→ S1 A3
→ 7/10/2020

TD2

MATH0102

Exercice 24 :

1) Mq $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Initialisation : $(n=0)$

Pour $n=0$ $\begin{cases} \sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{0} k^2 = 0^2 = 0 \\ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{0\times(0+1)(2\times 0+1)}{6} = 0 \end{cases}$

Donc $P(0)$ vrai

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$, Supposons que $P(n)$ est vrai pour cet entier n.

Montrons que $P(n+1)$ est vrai

$P(n+1)$

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

On a $\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= (n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right]$$

$$= (n+1)\frac{n(2n+1) + 6(n+1)}{6}$$

$$= (n+1)\frac{2n^2+7n+6}{6}$$

Or $(n+2)(2n+3) = 2n^2+3n+4n+6 = 2n^2+7n+6$

Donc $\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = (n+1)\frac{(n+2)(2n+3)}{6}$

$$= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+3)}{6}$$

Conclusion :

$P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) H_4 $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Initialisation :

Pour $n=0$, $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \sum_{k=0}^{0} k^3 = 0^3 = 0$

Donc $P(0)$ est vrai

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$, Montrons que $P(n)$ est vrai pour tout n.
Montrons que $P(n+1)$ est vrai

Alors: $\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^3$

$= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^2$

$$= (n+1)^2 \times \left(\frac{n}{2}\right)^2 + (n+1)^2 \times (n+1)$$
$$= (n+1)^2 \left[\frac{n^2}{4} + n+1\right]$$
$$= (n+1)^2 \frac{n^2+4n+4}{4}$$

$$= (n+1)^2 \frac{(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\right)^2$$

Donc $P(n+1)$ est vrai

Conclusion :

$P(n)$ est vrai pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

5) Mq $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+, (1+x)^n \geqslant 1+nx$

Initialisation :

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $\underbrace{(1+x)^1}_{1+x} \geqslant \underbrace{1+1\times x}_{1+x}$

Donc P(1) est vrai

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Supposons que $\forall x \in \mathbb{R}^*, (1+x)^n \geqslant 1+nx$
Soit $x \in \mathbb{R}^+$

On sait que $(1+x)^n \geqslant 1+nx$
Donc $(1+x)^n \times (1+x) \geqslant (1+nx)(1+x)$
C-est-à-dire :
$(1+x)^{n+1} \geqslant 1+x+nx+nx^2$
$(1+x)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)x+nx^2$
or $1+(n+1)x+nx^2 \geqslant 1+(n+1)x$
Donc $(1+x)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)x$
Donc $P(n+1)$ Vrai

Conclusion :

$P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 24 :

8) Mq $\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2\}$, la somme des angles d'un polygone convexe à n côtés vaut $180(n-2)°$

Initialisation :

La somme des angles d'un triangle est 180.

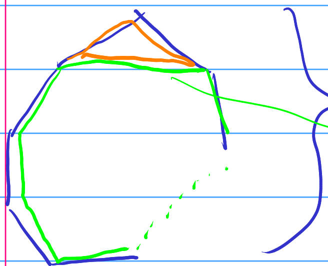
Donc la somme d'un polygone convexe a 3 côtés et $\underbrace{180 \times (3-2)°}_{180°}$

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2\}$

Supposons que la sommes des angles d'un polygone convexe n côtés est $180 \times (n-2)°$

Considérons un polygone convexe à $(n+1)$ côtés



Polygone convexe à $n+1$ côtés

Polygone convexe à n côte

Σ angle $= 180(n-2)°$ (d'après H)

$\Sigma(\underbrace{\text{angle du polygone}}\ \text{bleu}) = \Sigma(\underbrace{\text{angle du polygone vert}}) + \Sigma(\underbrace{\text{angle du triangle}})$

$= 180 \times (n-2) + 180$

$= 180(n-1) = 180((n+1)-2)$ deg

Donc $P(n+1)$ Vrai

Exercice 20 :

1) a. $\exists x \in \mathbb{R}, (x^2 < 1 \text{ et } x < 1)$ Contre-exemple

b. $\exists a \in \mathbb{R}^+, \exists b \in \mathbb{R}^+, \sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. $\left.\begin{matrix}\sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2 \\ \sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{2}\end{matrix}\right\} \neq$

2)

a $\exists x \in \mathbb{R}, x \geqslant x^2$ $x = 0,5$ $x^2 = 0,25$ Négation Vrai donc 2.a. Faux

b. Vrai, cas particulier $x = 2$ $x^2 = 4$ $2 \leqslant 4$

Exercice 23 :

Mq $A \Rightarrow B$ par l'absurde. Supposons que A vrai et que B faux

Mq P est vrai (par l'absurde) supposons que $\neg P$ vrai

1) Mq $\forall (x, y, z) \in (\mathbb{R}^+_*)^3, \left(x+y+z < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \Rightarrow (x < 1 \text{ ou } y < 1 \text{ ou } z < 1)$

Raisonnement par l'absurde ; Supposons que

$\exists (x, y, z) \in (\mathbb{R}^+_*)^3, x + y + z > \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ et $x \geqslant 1$ et $y \geqslant 1$ et $z \geqslant 1$ et vrai

Alors $x + y + z \geqslant \underbrace{1 + 1 + 1}_{3}$

Or $\frac{1}{x} \leqslant 1$ et $\frac{1}{y} \leqslant 1$ et $\frac{1}{z} \leqslant 1$

Donc $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leqslant \underbrace{1 + 1 + 1}_{3}$

Or $x + y + z < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ $3 \leqslant x + y + z < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < 3$

Donc $3 \leqslant 3$ Absurde $\boxed{\text{Fausse}}$

Donc 1) est faux