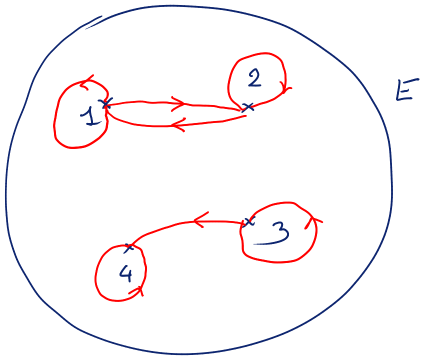
S1A3 MA0102/2020-2021

Séance du 25/11/20

Extrait de l'I.E N°3 (2015-2016)

Ⓐ 1)



- $\mathcal{R}$ est réflexive : car pour $x = 1, 2, 3$ et 4, on a $x \mathcal{R} x$.
- $\mathcal{R}$ n'est pas symétrique : car $3 \mathcal{R} 4$ et $4 \not\mathcal{R} 3$.
- $\mathcal{R}$ est transitive : En effet, soient $x, y, z \in E$

(H) Supposons que $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$

(D)
- Si $x = y$: alors $x \mathcal{R} z$ (puisque $y \mathcal{R} z$)
- Si $y = z$: alors $x \mathcal{R} z$ (puisque $x \mathcal{R} y$)
- Si $x \neq y$ et $y \neq z$: alors $(x, y, z) = (1, 2, 1)$ ou $(x, y, z) = (2, 1, 2)$.

$\rightarrow$ Si $(x, y, z) = (1, 2, 1)$ alors $x \mathcal{R} z$ (car $1 \mathcal{R} 1$)

$\rightarrow$ Si $(x, y, z) = (2, 1, 2)$ alors $x \mathcal{R} z$ (car $2 \mathcal{R} 2$)

Donc $x \mathcal{R} z$

(C) Donc $x \mathcal{R} z$ (dans tous les cas)

2) Comme $\mathcal{S}$ doit être symétrique et que l'on a $3 \mathcal{R} 4$, il faut avoir $4 \mathcal{R} 3$. Choisissons donc $(x, y) = (4, 3)$.

Alors avec ce choix, on a :

$1 \mathcal{S} 1$, $2 \mathcal{S} 2$, $3 \mathcal{S} 3$, $4 \mathcal{S} 4$, $1 \mathcal{S} 2$, $2 \mathcal{S} 1$, $3 \mathcal{S} 4$ et $4 \mathcal{S} 3$

Mq $\mathcal{S}$ est alors une relation d'équivalence :

- $\mathcal{S}$ est réflexive : car pour $x = 1, 2, 3$ et 4, on a $x \mathcal{S} x$
- $\mathcal{S}$ est symétrique : en effet, comme on a :

$1 \mathcal{S} 1$, $2 \mathcal{S} 2$, $3 \mathcal{S} 3$, $4 \mathcal{S} 4$, $1 \mathcal{S} 2$, $2 \mathcal{S} 1$, $3 \mathcal{S} 4$ et $4 \mathcal{S} 3$

il faut vérifier que l'on a

$1 \mathcal{S} 1$, $2 \mathcal{S} 2$, $3 \mathcal{S} 3$, $4 \mathcal{S} 4$, $2 \mathcal{S} 1$, $1 \mathcal{S} 2$, $4 \mathcal{S} 3$ et $3 \mathcal{S} 4$

ce qui est le cas

- $\mathcal{S}$ est transitive : (Même raisonnement que dans 1.))

Soient $x, y, z \in E$

(H) Supposons que $x \mathcal{S} y$ et $y \mathcal{S} z$

(D)
- Si $x = y$: alors $x \mathcal{S} z$ (puisque $y \mathcal{S} z$)
- Si $y = z$: alors $x \mathcal{S} z$ (puisque $x \mathcal{S} y$)
- Si $x \neq y$ et $y \neq z$: alors $(x,y,z) = (1,2,1)$, $(x,y,z) = (2,1,2)$ ou $(x,y,z) = (3,4,3)$

$\to$ Si $(x,y,z) = (1,2,1)$ alors $x \mathcal{S} z$ (car $1 \mathcal{S} 1$)

$\to$ Si $(x,y,z) = (2,1,2)$ alors $x \mathcal{S} z$ (car $2 \mathcal{S} 2$)

$\to$ Si $(x,y,z) = (3,4,3)$ alors $x \mathcal{S} z$ (car $3 \mathcal{S} 3$)

Donc $x \mathcal{S} z$.

(C) Donc $x \mathcal{S} z$ (dans tous les cas)

Donc $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.

On a : $\begin{cases} \overline{1} = \{1, 2\} \\ \overline{2} = \overline{1} & (\text{car } 2 \in \overline{1}) \\ \overline{3} = \{3, 4\} \\ \overline{4} = \overline{3} \end{cases}$

Donc $E/_{\mathcal{S}} = \{\overline{1}, \overline{3}\}$

(B) 1.) $\mathcal{R}$ est réflexive : Soit $x \in \mathbb{R}$; alors $\underbrace{x^2 - x^2}_{0} = \underbrace{4(x - x)}_{0}$. Donc $x \mathcal{R} x$

$\mathcal{R}$ est symétrique : Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \mathcal{R} y$. Alors $x^2 - y^2 = 4(x-y)$; donc $-(x^2 - y^2) = -4(x-y)$, c'est à dire $y^2 - x^2 = 4(y-x)$; donc $y \mathcal{R} x$.

$\mathcal{R}$ est transitive : Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$. Alors $x^2 - y^2 = 4(x-y)$ et $y^2 - z^2 = 4(y-z)$. Donc par addition membre de ces 2 égalités, on obtient :

$$(x^2 - \cancel{y^2}) + (\cancel{y^2} - z^2) = 4(x - \cancel{y}) + 4(\cancel{y} - z)$$

c'est à dire : $x^2 - z^2 = 4(x - z)$

Donc $x \mathcal{R} z$

Donc $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$x \mathcal{R} y \iff x^2 - y^2 = 4(x-y)$$

$$a\alpha = a\beta \iff \begin{cases} a=0 \\ \text{ou} \\ \alpha=\beta \end{cases}$$

$$\iff \underbrace{(x-y)}_{a}\underbrace{(x+y)}_{\alpha} = \underbrace{4}_{\beta}\underbrace{(x-y)}_{a}$$

$$\iff \begin{cases} x-y=0 \\ \text{ou} \\ x+y=4 \end{cases} \iff \begin{cases} y=x \\ \text{ou} \\ y=4-x \end{cases}$$

D'où : $x \mathcal{R} y \iff [y = x \text{ ou } y = 4-x]$

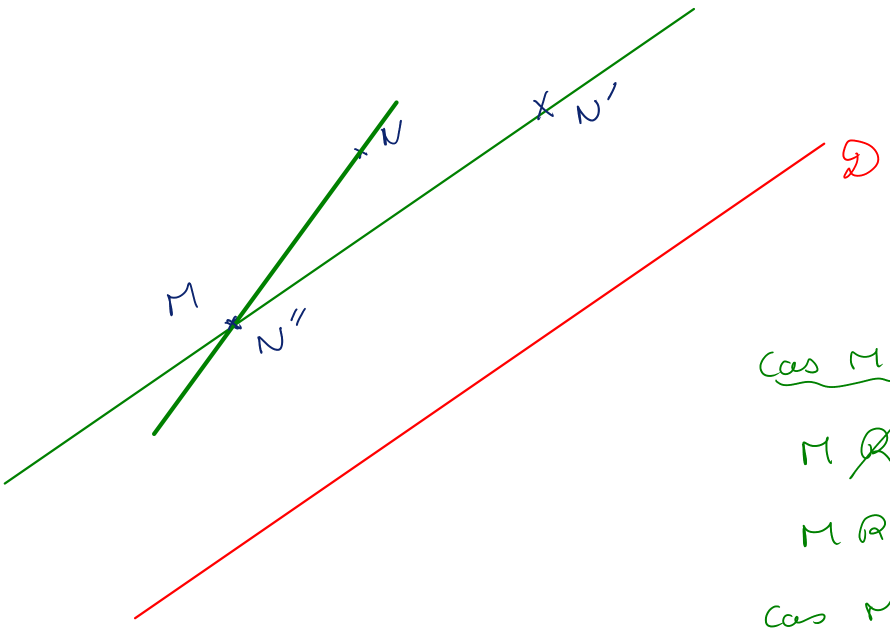
3) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\overline{x} = \{y \in \mathbb{R},\ y \mathcal{R} x\}$

$$= \{y \in \mathbb{R} \text{ t.q } y = x \text{ ou } y = 4-x\}$$

Or $x = 4-x \iff 2x = 4 \iff x = 2$

Donc $\begin{cases} \text{si } x = 2 : & \overline{x} = \{2\} \quad (\text{car } x = 4-x \text{ quand } x = 2) \\ \text{si } x \neq 2 : & \overline{x} = \{x, 4-x\} \quad (\text{car } x \neq 4-x \text{ quand } x \neq 2) \end{cases}$

Ex 4 :



Cas $M \neq N$ et $M \neq N'$

$M \not\mathcal{R} N$

$M \mathcal{R} N'$

Cas $M = N''$

$M \mathcal{R} N''$

1) • $\mathcal{R}$ est réflexive : Soit $M \in \mathcal{P}$. Alors on a $M = M$;

donc on a $[\underbrace{M = M}_{\text{Vrai}} \text{ ou } \underbrace{(M \neq M \text{ et } (MM) // \mathcal{D})}_{\text{Faux}}]$

Donc $M \mathcal{R} M$.

• $\mathcal{R}$ est symétrique : Soient $M, N \in \mathcal{P}$

(H) Supposons que $M \mathcal{R} N$

(D) Alors $M = N$ ou $(M \neq N$ et $(MN) // \mathcal{D})$

• 1er cas : Si $M = N$: alors $N = M$. Donc $N \mathcal{R} M$.

• 2ème cas : Si $M \neq N$: alors $(MN) // \mathcal{D}$; donc $(NM) // \mathcal{D}$ (car $(MN) = (NM)$). Donc $N \mathcal{R} M$

(C) Donc $N \mathcal{R} M$

• $\mathcal{R}$ est transitive : Soient $M, N, P \in \mathcal{P}$

(H) Supposons que $M \mathcal{R} N$ et $N \mathcal{R} P$

(D) Alors $\begin{cases} [M = N \text{ ou } (M \neq N \text{ et } (MN) // \mathcal{D})] \\ \text{et} \\ [N = P \text{ ou } (N \neq P \text{ et } (NP) // \mathcal{D})] \end{cases}$

Il y a donc 4 cas à considérer :

1er cas $(M = N)$ et $(N = P)$: Dans ce cas $M = P$

Donc $M \mathcal{R} P$.

2ème cas $(M = N)$ et $(N \neq P$ et $(NP) // \mathcal{D})$:

Alors $M \neq P$ et $(MP) // \mathcal{D}$

(puisqu'étant donné que $M = N$, on peut remplacer N par M dans l'affirmation "$N \neq P$ et $(NP) // \mathcal{D}$")

Donc $M \mathcal{R} P$.

3ème cas $(M \neq N$ et $(MN) // \mathcal{D})$ et $(N = P)$

Alors $M \neq P$ et $(MP) // \mathcal{D}$ (puisqu'étant donné que $N = P$, on peut remplacer N par P dans l'affirmation "$M \neq N$ et $(MN) // \mathcal{D}$").

Donc $M \mathcal{R} P$.

4ème cas $(M \neq N$ et $(MN) // \mathcal{D})$ et $(N \neq P$ et $(NP) // \mathcal{D})$

On envisage alors 2 sous-cas

1er sous-cas : $M = P$: alors $M \mathcal{R} P$.

2ème sous-cas : $M \neq P$: Dans ce cas, (MP) est une droite ; de plus $(MN) // (NP)$ (car $(MN) // \mathcal{D}$ et $(NP) // \mathcal{D})$. Or (MN) et (NP) ont un point commun (qui est N). Donc $(MN) = (NP)$

Donc $M \in (NP)$; donc M, N et P sont alignés

Donc $(MP) = (NP)$. Par conséquent $(MP) // \mathcal{D}$ (puisque $(NP) // \mathcal{D}$). On a donc $(M \neq P)$ et $(MP) // \mathcal{D}$. Donc $M \mathcal{R} P$.

(C) Dans tous les cas, on a $M \mathcal{R} P$

Par conséquent : $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2°) Soit $M \in \mathcal{P}$; on a $\overline{M} = \{N \in \mathcal{P}, N \mathcal{R} M\}$

Soit Δ la droite passant par M et parallèle à $\mathcal{D}$.

Montrons que $\overline{M} = \Delta$ (par double inclusion)

- Mq : $\Delta \subset \overline{M}$:

(H) Supposons que $N \in \Delta$.

(D) Alors $N = M$ ou $N \neq M$.

- Si $N = M$: alors $N \mathcal{R} M$; donc $N \in \overline{M}$.

- Si $N \neq M$: alors dans ce cas $\Delta = (NM)$ (puisque M et N sont 2 points distincts de Δ) et donc $(NM) // \mathcal{D}$ (puisque $\Delta // \mathcal{D}$)

  Donc $N \mathcal{R} M$; donc $N \in \overline{M}$.

(C) Donc $N \in \overline{M}$.

- Mq $\overline{M} \subset \Delta$

(H) Soit $N \in \overline{M}$

(D) Alors $N \mathcal{R} M$; donc $(N = M)$ ou $(N \neq M$ et $(NM) \parallel \mathcal{D})$

- Si $N = M$: alors comme $M \in \Delta$, on en déduit que $N \in \Delta$.

- Si $N \neq M$ et $(NM) \parallel \mathcal{D})$: alors $(NM) = \Delta$

En effet, il n'existe qu'une seule droite passant par M et parallèle à $\mathcal{D}$: c'est Δ.

Or (NM) est aussi une droite passant par M et parallèle à $\mathcal{D}$. Donc $(NM) = \Delta$

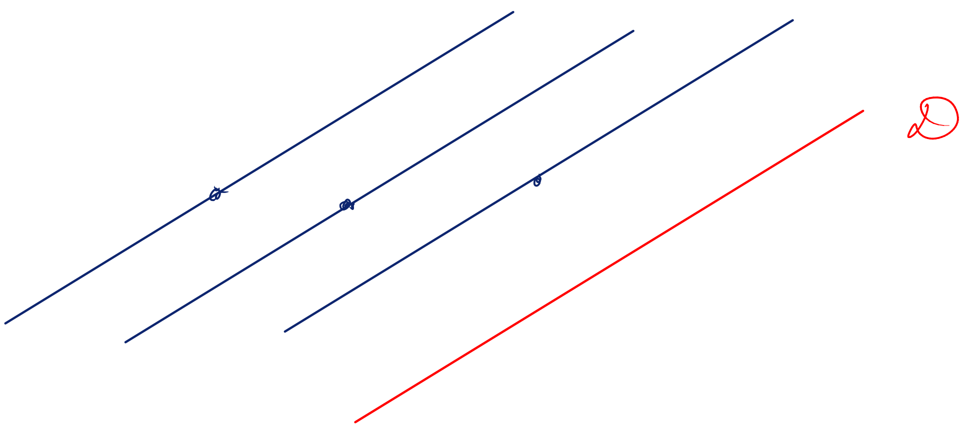
On en déduit que $N \in \Delta$

(C) Donc $N \in \Delta$

Il en résulte que $\overline{M} = \Delta$ où Δ est la droite passant par M et parallèle à $\mathcal{D}$

3) $\mathcal{P}/\mathcal{R}$ (qui est l'ensemble quotient) est l'ensemble de toutes les classes d'équivalence pour $\mathcal{R}$.

Donc $\mathcal{P}/\mathcal{R}$ est l'ensemble de toutes les droites parallèles à $\mathcal{D}$.



Ex 5 :

1.) $\mathcal{R}$ est réflexive : Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors $z = 1 z$; donc : $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}^*$ $(\lambda = 1)$ tel que $z = \lambda z$. Donc $z \,\mathcal{R}\, z$.

$\mathcal{R}$ est symétrique : Soient $z, z' \in \mathbb{C}^*$

(H) Supposons que $z \,\mathcal{R}\, z'$.

(D) Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $z = \lambda z'$. Comme $\lambda \neq 0$, on en déduit que $z' = \frac{1}{\lambda} z$; donc $z' = \lambda' z$ $\left(\text{où } \lambda' = \frac{1}{\lambda} \in \mathbb{R}^*\right)$

Il existe donc $\lambda' \in \mathbb{R}^*$ tel que $z' = \lambda' z$

(C) Donc $z' \,\mathcal{R}\, z$

$\mathcal{R}$ est transitive : Soient $z, z', z'' \in \mathbb{C}^*$

(H) Supposons que $z \,\mathcal{R}\, z'$ et $z' \,\mathcal{R}\, z''$.

(D) Alors : $\exists\, \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}^*$ tels que $z = \lambda z'$ et $z' = \lambda' z''$.

Donc $z = \lambda z' = \lambda(\lambda' z'') = \overbrace{(\lambda\lambda')}^{\lambda''} z''$

Posons $\lambda'' = \lambda\lambda'$. Alors $\lambda'' \in \mathbb{R}^*$ et $z = \lambda'' z''$.

Il existe donc $\lambda'' \in \mathbb{R}^*$ tel que $z = \lambda'' z''$.

(C) Donc $z \,\mathcal{R}\, z''$

Donc $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2.) Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

- Existence de $\theta \in [0, \pi[$ tel que $Cl_{\mathcal{R}}(z) = Cl_{\mathcal{R}}(e^{i\theta})$

Comme $z \neq 0$, il existe $r \in]0, +\infty[$ et $\alpha \in [0, 2\pi[$ tel que $z = r e^{i\alpha}$ (Forme exponentielle de z). Envisageons deux cas suivant que $\alpha \in [0, \pi[$ ou $\alpha \in [\pi, 2\pi[$:

- Si $\alpha \in [0, \pi[$: Posons $\theta = \alpha$; alors $z = r e^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}^*$ et $\theta \in [0, \pi[$.
  Donc $z \,\mathcal{R}\, e^{i\theta}$. Donc $Cl_{\mathcal{R}}(z) = Cl_{\mathcal{R}}(e^{i\theta})$ où $\theta \in [0, \pi[$

- Si $\alpha \in [\pi, 2\pi[$: Posons $\theta = \alpha - \pi$; alors $\theta \in [0, \pi[$ et on a :
  $z = r e^{i(\theta + \pi)} = r e^{i\pi} e^{i\theta} = (-r) e^{i\theta}$
  Autrement dit, il existe $(-r) \in \mathbb{R}^*$ tel que $z = (-r) e^{i\theta}$
  Donc $z \,\mathcal{R}\, e^{i\theta}$; par conséquent $Cl_{\mathcal{R}}(z) = Cl_{\mathcal{R}}(e^{i\theta})$ où $\theta \in [0, \pi[$

Donc : $\exists\, \theta \in [0, \pi[$ tel que $Cl_{\mathcal{R}}(z) = Cl_{\mathcal{R}}(e^{i\theta})$

cela prouve l'existence de θ.

- Unicité de $\theta \in [0, \pi[$ tel que $Cl_{\mathcal{R}}(z) = Cl_{\mathcal{R}}(e^{i\theta})$

Supposons qu'il existe $\theta, \theta' \in [0, \pi[$ tels que $\begin{cases} Cl_{\mathcal{R}}(z) = Cl_{\mathcal{R}}(e^{i\theta}) \\ Cl_{\mathcal{R}}(z) = Cl_{\mathcal{R}}(e^{i\theta'}) \end{cases}$

Alors $\mathcal{C}\ell_R(e^{i\theta}) = \mathcal{C}\ell_R(e^{i\theta'})$. Donc $e^{i\theta} \mathcal{R} e^{i\theta'}$

Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $e^{i\theta} = \lambda e^{i\theta'}$

On a alors $\lambda = e^{i(\theta-\theta')} = \cos(\theta-\theta') + i \sin(\theta-\theta')$.

Par conséquent : $\sin(\theta-\theta') = 0$ (car $\lambda \in \mathbb{R}^*$)

D'autre part : $\theta-\theta' \in]-\pi,\pi[$

On en déduit que $\theta-\theta'=0$ (car $\sin(\theta-\theta')=0$ et $\theta-\theta' \in]-\pi,\pi[$)

Donc $\theta = \theta'$ (ce qui prouve l'unicité de θ)

Donc : $\forall z \in \mathbb{C}^*, \ \exists! \ \theta \in [0,\pi[, \ \mathcal{C}\ell_R(z) = \mathcal{C}\ell_R(e^{i\theta})$

Ex 6 :

Remarque préliminaire : Posons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = xe^{-x}$

Alors : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x \mathcal{R} y \iff xe^y = ye^x \iff xe^{-x} = ye^{-y} \iff f(x) = f(y)$

Cette remarque va être utilisée dans tout l'exercice.

1) • $\mathcal{R}$ est réflexive : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x)$; donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \mathcal{R} x$.

• $\mathcal{R}$ est symétrique : Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

(H) Si $x \mathcal{R} y$

(D) Alors $f(x) = f(y)$. Donc $f(y) = f(x)$.

(C) Donc $y \mathcal{R} x$.

• $\mathcal{R}$ est transitive : Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(H) Si $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$

(D) Alors $f(x) = f(y)$ et $f(y) = f(z)$; donc $f(x) = f(z)$

(C) Donc $x \mathcal{R} z$

Par conséquent $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors : $\mathcal{C}\ell(x) = \{x' \in \mathbb{R}, \ x' \mathcal{R} x\}$

$= \{x' \in \mathbb{R}, \ f(x') = f(x)\}$

Donc $\mathcal{C}\ell(x)$ = ensemble des antécédents de x.

Pour déterminer le nombre d'antécédents de x, on va donc commencer par tracer la courbe représentative de f

Étude de l'application f

• f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ (qui est son ens de définition)

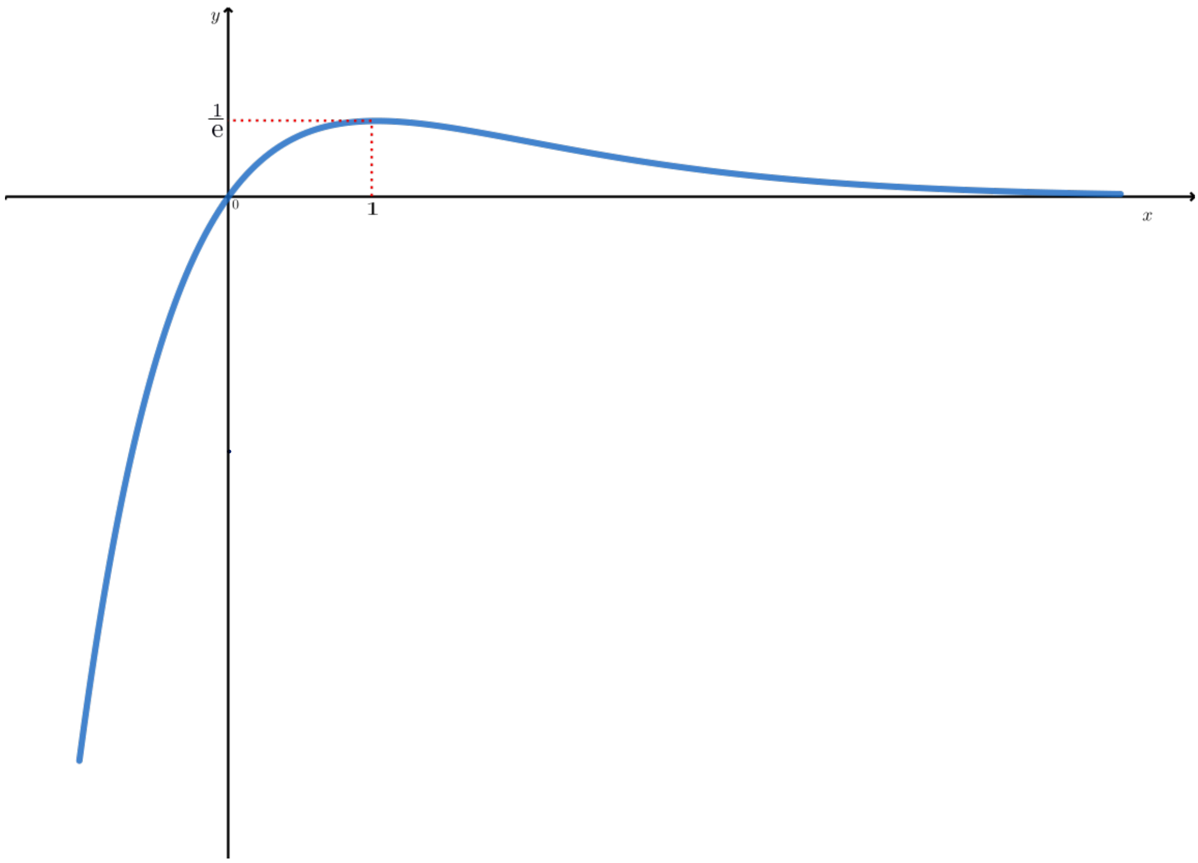
- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\underbrace{e^x/x}_{\xrightarrow{LR} +\infty}} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{x}_{\to -\infty}\ \underbrace{e^{-x}}_{\to +\infty} = -\infty \end{cases}$

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (1-x)e^{-x}$; donc signe $(f'(x))$ = signe $(1-x)$
- On en déduit :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	0

$f(1) = e^{-1} = 1/e$

- Courbe représentative de f :



D'après le tableau de variation (et la courbe), on en déduit que pour tout $y \in \mathbb{R}$:

- Si $y > \frac{1}{e}$: y n'a pas d'antécédent par f.
- Si $y = \frac{1}{e}$: y admet un seul antécédent (qui est $x = 1$)
- $0 < y < \frac{1}{e}$: y admet 2 antécédents (l'un dans $]0, 1[$, l'autre dans $]1, +\infty[$)
- Si $y \leq 0$: y admet un seul antécédent (qui est négatif)

Donc :

$$\begin{cases} \text{Si } x \in]-\infty, 0] : \underbrace{f(x)}_{y} \in]-\infty, 0] \text{ ; donc } x \text{ admet } 1 \text{ antécédent (qui est } x) \\ \text{Si } x \in]0,1[\cup]1,+\infty[: \underbrace{f(x)}_{y} \in]0, \frac{1}{e}[\text{ ; donc } x \text{ admet } 2 \text{ antécédents.} \\ \text{Si } x = 1 : f(x) = 1/e \text{ ; donc } x \text{ admet } 1 \text{ antécédent (qui est } x = 1) \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} \text{Si } x \in]-\infty, 0] \text{ ou } x = 1 : \mathcal{C}\ell(x) \text{ est un singleton } \left(\mathcal{C}\ell_{R}(x) = \{x\}\right) \\ \text{Si } x \in]0, +\infty[\setminus \{1\} : \mathcal{C}\ell(x) \text{ est une paire} \end{cases}$$
