Année universitaire 2019-2020
Licence 1$^{\text{ère}}$ année - Mention MI - Ma0102

Devoir surveillé N°1

Durée 1h30

Université de Reims Champagne-Ardenne

Questions de cours

1) Rappeler la formule du binôme (de Newton).
2) Rappeler :
   a) La règle de distributivité du "et" sur le "ou" pour les énoncés logiques.
   b) La règle de commutativité du "ou" pour les énoncés logiques.
   c) Une des lois de De Morgan pour les énoncés logiques.

Exercice 1 : *(Simplification d'expression algébriques)*

1) Soit $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{e^x - \dfrac{e^{2x}-e^x}{2e^x-1}}$ (où $x \in \mathbb{R}$).
   Préciser sur quel sous-ensemble de $\mathbb{R}$, $f(x)$ est défini puis simplifier $f(x)$ afin que le résultat ne contienne plus de fraction.
2) Calculer la dérivée de g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{e^{3x}}{e^{2x}+1}$
3) Simplifiez l'expression $u(x)$ suivante, de façon que le résultat ne contienne plus $|x|$: $u(x) = \dfrac{(|x|+1)^3}{x^2+3} - |x|$.

Exercice 2 : *(Calculs sur les sommes et produits)*

1) Calculer et simplifier : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(6k^2 - 2k)$.
   (*On rappelle que :* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ *et* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)
2) Simplifier les produits suivants :

$$p_1 = \frac{4!5!}{8!} \quad ; \quad p_2 = \frac{(n-2)!(n-3)!}{n!(n-4)!} \quad ; \quad p_3 = \frac{\displaystyle\prod_{k=3}^{n}(k^2-4)}{\displaystyle\prod_{k=2}^{n}(k^2-1)}$$

Exercice 3 : *(Logique)*

1) Écrire avec des quantificateurs et des connecteurs les énoncés suivants, puis leur négation.
   a) Le produit de deux entiers relatifs est toujours égal à leur somme.
   b) Dans certains cas, le produit de deux entiers relatifs est égal à leur somme.

2) Soient P, Q, R trois énoncés logiques.

a) Déterminer les tables de vérité de :

i) $(P \text{ ou } Q) \Rightarrow R$

ii) $(P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R)$

b) A-t-on $\Big[(P \text{ ou } Q) \Rightarrow R\Big] \Longleftrightarrow \Big[(P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R)\Big]$?

Exercice 4 :

1) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et soit l'énoncé P suivant :

$$\forall A < 0, \forall B > 0, \exists x \in \mathbb{R}, \big(x \leqslant A \text{ et } |f(x)| \leqslant B\big)$$

a) Écrire la négation de P.

b) Simplifier cette négation en faisant apparaître "$\Longrightarrow$".

c) Quelles sont parmi les fonctions f suivantes celles qui vérifient P :

$$f(x) = 1 \qquad f(x) = \mathrm{e}^{-x}$$

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on désigne par $Q(x)$ la proposition suivante :

$$x > 2 \Longrightarrow x > 3$$

Donner (en justifiant la réponse) l'ensemble de toutes les valeurs de $x \in \mathbb{R}$, pour lesquelles $Q(x)$ est vraie.

3) On considère l'énoncé R suivant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |x - y| \leqslant \big||x| - |y|\big|$$

a) Écrire la négation de R.

b) Grâce à la question a), montrer que R est faux.

****