Séance du 17/11/20

Ex 6 :

- **Pour f_8**

f_8 n'est pas injective : En effet, si on choisit $n=2$ et $n'=-2$, on a :

$n, n' \in \mathbb{Z}$ et $n \neq n'$ et $\underbrace{f_8(n)}_{4} = \underbrace{f_8(n')}_{4}$

f_8 n'est pas surjective : Choisissons $m = 2$. Alors :

$m \in \mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\underbrace{f_8(n) \neq m}$ (car $\forall n \in \mathbb{Z}$, $n^2 \neq 2$: l'entier 2 n'est le carré d'aucun entier)

Donc : $\exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{Z}, f_8(n) \neq m$

f_8 n'est pas bijective : car f_8 n'est pas (par exemple) injective.

- **Pour f_9**

(utilisation Th 2 (iii))

f_9 est injective : En effet, soient $x, x' \in \mathbb{R}$.

(H) Supposons que $f_9(x) = f_9(x')$

(D) Alors $e^x = e^{x'}$. Donc $\underbrace{\ln(e^x)}_{x} = \underbrace{\ln(e^{x'})}_{x'}$; donc :

(C) $x = x'$

f_9 n'est pas surjective : Choisissons $y = 0$. Alors :

$y \in \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\overbrace{f_9(x)}^{e^x} \neq \overset{0}{\widetilde{y}}$ (car $e^x \neq 0$ puisque $e^x > 0$)

Il existe donc $y \in \mathbb{R}$ n'ayant pas d'antécédent.

f_9 n'est pas bijective : car f n'est pas surjective

- **Pour f_{14}**

1ère méthode :

f_{14} est injective : Soient $x, x' \in \mathbb{R}^*$

(H) Supposons que $f_{14}(x) = f_{14}(x')$

(D) Donc $\frac{1}{x} = \frac{1}{x'}$; donc :

(C) $x = x'$

f_{14} surjective : Soit $y \in \mathbb{R}^*$. Posons $x = \frac{1}{y}$

Alors $\begin{cases} x \in \mathbb{R}^* \\ f_{14}(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{1/y} = y \end{cases}$

Donc : $\forall y \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, f_{14}(x) = y$

Donc tt élt de l'ensemble d'arrivée admet au ⊖ un antécédent

f_{14} bijective : car f_{14} est injective et surjective.

(Donc f_{14}^{-1} existe et $f_{14}^{-1} : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$, $y \longmapsto f_{14}^{-1}(y) = \frac{1}{y}$)

$2^{\text{ème}}$ méthode :

f_{14} est bijective (donc injective et surjective) : En effet

Posons $g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$, $x \longmapsto g(x) = \frac{1}{x}$ (qui est bien définie)

Alors : $\begin{cases} g \circ f_{14} : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^* \\ \quad x \longmapsto (g \circ f_{14})(x) = g(f_{14}(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1/x} = x \\ \text{et} \\ f_{14} \circ g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^* \\ \quad x \longmapsto (f_{14} \circ g)(x) = f_{14}\left(\frac{1}{x}\right) = x \end{cases}$

Donc $g \circ f_{14} = Id_{\mathbb{R}^*}$ et $f_{14} \circ g = Id_{\mathbb{R}^*}$

Donc f_{14} est bijective

De plus $(f_{14})^{-1} : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$, $x \longmapsto f_{14}^{-1}(x) = 1/x$

$\boxed{\text{Pour } f_{15}}$ $\left(f_{15} : \begin{array}{l} [1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto f_{15}(x) = x^2-1 \end{array} \right)$

f_{15} est injective :

Soient $x, x' \in [1,+\infty[$

(H) Supposons que $f_{15}(x) = f_{15}(x')$

(D) Alors $x^2 \cancel{-1} = x'^2 \cancel{-1}$; donc $x^2 = x'^2$; donc $x = x'$ ou $x = -x'$; or $x, x' \in [1,+\infty[$, donc $x \neq -x'$ (car $x > 0$ et $x' > 0$)

(C) Donc $x = x'$

f_{15} est surjective :

Soit $y \in \mathbb{R}_+$; posons $x = \sqrt{1+y}$ (qui est bien défini car $y \geq 0$)

Alors $\begin{cases} x \in [1,+\infty[\quad (\text{puisque } y \geq 0 \text{; donc } 1+y \geq 1 \text{; donc } \sqrt{1+y} \geq 1) \\ f_{15}(x) = x^2 - 1 = \left(\sqrt{1+y}\right)^2 - 1 = (\cancel{1}+y) \cancel{-1} = y \end{cases}$

Donc : $\forall y \in \mathbb{R}^+, \exists x \in [1,+\infty[, f_{15}(x) = y$

f_{15} est bijective : car f_{15} est injective et surjective.

$\left(\text{et } f_{15}^{-1} : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow [1,+\infty[\\ y \longmapsto f_{15}^{-1}(y) = \sqrt{1+y} \end{array} \right)$

Autre méthode :

Posons $g : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow [1,+\infty[\\ x \longmapsto g(x) = \sqrt{1+x} \end{array}$

Alors g est une application. De plus :

- $g \circ f_{15} = Id_{[1,+\infty[}$ car $g \circ f_{15} : \begin{array}{l} [1,+\infty[\longrightarrow [1,+\infty[\\ x \longmapsto (g \circ f_{15})(x) = g(f_{15}(x)) \end{array}$

$$\begin{aligned} &= g(x^2-1) \\ &= \sqrt{\cancel{1}+(x^2\cancel{-1})} \\ &= \sqrt{x^2} \\ &= |x| \\ &= x \quad (\text{car } x \geq 0) \end{aligned}$$

et

- $f_{15} \circ g = Id_{\mathbb{R}^+}$ car $f_{15} \circ g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$$x \longmapsto (f_{15} \circ g)(x) = f_{15}(g(x))$$
$$= f_{15}\left(\sqrt{1+x}\right)$$
$$= \left(\sqrt{1+x}\right)^2 - 1$$
$$= (\cancel{1}+x) - \cancel{1}$$
$$= x$$

Il existe donc une application $g : \mathbb{R}^+ \to [1, +\infty[$ telle que $g \circ f_{15} = Id_{[1,+\infty[}$ et $f_{15} \circ g = Id_{\mathbb{R}^+}$. Donc f_{15} est bijective ; donc f_{15} est injective et surjective.

De plus $f_{15}^{-1} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow [1, +\infty[$

$$x \longmapsto f_{15}^{-1}(x) = \sqrt{1+x}$$

(D'après prop 2)

Exercice 8 :

1) $f(12) = 1+2 = 3$, $f(831) = 8+3+1 = 12$; $f(709) = 7+0+9 = 16$, $f(11) = 1+1 = 2$, $f(111) = 1+1+1 = 3$ et $f(111\,111) = 1+1+1+1+1+1 = 6$

2) f n'est pas injective :

Choisissons $n = 25$ et $n' = 52$; alors :

$$(n, n') \in \mathbb{N}^2, \quad n \neq n' \text{ et } \underbrace{f(n)}_{7} = \underbrace{f(n')}_{7}$$

f est surjective : Montrons que tout $m \in \mathbb{N}$, admet au moins un antécédent $n \in \mathbb{N}$.

- Si $m = 0$: alors 0 est un antécédent qui est 0 (car $f(0) = 0$)
- Si $m \in \mathbb{N}^*$: Posons $n = \underbrace{11\ldots\ldots1}_{m \text{ fois le chiffre } 1}$.

Alors n est un antécédent de m (car $f(11\ldots1) = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{m \text{ fois}} = m$)

3·) Soit $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$$m \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } m = 0 \\ \text{ou} & \\ \underbrace{11\ldots1}_{m \text{ fois le chiffre } 1} & \text{si } m \neq 0 \end{cases}$$

Alors :

$f \circ g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$$m \longmapsto (f \circ g)(m) = f(g(m)) = \begin{cases} f(\overbrace{11\ldots1}^{m \text{ fois}}) = \underbrace{1+1+\ldots+1}_{m \text{ fois}} = m & \text{si } m \neq 0 \\ \text{ou} & \\ f(0) = 0 & \text{si } m = 0 \end{cases}$$

Donc $f \circ g = Id_{\mathbb{N}}$

On a : $g \circ f \neq Id_{\mathbb{N}}$. En effet $(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(4) = 1111$

Donc $(g \circ f)(4) \neq 4$; ce qui prouve que $g \circ f \neq Id_{\mathbb{N}}$

(2ème méthode : supposons que l'on ait $g \circ f = Id_{\mathbb{N}}$. Dans ce cas on aurait trouvé g tq $g \circ f = Id_{\mathbb{N}}$ et $f \circ g = Id_{\mathbb{N}}$. Donc f bijective (et $f^{-1} = g$). Absurde (car f n'est pas bijective car non injective))

Ex 12 :

1·) et 2·)

$$\left(\begin{array}{lll} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & & \text{bijective} \\ \quad x \longmapsto f(x) = x+1 & & \\ f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} & & \text{non bijective} \\ \quad x \longmapsto f(x) = x+1 & & \end{array} \right)$$

$\boxed{\text{Pour } f}$

- f est une application ; car il y a un ensemble de départ ($\mathbb{N}$), un ensemble d'arrivée ($\mathbb{N}$), et pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, $n+1$ est bien défini et $n+1 \in \mathbb{N}$
- f est injective : car si $n, n' \in \mathbb{N}$ et $n + \cancel{1} = n' + \cancel{1}$ alors $n = n'$
- f n'est pas surjective : car 0 n'a pas d'antécédent. (puisque : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n+1 \geq 1$, donc $f(n) \neq 0$)
- f n'est pas bijective ; car f n'est pas surjective.

f n'admet donc pas d'application réciproque (car f n'est pas bijective)

$\boxed{\text{Pour } g}$

- g est une application : car il y a un ensemble de départ $(\mathbb{N})$, un ensemble d'arrivée $(\mathbb{N})$ et pour chaque entier n, $g(n)$ est bien défini et $g(n) \in \mathbb{N}$ (En effet, si n est pair, n s'écrit $2k$; donc $g(n) = \frac{n}{2} = k$ est bien défini et $g(n) = k \in \mathbb{N}$; et si n est impair, $g(n) = n$ est bien défini et $g(n) = n \in \mathbb{N}$)

- g n'est pas injective : car $\underbrace{g(6)}_{3} = \underbrace{g(3)}_{3}$ et $6 \neq 3$

- g est surjective : En effet, soit $m \in \mathbb{N}$; posons $n = 2m$.

  Alors $n \in \mathbb{N}$ et $g(n) = \frac{n}{2} = \frac{2m}{2} = m$

  car n est pair

  Donc tout $m \in \mathbb{N}$ admet un antécédent $n \in \mathbb{N}$.

  Donc g est surjective.

- g n'est pas bijective : car g n'est pas injective.

g n'a pas d'application réciproque (car g n'est pas bijective.)

$\boxed{\text{Pour } h}$

- h est une application : Il y a un ensemble de départ et un ensemble d'arrivée ; d'autre part, chaque $n \in \mathbb{N}$ admet une unique image $h(n) \in \mathbb{N}$ (En effet : si n est pair, $h(n) = n \in \mathbb{N}$ et si n est impair alors $h(n) = n - 1 \in \mathbb{N}$ (puisque si n est impair alors $n \geq 1$ et donc $n - 1 \in \mathbb{N}$))

- h n'est pas injective : car $\underbrace{h(4)}_{4} = \underbrace{h(5)}_{4}$ et $4 \neq 5$

- h n'est pas surjective : car 1 n'a pas d'antécédent

En effet, si $n \in \mathbb{N}$ est pair : $h(n) = n \neq 1$ (car n est pair et 1 est impair)

si $n \in \mathbb{N}$ est impair : $n = 1$: $h(n) = h(1) = 1-1 = 0 \neq 1$

ou

$n \geqslant 3$: $h(n) = n-1 \geqslant 2$

donc $h(n) \neq 1$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $h(n) \neq 1$

- h n'est pas bijective car h n'est pas injective

h n'admet pas d'application réciproque car h n'est pas bijective

---

FIN

Ex 10

" 13

" 14