
Exercice 1

A) 1) $f(x) = (x^2 + 2x + 1)^2$

f est une fonction polynôme définie sur IR, donc continue et par conséquent intégrable sur IR.

$f(x) = (x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x + 1) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

$F(x) = \frac{x^5}{5} + 4 \cdot \frac{x^4}{4} + 6 \cdot \frac{x^3}{3} + 4 \cdot \frac{x^2}{2} + x + C = \frac{1}{5}x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + C$ où $C \in$ IR

2) $f(x) = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2$

f est une fonction rationnelle définie sur IR*, donc continue et par conséquent intégrable sur $]-\infty\,;0[$ ou sur $]0\,;+\infty[$

$f(x) = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = x^4 + 2 + \frac{1}{x^4}$ **Remarque** : on peut intégrer $\frac{1}{x^4}$ comme x^{-4}

$F(x) = \frac{x^5}{5} + 2x - \frac{1}{3x^3} + C$ où $C \in$ IR

3) $f(x) = \frac{x^2+6x-3}{x}$

f est une fonction rationnelle définie sur IR*, donc continue et par conséquent intégrable sur $]-\infty\,;0[$ ou sur $]0\,;+\infty[$

$$f(x) = \frac{x^2 + 6x - 3}{x} = x + 6 - \frac{3}{x}$$

$F(x) = \frac{x^2}{2} + 6x - 3 \cdot ln|x| + C$ où $C \in$ IR

Remarque :

les primitives de f sur $]-\infty\,;0[$ sont les fonctions : $F(x) = \frac{x^2}{2} + 6x - 3 \cdot ln(-x) + C$ où $C \in$ IR ;

les primitives de f sur $]0\,;+\infty[$ sont les fonctions : $F(x) = \frac{x^2}{2} + 6x - 3 \cdot ln(x) + C$ où $C \in$ IR ;

4) $f(x) = \frac{1}{x^3} + e^x - 3\cos(x) - \cos(3x)$

f est la somme d'une fonction rationnelle définie sur IR* et de fonctions exponentielles et cosinus définies sur IR, donc f est définie sur IR* ; ainsi f est continue et par conséquent intégrable sur $]-\infty\,;0[$ ou sur $]0\,;+\infty[$

$F(x) = -\frac{1}{2x^2} + e^x - 3\sin(x) - \frac{1}{3}\sin(3x) + C$ où $C \in$ IR **Remarque** : on peut intégrer $\frac{1}{x^3}$ comme x^{-3}

5) $f(x) = 2x^4 + \frac{1}{x^3} - \sqrt{2x+1}$

f est la somme d'une fonction rationnelle $x \longmapsto 2x^4 + \frac{1}{x^3}$ définie sur IR* et d'une fonction racine carrée $x \longmapsto -\sqrt{2x+1}$ définie sur $\left[-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$, donc f est définie sur $\left[-\frac{1}{2}\,;0\right[\cup\,]0\,;\,+\infty[$; ainsi f est continue et par conséquent intégrable sur $\left[-\frac{1}{2}\,;0\right[$ ou sur $]0\,;\,+\infty[$

$$f(x) = 2x^4 + \frac{1}{x^3} - \sqrt{2x+1} = 2x^4 + \frac{1}{x^3} - (2x+1)^{\frac{1}{2}} = 2x^4 + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{2} \cdot 2(2x+1)^{\frac{1}{2}}$$

$F(x) = 2 \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} + C$ où $C \in$ IR

$= \frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C$ où $C \in$ IR

Remarque : on intègre $2(2x+1)^{\frac{1}{2}}$ comme une forme $u'u^{\alpha}$ de primitive $\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ avec $\alpha = \frac{1}{2}$

6) $f(x) = 3x\sqrt{1+x^2}$

---

f est le produit d'une fonction polynôme $x \longmapsto 3x$ définie sur IR et d'une fonction racine carrée $x \longmapsto \sqrt{1+x^2}$ définie sur IR, donc f est définie sur IR ; ainsi f est continue et par conséquent et intégrable sur IR

$$f(x) = 3x\sqrt{1+x^2} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2x(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \cdot 2x(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$F(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = (1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C = (1+x^2)\sqrt{1+x^2} + C \text{ où } C \in \text{IR}$$

Remarque : on intègre $2x(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$ comme une forme u'u$^\alpha$ de primitive $\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ avec $\alpha = \frac{1}{2}$

7) $f(x) = \frac{2}{(x+1)^4}$

f est une fonction rationnelle définie sur IR-{-1} donc continue $]-\infty\,;-1[$ et sur $]-1\,;+\infty[$ et par conséquent intégrable sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]-1\,;+\infty[$

$$f(x) = \frac{2}{(x+1)^4} = 2(x+1)^{-4}$$

$$F(x) = 2 \cdot \frac{(x+1)^{-3}}{-3} + C = -\frac{2}{3(x+1)^3} + C \text{ où } C \in \text{IR}$$

Remarque : on intègre $\frac{1}{(x+1)^4}$ comme une forme u'u$^\alpha$ de primitive $\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ avec α = -4

8) $f(x) = x^2\left(1-\sqrt[3]{x}\right) = x^2 - x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^2 - x^{\frac{7}{3}}$

f est la différence d'une fonction polynôme $x \longmapsto x^2$ définie sur IR et d'une fonction puissance $x \longmapsto x^{\frac{7}{3}}$ définie sur IR$^+$, donc f est définie sur IR$^+$; ainsi f est continue et par conséquent intégrable sur $[0\,;+\infty[$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^{\frac{10}{3}}}{\frac{10}{3}} + C = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{10}x^{\frac{10}{3}} + C = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{10}x^3\sqrt[3]{x} + C \text{ où } C \in \text{IR}$$

9) $f(x) = \sin(2x) + \cos(3x)$

f est la somme de fonctions sinus et cosinus définies sur IR, donc f est définie sur IR ; ainsi f est continue et par conséquent intégrable sur IR

$$F(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + C \text{ où } C \in \text{IR}$$

10) $f(x) = \sin(2x)\cos(3x)$

f est le produit de fonctions sinus et cosinus définies sur IR, donc f est définie sur IR ; ainsi f est continue et par conséquent intégrable sur IR

Linéarisation de $f(x)$:

$$f(x) = \sin(2x)\cos(3x) = \frac{e^{i2x}-e^{-i2x}}{2i} \cdot \frac{e^{i3x}+e^{-i3x}}{2} = \frac{e^{i5x}+e^{-ix}-e^{ix}-e^{-i5x}}{4i}$$
$$= \frac{e^{i5x}-e^{-i5x}}{4i} - \frac{e^{ix}-e^{-i}}{4i} = \frac{1}{2}\sin(5x) - \frac{1}{2}\sin(x)$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\cos(5x)\right) - \frac{1}{2}(-\cos(x)) + C = -\frac{1}{10}\cos(5x) + \frac{1}{2}\cos(x) + C \text{ où } C \in \text{IR}$$

11) $f(x) = \sin^3(x)$

f est le produit de la fonction sinus définie sur IR, donc f est définie sur IR ; ainsi f est continue et par conséquent intégrable sur IR

1e méthode : linéarisation de $f(x)$:

$$f(x) = \sin^3(x) = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \frac{e^{i3x}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-i3x}}{-8i} = \frac{e^{i3x}-e^{-i3x}}{-8i} - 3\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{-8i}$$
$$= -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x)$$

$F(x) = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\cos(3x)\right) + \frac{3}{4}(-\cos(x)) + C = \frac{1}{12}\cos(3x) - \frac{3}{4}\cos(x) + C$ où $C \in$ IR

2e méthode : utilisation des formules trigonométriques :
$f(x) = \sin^3(x) = \sin(x) \cdot \sin^2(x) = \sin(x) \cdot (1 - \cos^2(x)) = \sin(x) - \sin(x) \cdot \cos^2(x)$
$F(x) = -\cos(x) + \frac{1}{3}\cos^3(x) + C$ où $C \in$ IR
Remarque : on intègre $-\sin(x)\cos^2(x)$ comme une forme u'u^α de primitive $\frac{u^{\propto+1}}{\propto+1}$ avec α = 2

12) $f(x) = \tan^2(x)$
f est le produit de la fonction tangente définie sur IR- $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k\epsilon\boldsymbol{Z}\right\}$, donc f est définie sur IR- $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k\epsilon Z\right\}$; ainsi f est continue et par conséquent intégrable sur chaque intervalle $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ avec $k\epsilon\boldsymbol{Z}$
$f(x) = \tan^2(x) = \tan^2(x) + 1 - 1$
$F(x) = \tan(x) - x + C$ où $C \in$ IR

13) $f(x) = \frac{e^{3x}e^{-2x}}{e^x}$
f est le produit et le quotient de fonctions exponentielles définies sur IR et dont le dénominateur ne s'annule pas, donc f est définie sur IR ; ainsi f est continue ainsi f est et par conséquent intégrable sur IR

$$f(x) = \frac{e^{3x}e^{-2x}}{e^x} = \frac{e^x}{e^x} = 1$$

$F(x) = x + C$ où $C \in$ IR

B) 1) $f(x) = \sin(x)\cos^2(x)$
f est le produit de fonctions sinus et cosinus définies sur IR, donc f est définie sur IR ; ainsi f est continue et par conséquent intégrable sur IR
$f(x) = \sin(x)\cos^2(x) = -(-\sin(x))\cos^2(x)$
$F(x) = -\frac{1}{3}\cos^3(x) + C$ où $C \in$ IR
Remarque : on intègre $-\sin(x)\cos^2(x)$ comme une forme u'u^α de primitive $\frac{u^{\propto+1}}{\propto+1}$ avec α = 2

2) $f(x) = \tan(x)$
f est la fonction tangente définie sur IR- $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k\epsilon\boldsymbol{Z}\right\}$; ainsi f est continue et par conséquent intégrable sur chaque intervalle $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ avec $k\epsilon\boldsymbol{Z}$

$$f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}$$

$F(x) = -\ln(|\cos(x)|) + C$ où $C \in$ IR
Remarque : on intègre $\frac{-\text{si}\ \ (x)}{\cos(x)}$ comme une forme $\frac{u'}{u}$ de primitive $ln|u|$

3) $f(x) = \cos(x)\sin^{25}(x)$
f est le produit de fonctions sinus et cosinus définies sur IR, donc f est définie sur IR ; ainsi f est continue et par conséquent intégrable sur IR
$F(x) = \frac{1}{26}\sin^{26}(x) + C$ où $C \in$ IR
Remarque : on intègre $\cos(x)\sin^{25}(x)$ comme une forme u'u^α de primitive $\frac{u^{\propto+1}}{\propto+1}$ avec α = 25

---

4) $f(x) = 3\sin(x)\cos^5(x) + 2\sin(x)\cos(x)$

f est la somme et le produit de fonctions sinus et cosinus définies sur IR, donc f est définie sur IR ; ainsi f est continue et par conséquent intégrable sur IR

$f(x) = -3\,(-sin(x))\,cos^5(x) - 2(-sin(x))\,cos(x)$

$F(x) = -3\frac{\cos^6(x)}{6} - 2\frac{\cos^2(x)}{2} + C = -\frac{1}{2}\cos^6(x) - \cos^2(x) + C \text{ où } C \in IR$

Remarque : on intègre $-\sin(x)\cos^5(x)$ et $-\sin(x)\cos(x)$ comme des formes u'uᵅ de primitive $\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ avec α = 5 et α = 1

Autres formes d'intégration :

a) on peut intégrer $2\sin(x)\cos(x)$ comme une forme u'uᵅ avec $u = \sin(x)$, $u' = \cos(x)$ et α=1 ;
d'où $\int 2\sin(x)\cos(x)\,dx = 2\int \sin(x)\cos(x)\,dx = 2\frac{\sin^2(x)}{2} = \sin^2(x)$
ainsi $F(x) = -\frac{1}{2}\cos^6(x) + \sin^2(x) + C \text{ où } C \in IR$

b) on peut remarquer que $2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$
d'où $\int 2\sin(x)\cos(x)\,dx = \int \sin(2x)\,dx = -\frac{\cos(2x)}{2}$
ainsi $F(x) = -\frac{1}{2}\cos^6(x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + C \text{ où } C \in IR$

5) $f(x) = \sin(x)\ e^{\cos(x)}$

f est le produit de la fonction sinus et de la fonction cosinus composée avec la fonction exponentielle, toutes définies sur IR, donc f est définie sur IR ; ainsi f est continue et par conséquent intégrable sur IR

$f(x) = \sin(x)\ e^{\cos(x)} = -(-\sin(x))\,e^{\cos(x)}$

$F(x) = -e^{\cos(x)} + C$ où $C \in$ IR

Remarque : on intègre $-\sin(x)\,e^{\cos(x)}$ comme une forme u'eᵘ de primitive eᵘ

6) $f(x) = \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$

f est un quotient des fonctions sinus et cosinus, dont le dénominateur ne s'annule pas, donc f est définie sur IR ; ainsi f est continue et par conséquent intégrable sur IR

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)} = -\frac{-\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$$

$F(x) = -\text{Arctan}(\cos(x)) + C$ où $C \in$ IR

Remarque : on intègre $\frac{-\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$ comme une forme $\frac{u'}{1+u^2}$ de primitive Arctan(u)

7) $f(x) = \cos(x)\sin(\sin(x))$

f est un produit et une composée des fonctions sinus et cosinus, donc f est définie sur IR ; ainsi f est continue et par conséquent intégrable sur IR

$F(x) = -\cos(\sin(x)) + C$ où $C \in$ IR

Remarque : on intègre $\cos(x)\sin(\sin(x))$ comme une forme $u'\sin(u)$ de primitive -cos(u)

8) $f(x) = \frac{1}{1+9x^2}$

f est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas, donc f est définie sur IR ; ainsi f est continue et par conséquent intégrable sur IR

$$f(x) = \frac{1}{1+9x^2} = \frac{1}{1+(3x)^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{1+(3x)^2}$$

$F(x) = \frac{1}{3}\text{Arctan}(3x) + C$ où $C \in$ IR

Remarque : on intègre $\frac{3}{1+(3x)^2}$ comme une forme $\frac{u'}{1+u^2}$ de primitive Arctan(u)

9) $f(x) = \frac{x}{1+9x^2}$

f est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas, donc f est définie sur IR ; ainsi f est continue et par conséquent intégrable sur IR

$f(x) = \dfrac{x}{1+9x^2} = \dfrac{1}{18} \cdot \dfrac{18x}{1+9x^2}$

$F(x) = \frac{1}{18} \cdot \ln|1+9x^2| + C = \frac{1}{18}\ln(1+9x^2) + C$ où $C \in$ IR

<u>Remarque</u> : on intègre $\frac{18}{1+9x^2}$ comme une forme $\frac{u'}{u}$ de primitive ln|u|

10) $f(x) = \frac{x}{1-3x^2}$

f est une fraction rationnelle dont le dénominateur s'annule en $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, donc f est définie sur IR$-\left\{-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$; ainsi f est continue et par conséquent intégrable sur $\left]-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right[$ ou sur $\left]-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right[$ ou sur $\left]\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right[$

$f(x) = \dfrac{x}{1-3x^2} = \dfrac{1}{-6} \cdot \dfrac{-6x}{1-3x^2}$

$F(x) = \frac{1}{-6} \cdot \ln|1-3x^2| + C = -\frac{1}{6}\ln|1-3x^2| + C$ où $C \in$ IR

<u>Remarque</u> : on intègre $\frac{-6x}{1-3x^2}$ comme une forme $\frac{u'}{u}$ de primitive ln|u|

11) $f(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$

f est une fraction d'exponentielles, dont le dénominateur ne s'annule pas, donc f est définie sur IR ; ainsi f est continue et par conséquent intégrable sur IR

$$f(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}} = \frac{e^x}{1+(e^x)^2}$$

$F(x) = \mathrm{Arctan}(e^x) + C$ où $C \in \mathrm{IR}$

Remarque : on intègre $\frac{e^x}{1+(e^x)^2}$ comme une forme $\frac{u'}{1+u^2}$ de primitive Arctan(u)

12) $f(x) = \frac{2}{(4x+5)^3}$

f est une fraction rationnelle, dont le dénominateur s'annule en $-\frac{5}{4}$, donc f est définie sur $\mathrm{IR} - \left\{-\frac{5}{4}\right\}$; ainsi f est continue et par conséquent intégrable sur $\left]-\infty; -\frac{5}{4}\right[$ et sur $\left]-\frac{5}{4}; +\infty\right[$

$$f(x) = \frac{2}{(4x+5)^3} = \frac{2}{4} \cdot \frac{4}{(4x+5)^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{(4x+5)^3}$$

$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-2(4x+5)^2} + C = -\frac{1}{4(4x+5)^2} + C$ où $C \in \mathrm{IR}$

Remarque : on intègre $\frac{4}{(4x+5)^3}$ comme une forme u'u$^\alpha$ de primitive $\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ avec α = -3

13) $f(x) = \frac{x}{1+x^4}$

f est une fraction rationnelle d'exponentielles, dont le dénominateur ne s'annule pas, donc f est définie sur IR ; ainsi f est continue et par conséquent intégrable sur IR

$$f(x) = \frac{x}{1+x^4} = \frac{x}{1+(x^2)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1+(x^2)^2}$$

$F(x) = \frac{1}{2}\mathrm{Arctan}(x^2) + C$ où $C \in \mathrm{IR}$

Remarque : on intègre $\frac{2x}{1+(x^2)^2}$ comme une forme $\frac{u'}{1+u^2}$ de primitive Arctan(u)

14) $f(x) = \frac{x^3}{1+x^4}$

f est une fraction rationnelle, dont le dénominateur ne s'annule pas, donc f est définie sur IR ; ainsi f est continue et par conséquent intégrable sur IR

$$f(x) = \frac{x^3}{1+x^4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4x^3}{1+x^4}$$

$F(x) = \frac{1}{4}\ln|1+x^4| + C = \frac{1}{4}\ln(1+x^4) + C$ où $C \in \mathrm{IR}$

Remarque : on intègre $\frac{4x^3}{1+x^4}$ comme une forme $\frac{u'}{u}$ de primitive ln|u|

15) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x} + \frac{5x}{x^2+3}$

f est la somme de la fonction $x \longmapsto \frac{\ln(x)}{x}$ définie sur IR^{+*} (le logarithme est définie sur $]0\,;\ +\infty[$ et le dénominateur ne doit pas être nul : $x \neq 0$) et d'une fraction rationnelle $x \longmapsto \frac{5x}{x^2+3}$ définie sur IR, donc f est définie sur IR^{+*} ; ainsi f est continue et par conséquent intégrable sur $]0\,;\ +\infty[$

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} + \frac{5x}{x^2+3} = \frac{1}{x} \cdot \ln(x) + \frac{5}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+3}$$

$F(x) = \frac{\ln^2(x)}{2} + \frac{5}{2} \cdot \ln|x^2+3| + C = \frac{1}{2}\ln^2(x) + \frac{5}{2} \cdot \ln(x^2+3) + C$ où $C \in \mathrm{IR}$