}$$

Il n'y a pas de forme indéterminée ici car $\lim\limits_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0^+$:

$$\lim_{x \to 0^-} \left(x e^{\frac{1}{x}} \right) = 0^-$$

Enfin, on termine avec un taux d'accroissement :

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{e^{7x} - 1}{3x} \right) = \frac{1}{3} \lim_{x \to 0} \left(\frac{e^{7x} - e^{7 \times 0}}{x - 0} \right) = \frac{1}{3} \left(x \mapsto e^{7x}\right)'(0) = \frac{1}{3} \left(x \mapsto 7e^{7x}\right)(0) = \frac{7}{3}$$

Pour continuer à s'entraîner : les réponses

$$\begin{cases} +\infty \\ -\frac{1}{9} \\ \text{la limite en } +\infty \text{ est 1 et la limite en } -\infty \text{ est } -1 \\ -\frac{5}{7} \end{cases}$$

Exercice 6

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)=\frac{\ln 4}{\sqrt{4}}=\frac{\ln\left(2^2\right)}{2}=\frac{2\ln 2}{2}=\ln 2$$

Il n'y a pas de forme indéterminée ici :

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)=-\infty \qquad \text{car} \qquad \begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0^+\end{cases}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)=0^+ \qquad \text{par croissances comparées car} \qquad \sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$$

Il n'y a pas de forme indéterminée ici :

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x}\ln x\right)=+\infty \qquad \text{car} \qquad \begin{cases}\lim\limits_{x\to +\infty}\ln x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x}=+\infty\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x}\ln x\right)=0 \qquad \text{par croissances comparées car} \qquad \sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$$

Il n'y a pas de forme indéterminée ici :

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\left(x^4+x+1\right)\ln x\right)=+\infty \qquad \text{car} \qquad \begin{cases}\lim\limits_{x\to +\infty}\ln x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty}x^4+x+1=+\infty\end{cases}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln x}{x+\sqrt{x}+1}\right)=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln x}{x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right)}\right) \qquad \text{car} \qquad \begin{cases}\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right)=1\end{cases}$$

$$\left(\text{on a utilisé l'égalité : } \frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{\ln(x-2)}{x-1}\right)=-\infty \qquad \text{car} \qquad \begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}\ln(x-2)=\lim\limits_{t\to 0^+}\ln(t)=-\infty \quad \text{en posant} \quad t=x-2\underset{x\to 2^+}{\longrightarrow}0^+\\ \lim\limits_{x\to 2^+}(x-1)=1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln(x-2)}{x-1}\right)=\lim_{t\to +\infty}\left(\frac{\ln(t)}{t+1}\right)=\lim_{t\to +\infty}\left(\frac{\ln(t)}{t\left(1+\frac{1}{t}\right)}\right)=0 \qquad \text{car} \qquad \begin{cases}\lim\limits_{t\to +\infty}\frac{\ln t}{t}=0\\ \lim\limits_{t\to +\infty}1+\frac{1}{t}=1\end{cases} \qquad \left(\text{on a posé } t=x-2\underset{x\to +\infty}{\longrightarrow}+\infty\right)$$

Pour continuer à s'entraîner : les réponses

$$\begin{cases}\text{la limite en } 1^- \text{ est } +\infty \text{ et la limite en } 1^+ \text{ est } -\infty\\ 0^+\\ 0^-\\ 0^-\\ \frac{3}{5}\\ 4\\ \frac{\sqrt{e}}{2}\\ 0^+\\ 0^-\end{cases}$$

Exercice 7

Dans cet exercice, on utilise les taux d'accroissement et les croissances comparées.

Parfois (voire souvent), par une factorisation appropriée et l'utilisation des règles de calcul relatives aux logarithmes, on arrive à faire disparaitre la forme indéterminée présente initialement.

Parfois, un changement de variable opportun permet de se ramener à une formule usuelle.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-e^{3x}}{\sin 4x}\right) = -\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{e^{3x}-1}{x}}{\frac{\sin 4x}{x}}\right) = -\frac{3}{4} \qquad \text{car...}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln\left(e^x+1\right)}{e^x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln\left(e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)\right)}{e^x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}{e^x}\right) = 0 \qquad \text{car...}$$

On obtient un taux d'accroissement en posant $t = e^x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0^+$:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\ln\left(e^x+1\right)}{e^x}\right) = \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{\ln(t+1)}{t}\right) = \frac{1}{0+1} = 1 \qquad \text{car} \qquad (\ln(t+1))' = \frac{1}{t+1}$$

On obtient un taux d'accroissement en posant $t = e^x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0^+$:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\ln\left(e^{2x}+1\right)}{e^x}\right) = \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{\ln(t^2+1)}{t}\right) = \frac{2\times 0}{0^2+1} = 0 \qquad \text{car} \qquad (\ln(t^2+1))' = \frac{2t}{t^2+1}$$

On obtient un taux d'accroissement en posant $t = e^x$ mais ici on a en plus un facteur $\frac{1}{t} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\ln\left(e^x+1\right)}{e^{2x}}\right) = \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{\ln(t+1)}{t^2}\right) = \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{t}\,\frac{\ln(t+1)}{t}\right) = +\infty$$

Il n'y a pas de forme indéterminée ici :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln\left(1+e^{-3x}\right)}{x}\right) = 0$$

Une factorisation judicieuse par l'exponentielle ayant une limite infinie puis l'utilisation des propriétés du logarithme donnent :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\ln\left(1+e^{-3x}\right)}{x}\right) &= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\ln\left(e^{-3x}\left(e^{3x}+1\right)\right)}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-3x+\ln\left(e^{3x}+1\right)}{x}\right)\\ &= -3+\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\ln\left(e^{3x}+1\right)}{x}\right) = -3 \qquad \text{car...}\end{aligned}$$

On fait apparaître deux taux d'accroissement (en posant pour l'un d'entre eux $t = \sin^2 x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$) :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln\left(1+\sin^2 x\right)}{x^2}\right) &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln\left(1+\sin^2 x\right)}{\sin^2 x}\times\frac{\sin^2 x}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln\left(1+\sin^2 x\right)}{\sin^2 x}\right)\times\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)\\ &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{\ln\left(1+t\right)}{t}\right)\times\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 1\end{aligned}$$

N.B. : On a pu écrire que la limite du produit est le produit des limites car chacune de ces deux limites existent ! On ne peut pas, de manière générale, utiliser cette propriété si on ne s'est pas assuré que chaque facteur admet une limite finie, ou du moins si le calcul résultant ne fait pas apparaître une forme indéterminée ou un facteur n'ayant pas de limite.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{(e^x-1)\ln(1+x)}{\sqrt{1+x^2}-1}\right) &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1}\right) = 1\times 1\times\lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{\sqrt{1+t}-1}\right)\\ &= \frac{1}{\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+t}-1}{t}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 2\end{aligned}$$

Dans cette dernière limite, on a pu faire apparaître trois taux d'accroissement, le dernier après avoir posé $t = x^2$.

N.B. : Ici encore on a utilisé le fait que la limite d'un produit (respectivement d'un quotient) est le produit (respectivement le quotient) des limites de chaque facteur, à condition que le calcul résultant soit cohérent, ce qui est bien le cas ici (aucune forme indéterminée n'apparait, ni aucun facteur n'ayant pas de limite).

Pour continuer à s'entraîner : les réponses

$$\begin{cases} \text{la limite en } 1^- \text{ est } +\infty \text{ et la limite en } 3^+ \text{ est } +\infty \\ +\infty \\ 0 \\ \text{la limite en } -\infty \text{ est } -3 \text{ et la limite en } +\infty \text{ est } 0 \\ e^2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{cases}$$

Exercice 8

Dans cet exercice, pour l'ensemble de définition, on ôte de $\mathbb{R}$:

— les valeurs qui annulent le dénominateur,
— celles pour lesquelles le contenu du logarithme serait négatif ou nul,
— celles pour lesquelles le contenu d'une racine carrée serait strictement négatif
— celles pour lesquelles le contenu de la fonction tangente serait congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π, c'est à dire du type

$$\frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{(2k+1)\pi}{2}$$

Pour l'ensemble de dérivabilité, on ôte en sus :
— les valeurs pour lesquelles le contenu de la racine carrée s'annule
— les valeurs pour lesquelles le contenu de la valeur absolue s'annule
car **les fonctions racine carrée et valeur absolue, bien que définies en 0, ne sont pas dérivables en 0**.

Graphiquement, cela se voit par le fait que la courbe représentative de la racine carrée présente une demi-tangente verticale en 0 et celle de la valeur absolue présente un point de rebroussement en 0 : elle admet deux demi-tangentes distinctes en 0, d'équations $y = -x$ en 0^- et $y = x$ en 0^+.

De manière générale, si une courbe possède une tangente (ou une demi-tangente) verticale en un point, ou si elle admet deux demi-tangentes distinctes à gauche et à droite d'un point, la fonction qu'elle représente n'est pas dérivable au niveau de l'abscisse de ce point.

Pour le calcul des dérivées, on utilise à bon escient les formules usuelles

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$(\ln u)' = (\ln |u|)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

$$(\sin u)' = u' \cos u$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$(\tan u)' = u' \left(1 + \tan^2 u\right)$$

$$\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}'_1 = \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{3}{2}; 2\right\}$$

$$f'_1(x) = \frac{4x-7}{\left(2x^2 - 7x + 6\right)^2}$$

$$\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}'_2 = \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{3}{2}; 2\right\}$$

$$f'_2(x) = \frac{(2x-4)\left(2x^2 - 7x + 6\right) - \left(x^2 - 4x + 3\right)(4x-7)}{\left(2x^2 - 7x + 6\right)^2} = \frac{x^2 - 3}{\left(2x^2 - 7x + 6\right)^2}$$

$$\mathcal{D}_3 = \mathcal{D}'_3 = \mathbb{R}$$

$$f'_3(x) = 2x \cos\left(x^2 + 3\right)$$

$$\mathcal{D}_4 =]-\infty;1] \cup \left]\frac{3}{2};2\right[\cup [3;+\infty[$$

$$\mathcal{D}_4' = \mathcal{D}_4 \backslash \{1;3\} =]-\infty;1[\cup \left]\frac{3}{2};2\right[\cup]3;+\infty[$$

$$f_4'(x) = \frac{\frac{x^2-3}{\left(2x^2-7x+6\right)^2}}{\frac{x^2-4x+3}{2x^2-7x+6}} = \frac{x^2-3}{(x^2-4x+3)(2x^2-7x+6)} = \frac{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x-1)(x-3)(x-2)\left(x-\frac{3}{2}\right)}$$

$$\mathcal{D}_5 = \mathcal{D}_5' = \mathbb{R}$$

$$f_5'(x) = 2xe^{x^2}$$

$$\mathcal{D}_6 = \mathcal{D}_6' = \mathbb{R}$$

$$f_6'(x) = \frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2} e^{-\frac{1}{1+x^2}}$$

$$\mathcal{D}_7 = \mathcal{D}_7' = \mathbb{R} \backslash \left\{1;\frac{3}{2};2;3\right\}$$

$$f_7'(x) = \frac{x^2-3}{(x^2-4x+3)(2x^2-7x+6)}$$

Le calcul est identique à celui de f_4' bien que les ensembles de dérivabilité ne sont pas les mêmes !

$$\mathcal{D}_8 = \mathcal{D}_8' = \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad ; \quad -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad / \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$f_8'(x) = \frac{3\cos x(1+2\cos x) - (1+3\sin x)(-2\sin x)}{(1+2\cos x)^2} = \frac{3\cos x + 6\cos^2 x + 2\sin x + 6\sin^2 x}{(1+2\cos x)^2} = \frac{3\cos x + 2\sin x + 6}{(1+2\cos x)^2}$$

N.B. : Penser à $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$$\mathcal{D}_9 = \mathcal{D}_9' =]e;+\infty[$$

On applique trois fois de suite la formule donnant la dérivée de $\ln u$:

$$f_9'(x) = \frac{(\ln(\ln x))'}{\ln(\ln x)} = \frac{\frac{(\ln x)'}{\ln x}}{\ln(\ln x)} = \frac{\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}}{\ln(\ln x)} = \frac{1}{x(\ln x)(\ln(\ln x))}$$

$$\mathcal{D}_{10} = [-1;1] \backslash \left\{-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{8}\right\}$$

$$\mathcal{D}_{10}' =]-1;1[\backslash \left\{-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{8}\right\}$$

$$f_{10}'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \times \tan(4x) + \sqrt{1-x^2} \times 4\left(1+\tan^2(4x)\right) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \times \tan(4x) + \sqrt{1-x^2} \times 4\left(1+\tan^2(4x)\right)$$

$$\mathcal{D}_{11} = \left]0;e^3\right]$$

$$\mathcal{D}_{11}' = \left]0;e^3\right[$$

$$f_{11}'(x) = \frac{-\frac{1}{x}}{2\sqrt{3-\ln x}} = \frac{-1}{2x\sqrt{3-\ln x}}$$

Exercice 9

1)

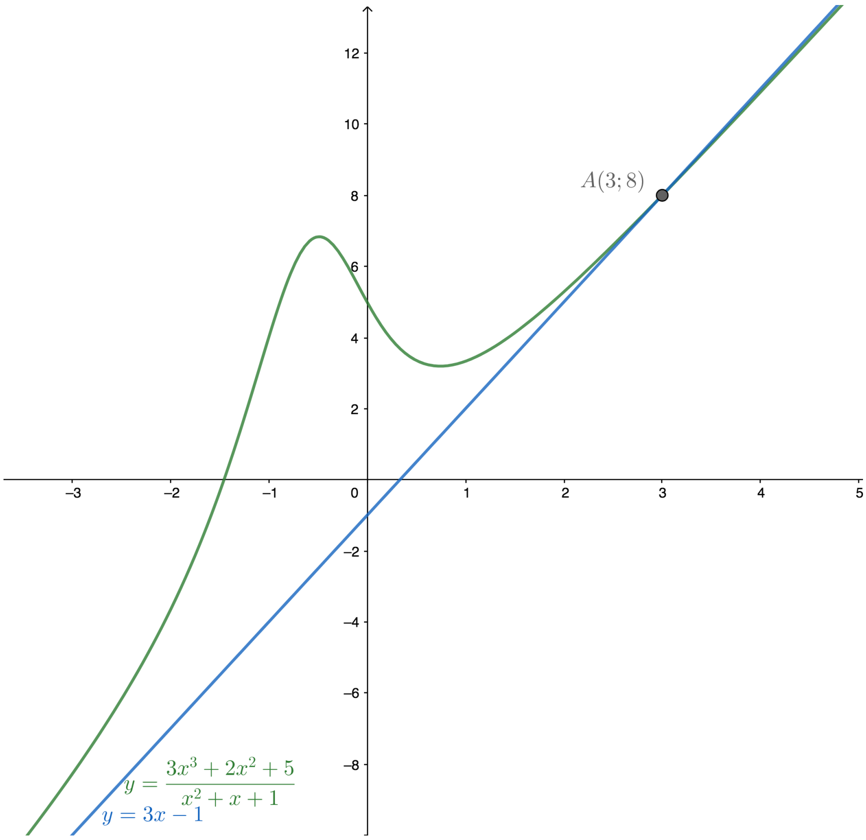
$$f(x) = 3x - 1 + \frac{-2x+6}{x^2+x+1}$$

$$f(x) - (3x-1) = \frac{-2x+6}{x^2+x+1} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$$

$\mathcal{C}_f$ admet donc l'asymptote oblique d'équation $y = 3x - 1$ en $\pm\infty$,

x	$-\infty$		3		$+\infty$
signe de $-2x+6$		$+$	0	$-$	
signe de x^2+x+1		$+$		$+$	
signe de $\frac{-2x+6}{x^2+x+1}$		$+$	0	$-$	

$\mathcal{C}_f$ est placée au dessus de son asymptote sur $]-\infty;3[$ et en dessous d'elle sur $]3;+\infty[$
Sur le graphe ci-dessous, on le voit très mal (un zoom permettra de le voir mieux) mais $\mathcal{C}_f$ (en vert) et son asymptote oblique (en bleu) sont sécantes (elles se croisent) au point A de coordonnées $(3;8)$: avant ce point la courbe est au dessus de la droite, après ce point la courbe est en dessous de la droite, elle s'en éloigne tout d'abord très légèrement puis s'en approche à nouveau de manière asymptotique, par en dessous.
Il faut donc se méfier des apparences : à première vue, on pourrait penser que la courbe est toujours au dessus de son asymptote, ce qui n'est pas le cas. Voilà une démonstration de la supériorité, sur cet exemple en tout cas, de l'algèbre sur le sens de la vue !



Représentation graphique de la fonction f_1 et de son asymptote oblique

2)

$$f(x) = x\sqrt{1+\frac{1}{x}}$$

$$f(x) - x = x\sqrt{1+\frac{1}{x}} - x = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

La limite est obtenue en observant un taux d'accroissement après avoir posé $t = \frac{1}{x} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0^{\pm}$

$f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$

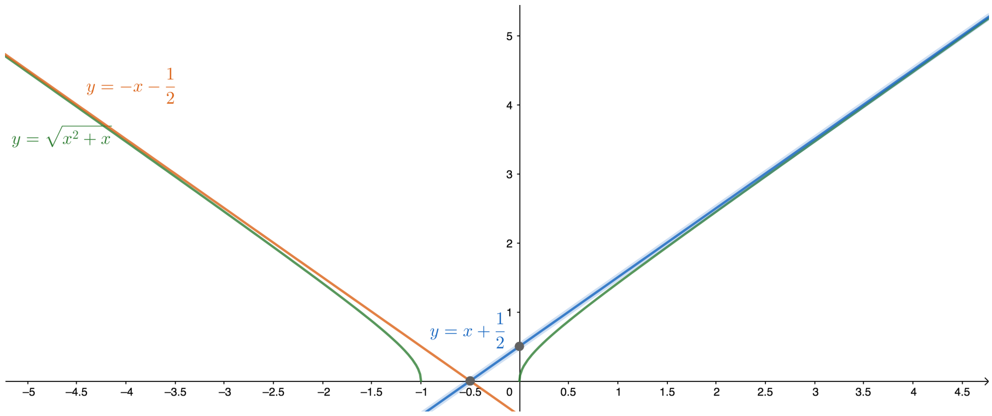
$\mathcal{C}_f$ admet donc l'asymptote oblique d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ en $\pm\infty$

$$\begin{aligned} f(x) - \left(x + \tfrac{1}{2}\right) &= f(x) - x - \tfrac{1}{2} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 1 - \frac{1}{2x}}{\frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}} - \left(1+\frac{1}{2x}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - \left(1+\frac{1}{2x}\right)\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \left(1+\frac{1}{2x}\right)\right)}{\frac{1}{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \left(1+\frac{1}{2x}\right)\right)} \\ &= \frac{\left(1+\frac{1}{x} - \left(1+\frac{1}{2x}\right)^2\right)}{\frac{1}{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \left(1+\frac{1}{2x}\right)\right)} = \frac{-\frac{1}{4x^2}}{\frac{1}{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \left(1+\frac{1}{2x}\right)\right)} = \frac{-1}{4x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \left(1+\frac{1}{2x}\right)\right)} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0^{\mp} \end{aligned}$$

En $+\infty$ la limite de l'écart vertical entre $\mathcal{C}_f$ et la droite d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ est 0^-

En $-\infty$ la limite de l'écart vertical entre $\mathcal{C}_f$ et la droite d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ est 0^+

$\mathcal{C}_f$ est donc placée en dessous de son asymptote en $+\infty$ et au dessus d'elle en $-\infty$



Représentation graphique de la fonction f_2 et de ses deux asymptotes obliques

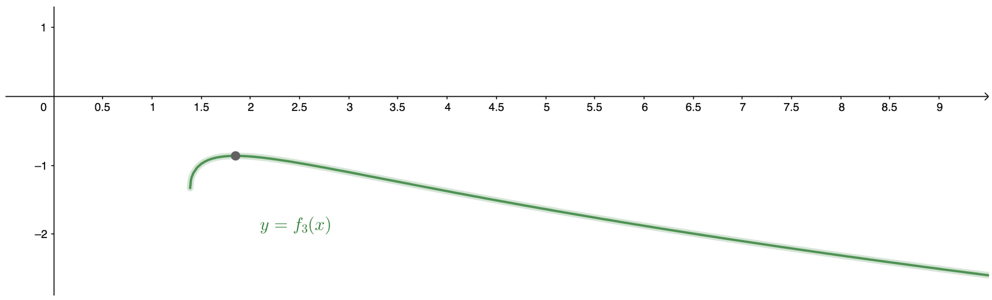
3)

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} - \frac{5}{x^4}} - 2\right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}} + \frac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

et

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} - \frac{5}{x^4}} - 2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}} + \frac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}}\right)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$\mathcal{C}_f$ admet donc une branche parabolique de direction Ox au voisinage de $+\infty$



Représentation graphique de la fonction f_3

4) On observe tout d'abord que la fonction admet une unique valeur interdite $x = 0$ et que ses limites en 0^- et 0^+ sont respectivement $-\infty$ et $+\infty$: $\mathcal{C}_f$ admet donc une asymptote verticale d'équation $x = 0$ (c'est à dire l'axe des ordonnées)

$f(x) = \frac{4 + \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x}}{1 - \frac{1}{e^x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 4^+$

$\mathcal{C}_f$ admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 4$ lorsque x tend vers $+\infty$ et $\mathcal{C}_f$ est située au dessus de celle-ci quand x tend vers $+\infty$

$$f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

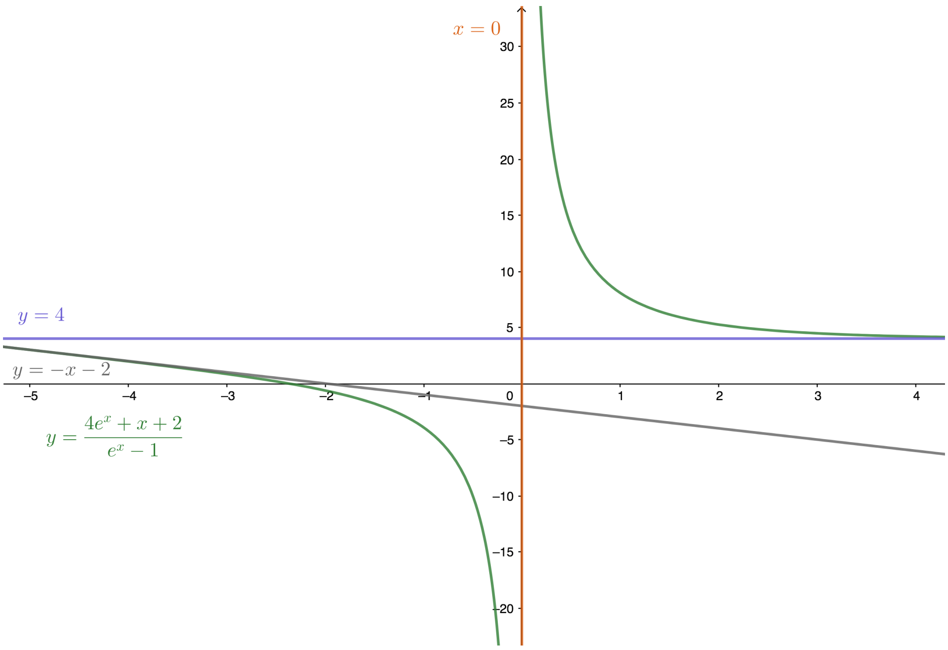
Car il n'y a pas de forme indéterminée avec l'expression initiale de f, le numérateur tend vers $-\infty$ et le dénominateur vers -1
et

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{4\frac{e^x}{x} + 1 + \frac{2}{x}}{e^x - 1} \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -1$$

Car la limite du numérateur est 1 et celle du dénominateur est -1

$$f(x) - (-x) = f(x) + x = \frac{4e^x + xe^x + 2}{e^x - 1} \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -2$$

(on utilise notamment une formule de croissances comparées pour ce résultat)
$\mathcal{C}_f$ admet donc une asymptote oblique d'équation $y = -x - 2$ quand x tend vers $-\infty$



Représentation graphique de la fonction f_4 et de ses trois asymptotes

Pour continuer à s'entraîner : les réponses

1) en $+\infty$ branche parabolique de direction Oy, en $-\infty$ asymptote oblique d'équation $y = \frac{7x}{3}$
2) $\mathcal{C}_f$ est, quand x tend vers $+\infty$, au dessus de son asymptote oblique d'équation $y = 2x + 1$
3) en $+\infty$ asymptote oblique d'équation $y = -2x - \frac{5}{2}$, en $-\infty$, asymptote oblique d'équation $y = -4x - \frac{5}{2}$
4) en $\pm\infty$ asymptote oblique d'équation $y = x + \ln 3$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de son asymptote en $-\infty$ et en dessous en $+\infty$

Exercice 10

On donnera successivement (l'ordre n'est pas absolument figé) :

— L'ensemble de définition $\mathcal{D}_n$ et l'ensemble de dérivabilité $\mathcal{D}'_n$ de f_n
— Les limites aux bornes de $\mathcal{D}_n$ (on précisera alors éventuellement si f_n est prolongeable par continuité)
— La dérivée de f_n
— La parité de f_n (est-elle paire ou impaire ?) et les symétries de $\mathcal{C}_n$
— La périodicité de f_n (en particulier si celle-ci contient des fonctions trigonométriques élémentaires : sin, cos, tan
— Le tableau de signe de f'_n et de variation de f_n, complété par les limites et les extrema
— Les équations des éventuelles asymptotes (verticales, horizontales ou obliques) aux bornes de $\mathcal{D}_n$ et la position de $\mathcal{C}_n$ par rapport à celles-ci
— Faute d'asymptote rectiligne, les branches infinies
— Le graphe $\mathcal{C}_n$ de f_n, en choisissant des unités adaptées, complété des tangentes, asymptotes et points remarquables

On précisera éventuellement :

— Une autre expression de f_n, plus simple sous un certain aspect et qui permet notamment de mieux "voir" les asymptotes mais aussi de calculer plus rapidement la dérivée et les limites

Par contre on ne cherchera pas à déterminer :

— La convexité de f_n, ses points d'inflexion et les équations des tangentes en ces points

N.B. : il faut toujours vérifier que les données inscrites dans le tableau de signe et de variation sont cohérentes entre elles, notamment les valeurs inscrites aux extrémités des flèches : on ne verra **JAMAIS** $-\infty$ en haut d'une flèche, pas plus que $+\infty$ en bas et il faut veiller à ce que la valeur située en bas soit effectivement inférieure à celle située en haut. Si ce n'est pas le cas, soit une valeur est fausse, soit les deux, à moins que ce ne soit la flèche qui ne soit dans le mauvais sens (et *a priori* le signe de la dérivée qui ne soit pas bon).

$$f_1(x) = \frac{2x^2 - 5x + 11}{x-1} = 2x - 3 + \frac{8}{x-1}$$

$\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}'_1 = \mathbb{R}\backslash\{1\}$

$$f'_1(x) = \frac{2\left(x^2 - 2x - 3\right)}{(x-1)^2} = \frac{2(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to1^-} f_1(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to1^+} f_1(x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty$

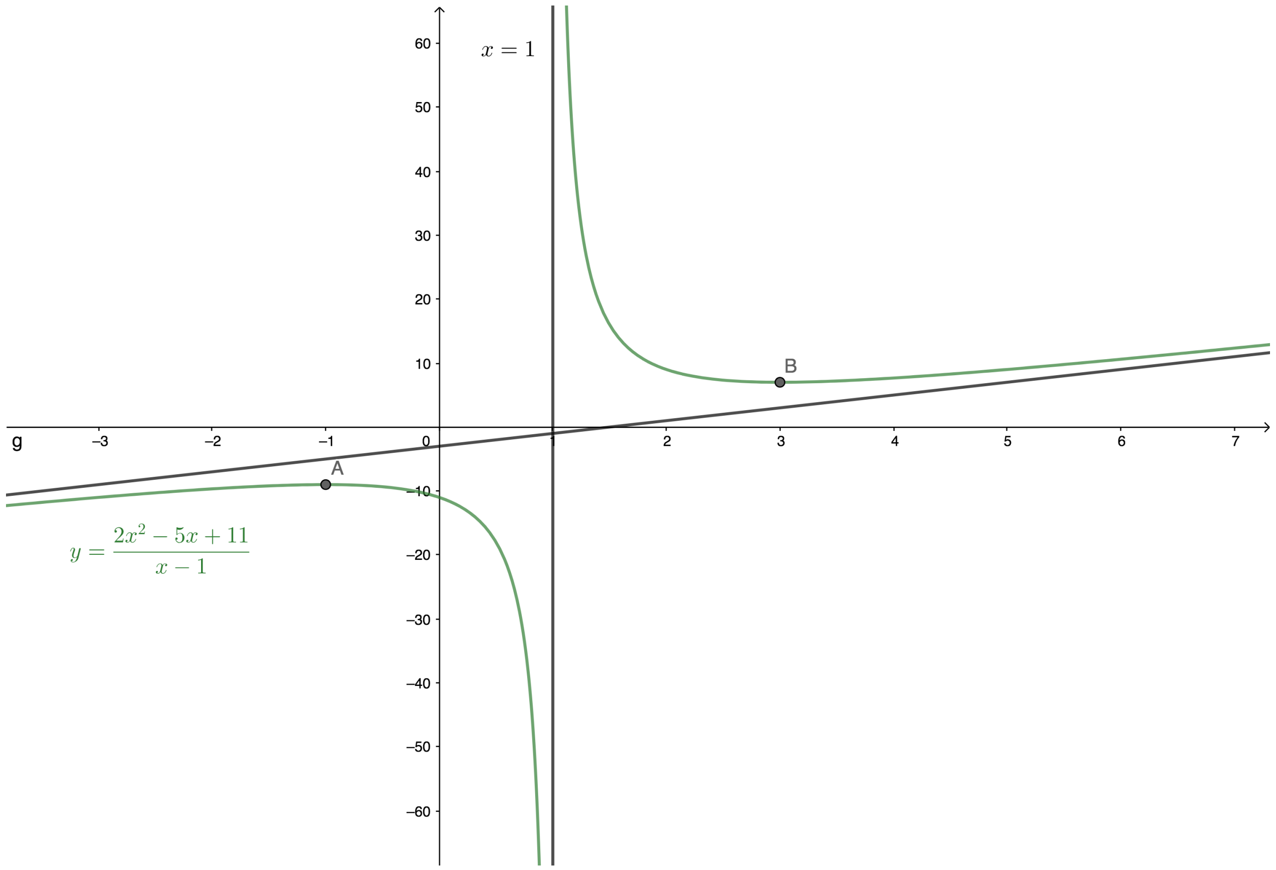
$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(f_1(x) - (2x-3)\right) = \lim\limits_{x\to0} \left(\frac{8}{x-1}\right) = 0^-$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f_1(x) - (2x-3)\right) = \lim\limits_{x\to0} \left(\frac{8}{x-1}\right) = 0^+$

La droite d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote à $\mathcal{C}_1$ en $\pm\infty$, $\mathcal{C}_1$ est en dessous de son asymptote quand x tend vers $-\infty$ et au dessus quand x tend vers $+\infty$.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
signe de f'_1		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
variations de f_1	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	7	$\nearrow$	$+\infty$

f_1 admet pour maximum local $f_1(-1) = -1$ atteint en $x = -1$ et pour minimum local $f_1(3) = 7$ atteint en $x = 3$.



Représentation graphique de la fonction f_1

$$f_2(x) = e^{\cos x}$$

$\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}'_2 = \mathbb{R}$

$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, k \in \mathbb{Z},\ f_2(x+2k\pi) = e^{\cos(x+2k\pi)} = e^{\cos x} = f_2(x)$ car la fonction cos est $2\pi-$périodique.

Ainsi, f_2 est $2\pi-$périodique et on peut limiter son étude à l'intervalle $[0\,;\,2\pi]$ ou, au choix, à l'intervalle $[-\pi;\pi]$ qui a l'avantage d'être symétrique par rapport à 0.

Par ailleurs $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f_2(-x) = e^{\cos(-x)} = e^{\cos x} = f_2(x)$ car la fonction cos est paire.

Ainsi, f_2 est elle-même paire : on peut limiter son étude à l'intervalle $[0;\pi]$ et $\mathcal{C}_2$ admet une symétrie axiale d'axe Oy (et puisque f_2 est périodique, $\mathcal{C}_2$ admet également des symétries d'axes d'équation $x = 2k\pi$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$.

Par ailleurs, comme $f_2(\pi - x) = f_2(x)$ car $\cos(\pi - x) = \cos(x)$, $\mathcal{C}_2$ admet également une symétrie axiale d'axe d'équation $x = \pi$ et donc, pas périodicité, des symétries axiales d'axes d'équation $x = (2k+1)\pi$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$.

En résumé, $\mathcal{C}_2$ admet des symétries axiales d'axes d'équation $x = k\pi$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$.

On peut remarquer que $\mathcal{C}_2$ a une branche infinie en $\pm\infty$ de direction $0x$ mais ce n'est pas très intéressant (c'est le cas pour toute fonction périodique continue sur $\mathbb{R}$, et plus généralement encore pour toute fonction bornée sur $\mathbb{R}$).

$$f_2'(x) = -\sin(x)e^{\cos x}$$

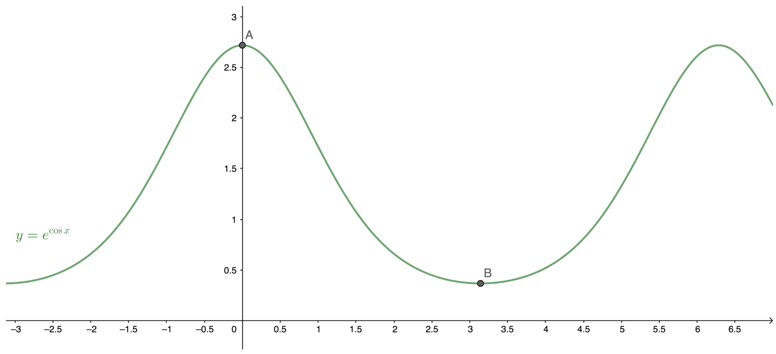
f_2' est du signe de $-\sin$ car une exponentielle est toujours (strictement) positive.

On obtient alors, au choix, l'un de ces deux tableaux (dans le premier on ne prend pas vraiment en compte la parité de f_2, encore que...) :

x	0		π		2π
signe de f_2'	0	$-$	0	$+$	0
variations de f_2	e	$\searrow$	$e^{-1} = \frac{1}{e}$	$\nearrow$	e

x	$-\pi$		0		π
signe de f_2'	0	$+$	0	$-$	0
variations de f_2	$\frac{1}{e}$	$\nearrow$	e	$\searrow$	$\frac{1}{e}$

f_2 admet pour maximum global e atteint en $2k\pi$ et pour minimum global $\frac{1}{e}$ atteint en $\pi + 2k\pi = (2k+1)\pi$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$.



Représentation graphique de la fonction f_2

$$f_3(x) = e^{x+1} - x - 3$$
$$\mathcal{D}_3 = \mathcal{D}'_3 = \mathbb{R}$$

$f'_3(x) = e^{x+1} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{x+1} > 1 = e^0 \Leftrightarrow x + 1 > 0$ (par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$) $\Leftrightarrow x > -1$

$$\lim_{x \to -\infty} f_3(x) = +\infty \text{ (pas de forme indéterminée ici)}$$
$$\lim_{x \to +\infty} f_3(x) = \lim_{x \to +\infty} e^x \left(e - \frac{x}{e^x} - \frac{3}{e^x} \right) = +\infty \text{ (par croissances comparées)}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f_3(x) - (-x - 3)) = \lim_{x \to -\infty} e^{x+1} = 0^+$$

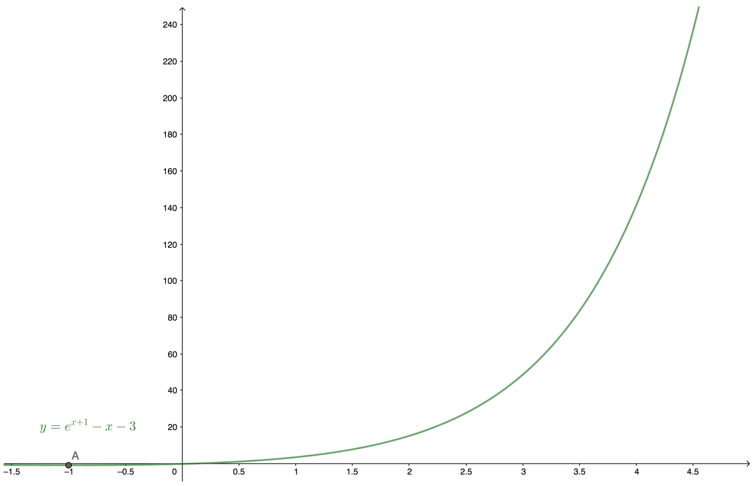
$\mathcal{C}_3$ est située au dessus, quand x tend vers $-\infty$ (et à vrai dire $\forall\, x \in \mathbb{R}$), de son asymptote oblique d'équation $y = -x-3$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f_3(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(e \times \frac{e^x}{x} - 1 - \frac{3}{x} \right) = +\infty \text{ (par croissances comparées pour le terme central)}$$

$\mathcal{C}_3$ a une branche infinie de direction Oy quand x tend vers $+\infty$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
signe de f'_3		$-$	0	$+$	
variations de f_3	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

f_3 a pour minimum global $f_3(-1) = -1$ atteint en $x = -1$.



Représentation graphique de la fonction f_3

$$f_4(x) = \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x := e^{x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}$$

$$1 + \frac{2}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x} > -1 \Leftrightarrow x > 0 \text{ ou } \frac{x}{2} < \frac{1}{-1} = -1 \text{ car la fonction inverse est décroissante sur } \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow x > 0 \text{ ou } x < -2$$

$$\mathcal{D}_4 = \mathcal{D}_4' =]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[$$

$$f_4'(x) = \left(\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) + x\frac{\frac{-2}{x^2}}{1+\frac{2}{x}}\right)e^{x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \left(\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) - \frac{2}{x+2}\right)\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$$

Le second facteur est $f_4(x) > 0$ en tant que fonction exponentielle.

Le signe du premier facteur $\left(\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) - \frac{2}{x+2}\right)$ n'ayant rien d'évident, on définit une fonction auxiliaire g par :

$$\forall\, x \in \mathcal{D}_4, g(x) := \ln\left(1+\frac{2}{x}\right) - \frac{2}{x+2}$$

dont on étudie les variations et les limites en espérant pouvoir en déduire le signe.

$$\forall\, x \in \mathcal{D}_4, g'(x) = \frac{-\frac{2}{x^2}}{1+\frac{2}{x}} + \frac{2}{(x+2)^2} = \frac{-2}{x^2+2x} + \frac{2}{(x+2)^2} = \frac{-4}{x(x+2)^2}$$

Un carré étant toujours positif, on constate que $g'(x)$ est du signe de $-x$

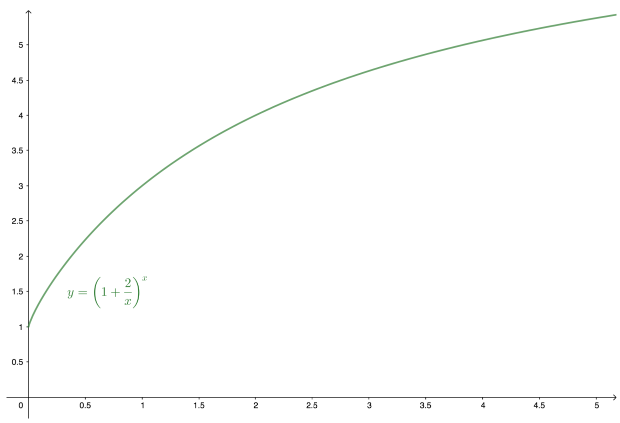
On obtient sans difficulté majeure (pas de forme indéterminée) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$

Ces seuls résultats permettent de conclure et il est inutile de calculer les limites de g en $(-2)^-$ et en 0^+.

Nous les indiquons tout de même dans le tableau mais sans les justifier (en 0^+, poser $t = \frac{1}{x}$ puis utiliser les croissances comparées. En $(-2)^-$, écrire $x = -2 - h$ avec $h \to 0^+$, le résultat arrive après quelques *maigres* péripéties de calcul.).

On obtient $\lim\limits_{\pm\to 0^+} f_4(x) = 1$ et on peut prolonger f_4 en 0 en posant $f_4(0) = 1$ et considérer que $\mathcal{D}_4 =]-\infty; -2[\cup[0; +\infty[$. On pourrait aussi démontrer, en calculant la limite du taux d'accroissement en 0, que f_4 n'est pas dérivable en 0.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
signe de g'		$+$				$-$	
variations de g	0	$\nearrow$	$+\infty$		$+\infty$	$\searrow$	0
signe de g et de f_4'		$+$				$+$	
variations de f_4	e^2	$\nearrow$	$+\infty$		1	$\nearrow$	e^2



Représentation graphique de la fonction f_4

$$f_5(x) = x^{-x} := e^{-x\ln(x)}$$

A priori $\mathcal{D}_5 = \mathcal{D}'_5 = \mathbb{R}_+^*$

Toutefois, comme $\lim\limits_{x\to 0^+} f_5(x) = \lim\limits_{t\to 0^+} e^t = 1^+$ (par croissances comparées), on peut prolonger f_5 par continuité en 0 en posant $f_5(0) = 1$ et considérer ainsi que $\mathcal{D}_5 = \mathbb{R}_+$.

$$f'_5(x) = (-\ln(x) - 1)\, e^{-x\ln(x)} = -\left(\ln(x) + 1\right) x^{-x}$$

$$f'_5(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) + 1 < 0 \Leftrightarrow \ln(x) < -1 \Leftrightarrow x < e^{-1} \text{ par croissance de la fonction exponentielle}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_5(x) = \lim_{t\to-\infty} e^t = 0^+$$

$\mathcal{C}_5$ possède donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ quand x tend vers $+\infty$

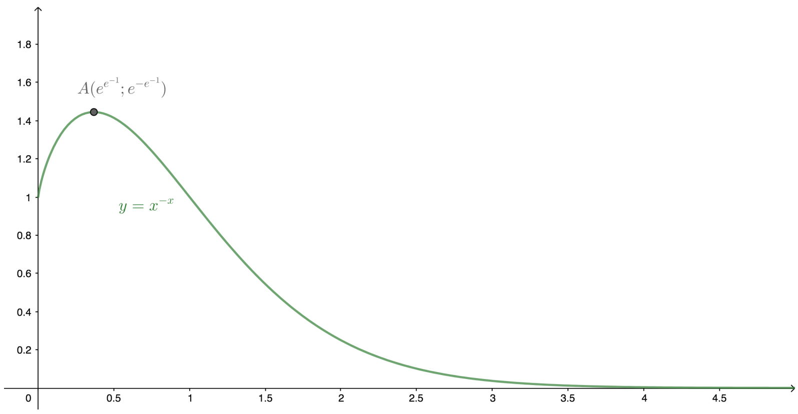
On peut se demander si f_5 est dérivable en 0. Pour cela on calcule la *difficile* limite du taux d'accroissement en faisant apparaître un taux d'accroissement en posant $t = -x\ln x$ sur une partie de l'expression :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \tfrac{f_5(x)-f_5(0)}{x-0} &= = \lim_{x\to 0^+} \tfrac{e^{-x\ln x}-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \left(\ln x \times \tfrac{e^{-x\ln x}-1}{x\ln x}\right) = \left(\lim_{x\to 0^+} \ln x\right) \times \left(\lim_{x\to 0^+} \tfrac{e^{-x\ln x}-1}{x\ln x}\right) \\
&= \left(\lim_{x\to 0^+} \ln x\right) \times \left(\lim_{t\to 0^+} -\tfrac{e^t-1}{t}\right) = (-\infty) \times (-1) = +\infty
\end{aligned}$$

f_5 n'est donc pas dérivable en 0 mais $\mathcal{C}_5$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut au point d'abscisse 0 : le tracé de la courbe part donc à la verticale et vers le haut.

x	0		e^{-1}		$+\infty$
signe de f'_5	$\Vert$	$+$	0	$-$	
variations de f_5	1	$\nearrow$	$e^{e^{-1}}$	$\searrow$	0^+

f_5 admet pour maximum global $f_5(e^{-1}) = e^{e^{-1}}$ atteint en $x = e^{-1}$



Représentation graphique de la fonction f_5

$$\forall\, x > 1 : f_6(x) = (\ln x)^{\ln x} = e^{\ln(x)\times\ln(\ln(x))}$$

A priori $\mathcal{D}_6 = \mathcal{D}'_6 =]1;+\infty[$ et

$$\forall\, x > 1 : f'_6(x) = \frac{1}{x}\,(\ln(\ln x)+1)\, e^{\ln(x)\times\ln(\ln(x))} = \frac{1}{x}\,(\ln(\ln x)+1)\,(\ln x)^{\ln x}$$

f'_6 est donc du signe de $\ln(\ln x)+1$ car une exponentielle est toujours positive et ici $\frac{1}{x}$ l'est également car $x > 1 > 0$

$\ln(\ln x) + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln(\ln x) > -1 \Leftrightarrow \ln x > e^{-1} \Leftrightarrow x > e^{e^{-1}} = e^{\frac{1}{e}}$ par croissance de la fonction exponentielle.

En posant $t = \ln(x)$, on obtient :

$$\lim_{x\to 1^+} f_6(x) = \lim_{t\to 0^+} e^{t\ln(t)} = e^0 = 1$$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f_6(x) = 1$, on peut prolonger f_6 par continuité en 1 en posant $f_6(1) = 1$ et considérer ainsi que $\mathcal{D}_6 = [1;+\infty[$.

Par contre, en posant $t = \ln(x)$, on obtient la limite du taux d'accroissement de f_6 en 0 (on utilise à la fin les croissances comparées pour la limite de $t\ln t$ et on observe un taux d'accroissement au dénominateur) :

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f_6(x) - f_6(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{e^{\ln(x)\times\ln(\ln(x))} - 1}{x-1} = \lim_{t\to 0^+} \frac{e^{t\ln t}}{e^t - 1} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{e^{t\ln t}}{t}}{\frac{e^t-1}{t}} = +\infty$$

f_6 n'est donc pas dérivable en 1 mais $\mathcal{C}_6$ admet une demi-tangente verticale au point de coordonnées $(1;1)$

On obtient enfin :

$$\lim_{x\to+\infty} f_6(x) = +\infty$$

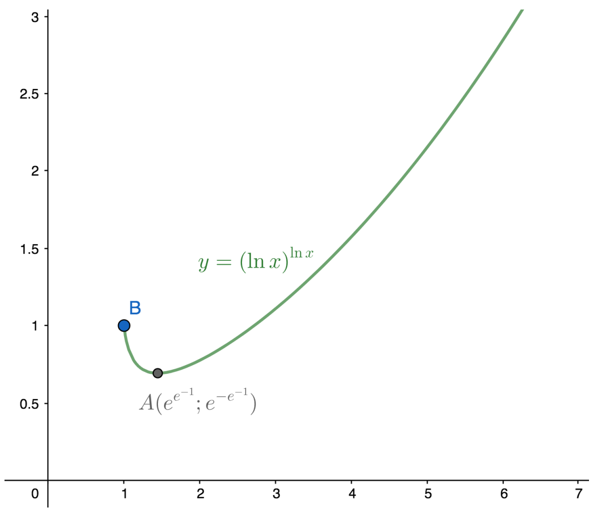
et, en posant $t = \ln x$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_6(x)}{x} = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{t\ln t}}{e^t} = \lim_{t\to+\infty} e^{t(\ln t - 1)} = +\infty$$

$\mathcal{C}_6$ a donc une branche parabolique de direction Oy quand x tend vers $+\infty$.

x	1		$e^{e^{-1}}$		$+\infty$
signe de f'_6		$-$	0	$+$	
variations de f_6	1	$\searrow$	$e^{-e^{-1}}$	$\nearrow$	$+\infty$

f_6 a pour minimum global $f_6\left(e^{e^{-1}}\right) = e^{-e^{-1}}$ atteint en $e^{e^{-1}}$.



Représentation graphique de la fonction f_6

$$f_7(x) = e^{-\frac{x+2}{x^2}}$$

A priori $\mathcal{D}_7 = \mathcal{D}_7' = \mathbb{R}^*$ et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^* : f_7'(x) = \frac{x+4}{x^3}e^{-\frac{x+2}{x^2}}$$

En posant $t = -\frac{x+2}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$, on obtient :

$$\lim_{x\to 0^-} f_7(x) = \lim_{x\to 0^+} f_7(x) = \lim_{t\to -\infty} e^t = 0^+$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} f_7(x) = 0$, on peut prolonger f_7 par continuité en 0 en posant $f_7(0) = 0$ et considérer ainsi que $\mathcal{D}_7 = \mathbb{R}$.

De même, en posant $t = \frac{1}{x}$, on obtient la limite du taux d'accroissement de f_7 en 0 (on utilise notamment les croissances comparées pour la dernière limite) :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f_7(x) - f_7(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{x+2}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}{x} = \lim_{t\to +\infty} te^{-t-2t^2} = \lim_{t\to +\infty} \left(\frac{t}{e^t} \times \frac{1}{2t^2}\right) = 0^+$$

f_7 est donc dérivable en 0 et $f_7'(0) = 0$. Ainsi $\mathcal{D}_7' = \mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_7$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0.

En posant encore $t = -\frac{x+2}{x^2} \underset{x\to \pm\infty}{\longrightarrow} 0^{\mp}$, on obtient :

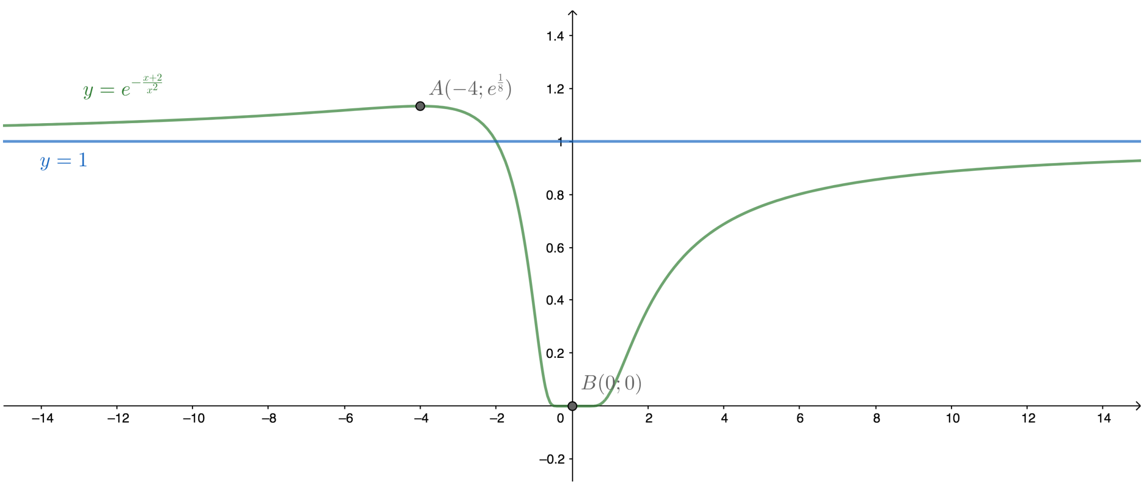
$$\lim_{x\to -\infty} f_7(x) = \lim_{x\to +\infty} f_7(x) = \lim_{t\to 0} e^t = e^0 = 1$$

$\mathcal{C}_7$ admet donc, quand x tend vers $\pm\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ et vu les variations de f_7, on peut affirmer que $\mathcal{C}_7$ est au dessus de son asymptote quand x tend vers $-\infty$ et en dessous vers $+\infty$.

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
signe de $x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de x^3		$-$		$-$	0	$+$	
signe de f_7'		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f_7	1	$\nearrow$	$e^{\frac{1}{8}}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

f_7 admet pour minimum global $f_7(0) = 0$, atteint en $x = 0$ et pour maximum global $f_7(-4) = e^{\frac{1}{8}}$ atteint en $x = -4$.

$\mathcal{C}_7$ admet la droite horizontale d'équation $y = 1$ pour asymptote en $\pm\infty$



Représentation graphique de la fonction f_7