

Exercice 1:

1. Il existe deux réels, tels que la somme de leur carré est strictement inférieure au double de leur produit.

Vrai ou Faux \rightarrow Cette énoncé est faux

$$F: \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a-b)^2 \geq 0$$

$$a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

2. Tout entier naturel peut s'écrire comme la somme de cube de deux entiers naturels.

Vrai ou Faux: Cette énoncé est faux

$$n=2 \quad 3 = a^3 + b^3$$

$$n=2 \quad \text{Si } 3 = a^3 + b^3 \quad (\text{où } a, b \in \mathbb{N}) \text{ alors } a \leq 1 \text{ et } b \leq 1$$

$$a=0 \text{ ou } 1 \text{ et } b=0 \text{ ou } 1$$

$$0^3 + 0^3 \neq 3 \quad | \quad 1^3 + 0^3 \neq 3$$

$$1^3 + 1^3 \neq 3$$

3. Le sinus de tous nombres réel est compris entre -1 et 1 .

Exercice 2:

(négation)

$$1. \quad \forall x \in \mathbb{C}, x^2 \geq 0$$

$$\exists x \in \mathbb{C}, x^2 < 0$$

$$\text{Faux: } \exists x \in \mathbb{C}, x^2 < 0$$

$$\text{Par exemple: } x=i \quad \text{et } i^2 = -1 < 0$$

$$2. \quad \exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$$

$$\text{Faux: } \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0 \quad \text{Vrai}$$

$$3. \exists x \in \mathbb{R}, e^x \geq 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x < 0$$

Vrai: Preuve: Choisir un exemple: $x=0 \in \mathbb{R}$
 Donc $e^x = e^0 = 1 \geq 0$

$$4. \forall x \in \mathbb{N}, x \leq x^2$$

$$\exists x \in \mathbb{N}, x > x^2$$

Vrai: Soit $x \in \mathbb{N}$: Hq $x \leq x^2$

$$\text{On a } x^2 - x = x(x-1) \begin{cases} = 0 & \text{si } x=0 \\ \geq 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{Donc } x^2 - x \geq 0$$

$$\text{Donc } x^2 \geq x$$

$$5. \exists x \in \mathbb{R}, x \geq x^2$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x^2$$

Vrai

Faux

Par exemple:

$$\text{Pour } x=0,5 \text{ On a } x^2=0,25$$

$$\text{Donc } x \geq x^2$$

Exercice 6:

$$1. \neg P \text{ et } Q$$

$$2. \neg P \text{ et } \neg Q \vdash \neg(P \text{ ou } Q)$$

$$3. P \text{ ou } (P \text{ et } Q)$$

$$\vdash (P \text{ ou } P) \text{ et } (P \text{ ou } Q)$$

$$\vdash P \text{ et } (P \text{ ou } Q)$$

$$\vdash P \text{ ou } Q$$

$$4. P \text{ ou } Q$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \neg(P \text{ ou } Q) \vdash (\neg P \text{ et } \neg Q) \\ \neg(P \text{ et } Q) \vdash (\neg P \text{ et } \neg Q) \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (P \text{ ou } Q) \text{ ou } R \\ P \text{ ou } (Q \text{ ou } R) \\ (P \text{ et } Q) \text{ et } R \vdash P \text{ et } (Q \text{ et } R) \end{array} \right\}$$