TD n°2

MAO 102

Exercice 24 :

3) Mq $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{n+1}{n+2}$

Initialisation : $(n=0)$

Pour $n=0$: $\begin{cases} \sum_{k=0}^{0} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=0}^{0} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{(0+1)(0+2)} = \frac{1}{2} \\ \frac{n+1}{n+2} = \frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2} \end{cases}$

Donc $P(0)$ est vrai

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que $P(n)$ est vraie

Alors $\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)}$

$$= \frac{n+1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{(n+1)(n+3)+1}{(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{n^2+3n+n+3+1}{(n+2)(n+3)} = \frac{n^2+4n+4}{(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{(n+2)^2}{(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{(n+2)}{(n+3)}$$

Donc la $P(n+1)$

Conclusion :

$P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

6) $(n+3)^{2(n+2)} \geqslant 3(n+2)^{2(n+2)}$ $\Rightarrow$ Astuce

$(n+3)^{2n+4} = \left((n+2)+1\right)^{2n+4}$ + Binôme

Exercice 22 :

1) Résoudre $\sqrt{3-4x} = -x$

Analyse :

Si x est solution de cette équation, alors $\sqrt{3-4x} = -x$

Donc $\left(\sqrt{3-4x}\right)^2 = (-x)^2$

Donc $3-4x = x^2$

Donc $x^2+4x-3=0$

$\Delta = 16+12 = 28 > 0$

Donc : $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-4-\sqrt{28}}{2} = \dfrac{-4-2\sqrt{7}}{2} = -2-\sqrt{7} \\ \text{ou} \\ x_2 = \dfrac{-4+\sqrt{28}}{2} = \dfrac{-4+2\sqrt{7}}{2} = -2+\sqrt{7} \end{cases}$

Synthèse :

Si $x = -2+\sqrt{7}$

A-t-on $\underbrace{\sqrt{3-4(-2+\sqrt{7})}}_{\oplus} = \underbrace{-(\underbrace{-2+\sqrt{7}}_{\oplus})}_{\ominus}$ Non

Si $x = -2-\sqrt{7}$

A-t-on $\sqrt{3-4(-2-\sqrt{7})} = \underbrace{-(-2-\sqrt{7})}_{2+\sqrt{7}}$ Oui

$\sqrt{3-4(-2-\sqrt{7})} = \sqrt{11+4\sqrt{7}}$

$= \left(\sqrt{11+4\sqrt{7}}\right)^2 = \boxed{11+4\sqrt{7}}$

Si $a, b \geqslant 0$ et si $a^2 = b^2$ alors $a = b$

$(2+\sqrt{7})^2 = 4+4\sqrt{7}+7 = \boxed{11+4\sqrt{7}}$

Donc $x = -2-\sqrt{7}$ est seul solution.

$S = \{-2-\sqrt{7}\}$

Méthode 2:

$$\sqrt{3-4x} = -x \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{3-4x}\right)^2 = (-x)^2 \\ x \leq 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{cases} \left(\sqrt{3-4x}\right)^2 = (-x^2) \\ x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3-4x} = -x \\ \cancel{\sqrt{3-4x} = -(-x)} \end{cases} \right) \qquad a^2 = b^2 \begin{cases} a = b \\ a = -b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-4x = x^2 \Leftrightarrow x^2+4x-3=0 \\ x \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2-\sqrt{7} \quad \text{ou} \quad x = -2+\sqrt{7} \\ \text{et} \\ x \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -2-\sqrt{7}$$

$\mathcal{S} = \{-2-\sqrt{7}\}$

2) Résoudre $\sqrt{x^2+3} = x+1$

Analyse: Si x vérifie $\sqrt{x^2+3} = x+1$

Alors $\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2 = (x+1)^2$

C'est-à-dire $x^2+3 = x^2+2x+1$

$3 = 2x+1$

$2x = 2$

Donc $x = 1$

Synthèse: Si $x = 1$ alors

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+3} = \sqrt{1+3} = 2 \\ x+1 = 1+1 = 2 \end{cases}$$

Donc $\sqrt{x^2+3} = x+1$

Donc $x = 1$ est solution l'équation

$\mathcal{S} = \{1\}$