Séance du 24/11/20

Exercice 15 : (TD N° 4)

1) Non, f n'est pas injective. En effet, choisissons les couples $(x,y)=(0,1)$ et $(x',y')=(0,-1)$.

Alors $\begin{cases} (x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ et } (x',y')\in\mathbb{R}^2 \\ (x,y)\neq(x',y') \quad (\text{car } 1\neq -1) \\ f(x,y)=f(x',y') \quad (\text{car } f(x,y)=f(0,1)=0-1^2=-1 \text{ et } f(x',y')=f(0,-1)=0-(-1)^2=-1) \end{cases}$

ce qui prouve que f n'est pas injective CQFD

2) Soit $z\in\mathbb{R}$; alors $f(z,0)=z-0^2=z$. Donc $(z,0)$ est un antécédent de z.

Donc tout élément $z\in\mathbb{R}$ possède au moins un antécédent.

Par conséquent : $\boxed{f \text{ est surjective}}$ CQFD

3) • on peut par exemple choisir :

$$\boxed{\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto g(x)=(x,0) \end{aligned}}$$

En effet, dans ce cas : Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x,0)=x-0^2=x$$

c'est à dire : $f\circ g=Id_{\mathbb{R}}$.

• $\boxed{\text{Une telle application } g \text{ n'est pas unique.}}$

On peut choisir : $g : \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $x\longmapsto g(x)=(x+4,2)$

(car dans ce cas : $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x+4,2)=(x+4)-2^2$
$=x+4-4=x$)

on peut également choisir $g : \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $x\longmapsto g(x)=(x+a^2,a)$

pour tout $a\in\mathbb{R}$.

4) Montrons que tout $(X,Y)\in\mathbb{R}^2$ admet un unique antécédent $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ par h.

Soit $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$;

$$\left[(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ est antécédent de } (X,Y)\right] \iff h(x,y) = (X,Y)$$
$$\iff (x+y^2, y) = (X,Y)$$
$$\iff \begin{cases} x + y^2 = X \\ y = Y \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = X - y^2 = X - Y^2 \\ y = Y \end{cases}$$

Par conséquent, tout $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$ admet un unique antécédent $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ défini par $(x,y) = (X-Y^2, Y)$.

Donc $\boxed{h \text{ est bijective}}$ et $\boxed{h^{-1} : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (X,Y) \longmapsto (X-Y^2, Y) \end{array}}$

5) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(f \circ h)(x,y) = f(h(x,y))$

$$= f(x+y^2, y)$$
$$= (x+\cancel{y^2}) - \cancel{y^2}$$
$$= x$$

Donc : $\boxed{f \circ h : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto (f \circ h)(x,y) = x \end{array}}$

TD N°5

Ex 2 :

1) • **$\mathcal{R}$ est reflexive :** En effet pour tout cercle γ de $\mathcal{P}$, on a $\gamma \mathcal{R} \gamma$ car $\gamma \cap \gamma = \gamma \neq \emptyset$

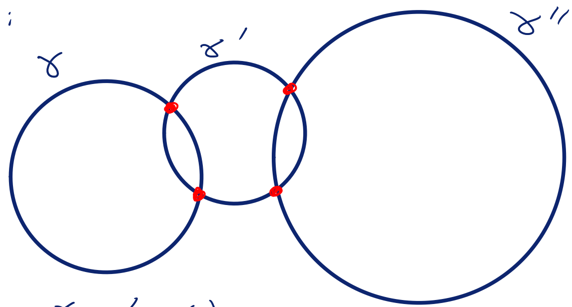
• **$\mathcal{R}$ est symétrique :** Soient γ, γ' deux cercles de $\mathcal{P}$.

(H) Supposons $\gamma \mathcal{R} \gamma'$

(D) Alors $\gamma \cap \gamma' \neq \emptyset$; donc $\gamma' \cap \gamma \neq \emptyset$ (commutativité de $\cap$)

(C) Donc $\gamma' \mathcal{R} \gamma$

• **$\mathcal{R}$ n'est pas transitive ;** Choisissons les trois cercles $\gamma, \gamma', \gamma''$ dessinés ci-dessous :



Alors : $\begin{cases} \gamma \mathcal{R} \gamma' & (\text{car } \gamma \cap \gamma' \neq \emptyset) \\ \gamma' \mathcal{R} \gamma'' & (\text{car } \gamma' \cap \gamma'' \neq \emptyset) \end{cases}$ et $\gamma \not\mathcal{R} \gamma''$ (car $\gamma \cap \gamma'' = \emptyset$)

Si on veut être un peu plus rigoureux :

On se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Désignons par $\begin{cases} \gamma \text{ le cercle de centre } O \text{ et de rayon } 1 \\ \gamma' \quad " \quad " \quad " \quad " \quad A(2,0) \text{ et de rayon } 1 \\ \gamma'' \quad " \quad " \quad " \quad " \quad B(4,0) \text{ et de rayon } 1 \end{cases}$

$\begin{cases} \text{le cercle } \gamma \text{ a pour équation : } x^2+y^2=1 \\ \quad " \quad " \quad \gamma' \quad " \quad " \quad " \quad : (x-2)^2+y^2=1 \\ \quad " \quad " \quad \gamma'' \quad " \quad " \quad " \quad : (x-4)+y^2=1 \end{cases}$

On a : $\begin{cases} \gamma \mathcal{R} \gamma' \quad \left(\text{car } I(1,0) \in \gamma \cap \gamma' \text{ puisque } \begin{cases} 1^2+0^2=1 \\ (1-2)^2+0^2=1 \end{cases}\right) \\ \gamma' \mathcal{R} \gamma'' \quad \left(\text{car } J(3,0) \in \gamma' \cap \gamma'' \text{ puisque } \begin{cases} (3-2)^2+0^2=1 \\ (3-4)^2+0^2=1 \end{cases}\right. \end{cases}$

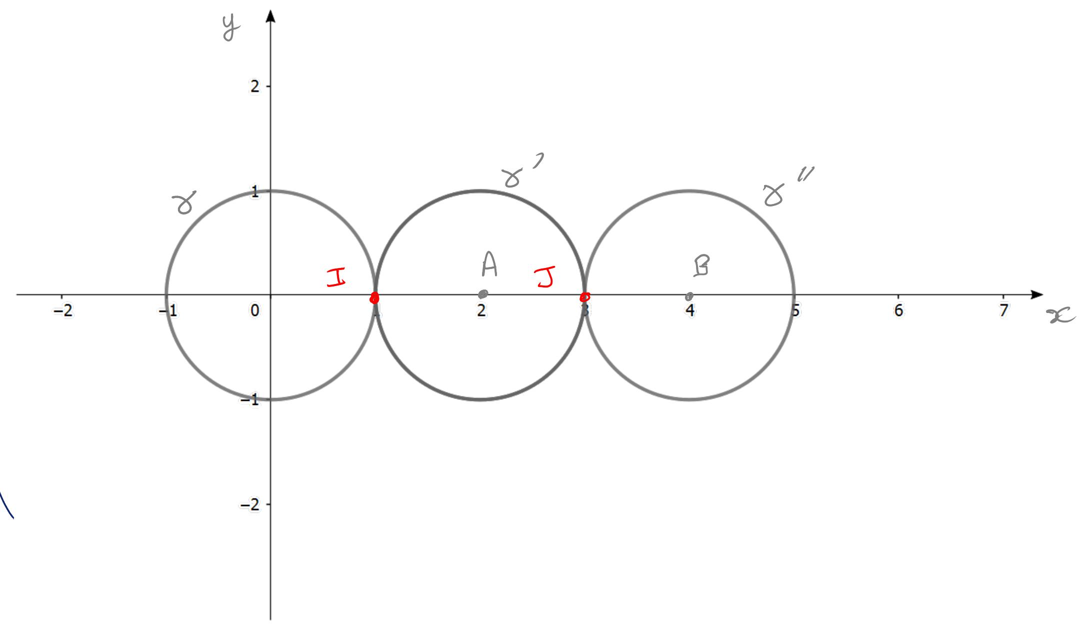
Mais $\gamma \not\mathcal{R} \gamma''$ $\Big($car $M(x,y) \in \gamma \cap \gamma'' \iff \begin{cases} x^2+y^2=1 & (L_1) \\ (x-4)^2+y^2=1 & (L_2) \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ (x-4)^2-x^2=0 & (L_2-L_1) \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ -8x+16=0 \iff x=2 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} y^2=1-x^2=1-4=-3 \\ x=2 \end{cases}$ $\leftarrow$ Impossible car $y^2 \geq 0$ et $-3<0$

Donc $\gamma \cap \gamma'' = \emptyset$ $\Big)$



$\mathcal{R}$ n'est donc pas une relation d'équivalence (car $\mathcal{R}$ n'est pas transitive)

2) (Rappel : Soient $m, n \in \mathbb{Z}$; on dit que m divise n s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = km$. On écrit alors : $m|n$)

• **$\mathcal{R}$ est réflexive :** En effet, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, on a $n = \underset{\underset{\mathbb{Z}}{\cap}}{1} \times n$ donc n divise n ; donc $n \mathcal{R} n$

• **$\mathcal{R}$ n'est pas symétrique :** Choisissons $m = 2 \in \mathbb{Z}^*$ et $n = 6 \in \mathbb{Z}^*$

Alors $m \mathcal{R} n$ (car 2 divise 6, puisque $6 = k \times 2$ avec $k = 3 \in \mathbb{Z}$)

et $n \not\mathcal{R} m$ (car il n'existe pas d'entier $k \in \mathbb{Z}$ tq : $2 = k \times 6$) ($k = 1/3 \notin \mathbb{Z}$)

• **$\mathcal{R}$ est transitive :** Soient $n, m, p \in \mathbb{Z}^*$

(H) Supposons que $n \mathcal{R} m$ et $m \mathcal{R} p$.

(D) Alors n divise m et m divise p. Donc il existe $k, k' \in \mathbb{Z}$ tels que $m = kn$ et $p = k'm$,

Donc $p = k'm = k'(kn) = (kk')n$

Posons $k'' = kk'$; on a $k'' \in \mathbb{Z}$ (car $k, k' \in \mathbb{Z}$)

Il existe donc $k'' \in \mathbb{Z}$ tel que $p = k''n$.

Par conséquent n divise p.

(C) Donc $n \mathcal{R} p$

$\mathcal{R}$ n'est donc pas une relation d'équivalence (car $\mathcal{R}$ n'est pas transitive)

3) • **$\mathcal{R}$ est réflexive :** car pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$, on a $A \mathcal{R} A$ (puisque $A \subset A$)

• **$\mathcal{R}$ n'est pas symétrique :** Choisissons $A = \emptyset$ et $B = X$

Alors $A \subset B$ (car $A \in \mathcal{P}(X)$) et $B \not\subset A$ (puisque $X \neq \emptyset$)

Autrement dit : $A \mathcal{R} B$ et $B \not\mathcal{R} A$.

• **$\mathcal{R}$ est transitive :** Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$.

(H) Supposons que $A \mathcal{R} B$ et $B \mathcal{R} C$

(D) Alors $A \subset B$ et $B \subset C$. Donc (d'après la transitivité de l'inclusion), on a $A \subset C$.

(C) Donc $A \mathcal{R} C$.

$\mathcal{R}$ n'est donc pas une relation d'équivalence (car pas symétrique)

Ex 3 :

1) • $\mathcal{R}$ est réflexive : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\underbrace{x^2 - x^2}_{0} = \underbrace{x - x}_{0}$;

Donc on a $x \mathcal{R} x$

• $\mathcal{R}$ est symétrique : Soient $x, y \in \mathbb{R}$

(H) Supposons que $x \mathcal{R} y$

(D) Alors $x^2 - y^2 = x - y$; donc $-(x^2 - y^2) = -(x - y)$,

c'est à dire : $y^2 - x^2 = y - x$

(C) Donc $y \mathcal{R} x$

• $\mathcal{R}$ est transitive : Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$

(H) Supposons que $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$

(D) Alors $\begin{cases} x^2 - y^2 = x - y & (1) \\ y^2 - z^2 = y - z & (2) \end{cases}$;

Donc (d'après (1) + (2) membre à membre) :

$$(x^2 - \cancel{y^2}) + (\cancel{y^2} - z^2) = (x - \cancel{y}) + (\cancel{y} - z)$$

c'est à dire $x^2 - z^2 = x - z$

(C) Donc $x \mathcal{R} z$

On en déduit que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2) • On a : $\bar{0} = \{ y \in \mathbb{R}, y \mathcal{R} 0 \}$

$= \{ y \in \mathbb{R}, y^2 - 0^2 = y - 0 \}$

Or $y^2 - 0 = y - 0 \iff y^2 = y \iff y^2 - y = 0$

$\iff y(y-1) = 0$

$\iff [y = 0 \text{ ou } y = 1]$

Donc $\bar{0} = \{0, 1\}$

• On a $\bar{1} = \bar{0}$ car $1 \in \bar{0}$ (Prop 1, 2)

Donc $\bar{1} = \{0, 1\}$

• Pour tout $y \in \mathbb{R}$;

$y \mathcal{R} \frac{1}{2} \iff y^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = y - \frac{1}{2}$

$\iff y^2 - y + \frac{1}{4} = 0 \quad (\Delta = 1 - 1 = 0)$

$\Longleftrightarrow \quad y = 1/2$

Donc $\overline{(1/2)} = \{1/2\}$

- Soit $x \in \mathbb{R}$; on a $\overline{x} = \{y \in \mathbb{R} \,,\, y \mathcal{R} x\}$

Or $y \mathcal{R} x \Longleftrightarrow y^2 - x^2 = y - x$ (x est connu et c'est y qu'on cherche)

$$\Longleftrightarrow (y-x)(y+x) = (y-x)$$

$$\Longleftrightarrow [y - x = 0 \quad \text{ou} \quad y + x = 1]$$

$$\Longleftrightarrow [y = x \quad \text{ou} \quad y = 1 - x]$$

Donc :

Si $x \neq 1 - x$ (c'est à dire $x \neq 1/2$) : $\overline{x} = \{x, 1-x\}$

Si $x = 1 - x$ (c'est à dire $x = 1/2$) : $\overline{x} = \{x\}$ $(= \{1/2\})$

On a donc :

$$\begin{cases} \text{Si } x = 1/2 : & \overline{x} = \overline{(1/2)} = \{1/2\} \\ \text{Si } x \neq 1/2 : & \overline{x} = \{x, 1-x\} \end{cases}$$

Ex 7 :

1.) • $\mathcal{R}$ est réflexive : Pour tout $M \in \mathcal{P}$, on a $OM = OM$. C'est à dire, pour tout $M \in \mathcal{P}$, $M \mathcal{R} M$.

• $\mathcal{R}$ est symétrique : Soient $M, N \in \mathcal{P}$

(H) Si $M \mathcal{R} N$

(D) Alors $OM = ON$; donc $ON = OM$.

(C) Donc $N \mathcal{R} M$

• $\mathcal{R}$ est transitive : Soient $M, N, P \in \mathcal{P}$

(H) Si $M \mathcal{R} N$ et $N \mathcal{R} P$

(D) Alors $OM = ON$ et $ON = OP$; donc $OM = OP$

(C) Donc $M \mathcal{R} P$

Donc $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

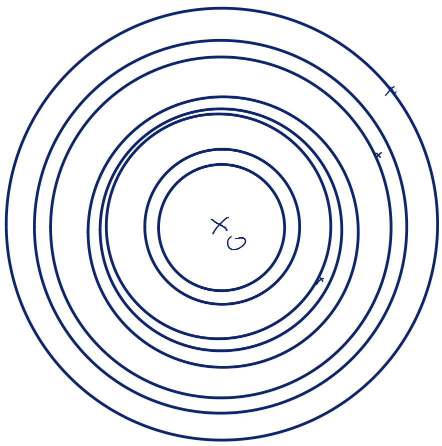
2) Soit $M \in \mathcal{P}$;

$\underbrace{\overline{M}}_{\text{classe de } M \text{ modulo } \mathcal{R}} = \{ N \in \mathcal{P},\ ON = OM \}$ = ensemble des points N du plan dont la distance à O est OM

Donc $\overline{M}$ est le cercle de centre O et passant par M.

3.) $\underbrace{\mathcal{P}/\mathcal{R}}_{\text{ensemble quotient}} \overset{\text{Déf}}{=}$ ensemble de toutes les classes modulo $\mathcal{R}$. Donc :

$\mathcal{P}/\mathcal{R}$ est l'ensemble de tous les cercles de centre O (y compris le cercle de rayon nul)



FIN

• Extrait JE N°3 de 2015-2016

• Ex 4 ((MN) = droite passant par M et N)