DEVOIR SURVEILLE n^{0}1

Durée de l'épreuve : 1h30

Exercice 1

On considére l'équation du second degré à coefficients complexes :

$$z^2 + (1 + i\sqrt{3})z - 1 + i\sqrt{3} = 0. \qquad (*)$$

1. Calculer les racines carrées de $\Delta = 2 - 2i\sqrt{3}$.
2. En utilisant la question précédente, résoudre l'équation $(*)$.

Exercice 2

Soient les nombres complexes $z_1 = 4 + 4i$ et $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$.

1. Exprimer le nombre complexe $\dfrac{z_1}{z_2}$ sous forme exponentielle.
2. Exprimer le nombre complexe $z_1^2 z_2$ sous forme exponentielle.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x - 1}$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ et préciser si la courbe $\mathcal{C}_f$ de f admet des asymptotes horizontales ou verticales.
3. Déterminer le domaine $\mathcal{D}_{f'}$ sur lequel f est dérivable et calculer sa dérivée f'.
4. (a) Déterminer tous les $x \in \mathcal{D}_{f'}$ tels que $f'(x) = 0$.
   (b) Déterminer tous les $x \in \mathcal{D}_{f'}$ tels que $f'(x) > 0$.
   (c) Déterminer tous les $x \in \mathcal{D}_{f'}$ tels que $f'(x) < 0$.
5. Établir le tableau de variations de f.
6. (a) Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$.
   (b) Déterminer $b \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax = b$.
   On admettra que les limites trouvées en a) et b) sont identiques en $-\infty$.
   (c) On déduit de (a) et (b) que $\mathcal{C}_f$ a une asymptote oblique en $\pm\infty$.
   Préciser l'équation de cette asymptote oblique.
   (d) Déterminer la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à son asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.
7. Donner l'allure de $\mathcal{C}_f$ avec les asymptotes trouvées.