Université de Reims Champagne Ardenne
UFR Sciences Exactes et Naturelles

Année universitaire **2018-19**
Licence de mathématiques L1

MA0102 Outils mathématiques II
Lundi 8 octobre 2018
Durée : 1 h 30 mn

Documents, portables, calculatrices interdits.
Les exercices peuvent être traités dans l'ordre qui vous convient. Il est possible d'admettre le résultat d'une question avant de passer à la suivante.
Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Questions de cours

1. Soit $q \in \mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que vaut la somme suivante ?
$$S_n = \sum_{j=0}^{n} q^j.$$
2. Soient P et Q deux énoncés logiques. Rappeler la définition de $P \Longrightarrow Q$ (P implique Q), au moyen des connecteurs "et ($\wedge$)", "ou ($\vee$)", "non ($\neg$)". Donner ensuite sa table de vérité.

Exercice 1 Calculs

1. Simplifier l'expression suivante, en précisant sur quel sous-ensemble de $\mathbb{R}$ elle est définie. Le résultat ne doit plus être sous forme d'une fraction.
$$a = \frac{e^x(e^{2x}+e^x)}{1+\frac{e^x-1}{e^x+1}}.$$
2. Dériver la fonction f suivante, qui est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$:
$$f(x) = \frac{e^x-1}{e^{3x}+3e^x}.$$
3. Simplifier les expressions suivantes, en précisant sur quel domaine elles sont définies (il ne doit plus rester de $|x|$) :
$$(i) \quad a(x) = (|x|+2)^2 - 4|x| \ , \qquad (ii) \quad b(x) = |x|\sqrt{1+\tfrac{1}{x^2}}.$$
4. Calculer la somme S_n suivante, définie pour $n \in \mathbb{N}^*$. Le signe Σ doit disparaître et il ne doit rester qu'au plus 4 termes, dépendant éventuellement de n.
$$n \in \mathbb{N}^*, \ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}.$$
5. Simplifier les produits suivants :
$$(i) \qquad p_1 = \frac{7!}{3!5!} \ ;$$
$$(ii) \quad p_n = \frac{n!(n+2)!}{(n-1)!(n+1)!} \quad \text{pour } n \geq 1 \ ;$$
$$(iii) \quad p'_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k(k+2)}{(k+1)^2} \qquad \text{pour } n \geq 1.$$

Exercice 2 Logique

1. Écrire avec des quantificateurs et des connecteurs les phrases suivantes, puis leur négation.
   (a) "Quel que soit le nombre réel x, il est le logarithme népérien d'un nombre réel y."
   (b) "Le carré d'un nombre complexe est encore un nombre complexe."
2. Les assertions suivantes sont-elles équivalentes ? On pourra s'interroger sur leur véracité.
   (a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \big((\sin(x) > 0) \text{ ou } (\sin(x) \leq 0)\big)$;
   (b) $(\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x) > 0) \quad \text{ou} \quad (\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x) \leq 0)$.
3. Si les lettres P, Q, R désignent des assertions, donner la table de vérité de

$$\begin{array}{ll} (a) & (P \wedge Q) \vee (P \Longrightarrow R) \ ; \\ (b) & (R \wedge (P \vee Q)) \vee R. \end{array}$$

Exercice 3 Logique

1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On dit que f est "uniformément continue sur $\mathbb{R}$ " si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ ((|x-y| < \eta) \Longrightarrow (|f(x) - f(y)| < \varepsilon)).$$

   (a) Soit $c \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction constante égale à c sur $\mathbb{R}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Comment s'exprime le fait qu'une fonction n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$?
2. Prouver que l'assertion P suivante est fausse :

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{C}^3,\ (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

   On pourra écrire sa négation et prouver que sa négation est vraie.