Corrigé du DS N°2

Ex1

1) a) $\boxed{\forall x \in E,\ x \mathcal{R} x}$

b) $\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x}$

c) $\boxed{\forall (x,y,z) \in E^3,\ (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z) \Rightarrow x \mathcal{R} z}$

d) $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence si $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive.

2) a) $AB = \begin{pmatrix} 4 & -9 & 3 \\ -8 & 7 & 5 \\ 8 & 15 & 10 \end{pmatrix}$ b) $2C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -6 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

c) $AB + 2C = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 1 \\ -14 & 11 & 9 \\ 10 & 15 & 16 \end{pmatrix}$

3) a) S_3 n'admet aucune solution ; en effet

$$(S_3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y-z=1 & (L_1) \\ 3y-2z=1 & (L_2) \\ -9y+6z=1 & (L_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (L_1) \\ (L_2) \\ 0=4 & (L_3 \leftarrow L_3+3L_2) \end{cases}$$

et "$0=4$" est une équation fausse

b) (S_2) admet une infinité de solutions :

On peut choisir comme pivots, x puis y. Alors x et y vont s'exprimer à l'aide de z. (S_2) est indéterminé d'ordre 1

c) (S_1) est de Cramer : car L_3 donne z, puis L_2 donne y puis L_1 donne x.

Ex2

1) $\mathcal{R}$ est réflexive

$\forall x \in \mathbb{R},\ \underbrace{x^2-x^2}_{0} = \underbrace{x-x}_{0}$; donc $x \mathcal{R} x$

$\mathcal{R}$ est symétrique

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tq $x \mathcal{R} y$; alors $x^2-y^2 = x-y$; donc en multipliant par -1, on obtient $y^2-x^2 = y-x$. Donc $y \mathcal{R} x$

R est transitive

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tq $\begin{cases} xRy \\ yRz \end{cases}$; alors $\begin{cases} x^2-y^2 = x-y & ① \\ y^2-z^2 = y-z & ② \end{cases}$

En faisant ① + ②, on obtient $x^2-z^2 = x-z$. Donc xRz

2) • $\overline{0} = \{y \in \mathbb{R},\ yR0\}$;

or $yR0 \iff y^2-0^2 = y-0 \iff y^2 = y \iff \begin{cases} y=0 \\ \text{ou} \\ y=1 \end{cases}$

Donc $\boxed{\overline{0} = \{0, 1\}}$

• $\boxed{\overline{1} = \overline{0} = \{0,1\}}$ car $1 \in \overline{0}$

3) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\overline{x} = \{y \in \mathbb{R},\ yRx\}$

or : $yRx \iff y^2-x^2 = y-x \iff (y-x)(y+x-1) = 0$

$\iff \begin{cases} y-x=0 \\ \text{ou} \\ y+x-1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=x \\ \text{ou} \\ y=1-x \end{cases}$

Donc $\boxed{\overline{x} = \{x\} \cup \{1-x\}}$

4) card $\overline{x} = 1 \iff x = 1-x \iff x = 1/2$

Alors $\boxed{\overline{\left(\tfrac{1}{2}\right)} = \left\{\tfrac{1}{2}\right\}}$

Ex3

1) $(S) \iff \begin{cases} x+y+z=a & (L_1) \\ x-y-z=b & (L_2) \\ x-y+z=c & (L_3) \end{cases} \iff \begin{cases} (L_1) \\ 2x = a+b & (L_2 \leftarrow L_2+L_1) \\ 2x+2z = a+c & (L_3 \leftarrow L_3+L_1) \end{cases}$

$\iff \begin{cases} (L_1) \\ 2z = a+b \ (L_2) \\ (L_2) \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}(a+b) \\ z = \frac{1}{2}(a+c) - x = \frac{1}{2}(a+c) - \frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2}(c-b) \\ y = a-x-z = a - \frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(c-b) = \frac{1}{2}(a-c) \end{cases}$

$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\left(\tfrac{1}{2}(a+b),\ \tfrac{1}{2}(a-c),\ \tfrac{1}{2}(c-b)\right)\right\}}$

2) Soient $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$; alors :

$AX = Y \iff (S)$; or (S) est de Cramer donc $\boxed{A \text{ est inversible}}$

De plus $AX = Y \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Donc $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}}$