

Devoir surveillé 1

Ma0101 - 2018/2019

5 novembre 2018 - durée : 1h30

Exercice 1

On considère l'équation du second degré à coefficients complexes :

$$z^2 + (1 - 3i)z - 4 = 0 \quad (*)$$

1. Calculer les racines carrées de $\Delta = 8 - 6i$.
2. En utilisant la question précédente, résoudre l'équation (*).
3. Ecrire les solutions sous forme exponentielle.

Exercice 2

On pose $z = (1 - i)(1 + i\sqrt{3})$

1. Calculer le module et un argument de z , et en déduire une écriture sous forme exponentielle.
2. Déduire de la question précédente les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.
3. En utilisant la question 1., calculer z^{2004} .

Exercice 3 : questions de cours

Les trois questions sont indépendantes. Pour cet exercice, aucune démonstration n'est exigée.

1. Rappeler les domaines de définitions des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \ln(x) \quad ; \quad x \mapsto \sqrt{x} \quad ; \quad x \mapsto \frac{1}{x}$$

2. Rappeler les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

3. Rappeler les ensembles de dérivabilité des fonctions suivantes, et donner leurs dérivées :

$$x \mapsto \ln(|x|) \quad ; \quad x \mapsto \sqrt{x} \quad ; \quad x \mapsto e^{ax}, \quad a \in \mathbb{R} \quad ; \quad x \mapsto \frac{1}{x^n}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Exercice 4

Dans cet exercice, toutes les réponses doivent être justifiées.

Partie A

Les deux questions sont indépendantes.

1. Donner les domaines de définition des fonctions suivantes, et étudier leur parité éventuelle :

$$x \mapsto \sin(e^{-x^2}) \quad ; \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}} \quad ; \quad x \mapsto \frac{2x}{\cos(x) + 1}$$

2. Calculer les limites suivantes en indiquant, le cas échéant, les limites de références utilisées ou la méthode utilisée.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{e^x - 1} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)^3}{1 + x^4} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{e^{2x} - 1} \frac{\sin(5x)}{\ln(3x + 1)}$$

Partie B

On considère la fonction f donnée par $x \mapsto -\frac{(x-1)^2}{2x-1}$.

1. Donner le domaine de définition de f , noté D_f .
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}+} f(x)$.
3. Montrer que f est dérivable sur D_f , et montrer que sa dérivée s'écrit sous la forme :

$$f'(x) = \frac{P(x)}{(2x-1)^2}$$

où P est un polynôme de degré 2.

4. Déterminer le signe de $P(x)$, en fonction de $x \in \mathbb{R}$.
5. En déduire les variations de f , et dresser un tableau de variations.
6. Montrer que f admet des asymptotes obliques en $-\infty$ et $+\infty$, et en calculer les coefficients.
7. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.