3) **Remarque** : pour déterminer la forme canonique d'un trinôme du second degré ax^2+bx+c,

- on factorise a : $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$
- on écrit l'identité remarquable dont le début du développement permet d'obtenir $x^2+\frac{b}{a}x$:
  $x^2+\frac{b}{a}x=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}$
- d'où la forme canonique : $ax^2+bx+c=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+c=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}$

a) $f(x)=\frac{5}{x^2+4x+8}=\frac{5}{(x+2)^2-4+8}=\frac{5}{(x+2)^2+4}$

On pose : $t=\frac{x+2}{2}\Leftrightarrow x=2t-2$ d'où $dt=\frac{dx}{2}\Leftrightarrow dx=2dt$

$$F(x)=\int\frac{5}{x^2+4x+8}dx=5\int\frac{1}{(x+2)^2+4}dx=5\int\frac{1}{(2t)^2+4}\cdot 2dt=10\int\frac{1}{4t^2+4}dt$$
$$=\frac{10}{4}\int\frac{1}{t^2+1}dt=\frac{5}{2}\int\frac{1}{1+t^2}dt=\frac{5}{2}\mathrm{Arctan}(t)+C=\frac{5}{2}\mathrm{Arctan}\left(\frac{x+2}{2}\right)+C$$
où $C\in\mathrm{IR}$

b) $f(x)=\frac{1}{x^2+x+1}=\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1}=\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$

On pose : $t=\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{2}$ d'où $dt=\frac{2dx}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow dx=\frac{\sqrt{3}}{2}dt$

$$F(x)=\int\frac{1}{x^2+x+1}dx=\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=\int\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)^2+\frac{3}{4}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}dt=\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{1}{\frac{3}{4}t^2+\frac{3}{4}}dt$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{4}{3}\int\frac{1}{t^2+1}dt=\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{1}{1+t^2}dt=\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}(t)+C=\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+C$$
où $C\in\mathrm{IR}$

c) $f(x)=\frac{1}{2x^2+3x+8}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{x^2+\frac{3}{2}x+4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}+\frac{64}{16}}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{55}{16}}$

On pose : $t=\frac{x+\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{55}{16}}}=\frac{4}{\sqrt{55}}\left(x+\frac{3}{4}\right)=\frac{4}{\sqrt{55}}x+\frac{3}{\sqrt{55}}\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{55}}{4}t-\frac{3}{4}$ d'où $dt=\frac{4dx}{\sqrt{55}}\Leftrightarrow dx=\frac{\sqrt{55}}{4}dt$

$$F(x)=\int\frac{1}{2x^2+3x+8}dx=\int\frac{1}{2}\times\frac{1}{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{55}{16}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{55}}{4}t\right)^2+\frac{55}{16}}\cdot\frac{\sqrt{55}}{4}dt$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{55}}{4}\int\frac{1}{\frac{55}{16}t^2+\frac{55}{16}}dt=\frac{\sqrt{55}}{8}\times\frac{16}{55}\int\frac{1}{t^2+1}dt=\frac{2}{\sqrt{55}}\int\frac{1}{1+t^2}dt=\frac{2}{\sqrt{55}}\mathrm{Arctan}(t)+C$$
$$=\frac{2}{\sqrt{55}}\mathrm{Arctan}\left(\frac{4}{\sqrt{55}}x+\frac{3}{\sqrt{55}}\right)+C$$
où $C\in\mathrm{IR}$

Exercice 7

1) $f(x) = \frac{x^3-2x}{x+1}$

f est une fonction rationnelle définie lorsque $x+1 \neq 0$, soit sur IR-$\{-1\}$; donc f est continue et par conséquent intégrable sur $]-\infty\,;-1[$ ou sur $]-1\,;+\infty[$.

a) $f(x) = x^2 - x - 1 + \frac{1}{x+1}$

$$x^2 - x - 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{(x^2-x-1)(x+1)}{x+1} + \frac{1}{x+1} = \frac{x^3+x^2-x^2-x-x-1}{x+1} + \frac{1}{x+1} = \frac{x^3-2x}{x+1}$$
$$= f(x)$$

b)

$$F(x) = \int \frac{x^3-2x}{x+1}dx = \int \left(x^2-x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x + \ln(|x+1|) + C$$

où $C \in$ IR

Remarque

- sur $]-\infty\,;-1[$ $\;F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x + \ln(|x+1|) + C = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x + \ln(-x-1) + C$
- sur $]-1\,;+\infty[$ $\;F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x + \ln(|x+1|) + C = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) + C$

2) $g(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$

g est une fonction rationnelle définie lorsque $x^2-3x+2 \neq 0$, soit sur IR-$\{1\,;2\}$; donc g est continue et par conséquent intégrable sur $]-\infty\,;1[$ ou sur $]1\,;2[$ ou sur $]2\,;+\infty[$.

a) $g(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$

$$g(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} = \frac{a(x-2)+b(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{ax-2a+bx-b}{x^2-2x-x+2} = \frac{(a+b)x-2a-b}{x^2-3x+2} = \frac{1}{x^2-3x+2}$$
$$\Leftrightarrow (a+b)x - 2a - b = 1$$

<u>propriété</u> : deux polynômes sont égaux, s'ils ont le même degré et pour chaque puissance de x le même coefficient

donc :

$$\begin{cases} a+b=0 \\ -2a-b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a=1 \\ a+b=0 \end{cases} \text{ par addition des deux équations} \quad \text{donc} \begin{cases} a=-1 \\ b=-a=1 \end{cases}$$

Soit :

$$g(x) = -\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$$

b)

$$G(x) = \int \frac{1}{x^2-3x+2}dx = \int \left(-\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}\right)dx = -\ln(|x-1|) + \ln(|x-2|) + C$$
$$= \ln\left(\frac{|x-2|}{|x-1|}\right) + C = \ln\left(\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\right) + C$$

où $C \in$ IR

Remarque

- sur $]-\infty\,;1[$ ou sur $]2\,;+\infty[$ $\;G(x) = \ln\left(\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\right) + C = \ln\left(\frac{x-2}{x-1}\right) + C$
- sur $]1\,;2[$ $\;G(x) = \ln\left(\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\right) + C = \ln\left(-\frac{x-2}{x-1}\right) + C$