Année universitaire 2020-2021

Licence 1ère année - Mention MI - Ma0102

Chapitre 5
Relations d'équivalences

Liste des paragraphes

I - Définitions et exemples

Soit E un ensemble non vide.

DÉFINITION 1 :

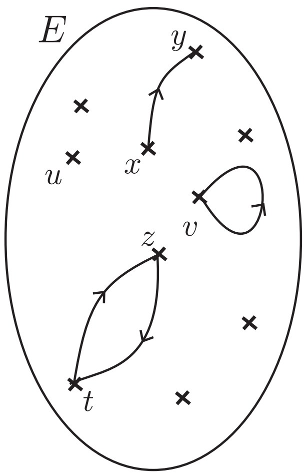
1/ On appelle ***relation binaire dans E***, tout énoncé logique qui dépend d'un couple d'éléments de E. Autrement dit, si pour tout $(x, y) \in E^2$, $\mathscr{R}(x, y)$ est un énoncé logique, on dira : ***$\mathscr{R}$ est une relation binaire dans E***.

2/ Si $\mathscr{R}$ est une relation binaire dans E, alors pour tout $(x, y) \in E^2$, l'énoncé $\mathscr{R}(x, y)$ sera noté : $\boldsymbol{x \,\mathscr{R}\, y}$

3/ Soit $\mathscr{R}$ est une relation binaire dans E et $(x, y) \in E^2$.

- ▷ Si l'énoncé $x \,\mathscr{R}\, y$ est vrai, on dit (et on écrit) : " ***x est en relation avec y modulo $\mathscr{R}$*** " ou bien encore : " ***On a $x \,\mathscr{R}\, y$*** ".
- ▷ Si l'énoncé $x \,\mathscr{R}\, y$ est faux, on dit : " ***x n'est pas en relation avec y modulo $\mathscr{R}$*** " ou bien encore : "***On n'a pas $x \,\mathscr{R}\, y$*** ", ou bien encore : "***On a $x \,\not\!\mathscr{R}\, y$***.

Diagramme sagittal d'une relation binaire : Pour $(x, y) \in E^2$, on relie x à y par une flèche dirigée de x vers y, pour traduire que l'on a $x \,\mathscr{R}\, y$; s'il n'y a pas de flèche reliant x et y, c'est qu'on n'a pas $x \,\mathscr{R}\, y$.



Par exemple, on a : $\begin{cases} x \,\mathscr{R}\, y \\ v \,\mathscr{R}\, v \\ z \,\mathscr{R}\, t \\ t \,\mathscr{R}\, z \\ u \,\not\!\mathscr{R}\, x \end{cases}$

$u \,\not\!\mathscr{R}\, v$

$y \,\not\!\mathscr{R}\, v$ ....

EXEMPLES 1 :

1/ La relation d'égalité dans E

Dans l'ensemble E, considérons, pour tout $(x, y) \in E^2$, l'énoncé $\mathscr{R}(x, y) \longmapsto (x = y)$. Alors $\mathscr{R}$ est une relation binaire dans E. Cette relation binaire $\mathscr{R}$ est définie dans E par :

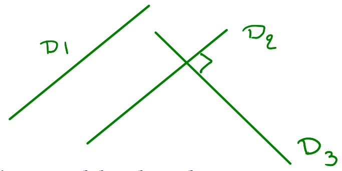
$$\forall (x, y) \in E^2,\ x \,\mathscr{R}\, y \Longleftrightarrow x = y$$

Cette relation binaire s'appelle "*relation d'égalité dans E*".

2/ Considérons, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, l'énoncé $\mathscr{R}(x, y) \longmapsto (x \geqslant y)$. Alors $\mathscr{R}$ est une relation binaire dans $\mathbb{R}$. Cette relation binaire $\mathscr{R}$ est définie dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \,\mathscr{R}\, y \Longleftrightarrow x \geqslant y$$

$3 \,\mathscr{R}\, 3$
$4 \,\mathscr{R}\, 3$
$5 \,\not\!\mathscr{R}\, 1$



$D_1 \mathscr{R} D_2$, $D_2 \mathscr{R} D_1$, $D_1 \not\mathscr{R} D_3$, $D_2 \not\mathscr{R} D_3$, ⋮ — $D_2 \mathscr{S} D_3$, $D_1 \not\mathscr{S} D_2$

On a par exemple : $6 \mathscr{R} 2$ et $1 \not\mathscr{R} 2$

3/ Les relations de perpendicularité et de parallélisme sur l'ensemble des droites

Soit $\mathscr{P}$ un plan ; désignons par $\mathscr{D}$ l'ensemble des droites de $\mathscr{P}$. Pour tout couple de droites $(D_1, D_2) \in \mathscr{D}^2$, considérons les énoncés : $\mathscr{R}(D_1, D_2) \longmapsto (D_1 /\!/ D_2)$ et $\mathscr{S}(D_1, D_2) \longmapsto (D_1 \perp D_2)$. Alors $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$ sont des relations binaires, appelées respectivement *"relation de parallélisme"* et *"relation de perpendicularité"* ; elles sont définies par :

$$\left[\forall (D_1, D_2) \in \mathscr{D}^2,\ D_1 \mathscr{R} D_2 \Longleftrightarrow D_1 /\!/ D_2\right] \quad \text{et} \quad \left[\forall (D_1, D_2) \in \mathscr{D}^2,\ D_1 \mathscr{S} D_2 \Longleftrightarrow D_1 \perp D_2\right]$$

Définitions 2 :

Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire dans E. On dit que :

1/ ***$\mathscr{R}$ est réflexive*** si : $\forall x \in E,\ x \mathscr{R} x$

2/ ***$\mathscr{R}$ est symétrique*** si : $\forall (x, y) \in E^2,\ \left[x \mathscr{R} y \implies y \mathscr{R} x\right]$

3/ ***$\mathscr{R}$ est transitive*** si : $\forall (x, y, z) \in E^3,\ \left[(x \mathscr{R} y \text{ et } y \mathscr{R} z) \implies x \mathscr{R} z\right]$

Définition 3 :

Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire dans E. On dit que ***$\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence*** si $\mathscr{R}$ est réflexive, symétrique et transitive.

Exemples 2 :

1/ Soit $\mathscr{P}$ un plan et $\mathscr{D}$ l'ensemble des droites de $\mathscr{P}$. Alors la relation de parallélisme est une relation d'équivalence dans $\mathscr{D}$ mais la relation de perpendicularité n'en n'est pas une.

2/ La relation d'égalité sur un ensemble non vide est une relation d'équivalence.

II - Classes d'équivalences et ensemble quotient

Dans ce paragraphe, E est un ensemble non vide et $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence dans E.

Définition 4 :

1/ Pour tout $x \in E$, on appelle ***classe d'équivalence de x modulo $\mathscr{R}$***, la partie de E notée $Cl_{\mathscr{R}}(x)$ ou bien $\overline{x}$ (si aucune confusion n'est possible) et définie par :

$$\overline{x} = \left\{ y \in E \mid y \mathscr{R} x \right\} = \{ y \in E,\ x \mathscr{R} y \}$$

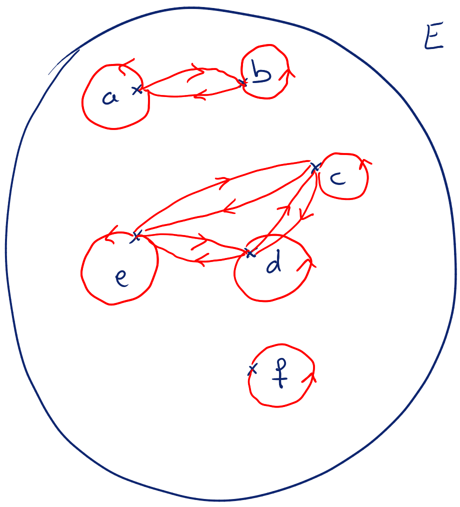
Autrement dit pour $x \in E$:

$$\forall y \in E,\ \left[y \in \overline{x} \Longleftrightarrow y \mathscr{R} x\right]$$

2/ On appelle ***ensemble quotient de E par $\mathscr{R}$***, l'ensemble noté $E/\mathscr{R}$, et défini par :

$$E/\mathscr{R} = \left\{ \overline{x} \mid x \in E \right\}$$

$\mathcal{R}$ relation d'équivalence



$y\mathcal{R}a$: $\quad \{a,b\} = \bar{a} = \mathcal{C}\ell_{\mathcal{R}}(a)$

classe d'équivalence de a modulo $\mathcal{R}$

$y\mathcal{R}b$: $\quad \bar{b} = \{b,a\}$

$y\mathcal{R}c$: $\quad \bar{c} = \{c,d,e\}$

$y\mathcal{R}d$ $\quad \bar{d} = \{d,e,c\}$

$y\mathcal{R}e$ $\quad \bar{e} = \{e,c,d\}$

$y\mathcal{R}f$: $\quad \bar{f} = \{f\}$

$a \in \bar{a}$, $b \in \bar{b}$, $c \in \bar{c}$, $d \in \bar{d}$, $e \in \bar{e}$, $f \in \bar{f}$

$$\begin{cases} \cdot\ \bar{x} = \{y \in E,\ y\mathcal{R}x\} \\ \cdot\ x \in \bar{x} \\ \cdot\ \bar{x} \subset E \end{cases}$$

$\bar{a} = \bar{b}$, $\bar{c} = \bar{d} = \bar{e}$

$\{\bar{a}, \bar{c}, \bar{f}\} = \underbrace{\text{ensemble quotient de } E \text{ par } \mathcal{R}}_{E/\mathcal{R}}$

$E/\mathcal{R} = \{\{a,b\}, \{c,d,e\}, \{f\}\} \subset \mathcal{P}(E)$

Prop1 : 1/ $x \in E$: $\bar{x} \subset E$ et $x \in \bar{x}$

2/ $x\mathcal{R}y \iff x \in \bar{y}$

$\iff y \in \bar{x}$

$\iff \bar{x} = \bar{y}$

Autrement dit :

$$\forall X \in \mathscr{P}(E),\ \left[X \in {}^{E}/_{\mathscr{R}}\right] \Longleftrightarrow \left[\exists x \in E,\, \overline{x} = X\right]$$

Proposition 1 :

1/ $\forall x \in E$, $\overline{x} \subset E$ et $x \in \overline{x}$.

2/ Soit $(x, y) \in E^2$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $x \,\mathscr{R}\, y$ ii) $x \in \overline{y}$ iii) $y \in \overline{x}$ iv) $\overline{x} = \overline{y}$

Corollaire 1 :

Soit $X \in {}^{E}/_{\mathscr{R}}$. Alors :

1/ Il existe $x_0 \in E$ tel que $\overline{x}_0 = X$.

2/ Pour tout $x \in E$, $x \in X \Longleftrightarrow \overline{x} = X$.

Tout élément de X s'appelle ***représentant de X***

Définition 5 :

Soit Ω un ensemble non vide. On appelle ***partition*** de Ω, toute partie non vide $\mathfrak{P}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ telle que l'on ait les deux conditions suivantes :

▷ $\forall A \in \mathfrak{P},\ A \neq \emptyset$

▷ $\forall x \in \Omega,\ \exists! A \in \mathfrak{P},\ x \in A$

Exemples 3 :

1/ Soit $\Omega = \{1, 2, 3\}$.

▷ Soit $\mathfrak{P}_1 = \Big\{\{1, 2\}, \{3\}\Big\}$. Alors $\mathfrak{P}_1$ est une partition de Ω.
Posons $\mathfrak{P}_2 = \Big\{\{1, 3\}, \{2\}\Big\}$, $\mathfrak{P}_3 = \Big\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\Big\}$ et $\mathfrak{P}_4 = \Big\{\{1, 2, 3\}\Big\}$. Alors $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ et $\mathfrak{P}_4$ sont aussi des partitions de Ω.

▷ Par contre $\mathfrak{P}_5 = \Big\{\emptyset, \{1, 2, 3\}\Big\}$, $\mathfrak{P}_6 = \Big\{\{1\}, \{2\}\Big\}$ et $\mathfrak{P}_7 = \Big\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\Big\}$ ne sont pas des partitions de Ω.

2/ $\left\{\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{*-}\right\}$ est une partition de $\mathbb{R}$.

3/ Soit $\Omega = \mathbb{N}$. Soient $A_0 = \left\{3k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$, $A_1 = \left\{3k + 1 \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ et $A_2 = \left\{3k + 2 \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$. Posons $\mathfrak{P} = \Big\{A_0, A_1, A_2\Big\}$. Alors $\mathfrak{P}$ est une partition de Ω.

<u>PROPOSITION 2</u> :

1/ Pour tout $(X, Y) \in {}^{E}/_{\mathscr{R}} \times {}^{E}/_{\mathscr{R}}$, on a : $X = Y$ ou $X \cap Y = \emptyset$.

2/ ${}^{E}/_{\mathscr{R}}$ est une partition de E.

****