Correction Exercice 10 - TD N°1

Exercice 10 : (Mêmes méthodes que l'exercice 9)

1) (on remplace n par $n+1$ dans la définition de S_n)

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} k^4 \quad \left(= 0^4 + 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + (n+1)^4 \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} k^4 \quad \left(= 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + (n+1)^4 \right)$$

$$= \sum_{j=0}^{n} (j+1)^4$$

(Changement d'indice : $j = k-1$

Pour $k = 1$: $j = k-1 = 1-1 = 0$

Pour $k = n+1$: $j = k-1 = (n+1)-1 = n$

$j = k-1$; donc $k = j+1$)

Donc : $\boxed{S_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} (j+1)^4}$

2) On utilise la formule du binôme :

$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2$,

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

coeff utilisés pour le développement de $(a+b)^4$

En particulier, pour $a = k$ et $b = 1$:

$$(k+1)^4 = k^4 + 4k^3 \times 1 + 6 \times k^2 \times 1^2 + 4 \times k \times 1^3 + 1^4$$

c'est à dire : $(k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$

Or $S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} (k+1)^4$; donc $\boxed{S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} (k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1)}$

3) On a :

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} k^4 - \sum_{k=0}^{n} k^4$$

$$= \left(\cancel{\sum_{k=0}^{n} k^4} + (n+1)^4 \right) - \cancel{\sum_{k=0}^{n} k^4}$$

(Car $\sum_{k=0}^{n+1} k^4 = \underbrace{0^4 + 1^4 + 2^4 + \dots + n^4}_{} + (n+1)^4 = \sum_{k=0}^{n} k^4 + (n+1)^4$)

$$= (n+1)^4$$

D'où $\boxed{(n+1)^4 = S_{n+1} - S_n}$

Or $\begin{cases} S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} (k^4+4k^3+6k^2+4k+1) & \text{(d'après 2°))} \\ S_n = \sum_{k=0}^{n} k^4 & \text{(d'après la définition de } S_n\text{)} \end{cases}$

Donc $S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n} (k^4+4k^3+6k^2+4k+1) - \sum_{k=0}^{n} k^4$

$= \left(\cancel{\sum_{k=0}^{n} k^4} + 4\sum_{k=0}^{n} k^3 + 6\sum_{k=0}^{n} k^2 + 4\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1\right) - \cancel{\sum_{k=0}^{n} k^4}$

(d'après les propriétés des Σ)

$= 4\sum_{k=0}^{n} k^3 + 6\sum_{k=0}^{n} k^2 + 4\sum_{k=0}^{n} k + \underbrace{(n+1)}$

(car $\sum_{k=0}^{n} 1 = \overbrace{1+1+\dots\dots+1}^{n+1 \text{ fois}}$ $= n+1$)

Finalement, on a bien obtenu :

$$\boxed{(n+1)^4 = S_{n+1} - S_n = 4\sum_{k=0}^{n} k^3 + 6\sum_{k=0}^{n} k^2 + 4\sum_{k=0}^{n} k + (n+1)}$$

4°) On sait que $\begin{cases} \sum_{k=0}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1) & \text{(d'après le cours)} \\ \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) & \text{(d'après le cours ou l'exercice 9)} \end{cases}$

Or $(n+1)^4 = 4\sum_{k=0}^{n} k^3 + 6\sum_{k=0}^{n} k^2 + 4\sum_{k=0}^{n} k + (n+1)$ (d'après 3°)

Donc $(n+1)^4 = 4\sum_{k=0}^{n} k^3 + \underbrace{6 \times \frac{1}{6}n(n+1)}_{-\,n(n+1)} + \underbrace{4 \times \frac{1}{2}n(n+1)}_{2n(n+1)} + (n+1)$

D'où $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{1}{4}\left((n+1)^4 - n(n+1) - 2n(n+1) - (n+1)\right)$ (On a extrait $\sum_{k=0}^{n} k^3$ de l'égalité précédente)

$= \frac{1}{4}(n+1)\left((n+1)^3 \underbrace{-\,n - 2n}_{-3n} - 1\right)$

$= \frac{1}{4}(n+1)\left(\underbrace{(n^3+3n^2+\cancel{3n}+\cancel{1})}_{\substack{\text{Développement de} \\ (n+1)^3 \text{ grâce à la} \\ \text{formule du binôme} \\ \text{(Voir Ex 9, 2°)}}} - \cancel{3n} - \cancel{1}\right)$

$$= \frac{1}{4}(n+1)\ (n^3+3n^2)$$

$$= \frac{1}{4}(n+1)\ n^2\ (n+1) \qquad \text{(Factorisation par } n^2\text{)}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{4}\ n^2\ (n+1)^2}_{= \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2}$$

On vient de prouver que : $\boxed{\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2}$