MA0101

Licence de Mathématiques - L1
version du 28 août 2020
Corrigé proposé par *julien.rouyer@univ-reims.fr*
Merci de signaler à cette adresse toute erreur ou coquille présente dans ce document

Université de Reims Champagne-Ardenne
Faculté de Sciences Exactes et Naturelles

CHAPITRE 2
CORRECTIONS DES EXERCICES

Exercice 1

<u>Remarques préliminaires</u> :

Pour déterminer l'ensemble de définition d'une fonction, on doit systématiquement se préoccuper des trois points suivants, car ce sont ceux qu'on rencontre le plus régulièrement :
- Un **quotient** est défini quand son dénominateur est non nul.
- Une **racine carrée** est définie quand ce à quoi elle s'applique (ce qu'elle contient) est positif ou nul.
- Un **logarithme** (néperien, binaire, décimal ou autre) est défini quand ce à quoi il s'applique (ce qu'il contient) est strictement positif.

Il faudra toutefois avoir en tête que d'autres fonctions ne sont pas définies sur $\mathbb{R}$: principalement la fonction **tangente** (notée tan, voir l'exercice 8) mais également les fonctions **arcsin, arccos, argch** et **argth** que vous rencontrerez peut-être plus tard (nous n'en parlerons pas en MA0101).

- On note souvent $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition d'une fonction f mais dans la suite on notera $\mathcal{D}_n$ l'ensemble de définition et $\mathcal{D}'_n$ l'ensemble de dérivabilité de la fonction f_n, où $n \in \mathbb{N}$.
- On utilise la notation ":=" pour dire "est égal par définition à"
- Une fonction f est paire (respectivement impaire) quand chacune des deux conditions suivantes sont respectées :
  1) $\mathcal{D}_f$ est **symétrique par rapport à** 0 (c'est à dire $x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow -x \in \mathcal{D}_f$) : il est inutile de chercher à vérifier le point suivant si celui-ci ne l'est pas !
  2) $\forall\, x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = f(x)$ (respectivement $f(-x) = -f(x)$)

---

1) La seule condition à vérifier est que le dénominateur $x + 5$ soit non nul.

$$x + 5 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -5$$

$$\mathcal{D}_1 = \mathbb{R}\backslash\{-5\} =]-\infty; -5[\cup] - 5; +\infty[$$

$\mathcal{D}_1$ n'est pas symétrique par rapport à 0 (car $5 \in \mathcal{D}_1$ mais $-5 \notin \mathcal{D}_1$) donc f_1 n'est ni paire ni impaire.

---

2) Ici encore, la seule condition à vérifier est que le dénominateur soit non nul.
On peut remarquer que $1 \times 4 = 4$ et $1+4 = 5$ et obtenir ainsi directement la factorisation $x^2+5x+4 = (x+1)(x+4)$
On peut aussi calculer le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$ du trinôme $ax^2 + bx + c$ avec ici $\begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \\ c = 4 \end{cases}$
et en déduire les deux racines $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5 - \sqrt{9}}{2} = -4$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5 + \sqrt{9}}{2} = -1$
puis obtenir la factorisation $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = (x + 1)(x + 4)$
On a donc

$$x^2 + 5x + 4 \neq 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x + 4) \neq 0 \Leftrightarrow x \notin \{-4; -1\}$$

$$\mathcal{D}_2 = \mathbb{R}\backslash\{-4; -1\} =]-\infty; -4[\cup] - 4; -1[\cup] - 1; +\infty[$$

$\mathcal{D}_2$ n'est pas symétrique par rapport à 0 (car $4 \in \mathcal{D}_2$ mais $-4 \notin \mathcal{D}_2$. On peut aussi remarquer que $1 \in \mathcal{D}_2$ mais $-1 \notin \mathcal{D}_2$) donc f_2 n'est ni paire ni impaire.

---

3) Ici, le contenu de la racine doit être positif ou nul.
On utilise l'identité remarquable (à connaître par cœur) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ pour factoriser $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ et en déduire les racines 2 et -2 de $x^2 - 4$ puis, si on veut, le tableau de signe de $x^2 - 4$:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
signe de $x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x+2$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

On peut aussi utiliser la règle suivante (plus rapide) :

Le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a SAUF entre ses éventuelles racines réelles x_1 et x_2.

Ici $a = 1 > 0$

$$x^2 - 4 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \notin]-2;2[$$

$$\mathcal{D}_3 = \mathbb{R}\backslash]-2;2[=]-\infty;-2] \cup [2;+\infty[$$

$\mathcal{D}_3$ est symétrique par rapport à 0 et

$$\forall x \in \mathcal{D}_3, f_3(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 4} = \sqrt{x^2 - 4} = f_3(x)$$

La fonction f_3 est donc paire.

---

4) Ici non seulement le dénominateur $x^2 + 5x + 4$ doit être non nul mais le quotient $\dfrac{2 - 3x - 2x^2}{x^2 + 5x + 4}$ doit également être positif ou nul.
Il faut donc étudier le signe du numérateur, celui du dénominateur et en déduire le signe du quotient.
Le numérateur $2 - 3x - 2x^2 = -2x^2 - 3x + 2$ a pour racines $\dfrac{1}{2}$ et -2 (le détail des calculs est laissé à votre discrétion) et il est positif ou nul sur $\left[-2;\dfrac{1}{2}\right]$
Le dénominateur $x^2 + 5x + 4$ est strictement positif sur $\mathbb{R}\backslash[-4;-1]$ (voir la question 2))
On obtient le tableau de signe :

x	$-\infty$		-4		-2		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $2-3x-2x^2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
signe de x^2+5x+4		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $\frac{2-3x-2x^2}{x^2+5x+4}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Ainsi :

$$\frac{2 - 3x - 2x^2}{x^2 + 5x + 4} \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \mathcal{D}_4 =]-4;-2] \cup \left]-1;\frac{1}{2}\right]$$

$\mathcal{D}_4$ n'étant pas symétrique par rapport à 0, f_4 n'est ni paire ni impaire.

---

5) On reprend les résultats précédents mais cette fois-ci on a les deux conditions :

$$\begin{cases} 2 - 3x - 2x^2 \geqslant 0 \\ x^2 + 5x + 4 > 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{D}_5 = \left]-1;\frac{1}{2}\right]$$

$\mathcal{D}_5$ n'étant pas symétrique par rapport à 0, f_5 n'est ni paire ni impaire.

---

6) Le contenu du logarithme doit être strictement positif :

$$-x > 0 \Leftrightarrow x < 0$$

$$\mathcal{D}_6 =]-\infty; 0[= \mathbb{R}_-^*$$

$\mathcal{D}_6$ n'étant pas symétrique par rapport à 0, f_6 n'est ni paire ni impaire.

---

7) Le contenu du logarithme doit être strictement positif :

$$3 + x > 0 \Leftrightarrow x > -3$$

$$\mathcal{D}_7 =]-3; +\infty[$$

$\mathcal{D}_7$ n'étant pas symétrique par rapport à 0, f_7 n'est ni paire ni impaire.

---

8) Le contenu du logarithme doit être strictement positif. **Une valeur absolue est toujours positive ou nulle**. La seule condition ici est donc qu'elle soit non nulle.

$$|x+5| > 0 \Leftrightarrow |x+5| \neq 0 \Leftrightarrow x+5 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -5$$

$$\mathcal{D}_8 =]-\infty; -5[\cup]-5; +\infty[= \mathbb{R} \backslash \{-5\}$$

$\mathcal{D}_8$ n'étant pas symétrique par rapport à 0, f_8 n'est ni paire ni impaire.

---

9) Ici, puisque on a deux logarithmes, on a la double condition :

$$\begin{cases} x > 0 \\ 2 - \ln x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < e^2 \text{ (par croissance de la fonction exponentielle sur } \mathbb{R}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \mathcal{D}_9 = \left]0; e^2\right[$$

$\mathcal{D}_9$ n'étant pas symétrique par rapport à 0, f_9 n'est ni paire ni impaire.

---

10) Ici on a la double condition

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{x-3} > 0 \\ \ln\left(\dfrac{x-1}{x-3}\right) \geqslant 0 = \ln(1) \end{cases} \Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{x-3} \geqslant 1 \text{ car la fonction logarithme néperien est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x-3+2}{x-3} = 1 + \frac{2}{x-3} \geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{2}{x-3} \geqslant 0 \Leftrightarrow x-3 > 0 \Leftrightarrow x > 3 \Leftrightarrow x \in \mathcal{D}_{10} =]3; +\infty[$$

On peut aussi résoudre l'inéquation $\dfrac{x-1}{x-3} \geqslant 1$ grâce au tableau de variations

x	$-\infty$	3	$+\infty$
signe de $\left(\frac{x-1}{x-3}\right)' = \frac{-2}{(x-3)^2}$	$-$	$\|\|$	$-$
variations de $x \mapsto \frac{x-1}{x-3}$	1^- $\searrow$ $-\infty$	$\|\|$	$+\infty$ $\searrow$ 1^+

$\mathcal{D}_{10}$ n'étant pas symétrique par rapport à 0, f_{10} n'est ni paire ni impaire.

---

11) Le contenu de la racine doit être positif mais comme cette racine est au dénominateur, son contenu doit de plus être non nul.

$$\mathcal{D}_{11} =]0; +\infty[= \mathbb{R}_+^*$$

$\mathcal{D}_{11}$ n'étant pas symétrique par rapport à 0, f_{11} n'est ni paire ni impaire.

---

12)

$$\sqrt{5}^x := e^{x\ln\sqrt{5}} = e^{\frac{x\ln 5}{2}}$$

La fonction exponentielle est déifnie sur $\mathbb{R}$ donc $\mathcal{D}_{12} = \mathbb{R}$.
$\mathcal{D}_{12} = \mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 mais f_{12} n'est ni paire ni impaire car par exemple : $f_{12}(-1) \neq \pm f_{12}(1)$.

---

13)

$$x^{\sqrt{5}} := e^{\sqrt{5}\ln x}$$

La fonction logarithme néperien est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\mathcal{D}_{13} = \mathbb{R}_+^*$.
$\mathcal{D}_{13} = \mathbb{R}_+^*$ n'est pas symétrique par rapport à 0 et donc f_{13} n'est ni paire ni impaire.

---

14)

$$x^x := e^{x\ln x}$$

$\mathcal{D}_{14} = \mathbb{R}_+^*$ n'est pas symétrique par rapport à 0 et donc f_{14} n'est ni paire ni impaire.

N.B. (facultatif) : On pourrait en fait étendre $\mathcal{D}_{14}$ à $\mathbb{R}_+^* \cup \left\{-\dfrac{p}{q} \quad / \quad p \in \mathbb{N}^*; q \in \mathbb{N}^* \text{ impair}\right\}$, avec la convention d'écriture $x^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{x}$. Par exemple, pour $x = -\dfrac{2}{3}$, on a : $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\frac{4}{9}}} = \sqrt[3]{\dfrac{9}{4}}$

Et il en va de même pour tous les nombres du type $-\dfrac{p}{q}$ donnés ci-dessus :

$$\left(-\frac{p}{q}\right)^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{\left(-\frac{p}{q}\right)^{\frac{p}{q}}} = \frac{1}{\sqrt[q]{\left(-\frac{p}{q}\right)^p}} = \frac{1}{\sqrt[q]{(-1)^p\frac{p^p}{q^p}}} = (-1)^p\sqrt[q]{\frac{q^p}{p^p}}$$

Ces éléments rationnels sont tout de même en nombre infini et grâce à eux on peut approcher tout réel négatif aussi près qu'on le veut (on dit qu'ils forment une partie dense de $\mathbb{R}_-^*$).
Nous n'évoquerons plus cette subtilité par la suite (voir la question 15) ci-dessous puis les fonctions f_4, f_5 et f_6 de l'exercice 10)

---

15)

$$(1+4x)^x := e^{x\ln(1+4x)} \quad \text{est défini } \Leftrightarrow 1+4x>0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{4}$$

$\mathcal{D}_{15} = \left]-\dfrac{1}{4};+\infty\right[$ n'est pas symétrique par rapport à 0 et donc f_{15} n'est ni paire ni impaire.

Pour continuer à s'entraîner : les réponses

$$\begin{cases}
\mathcal{D}_1 = \mathbb{R}\backslash\{-1;0;1\} =]-\infty;-1[\cup]-1;0[\cup]0;1[\cup]1;+\infty[& \text{fonction ni paire ni impaire} \\
\mathcal{D}_2 = \mathbb{R}\backslash]-1;1[=]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[& \text{fonction paire} \\
\mathcal{D}_3 = \left]-\frac{3}{2}\,;\,2-\sqrt{3}\right[\bigcup \left]2+\sqrt{3}\,;\,+\infty\right[& \text{fonction ni paire ni impaire} \\
\mathcal{D}_4 = \left]0;e^3\right] & \text{fonction ni paire ni impaire} \\
\mathcal{D}_5 =]\ln 2\,;\,+\infty[& \text{fonction ni paire ni impaire} \\
\mathcal{D}_6 = \mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[& \text{fonction ni paire ni impaire} \\
\mathcal{D}_7 = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3} \quad / \quad k\in\mathbb{Z}\right\} & \text{fonction paire} \\
\mathcal{D}_8 =]-\infty\,;\,-1[\cup]0\,;\,2[& \text{fonction ni paire ni impaire} \\
\mathcal{D}_9 = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\frac{\pi}{4}+k\pi\,;\,\frac{\pi}{4}+k\pi\right[& \text{fonction paire} \\
\mathcal{D}_{10} = \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{\pi}{12}+k\pi\,;\,\frac{\pi}{12}+k\pi \quad / \quad k\in\mathbb{Z}\right\} & \text{fonction paire}
\end{cases}$$

Exercice 2

Remarques préliminaires :

- Les principales formes indéterminées sont des expressions dans lesquelles, en passant à la limite naïvement, on obtient des résultats d'un des types suivants : $+\infty-\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0\times\infty$, 1^{∞}.
  Il faut bien comprendre qu'aucune de ces expressions n'a de signification et qu'on ne peut répondre immédiatement, quand on les rencontre, que le résultat est 0 ou 1 ou ∞ ou quoi que ce soit d'autre. Le résultat dépend intimement de tous les éléments présents dans l'expression dont on cherche à calculer la limite.
- Pour les polynômes comme pour les fractions rationnelles (c'est à dire le quotient de deux polynômes), on factorise par les monômes de plus haut degré et on simplifie (les limites en $\pm\infty$ sont donc données par les monômes de plus haut degré).
- si on a une forme indéterminée du type : "$\frac{0}{0}$" on factorise puis on simplifie par le ou les facteurs communs ou on essaie de faire apparaître un taux d'accroissement
- si on obtient : "$\frac{a}{0}$" avec $a\neq 0$, la limite est $\pm\infty$ et on fait une étude de signe pour préciser
- si on a une forme indéterminée du type : "$\frac{\infty}{\infty}$" ou "$+\infty-\infty$" : on factorise par le terme dominant et si besoin on utilise les résultats de croissances comparées
- si aucune forme indéterminée n'apparaît, le résultat est immédiat. En particulier, l'expression suivante n'est pas indéterminée : $\frac{\infty}{0}=\infty$ mais reste à déterminer le signe de cet infini en fonction des signes du numérateur et du dénominateur.

On remplace x par 1 car la fonction est définie (et continue) en cette valeur :

$$\lim_{x\to 1}(-x^5+3x+1)=-1+3+1=3$$

$$\lim_{x\to-\infty}(-x^5+3x+1)=\lim_{x\to-\infty}x^5\left(-1+\frac{3}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right)=+\infty$$

$$\text{car}\qquad \lim_{x\to-\infty}(x^5)=-\infty\qquad\text{et}\qquad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{x^4}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^5}\right)=0$$

De même

$$\lim_{x\to+\infty}(-x^5+3x+1)=-\infty$$

$$\text{car}\qquad \lim_{x\to+\infty}(x^5)=+\infty\qquad\text{et}\qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x^4}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^5}\right)=0$$

On remplace simplement x par 3 car la fonction est définie (et continue) en cette valeur :

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}\right)=\frac{8}{2}=4$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)=\frac{2}{-1}=-2$$

Ici la factorisation puis la simplification par $x-1$ ont permis de lever la forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$.

La limite étant finie (c'est un nombre réel et pas l'infini), la fonction est prolongeable par continuité en $x=1$ en posant $f(1)=-2$.

$$\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}\right)=\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)=-\infty\quad\text{car}\quad\begin{cases}\lim_{x\to 2^-}(x+1)=3\\ \lim_{x\to 2^-}(x-2)=0^-\end{cases}$$

Pour continuer à s'entraîner : les réponses

$$\begin{cases} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\infty \end{cases}$$

Exercice 3

On remplace x par 5 car la fonction est définie (et continue) en cette valeur :

$$\lim_{x\to 5}\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{21}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x^2-x+1}=\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=+\infty$$

$$\text{car}\qquad \lim_{x\to +\infty}x^2=+\infty\qquad \text{et}\qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x^2}=0\qquad \text{et}\qquad \lim_{u\to +\infty}\sqrt{u}=+\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(x-3\sqrt{x}+2\right)=\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)\right)+2=+\infty\qquad \text{car}\qquad \lim_{x\to +\infty}\sqrt{x}=\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x}-3)=+\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty}\sqrt{\frac{1+x+4x^2}{9x^2-1}}=\lim_{x\to +\infty}\sqrt{\frac{x^2\left(4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(9-\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to +\infty}\sqrt{\frac{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{9-\frac{1}{x^2}}}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}\qquad \text{car}\qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x^2}=0$$

On remplace x par 7 car la fonction est définie (et continue) en cette valeur :

$$\lim_{x\to 7}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\sqrt{56}-7=2\sqrt{14}-7$$

Pour cette limite, on multiplie $\sqrt{a}-b$ par sa quantité conjuguée $\sqrt{a}+b$: cela permet de faire disparaître la forme indéterminée du type "$+\infty-\infty$"

$$\begin{aligned}\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right) &= \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}\right)=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2+x-x^2}{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}\right)=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}\right)\\ &= \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}\right)=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}\right)=\frac{1}{2}\qquad \text{car}\qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=0\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=+\infty\qquad \text{car}\qquad \lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+x}\right)=\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)=+\infty$$

On remplace x par 2 car la fonction est définie (et continue) en cette valeur :

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}\right)=\frac{\sqrt{2}-2}{-2}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}\right)=\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{\sqrt{x}-2}{(x-1)(x-4)}\right)=-\infty$$

Car le numérateur a pour limite -1 et le dénominateur 0^+ car $\lim_{x\to 1^-}(x-1)=0^-$ et $\lim_{x\to 1^-}(x-4)=-3$

Pour continuer à s'entraîner : les réponses

$$\begin{cases} 0 \\ +\infty \\ \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{3} \\ -\infty \\ \frac{-9}{\sqrt{21}-5} \\ 25 \end{cases}$$

Exercice 4

On remplace x par 1 car la fonction est définie (et continue) en cette valeur :

$$\lim_{x\to 1} \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\left(\frac{\pi x^2+7x-5}{3x^2-11x+1}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\cos\left(\frac{x^2\left(\pi+\frac{7}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(3-\frac{11}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\cos\left(\frac{\pi+\frac{7}{x}-\frac{5}{x^2}}{3-\frac{11}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\tan\left(\frac{3x^2+7x-5}{5x^3-x+1}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\tan\left(\frac{x^2\left(3+\frac{7}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}{x^3\left(5-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\tan\left(\frac{3+\frac{7}{x}-\frac{5}{x^2}}{x\left(5-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}\right)\right) = \tan(0) = 0$$

Les quatre limites suivantes peuvent être obtenues en observant des taux d'accroissement associés à des fonctions dérivables :

$$f'(a) := \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$$

Par définition, la dérivée d'une fonction est cette limite, à condition que celle-ci existe.

Cette égalité permet de lever la forme indéterminée $\frac{0}{0}$: il faut penser aux taux d'accroissement quand on y est confronté.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x-\frac{\pi}{4}}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin x-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}\right) = \sin'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(4x)}{5x}\right) = \frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(4x)}{x}\right) = \frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(4x)-\sin(4\times 0)}{x-0}\right) = \frac{1}{5}\left(x\mapsto\sin(4x)\right)'(0) = \frac{1}{5}\left(x\mapsto 4\cos(4x)\right)(0) = \frac{1}{5}4\cos(0) = \frac{4}{5}$$

Par un calcul similaire, d'une part $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(7x)}{x}\right) = 7$ et d'autre part $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(5x)}{x}\right) = 5$, d'où :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(7x)}{\sin(5x)}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin(7x)}{x}}{\frac{\sin(5x)}{x}}\right) = \frac{7}{5}$$

De manière identique

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sin(\pi x)}{\sin(2\pi x)}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{\sin(\pi x)-\sin(\pi\times 1)}{x-1}}{\frac{\sin(2\pi x)-\sin(2\pi\times 1)}{x-1}}\right) = \frac{\pi\cos\pi}{2\pi\cos 2\pi} = \frac{-\pi}{2\pi} = -\frac{1}{2} \qquad \text{car} \qquad \begin{cases}\sin(\pi)=\sin(2\pi)=0\\ \cos(\pi)=-1\\ \cos(2\pi)=1\end{cases}$$

Pour continuer à s'entraîner : les réponses

$$\begin{cases}0\\ -1\\ \frac{1}{4}\\ \frac{3}{4}\end{cases}$$