Séance du 03-11-20

Feuille de TD N°3

Ex 6

2°) Mq : $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ A = \emptyset \iff [\forall X \in \mathcal{P}(E),\ A \cap X = \emptyset]$

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$,

- Mq $A = \emptyset \implies [\forall X \in \mathcal{P}(E),\ A \cap X = \emptyset]$

(H) Supposons que $A = \emptyset$

(D) Soit $X \in \mathcal{P}(E)$. Alors : $A \cap X \underset{(\text{Hyp})}{=} \emptyset \cap X \underset{\text{cours}}{=} \emptyset$

(C) Donc $\forall X \in \mathcal{P}(E),\ A \cap X = \emptyset$

- Mq $[\forall X \in \mathcal{P}(E),\ A \cap X = \emptyset] \implies A = \emptyset$

(H) Supposons que : $\forall X \in \mathcal{P}(E),\ A \cap X = \emptyset$

(D) En particulier pour $X = E$, on a

$\underbrace{A \cap X = \emptyset}$ (pour $X = E$)

or pour $X = E$: $\underbrace{A \cap X} = A \cap E \underbrace{= A}$

(C) Donc $A = \emptyset$

Ex 7

2) a) E est un ensemble. Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$

Mq : $A \cap B \subset (A \cap C) \cup (B \cap \complement_E^C)$

(Démonstration et ⊆ par élt :
On veut montrer que $X \subset Y$.
Soit $x \in X$, …… alors $x \in Y$)

Soit $x \in A \cap B$.

Donc $\underbrace{x \in A}$ et $\underbrace{x \in B}$.

or $x \in E$; or $E = C \cup \complement_E^C$ (cours)

Donc $x \in C \cup \complement_E^C$; donc $x \in C$ ou $x \in \complement_E^C$

1^er^ cas : Si $x \in C$: or $x \in A$; donc $x \in A \cap C$

2^ème^ cas : Si $x \in \complement_E^C$: or $x \in B$; donc $x \in B \cap \complement_E^C$

Donc $x \in A \cap C$ ou $x \in B \cap \complement_E^C$

Donc $x \in (A \cap C) \cup (B \cap \complement_E^C)$.

Ex 9 : ne sera pas Traité

Ex 12 :

E est un ensemble non vide

Mq : $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$,
$[\forall X \in \mathcal{P}(E), (A \setminus X) \cup (X \setminus A) = (B \setminus X) \cup (X \setminus B)] \Longleftrightarrow A = B$

Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$

Mq : $\boxed{\Longrightarrow}$

(H) Supposons que $\forall X \in \mathcal{P}(E), (A \setminus X) \cup (X \setminus A) = (B \setminus X) \cup (X \setminus B)$

(D) Donc en particulier pour $X = \emptyset$

$$(A \setminus X) \cup (X \setminus A) = (B \setminus X) \cup (X \setminus B)$$

c'est à dire : $(A \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus A) = (B \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus B)$

or $\begin{cases} A \setminus \emptyset = A \cap \complement_E^\emptyset = A \cap E = A \\ \emptyset \setminus A = \emptyset \cap \complement_E^A = \emptyset \\ B \setminus \emptyset = B \\ \emptyset \setminus B = \emptyset \end{cases}$

Donc $A \cup \emptyset = B \cup \emptyset$

or $A \cup \emptyset = A$ et $B \cup \emptyset = B$

(C) Donc $A = B$

Mq : $\boxed{\Longleftarrow}$

(H) Supposons que $A = B$

(D) Soit $X \in \mathcal{P}(E)$. Alors

$$(A \setminus X) \cup (X \setminus A) \overset{A=B}{=} (B \setminus X) \cup (X \setminus B)$$

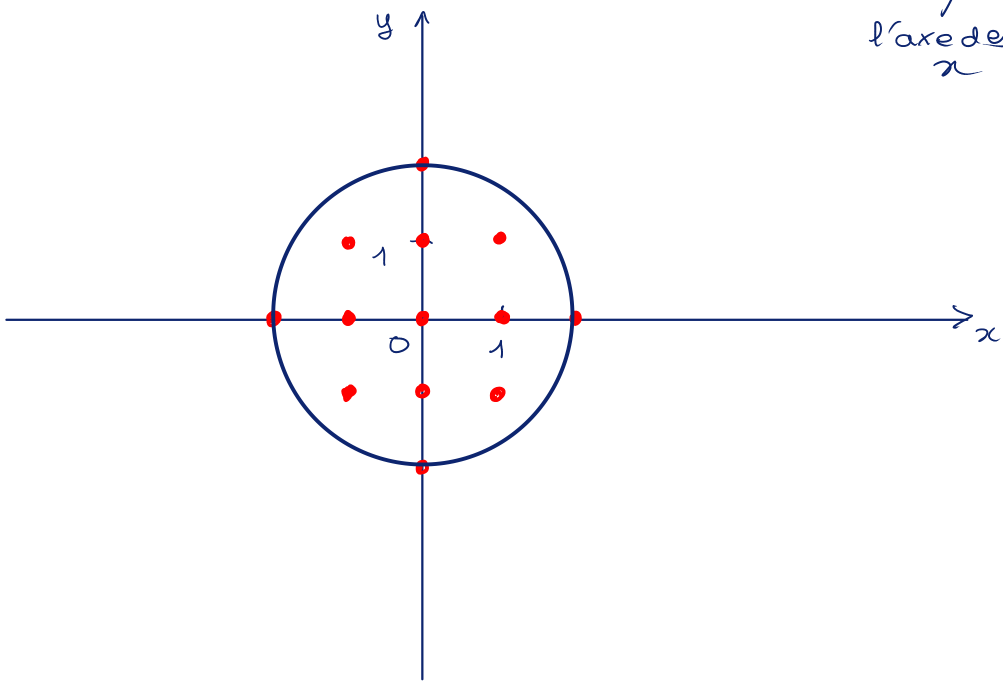
(C) Donc $\forall X \in \mathcal{P}(E)$, $(A \setminus X) \cup (X \setminus A) = (B \setminus X) \cup (X \setminus B)$

Ex 13 :

$A \times B = \{ (a,b) \ , \ a \in A \text{ et } b \in B \}$

2) $D = \{ (a,b) \in \mathbb{Z}^2, \ a^2 + b^2 \leq 4 \}$ $\quad (E = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R})$

l'axe des x — l'axe des y



$(-1/2, 1) \notin D$ car $(-\frac{1}{2}, 1) \notin \mathbb{Z}^2$

$(2, -3) \notin D$ car $(2)^2 + (-3)^2 \not\leq 4$

$(0,0) \in D$ car $\begin{cases} (0,0) \in \mathbb{Z}^2 \\ \text{et} \\ 0^2 + 0^2 \leq 4 \end{cases}$

- $(0,0) \in D$ et $(0,1) \in D$ et $(0,2) \in D$ et $(0,3) \notin D, \ldots$
  $(0,-1) \in D$ et $(0,-2) \in D$ et $(0,-3) \notin D, \ldots$
- $(1, ?) \in D$ $\quad (1,0) \in D$ $\quad (1,-1) \in D$
  $(1,1) \in D$ $\quad (1,-2) \notin D$
  $(1,2) \notin D$
  $\vdots$

$M(x,y)$ tq $\underbrace{x^2+y^2}_{OM^2} \leq 4$: Ts les pts dans le disque de rayon 2 de centre O

Ex14 :

$E \neq \emptyset$, $F \neq \emptyset$

$(A,B) \in \underbrace{\mathcal{P}(E)^2}_{\mathcal{P}(E)\times\mathcal{P}(E)}$, $(C,D) \in \mathcal{P}(F)^2$

1) a) Mq : $(A \times C) \cup (B \times C) = (A \cup B) \times C$

Mq $X = Y$: $\begin{cases} X \subset Y & : \forall x \in E, (x \in X \Rightarrow x \in Y) \\ Y \subset X & : \forall x \in E, (x \in Y \Rightarrow x \in X) \end{cases}$

Donc : $\boxed{\forall x \in E, \ x \in X \Leftrightarrow x \in Y}$

$A \subset E$ et $C \subset F$ donc $A \times C = \{(x,y), x \in A \text{ et } y \in C\} \subset E \times F$

(Si $(x,y) \in A \times C$ alors $x \in A$ et $y \in C$ donc $x \in E$ et $y \in F$ donc $(x,y) \in E \times F$)

De m : $B \times D \subset E \times F$

$\forall (x,y) \in E \times F$,

$(x,y) \in (A \times C) \cup (B \times C) \Leftrightarrow \begin{cases} (x,y) \in A \times C \\ \text{ou} \\ (x,y) \in B \times C \end{cases}$

Distributivité du ET sur OU :

$(P \text{ ou } Q) \text{ et } R \leftrightarrow (P \text{ et } R) \text{ ou } (Q \text{ et } R)$

Factorisation du ET sur OU

$(P \text{ et } R) \text{ ou } (Q \text{ et } R) \leftrightarrow (P \text{ ou } Q) \text{ et } R$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \overbrace{x \in A}^{P} \text{ et } \overbrace{y \in C}^{R} \\ \text{ou} \\ \underbrace{x \in B}_{Q} \text{ et } \underbrace{y \in C}_{R} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[(\underbrace{x \in A}_{P} \text{ ou } \underbrace{x \in B}_{Q}) \text{ et } \underbrace{y \in C}_{R} \right]$

$\Leftrightarrow [\ x \in (A \cup B) \text{ et } y \in C\ ]$

$\Leftrightarrow (x,y) \in (A \cup B) \times C$

b) Mq : $(A \times C) \cup (A \times D) = A \times (C \cup D)$ (Même type de démo)

2) Comparer $(A\cup B)\times(C\cup D)$ et $(A\times C)\cup(B\times D)$

(on $\begin{cases} A\cup B\subset E \text{ et } C\cup D\subset F \text{ ; donc } (A\cup B)\times(C\cup D)\subset E\times F \\ A\times C\subset E\times F \text{ et } B\times D\subset E\times F \text{ ; donc } (A\times C)\cup(B\times D)\subset E\times F \end{cases}$)

$$(A\cup B)\times(\underbrace{C\cup D}_{Z}) = (\underbrace{A}_{Z}\times(C\cup D))\cup(B\times(C\cup D))$$

$(A\cup B)\times Z = (A\times Z)\cup(B\times Z)$ (1)a))

$$= ((A\times C)\cup(A\times D))\cup((B\times C)\cup(B\times D))$$

$Z\times(C\cup D) = (Z\times C)\cup(Z\times D)$ (1) b))

$$= (A\times C)\cup(A\times D)\cup(B\times C)\cup(B\times D)$$

$$= \underbrace{[(A\times C)\cup(B\times D)]}_{X}\cup\underbrace{[(A\times D)\cup(B\times C)]}_{Y}$$

($X\subset X\cup Y$ et $Y\subset X\cup Y$ (cours))

Donc $\underbrace{(A\times C)\cup(B\times D)}_{X}\subset\underbrace{[(A\times C)\cup(B\times D)]}_{X}\cup\underbrace{[(A\times D)\cup(B\times C)]}_{Y}$

c'est à dire $(A\times C)\cup(B\times D)\subset(A\cup B)\times(C\cup D)$

3) Mq : $(A\cap B)\times(C\cap D) = (A\times C)\cap(B\times D)$

$((A\cup B)\times(C\cup D)\supset(A\times C)\cup(B\times D))$

$\forall (x,y)\in E\times F,$

$$(x,y)\in(A\cap B)\times(C\cap D) \iff \begin{cases} x\in A\cap B \\ \text{et} \\ y\in C\cap D \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x\in A \text{ et } x\in B \\ \text{et} \\ y\in C \text{ et } y\in D \end{cases} \iff [(x\in A \text{ et } x\in B) \text{ et } (y\in C \text{ et } y\in D)]$$

$$\iff [\underbrace{x\in A \text{ et } y\in C}\ \text{et}\ \underbrace{x\in B \text{ et } y\in D}]$$

$$\iff [(x,y)\in A\times C \text{ et } (x,y)\in B\times D]$$

$$\iff (x,y)\in(A\times C)\cap(B\times D)$$

4) En fonction de $A, D, \complement_E^A, \complement_F^D$: Exprimer $\complement_{E\times F}^{A\times D}$

$\forall (x,y) \in E\times F$

$$\left[(x,y) \in \complement_{E\times F}^{A\times D}\right] \iff \left[\neg\left((x,y)\in A\times D\right)\right]$$

$$\iff \left[\neg\left(x\in A \text{ et } y\in D\right)\right]$$

$$\iff \left[\neg(x\in A) \text{ ou } \neg(y\in D)\right]$$

$$\iff \left[x\notin A \text{ ou } y\notin D\right]$$

$$\iff \left[x\in \complement_E^A \text{ ou } y\in \complement_F^D\right]$$

$$\iff \left[\left(x\in \complement_E^A \text{ et } y\in F\right) \text{ ou } \left(y\in \complement_F^D \text{ et } x\in E\right)\right]$$

$$\iff \left[(x,y)\in \complement_E^A\times F \text{ ou } (x,y)\in E\times \complement_F^D\right]$$

$$\iff \left[(x,y)\in \left(\left(\complement_E^A\times F\right)\cup\left(E\times \complement_F^D\right)\right)\right]$$

Donc $\complement_{E\times F}^{A\times D} = \left(\complement_E^A\times F\right)\cup\left(E\times \complement_F^D\right)$

$$= \left(\complement_E^A\times\left(D\cup \complement_F^D\right)\right)\cup\left(\left(A\cup \complement_E^A\right)\times \complement_F^D\right)$$

1) b) 1) a)

$$= \left(\complement_E^A\times D\right)\cup\left(\complement_E^A\times \complement_F^D\right)\cup\left(A\times \complement_F^D\right)\cup\left(\complement_E^A\times \complement_F^D\right)$$

FIN