MA 0102
TD 1

Exercice 1 :

a) $10^4 \times 10^{-3} = 10^1 = 10$

b) $10^{-7} \times 10^3 = 10^{-4} = \frac{1}{10^4}$

c) $(10^{-2})^3 \times 10^3 = 10^{-6} \times 10^3 = 10^{-3} = \frac{1}{10^3}$

d) $10^2 \times 10^{15} \times 10^{-6} = 10^{2+15-6} = 10^{11}$

e) $\frac{10^5}{10^7} = 10^5 \times 10^{-7} = 10^{-2} = \frac{1}{10^2}$

f) $\frac{10^4}{10^{-6}} = 10^{4-(-6)} = 10^{10}$

g) $\frac{(10^3)^3}{10^2} = \frac{10^9}{10^2} = 10^{9-2} = 10^7$

h) $\left(\frac{1}{10^2}\right)^3 = \frac{1^3}{(10^2)^3} = \frac{1}{10^6} = 10^{-6}$

i) $\frac{e^{3,2}}{e^{6,8}} = e^{3,2-6,8} = e^{-3,6} = \frac{1}{e^{3,6}}$

j) $e^{2,1} \times e^{3,8} = e^{2,1+3,8} = e^{5,9}$

k) $(e^{1,3})^5 \times e^{-2,5} = e^{6,5} \times e^{-2,5} = e^{6,5-2,5} = e^4$

l) $e \times \frac{(e^{3,4})^2}{e^{7,6}} = e^{1+6,8-7,6} = e^{0,2}$

Exercice 2 :

a) $a(x) = \dfrac{\frac{(x-1)(x-3)}{x^2+x+1}}{2x^2+5}$

$a(x)$ est défini pour : $\begin{cases} x^2+x+1 \neq 0 \\ 2x^2+5 \neq 0 \end{cases}$

$x^2 + x + 1 \neq 0$?

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$

Donc : il n'existe pas de $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 + x + 1 = 0$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 \neq 0$

$2x^2 + 5 = 0$?

$2x^2 + 5 = 0 \iff 2x^2 = -5 \iff x^2 = -\frac{5}{2}$ (car $x^2 \geq 0$ et $-\frac{5}{2} < 0$)

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, 2x^2 + 5 \neq 0$.

Donc $a(x)$ et défini sur $\mathbb{R}$.

$$* \; a(x) = \frac{\frac{(x-1)(x-3)}{x^2+x+1}}{2x^2+5} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x^2+x+1)(2x^2+5)}$$

b) $b(x) = \dfrac{x + \frac{x^2+1}{x^2-1}}{1+3x^2}$

* $b(x)$ est définit lorsque : $\begin{cases} x^2 - 1 \neq 0 \\ 1 + 3x^2 \neq 0 \end{cases}$

$x^2 - 1 = 0$?

$x^2 - 1 = 0 \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1$

(ou $x^2 - 1 = 0 \iff (x-1)(x+1) = 0 \iff \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

Donc $x^2 - 1 \neq 0$ pour $x \neq 1$ et $x \neq -1$

$1 + 3x^2 = 0$?

$1 + 3x^2 = 0 \iff x^2 = -\frac{1}{3}$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}, 1 + 3x^2 \neq 0$

Donc $b(x)$ et définie pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

(ou : $x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$)

$$* \; b(x) = \frac{\frac{x(x^2-1)+x^2+1}{x^2-1}}{1+3x^2} = \frac{x(x^2-1)+x^2+1}{(x^2-1)(1+3x^2)} = \frac{x^3+x^2-x+1}{(x^2-1)(1+3x^2)}$$

$x^2 + x + 1 \neq 0$?

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$

Donc : il n'existe pas de $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 + x + 1 = 0$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x + 1 \neq 0$

$2x^2 + 5 = 0$?

$2x^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = -5 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{5}{2}$ (car $x^2 \geq 0$ et $-\frac{5}{2} < 0$)

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $2x^2 + 5 \neq 0$.

Donc $a(x)$ est défini sur $\mathbb{R}$.

* $a(x) = \dfrac{\frac{(x-1)(x-3)}{x^2+x+1}}{2x^2+5} = \dfrac{(x-1)(x-3)}{(x^2+x+1)(2x^2+5)}$

b) $b(x) = \dfrac{x + \frac{x^2+1}{x^2-1}}{1+3x^2}$

* $b(x)$ est définit lorsque : $\begin{cases} x^2 - 1 \neq 0 \\ 1 + 3x^2 \neq 0 \end{cases}$

$x^2 - 1 = 0$?

$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

(ou $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

Donc $x^2 - 1 \neq 0$ pour $x \neq 1$ et $x \neq -1$

$1 + 3x^2 = 0$?

$1 + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{1}{3}$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 + 3x^2 \neq 0$

Donc $b(x)$ est définie pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$

(ou : $x \in]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$)

* $b(x) = \dfrac{\frac{x(x^2-1)+x^2+1}{x^2-1}}{1+3x^2} = \dfrac{x(x^2-1)+x^2+1}{(x^2-1)(1+3x^2)} = \dfrac{x^3+x^2-x+1}{(x^2-1)(1+3x^2)}$

c) $c(x) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{2x^2-6}} =$

+ $c(x)$ et défini quand : $2x^2 - 6 \neq 0$

$2x^2 - 6 \neq 0$

$2x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 6 \Leftrightarrow x^2 = \frac{6}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}$

Donc $2x^2 - 6 \neq 0$ quand $x \neq -\sqrt{3}$ et $x \neq \sqrt{3}$

Donc $c(x)$ est défini sur $\mathbb{R} / \{-\sqrt{3} ; \sqrt{3}\}$

+ $c(x) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{2x^2-6}} = 2x^2 - 6$

d) $d(x) = \dfrac{-\pi x^3 + x + 5}{12 - \dfrac{x^2}{x^2+6}} \times \dfrac{x^2+6}{x}$

+ $d(x)$ est défini quand : $\begin{cases} x^2 + 6 \neq 0 \\ 12 - \dfrac{x^2}{x^2+6} \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$

• $x^2 + 6 = 0$?

$x^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -6 \Rightarrow$ Impossible

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 6 \neq 0$

• $12 - \dfrac{x^2}{x^2+6} = 0$?

$12 - \dfrac{x^2}{x^2+6} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{12(x^2+6) - x^2}{x^2+6} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{12(x^2+6) - x^2}_{11x^2+72} = 0$

$\Leftrightarrow 11x^2 + 72 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{-72}{11}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $12 - \dfrac{x^2}{x^2+6} \neq 0$

$d(x)$ est défini sur $\mathbb{R}^*$

$$* \; d(x) = \frac{\frac{-\pi x^3 + x + 5}{11x^2+72}}{x^2+6} \times \frac{x^2+6}{x}$$

$$= \frac{(-\pi x^3 + x + 5)(x^2+6)}{(11x^2+72)\, x}$$

e) $$e(x) = \frac{-\pi x^3 + x + 5}{12 - \frac{x^2}{x^2+6}} \times \frac{x}{x^2+6}$$

* $e(x)$ et défini pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$* \; e(x) = \frac{(-\pi x^3 + x + 5) \times x}{\frac{11x^2+72}{x^2+6} \times (x^2+6)} = \frac{(-\pi x^3 + x + 5) \times x}{11x^2+72}$$

Exercice 4 :

a) $a(x) = x^3(x^2+x+1)$

$a(x) = x^5 + x^4 + x^3$

Donc $a'(x) = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2$

b) $$b(x) = \frac{e^{2x} + e^{x}}{e^{-x}} =$$

$b(x) = (e^{2x} + e^{x})\, e^{x}$

$b(x) = e^{3x} + e^{2x}$

Donc $b'(x) = 3e^{3x} + 2e^{2x}$

c) $$c(x) = \frac{x^3}{6x^2+1}$$

$$c'(x) = \frac{3x^2(6x^2+1) - x^3 \times 12x}{(6x^2+1)^2}$$

$$= \frac{18x^4 + 3x + 3x^2 - 12x^4}{(6x^2+1)^2} = \frac{6x^4 + 3x^2}{(6x^2+1)^2}$$

d) $d(x) = e^{-6x}(e^{2x})^2 + 12$

$d(x) = e^{-6x + 2 \times 2x} + 12$

$= e^{-2x} + 12$

$d'(x) = -2e^{-2x}$

e) $e(x) = \dfrac{2x^2 + 5x + 1}{x^2 + 1} - e$

$e'(x) = \dfrac{(4x + 5)(x^2 + 1) - (2x^2 + 5x + 1) \times 2x}{(x^2 + 1)^2}$

$e'(x) = \dfrac{4x^3 + 4x + 5x^2 + 5 - 4x^3 - 10x^2 - 2x}{(x^2 + 1)^2}$

$e'(x) = \dfrac{-5x^2 + 2x + 5}{(x^2 + 1)^2}$

f) $f(x) = \dfrac{x^3 + x}{x^4 + 2x^2 + 1}$

$f(x) = \dfrac{x(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{x}{(x^2 + 1)}$

$f'(x) = \dfrac{1 \times (x^2 + 1) - x(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}$

Exercice 5 :

a) $a(x) = \sqrt{x^2}$

* $a(x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$
* $a(x) = \sqrt{x^2} = |x|$

b) $b(x) = (\sqrt{x})^2$

* $b(x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}^+$
* $b(x) = (\sqrt{x})^2 = x$

c) $c(x) = (|x|+1)^2 - x^2$

$c(x)$ et défini pour tout $x \in \mathbb{R}$

$c(x) = |x|^2 + 2 \times |x| \times 1 + 1^2 - x^2$

(or $|x|^2 = |-x|^2 = x^2$)

$c(x) = 2|x| + 1 = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \geq 0 \\ -2x+1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$