Corrigé du DS N°1

Exercice 1

1) $\delta^2 = \Delta$ $\iff$ $\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = 4 \\ 2xy = -2\sqrt{3} \end{cases}$ $\iff$ $\begin{cases} 2x^2 = 6 \\ 2y^2 = 2 \\ xy = -\sqrt{3} \end{cases}$

$(\delta = x + iy)$

$\iff \begin{cases} x^2 = 3 \\ y^2 = 1 \\ xy < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ y = \pm 1 \\ xy < 0 \end{cases} \iff \boxed{\delta = \pm(\sqrt{3} - i)}$

2) $\Delta = (1 + i\sqrt{3})^2 - 4(-1 + i\sqrt{3}) = 1 + 2i\sqrt{3} - 3 + 4 - 4i\sqrt{3}$
$= 2 - 2i\sqrt{3}$

Les racines carrées de Δ sont $\pm(\sqrt{3} - i)$

Donc les solutions sont :

$$z_1 = \frac{-(1+i\sqrt{3}) + (\sqrt{3} - i)}{2} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$z_2 = \frac{-(1+i\sqrt{3}) - (\sqrt{3} - i)}{2} = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) ; \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + 1/2\right) \right\}}$$

Exercice 2

1) • $|z_1| = |4|\,|1+i| = 4\sqrt{2}$ et $\theta_1 = \arg(z_1)$ où $\begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

Donc $\theta_1 = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

D'où $z_1 = 4\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$

• $|z_2| = |1 + i\sqrt{3}| = 2$ et $\theta_2 = \arg(z_2)$ où $\begin{cases} \cos\theta_2 = 1/2 \\ \sin\theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Donc $\theta_2 = \pi/3\ [2\pi]$

D'où $z_2 = 2e^{i\pi/3}$

On en déduit : $\frac{z_1}{z_2} = \frac{4\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}}{2\, e^{i\pi/3}} = 2\sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \pi/3\right)}$

Donc $\boxed{\frac{z_1}{z_2} = 2\sqrt{2}\, e^{-i\pi/12}}$ qui est la forme exponentielle de $\frac{z_1}{z_2}$

2) $z_1^2 z_2 = (4\sqrt{2}\, e^{i\pi/4})^2 (2e^{i\pi/3}) = (16\times 2\, e^{i\pi/2}) \times 2 e^{i\pi/3}$

$= 64\, e^{i(\pi/2 + \pi/3)}$

Donc $\boxed{z_1^2 z_2 = 64\, e^{\frac{5i\pi}{6}}}$ qui est la forme exponentielle de $z_1^2 z_2$

Exercice 3

1) $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R},\ x - 1 \neq 0\} = \boxed{\mathbb{R}\setminus\{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[}$

2) • $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = \boxed{+\infty}$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = \boxed{-\infty}$

• $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\frac{x^2+3x}{x-1}\right) = \boxed{+\infty}$ (car elle est du type : "$\frac{4}{0^+}$")

• $\lim\limits_{x\to 1^-} \left(\frac{x^2+3x}{x-1}\right) = \boxed{-\infty}$ (car elle est du type : "$\frac{4}{0^-}$")

Il n'y a pas d'asymptote horizontale (car $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$)

et il y a une asymptote verticale d'équation $x = 1$

(car $\lim\limits_{x\to 1^\pm} f(x) = \pm\infty$)

3). f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ car f est obtenue par somme et quotient de fonctions dérivables sur leur ensemble de définition. ($x \mapsto x^2$, $x \mapsto 3$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto -1$)

Donc $\boxed{\mathcal{D}'_f = \mathcal{D}_f}$

• $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f'(x) = \frac{(2x+3)(x-1) - (x^2+3x)\times 1}{(x-1)^2}$

$$\boxed{f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}}$$

4) signe $(f'(x))$ = signe $(x^2 - 2x - 3)$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
x^2-2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

a) $f'(x) = 0 \iff (x = -1 \text{ ou } x = 3)$

b) $f'(x) > 0 \iff (x < -1 \text{ ou } x > 3)$

c) $f'(x) < 0 \iff (-1 < x < 1 \text{ ou } 1 < x < 3)$

5)

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$ $-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	9	$\nearrow$	$+\infty$

$f(-1) = 1$

$f(3) = 9$

6) a) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{x^2+3x}{x(x-1)}\right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{x^2}{x^2}\right) = 1$

Donc $\boxed{a = 1}$

b) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{x^2+3x}{x-1} - x\right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{\cancel{x^2}+3x-\cancel{x^2}+x}{x-1}\right)$

$= \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{4x}{x-1}\right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{4x}{x}\right) = 4$

Donc $\boxed{b = 4}$

c) La droite d'équation $y = x + 4$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$

d) $f(x) - (x+4) = (f(x) - x) - 4$

$= \dfrac{4x}{x-1} - 4 = \dfrac{4x - 4x + 4}{x-1} = \dfrac{4}{x-1}$

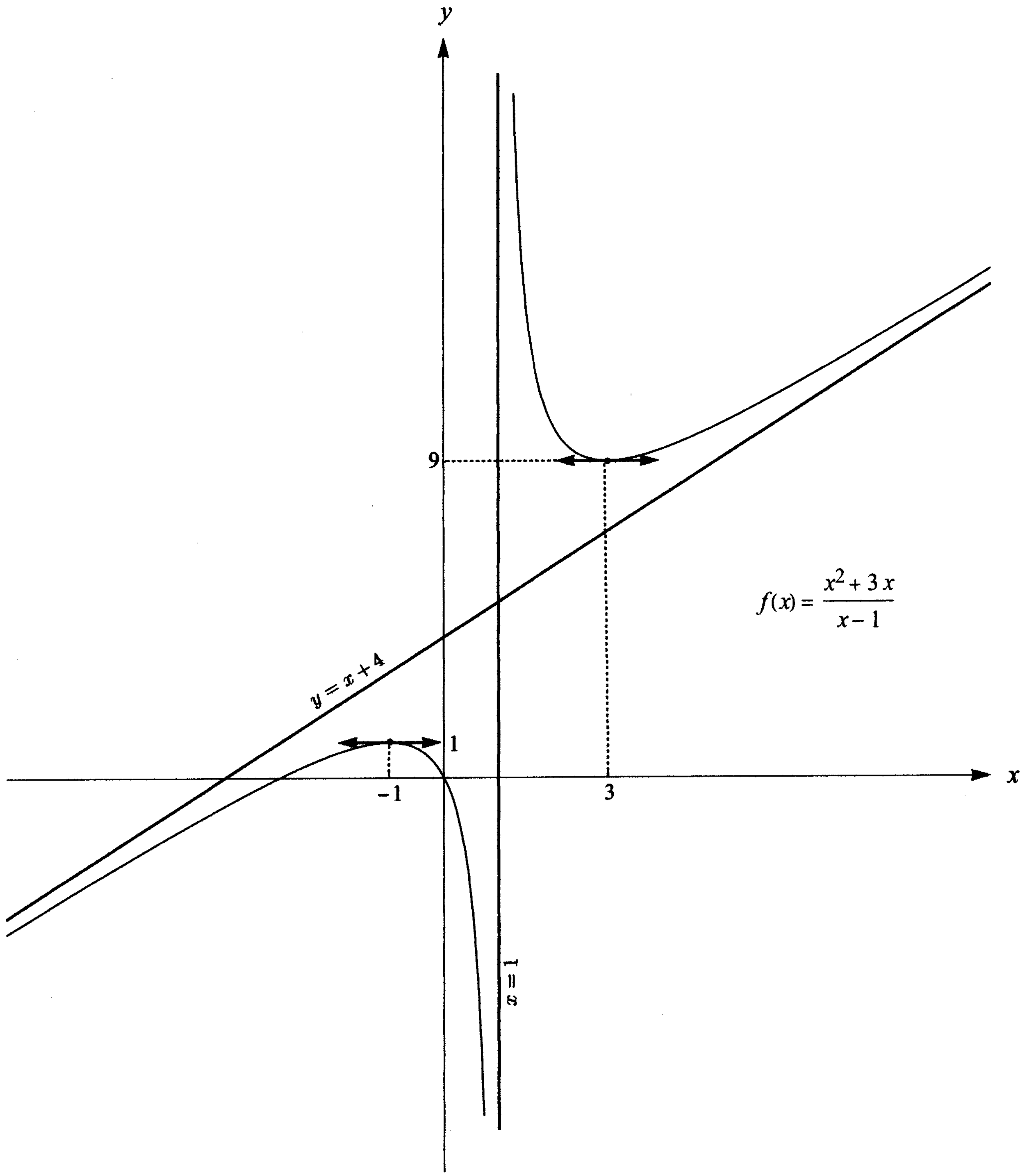
Donc :

si $x > 1$: $\dfrac{4}{x-1} > 0$ donc $f(x) - (x+4) > 0$

Donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de l'A.O

si $x < 1$: $\dfrac{4}{x-1} < 0$ donc $f(x) - (x+4) < 0$

Donc $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de l'A.O


y
x
9
1
-1
3
$y = x + 4$
$x = 1$
$f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x - 1}$