<u>Exercice 13</u> Extrait du DS1 2018-19

1. Simplifier l'expression suivante, en précisant sur quel sous-ensemble de $\mathbb{R}$ elle est définie. Le résultat ne doit plus être sous forme d'une fraction.

$$a = \frac{e^x(e^{2x}+e^x)}{1+\frac{e^x-1}{e^x+1}}.$$

Solution :

— <u>Domaine de définition :</u> Cette expression est définie sur tout $\mathbb{R}$. En effet, elle n'est pas définie pour les $x \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{array}{rrcl} & \frac{e^x-1}{e^x+1} & = & 0 \\ \Leftrightarrow & e^x-1 & = & -e^x-1 \\ \Leftrightarrow & e^x & = & -e^x \\ \Leftrightarrow & 2e^x & = & 0 \\ \Leftrightarrow & e^x & = & 0 \end{array}$$

Mais $e^x > 0$ pour tous les $x \in \mathbb{R}$, alors l'expression est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

— <u>Simplification :</u>

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{e^x(e^{2x}+e^x)}{1+\dfrac{e^x-1}{e^x+1}} & = & \dfrac{e^x(e^{2x}+e^x)}{\dfrac{e^x+1+e^x-1}{e^x+1}} \\ & = & \dfrac{e^x(e^{2x}+e^x)}{\dfrac{2e^x}{e^x+1}} \\ & = & \dfrac{e^x(e^{2x}+e^x)(e^x+1)}{2e^x} \\ & = & \dfrac{1}{2}(e^{2x}+e^x)(e^x+1) \end{array}$$

2. Dériver la fonction f suivante, qui est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{e^x-1}{e^{3x}+3e^x}.$$

Solution :

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & \dfrac{(e^x)(e^{3x}+3e^x)-(e^x-1)(3e^{3x}+3e^x)}{(e^{3x}+3e^x)^2} \\ & = & \dfrac{e^x((e^{3x}+3e^x)-(3e^{3x}+3e^x)+(3e^{2x}+3))}{(e^x)^2(e^{2x}+3)^2} \\ & = & \dfrac{-2e^{3x}+3e^{2x}+3}{e^x(e^{2x}+3)^2}. \end{array}$$

3. Simplifier les expressions suivantes, en précisant sur quel domaine elles sont définies (il ne doit plus rester de $|x|$) :

$$(i) \quad a(x) = (|x|+2)^2 - 4|x| \ , \qquad (ii) \quad b(x) = |x|\sqrt{1+\tfrac{1}{x^2}}.$$

Solution :

(i)

$$\begin{array}{rcl} (|x|+2)^2-4|x| & = & |x|^2+4|x|+4-4|x| \\ & = & x^2+4. \end{array}$$

(*ii*)

$$
\begin{aligned}
|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} &= \sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \\
&= \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} \\
&= \sqrt{x^2+1}.
\end{aligned}
$$

4. Calculer la somme S_n suivante, définie pour $n \in \mathbb{N}^*$. Le signe Σ doit disparaître et il ne doit rester qu'au plus 4 termes, dépendant éventuellement de n.

$$n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}.$$

Solution :
On peut par exemple séparer d'abord cette somme :

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2},
\end{aligned}
$$

maintenant on peut faire le suivant changement d'indice dans la deuxi ème somme : Soit $j = k+2$. Si $k=1$ alors $j=3$ et quand $k=n$ on a $j=n+2$. Ainsi

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{j=3}^{n+2} \frac{1}{j}, \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} \qquad \text{car } j \text{ est un indice muet,} \\
&= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k}\right) - \left(\left(\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right). \\
&= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k}\right) - \left(\left(\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right). \\
&= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}.
\end{aligned}
$$

5. Simplifier les produits suivants :

$$
\begin{aligned}
&(i) \qquad p_1 = \frac{7!}{3!5!}\ ; \\
&(ii) \quad p_n = \frac{n!(n+2)!}{(n-1)!(n+1)!} \quad \text{pour } n \geq 1\ ; \\
&(iii) \quad p'_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k(k+2)}{(k+1)^2} \qquad \text{pour } n \geq 1.
\end{aligned}
$$

Solution :

(*i*) $\dfrac{7!}{3!5!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{(3 \cdot 2 \cdot 1)5!} = \dfrac{7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 7.$

(*ii*) $\dfrac{n!(n+2)!}{(n-1)!(n+1)!} = \dfrac{(n(n-1)!)((n+2)(n+1)!)}{(n-1)!(n+1)!} = n(n+2)$

(iii)

$$
\begin{aligned}
p'_n &= \left(\prod_{k=1}^{n} k\right)\left(\prod_{k=1}^{n}(k+2)\right)\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\right)^2 \\
&= \left(\prod_{k=1}^{n} k\right)\left(\prod_{j=3}^{n+2} j\right)\left(\prod_{l=2}^{n+1}\frac{1}{l}\right)^2 \qquad \text{en faisant les changement d'indice : } j=k+2 \text{ et } l=k+1 \\
&= \left(\prod_{k=1}^{n} k\right)\left(\prod_{j=3}^{n+2} j\right)\frac{1}{\left(\prod_{l=2}^{n+1} l\right)^2} \\
&= n!\ \frac{(n+2)!}{2!}\frac{1}{\left(\frac{(n+1)!}{1!}\right)^2} \\
&= n!\ \frac{(n+2)(n+1)!}{2}\frac{1}{(n+1)!(n+1)!} \\
&= n!\ \frac{(n+2)(n+1)!}{2}\frac{1}{(n+1)n!(n+1)!} \\
&= \frac{(n+2)}{2(n+1)}.
\end{aligned}
$$