Ex 10 :

1.) **f est injective** : En effet,

Soient $x, x' \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

(H) Supposons que $f(x) = f(x')$

(D) Alors $\dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{x'-1}{x'+1}$; donc $(x-1)(x'+1) = (x'-1)(x+1)$ (Produit en croix)

c'est à dire : $\cancel{xx'} + x - x' - \cancel{1} = \cancel{x'x} + x' - x - \cancel{1}$

Donc $2x = 2x'$

(C) Donc $x = x'$

2.) Non.

En effet, $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$$f(x) - 1 = \frac{x-1}{x+1} - 1 = \frac{\cancel{x} - 1 - (\cancel{x}+1)}{x+1} = \frac{-2}{x+1} \neq 0 \text{ ; donc } f(x) \neq 1$$

Supposons $\exists x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $f(x)=1$
Alors $\dfrac{x-1}{x+1} = 1$, donc $\cancel{x} - 1 = \cancel{x} + 1$
Donc $-1 = 1$. Absurde. Donc $\nexists x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$
tq $f(x) = 1$

3.) **f n'est pas surjective** car 1 n'a pas d'antécédent (d'après 2.)

4.) **Oui** : Posons $f_1 : \mathbb{R}\setminus\{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{1\}$ (on a choisi $F = \mathbb{R}\setminus\{1\}$)

$$x \longmapsto f_1(x) = \frac{x-1}{x+1}.$$

Montrons que f_1 est surjective.

Mq f_1 est surjective : Il faut mq que si $y \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ alors on peut trouver $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ antécédent de y.
Soit $y = ?$: $f_1(x) = y \iff \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{y}{1}$
$\iff 1 \times (x-1) = (x+1)y$
$\iff x(1-y) = y+1 \iff x = \dfrac{y+1}{1-y}$

Soit $y \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$. Posons $x = \dfrac{1+y}{1-y}$

Alors
- x existe car $y \neq 1$
- $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ car $x - (-1) = \dfrac{1+y}{1-y} + 1 = \dfrac{1 + \cancel{y} + 1 - \cancel{y}}{1-y} = \dfrac{2}{1-y} \neq 0$
- $f_1(x) = \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{\frac{1+y}{1-y} - 1}{\frac{1+y}{1-y} + 1} = \dfrac{\frac{\cancel{1} + y - (\cancel{1} - y)}{\cancel{1-y}}}{\frac{1 + \cancel{y} + (1 - \cancel{y})}{\cancel{1-y}}} = \dfrac{2y}{2} = y$

Donc x est un antécédent de y. $\left(\operatorname{Im} f_1 = \mathbb{R}\setminus\{1\}\right)$

Exercice 13 :

1.) • Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors : $f\left(\frac{1}{n}\right) = \dfrac{2 \times \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \dfrac{\frac{2}{n}}{\frac{n^2+1}{n^2}} = \dfrac{2}{\cancel{n}} \times \dfrac{n^{\cancel{2}}}{n^2+1}$

$$= \frac{2n}{n^2+1} = f(n)$$

Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(n) = f\left(\frac{1}{n}\right)}$

• $\underbrace{f(2) = f\left(\frac{1}{2}\right)}_{\text{Formule précédente avec } n=2}$ et $2 \neq \frac{1}{2}$; donc $\boxed{\text{f n'est pas injective}}$.

2°) Etudions f : • $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ (car : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2+1 \neq 0$, puisque $x^2+1 \geqslant 1$)

• f est impaire car : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$-x \in \mathbb{R} \text{ et } f(-x) = \frac{2(-x)}{1+(-x)^2} = -\frac{2x}{1+x^2} = -f(x)$$

• f est continue et dérivable sur $\mathcal{D}_f$ car f est le quotient de 2 fonctions polynômes (qui sont elles même continues et dérivables sur leur ensemble de définition)

• $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}\left(\frac{1}{x^2}+1\right)} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{\underbrace{x}_{+\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}_{1}} \right) = 0$$

Comme f est impaire : $\lim\limits_{-\infty} f = 0$

• $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2 \times \frac{(1+x^2) - x \times 2x}{(1+x^2)^2} = 2 \times \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

• Pour $x \in \mathbb{R}$, signe $(f'(x))$ = signe $(1-x^2)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

(Règle du signe d'un trinôme du 2nd degré)

• Tableau des variations de f :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$			0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

$f(1) = \frac{2}{1+1^2} = 1$

$f(-1) = -f(1) = -1$

$f(0) = \frac{0}{1+0^2} = 0$

Le Tableau des variations de f "montre" que : $\boxed{\operatorname{Im} f = [-1, 1]}$

On en déduit que $\boxed{f \text{ n'est pas surjective}}$ car $\operatorname{Im} f \neq \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{Ensemble d'arrivée de } f}$

3°) Soit $g : [-1,1] \longrightarrow [-1,1]$
$x \longmapsto g(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

(Remarquons que g est une application bien définie car $\forall x \in [-1,1]$, $\frac{2x}{1+x^2} \in [-1,1]$ d'après le tableau des variations de f)

Le tableau des variations de g est donné par :

x	-1		0		1
$g(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

(c'est la restriction du Tableau des variations de f à $[-1,1]$)

On a $\operatorname{Im} g = g([-1,1]) = [-1,1]$ (Tableau de variation de g)

Donc g est surjective.

Mq g est injective : ($g'(x) > 0$ pour $x \in]-1,1[$)

g est strictement croissante sur $[-1,1]$

Soient $x, x' \in [-1,1]$

(H) Supposons que $g(x) = g(x')$

(D) . Peut-on avoir $x > x'$? Non : sinon si $x > x'$, on aurait $g(x) > g(x')$ (car g strict ↗). Absurde (contradiction avec $g(x) = g(x')$)

. Peut-on avoir $x < x'$? Non (sinon .... $g(x) < g(x')$. Absurde)

(C) Donc $x = x'$

Donc g est bijective

2ème méthode pour mq g est bijection (Voir Cours)

g est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $I = [-1,1]$; donc

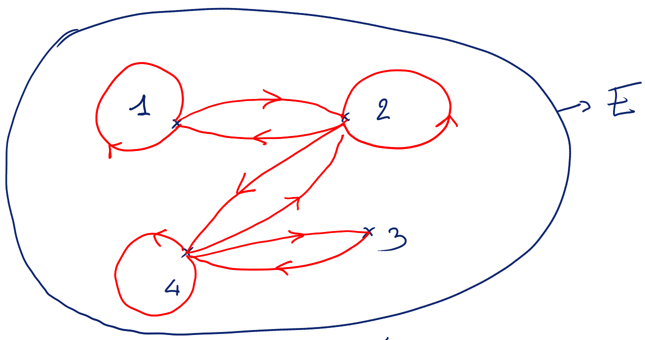
g est une bijection de l'intervalle $I = [-1,1]$ sur l'intervalle $g(I) = [-1,1]$

A chercher : Ex 11 : Yeon, Hugo } JD N°4
Ex 14 : Quentin J., Corentin N.

TD N°5

Ex 1 :

1°)



2) $\mathcal{R}$ n'est pas reflexive : car $3 \not\mathcal{R}\, 3$

$\mathcal{R}$ est symétrique :

On a $1\mathcal{R}1$: on vérifie qu'on a bien aussi $1\mathcal{R}1$

$1\mathcal{R}2$: " " " " $2\mathcal{R}1$

$2\mathcal{R}1$: " " " " $1\mathcal{R}2$

$2\mathcal{R}2$: " " " " $2\mathcal{R}2$

$2\mathcal{R}4$: " " " " $4\mathcal{R}2$

$3\mathcal{R}4$: " " " " $4\mathcal{R}3$

$4\mathcal{R}2$: " " " " $2\mathcal{R}4$

$4\mathcal{R}3$: " " " " $3\mathcal{R}4$

$4\mathcal{R}4$: " " " " $4\mathcal{R}4$

$\mathcal{R}$ n'est pas transitive car $1\mathcal{R}2$ et $2\mathcal{R}4$, mais $1 \not\mathcal{R}\, 4$

Rq :

- $\mathcal{R}$ n'est pas reflexive : $\exists x \in E,\ x \not\mathcal{R}\, x$
- $\mathcal{R}$ n'est pas symétrique : $\exists\, x, y \in E$ tq $x\mathcal{R}y$ et $y \not\mathcal{R}\, x$
- $\mathcal{R}$ n'est pas Transitive : $\exists\, x, y, z \in E$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ et $x \not\mathcal{R}\, z$

FIN