Systèmes d'équations du chapitre 6

page 5 (Exemple 2)

$$L_2 \leftarrow \alpha L_2 + \beta L_1 \ (\alpha \neq 0)\ ;\ L_3 \leftarrow \alpha L_3 + \beta L_1 \ (\alpha \neq 0)\ ;\ L_4 \leftarrow \alpha L_4 + \beta L_1 \ (\alpha \neq 0)$$

$$(S_1) : \begin{cases} \overset{(1)}{x} + y + z + t = 0 & (L_1) \\ x + y + z - t = 4 & (L_2) \\ x + y - z + t = -4 & (L_3) \\ x - y + z + t = 2 & (L_4) \end{cases} \iff \begin{cases} (L_1) & \\ \overset{(2)}{-2t} = 4 & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ -2z = -4 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \\ -2y = 2 & (L_4 \leftarrow L_4 - L_1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (L_1) & \\ (L_2) & \\ \overset{(3)}{-2z} = -4 & (L_3 \leftarrow \underbrace{1L_3 + 0L_2}_{L_3}) \\ -2y = 2 & (L_4 \leftarrow 1L_4 + 0L_2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (L_1) \\ (L_2) \\ (L_3) \\ \overset{(4)}{-2y} = 2 & (L_4 \leftarrow L_4 + 0L_3) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (L_1) \\ (L_2) \\ (L_3) \\ (L_4) \end{cases}$$

Echelonnement du système (S_1)

$$\iff \begin{cases} (L_4) \text{ donne : } y = \frac{2}{-2} = -1 & (\text{Pivot N}^\circ 4) \\ (L_3) \text{ donne : } z = \frac{-4}{-2} = 2 & (\text{Pivot n}^\circ 3) \\ (L_2) \text{ donne : } t = \frac{4}{-2} = -2 & (\text{Pivot N}^\circ 2) \\ (L_1) \text{ donne : } x = -y - z - t = 1 & (\text{Pivot N}^\circ 1) \end{cases}$$

(Remontée)

- $\mathcal{S} = \{(1, -1, 2, -2)\}$ (1 seule solution : $(1, -1, 2, -2)$)
- (S_1) est compatible (possible)
- (S_1) est un système de Cramer. (Déf 7 page 4)

page 6 (Exemple 3)

$$(S_2)\begin{cases} 2x+y-z+2t+2u=1 & (L_1)\\ 4x-y+z-t+4u=-7 & (L_2)\\ 4x-2y+z+5t-u=3 & (L_3)\end{cases} \iff \begin{cases} (L_1) & \\ 6x \quad +t+6u=-6 & (L_2\leftarrow L_2+L_1)\\ 6x-y+7t+u=4 & (L_3\leftarrow L_3+L_1)\end{cases}$$

(1) (2)

$$\iff \begin{cases} (L_1) & \\ 6x \quad +t+6u=-6 & (L_2\leftarrow L_2+0L_3)\\ (L_3) & \end{cases}$$

(3)

$$\iff \begin{cases} (L_1)\\ (L_2)\\ (L_3)\end{cases}$$

$\iff$

(L_2) donne : $t=-6-6x-6u$ (Pivot N°3)

(L_3) donne : $y=6x+7t+u-4$ (Pivot N°2)

$= 6x+7(-6-6x-6u)+u-4$

$= -36x-41u-46$

(L_1) donne : $z=2x+y+2t+2u-1$ (Pivot N°1)

$= 2x+(-36x-41u-46)+2(-6-6x-6u)+2u-1$

$= -46x-51u-59$

$$S=\{(x,-36x-41u-46,-46x-51u-59,-6-6x-6u,u),\ (x,u)\in\mathbb{R}^2\}$$

- (S_2) est compatible (possible)
- (S_2) est indéterminé d'ordre 2
- (S_2) n'est pas un système de Cramer

OU

(1)

$$(S_2)\begin{cases} 2x+y-z+2t+2u=1 & (L_1)\\ 4x-y+z-t+4u=-7 & (L_2)\\ 4x-2y+z+5t-u=3 & (L_3)\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (L_1) \\ \overset{(2)}{-3y} + 3z - 5t = -9 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ -4y + 3z + t - 5u = 1 & (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (L_1) \\ (L_2) \\ \overset{(3)}{-3z} + 23t - 15u = 39 & (L_3 \leftarrow 3L_3 - 4L_2) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (L_1) \\ (L_2) \\ (L_3) \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow$ (L_3) donne : $z = \frac{23}{3} t - 5u - 13$ (Pivot N°3)

(L_2) donne : $y = \frac{1}{3}(3z - 5t + 9)$ (Pivot N°2)

$$= \frac{1}{3}(23t - 15u - 39 - 5t + 9)$$

$$= \frac{1}{3}(18t - 15u - 30)$$

$$= 6t - 5u - 10$$

(L_1) donne : $x = \frac{1}{2}(1 - y + z - 2t - 2u)$ (Pivot N°1)

$$= \tfrac{1}{2}\left(1 - (6t - 5u - 10) + \left(\frac{23}{3}t - 5u - 13\right) - 2t - 2u\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(-2 - \tfrac{1}{3}t - 2u\right)$$

$$= -\frac{1}{6}t - u - 1$$

$$\mathcal{S} = \left\{\left(-\frac{1}{6}t - u - 1,\ 6t - 5u - 10,\ \frac{23}{3}t - 5u - 13,\ t, u\right),\ (t,u) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

- (S_2) est compatible (Possible)
- (S_2) est indéterminé d'ordre 2
- (S_2) n'est pas de Cramer

Page 7 :

$$(S_3)\begin{cases} x+2y-z+2t+u=1 & (L_1)\\ x+2y+z+6t+3u=-1 & (L_2)\\ 2x+4y+9t+8u=0 & (L_3)\end{cases}$$

(1) (2) (3)

$$\iff \begin{cases} (L_1) & \\ 2x+4y+8t+4u=0 & (L_2\leftarrow L_2+L_1)\\ 2x+4y+9t+8u=0 & (L_3\leftarrow L_3+0L_1)\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (L_1) & \\ (L_2) & \\ t+4u=0 & (L_3\leftarrow L_3-L_2)\end{cases}$$

~~$\iff \begin{cases}(L_1)\\(L_2)\\(L_3)\end{cases}$~~

$$\iff \begin{cases} (L_3) \text{ donne : } t=-4u\\ (L_2) \text{ donne : } x=-2y-4t-2u\\ \qquad =-2y+16u-2u\\ \qquad =-2y+14u\\ (L_1) \text{ donne : } z=x+2y+2t+u-1\\ \qquad =(\cancel{-2y}+14u)+\cancel{2y}+2\times(-4u)+u-1\\ \qquad =7u-1\end{cases}$$

$$S=\{(-2y+14u,\ y,\ 7u-1,\ -4u,\ u),\ (y,u)\in\mathbb{R}^2\}$$

- (S_3) est compatible (Possible)
- (S_3) est indéterminé d'ordre 2
- (S_3) n'est pas un système de Cramer

OU

$$(S_3)\begin{cases} x + 2y - z + 2t + u = 1 & (L_1) \\ x + 2y + z + 6t + 3u = -1 & (L_2) \\ 2x + 4y \quad\quad + 9t + 8u = 0 & (L_3) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (L_1) \\ 2z + 4t + 2u = -2 & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ 2z + 5t + 6u = -2 & (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (L_1) \\ (L_2) \\ t + 4u = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_2) \end{cases}$$

$$\left(\iff \begin{cases} (L_1) \\ (L_2) \\ (L_3) \end{cases} \right)$$

$$\iff \begin{cases} (L_3) \text{ donne : } & t = -4u \quad (\text{Pivot N°3}) \\ (L_2) \text{ donne : } & z = -2t - u - 1 \quad (\text{Pivot N°2}) \\ & \quad = -2(-4u) - u - 1 \\ & \quad = 7u - 1 \\ (L_1) \text{ donne : } & x = -2y + z - 2t - u + 1 \quad (\text{Pivot N°1}) \\ & \quad = -2y + (7u - \cancel{1}) - 2 \times (-4u) - u + \cancel{1} \\ & \quad = -2y + 14u \end{cases}$$

$$S = \{ (-2y + 14u, y, 7u - 1, -4u, u), (u, y) \in \mathbb{R}^2 \}$$

Page 7

$$(S_4) \iff \begin{cases} x + 2y \overset{(1)}{+ 2z} = 2 & (L_1) \\ 3x + y - 2z = 1 & (L_2) \\ 4x - 3y - z = 3 & (L_3) \\ 2x + 4y + 2z = 4 & (L_4) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (L_1) & \\ 4x + 3y = 3 & (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\ 9x - 4y = 8 & (L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1) \\ {}^{(2)}\, x + 2y = 2 & (L_3 \leftarrow L_4 - L_1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (L_1) & \\ -5y = -5 & (L_2 \leftarrow L_2 - 4L_4) \\ -22y = -10 & (L_3 \leftarrow L_3 - 9L_4) \\ (L_4) & \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (L_1) & \\ {}^{(3)}\, y = 1 & (L_2 \leftarrow -\tfrac{1}{5} L_2) \\ 11y = 5 & (L_3 \leftarrow -\tfrac{1}{2} L_3) \\ (L_4) & \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (L_1) & \\ (L_2) & \\ 0 = -6 & (L_3 \leftarrow L_3 - 11L_2) \\ (L_4) & \end{cases}$$

- $\mathcal{S} = \emptyset$ (d'après (L_3))
- (S_4) est incompatible (Impossible)