Université de Reims Champagne Ardenne — MA0102
UFR Sciences Exactes et Naturelles — 2018/2019

Devoir surveillé 2

Durée de l'épreuve : 1 heure et 30 minutes
Les calculatrices, téléphones portables et document(s) sont interdits. Le barème est indicatif.

Exercice 1 : (*10 points*)

1. Soit E un ensemble non vide et soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E. Donner la définition (avec quantificateurs) de
   (a) $\mathcal{R}$ est réflexive sur E. *1 point*
   (b) $\mathcal{R}$ est symétrique sur E. *1 point*
   (c) $\mathcal{R}$ est transitive sur E. *1 point*
   (d) $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E. *1 point*
2. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ 4 & 10 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   Calculer $AB + 2C$. *2 points pour le produit, 0.5 point pour* $2C$ *et 0.5 point pour la somme*
   (a) AB *2 points*
   (b) $2C$ *0,5 point*
   (c) $AB + 2C$ *0,5 points*
3. En justifiant, dire quel système linéaire parmi les 3 suivants

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} 2x & +3y & -z & = 1 \\ & 3y & -2z & = 1 \\ & & 6z & = 2 \end{cases} \quad \mathcal{S}_2 : \begin{cases} 2x & +3y & -z & = 1 \\ & 3y & -2z & = 1 \end{cases} \quad \mathcal{S}_3 : \begin{cases} 2x & +3y & -z & = 1 \\ & 3y & -2z & = 1 \\ & -9y & +6z & = 1 \end{cases}$$

   (a) n'admet aucune solution. *1 point*
   (b) admet une infinité de solutions. *1 point*
   (c) est de Cramer. *1 point*
   Il n'est pas demandé de calculer les éventuelles solutions de ces 3 systèmes.

Exercice 2 : (*6 points*) Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire sur $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}y \iff x^2 - y^2 = x - y$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$. 2×0.5 *points pour réflexivité et symétrie et 1 point pour la transitivité*

2. Calculer la classe d'équivalence $\overline{0}$ de 0 et en déduire $\overline{1}$. *0.75+0.25 points*
3. Montrer que la classe d'équivalence de $x \in \mathbb{R}$ est donnée par

$$\overline{x} = \{x\} \cup \{1 - x\}$$

   2 points
4. En déduire une classe d'équivalence pour cette relation qui soit réduite à un seul élément. *1 point*

Exercice 3 : (*6 points*)

1. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Résoudre le système suivant

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x & +y & +z & = a \\ x & -y & -z & = b \\ x & -y & +z & = c \end{cases}$$

   4 points
2. En déduire que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   est inversible et en déterminer l'inverse. *2 points*