Corrigé du DS N° 2

Questions de cours

1) $\boxed{\forall x \in E,\ x \mathcal{R} x}$

2) a) $\boxed{\bar{x} = \{ y \in E,\ y \mathcal{R} x \}}$

b) $\boxed{E/_{\mathcal{R}} = \{ \bar{x},\ x \in E \}}$

3) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $AB = BA = I_n$

Exercice 1

1) a) $\sim$ est réflexive car $\forall (a,b) \in E$, $ab = ab$, c'est à dire $(a,b) \mathcal{R} (a,b)$

$\sim$ est symétrique :

Soient $(a,b), (a',b') \in E$

Supposons que $(a,b) \mathcal{R} (a',b')$

Alors $ab' = a'b$. Donc $a'b = ab'$

Donc $(a',b') \mathcal{R} (a,b)$

$\sim$ est transitive.

Soient (a,b), (a',b') et $(a'',b'') \in E$

Supposons que $(a,b) \sim (a',b')$ et $(a',b') \sim (a'',b'')$

Alors $ab' = a'b$ et $a'b'' = a''b'$

Donc $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ et $\frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''}$ (car $b, b', b'' \in \mathbb{Z}^*$)

Donc $\frac{a}{b} = \frac{a''}{b''}$. Donc $ab'' = a''b$

c'est à dire $(a,b) \sim (a'',b'')$

Donc $\boxed{\sim \text{ est une relation d'équivalence.}}$

b) Soit $(a,b) \in E$.

$(a,b) \in \overline{(1,5)} \iff (a,b) \sim (1,5) \iff 5a = b$

Donc $\boxed{\overline{(1,5)} = \{ (a, 5a),\ a \in \mathbb{Z}^* \}}$

2) $\boxed{\text{Non, } \mathcal{R} \text{ n'est pas une relation d'équivalence}}$ car $\mathcal{R}$ n'est pas reflexive. En effet, pour $(a,b) = (1,1) \in E$ on a $(1,1) \not\mathcal{R} (1,1)$ car $1 \times 1 \neq -1 \times 1$.

Exercice 2

1) • $\boxed{\text{Le produit } CB \text{ n'est pas défini}}$ car le nombre de colonnes de C (qui est 2) n'est pas égal au nombre de ligne de B (qui est 3).

• $\boxed{\text{Le produit } AB \text{ est défini}}$ car le nombre de colonnes de A (qui est 3) est le même que le nombre de lignes de B (qui est 3).

2) $$\boxed{2B + I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

3) $$\boxed{AC = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad CA = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -6 & 0 & -4 \\ -6 & -3 & -7 \end{pmatrix}}$$

4) $$\boxed{B^2 = BB = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}}$$

Exercice 3

1) Pour S_1 : on choisit x en L_1, puis y en L_2, puis z en L_3 comme pivots ; il n'y a aucun calculs à faire.
Le système (S_1) est donc de Cramer car toutes les inconnues sont choisies comme pivots.

$\boxed{\text{Il n'y a qu'une seule solution à } (S_1)}$

Pour S_2 : on choisit x en L_1, puis y en L_2 comme pivots ; il n'y a aucun calcul à faire.
Le système (S_2) est indéterminé d'ordre 1 car z est la seule inconnue qui n'est pas pivot.

$\boxed{(S_2) \text{ a une infinité de solutions.}}$

Pour S_3 :

$$S_3 \iff \begin{cases} x + y - z = 5 \\ 2y + z = 15 \\ -4y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (L_1) \\ 2y + z = 15 \\ -4y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (L_1) \\ (L_2) \\ 0 = 30 \quad (L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2) \end{cases}$$

Le système (S_3) est impossible

$\boxed{(S_3) \text{ n'a aucune solution.}}$

2) $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ y + z = b \\ 2x - y = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (L_1) \\ y + z = b \quad (L_2) \\ -5y - 6z = c - 2a \quad (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (L_1) \\ (L_2) \\ -z = c - 2a + 5b \quad (L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2a - 5b - c \\ y = b - z = -2a + 6b + c \\ x = a - 2(-2a + 6b + c) - 3(2a - 5b - c) = -a + 3b + c \end{cases}$

$\boxed{\mathcal{S} = \{(-a + 3b + c, -2a + 6b + c, 2a - 5b - c)\}}$

3) Soient $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$: $PX = Y \Leftrightarrow (S)$

or (S) est de Cramer donc P inversible et

$PX = Y \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -2 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix} Y$ donc $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -2 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}}$

4) on a $\boxed{PP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$ donc il n'y a pas d'erreur de calcul.

Exercice 4

1) $\boxed{\begin{array}{l} g \circ f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ \quad n \longmapsto g(f(n)) = g(2n) = n \end{array}}$

$\boxed{\begin{array}{l} f \circ g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ \quad n \longmapsto f(g(n)) = \begin{cases} f\left(\frac{n}{2}\right) = 2\frac{n}{2} = n & \text{si } n \text{ pair} \\ f(0) = 2 \times 0 = 0 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases} \end{array}}$

2) • $\boxed{g \text{ n'est pas injective}}$

Pour $n = 1$ et $n' = 3$, on a $n \neq n'$ et $\underbrace{g(n) = g(n')}_{0}$

• $\boxed{g \text{ est surjective}}$

Soit $y \in \mathbb{N}$; posons $x = 2y$; alors $x \in \mathbb{N}$ et $g(x) = g(2y) = y$

• $\boxed{g \text{ n'est pas bijective}}$ car g n'est pas injective.