

## Лекция 2

### 2.1. Построение комбинационных схем на электронных элементах

С момента появления полупроводниковых приборов и развития технологии микроэлектроники для реализации цифровых устройств широко используются интегральные электронные элементы. Существует большое количество серий (наборов) интегральных микросхем. Каждая серия содержит широкую номенклатуру различных электронных логических элементов, с помощью которых строятся различные цифровые схемы. На рис. 2.1 представлены обозначения логических элементов на схемах, выполненные в соответствии с ЕСКД (рядом с каждым элементом тонкими линиями приведены обозначения тех же элементов в стандарте, принятом в некоторых странах, в частности США).

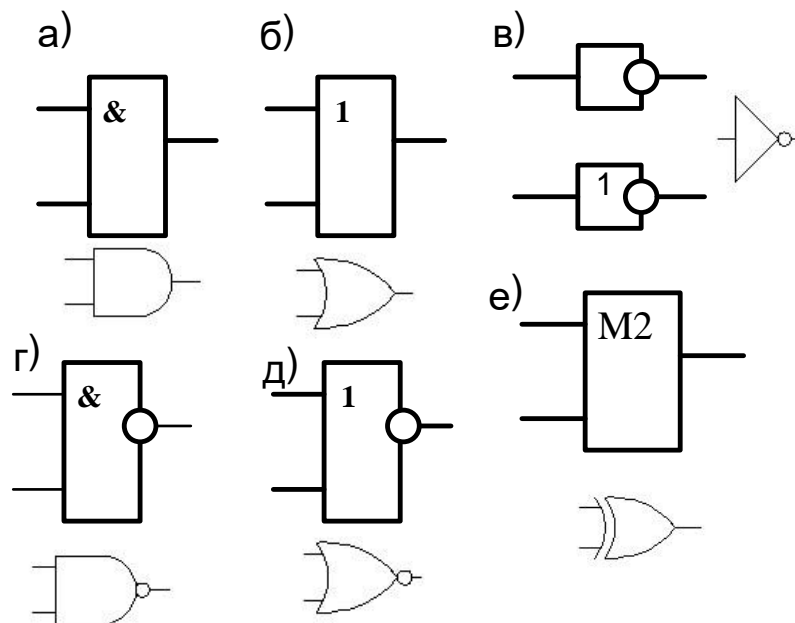


Рис. 2.1. Обозначения электронных логических элементов:  
а – элемент И; б – элемент ИЛИ; в – элемент Не; г – элемент И-Не;  
д – элемент ИЛИ-Не; е – элемент “исключающее ИЛИ”

В обозначении элементов ставятся значки, показывающие выполняемые ими функции: И – «&», ИЛИ – «1», для элемента ИЛИ допускается обозначение «≥1», сумма по модулю 2 – «М2». Элемент Не можно изображать двумя способами. Инверсный выход элементов Не, И-Не и ИЛИ-Не обозначается кружком. При создании схем цифрового устройства у

любого логического элемента, кроме Не, добавляется столько входов сколько требуется для реализации логической операции, т.е. 2, 3, 4 и т.д. С помощью этих логических элементов реализуются любые БФ.

В отличие от формул булевых выражений схемы имеют на входах и выходах электрические сигналы, соответствующие булевым переменным. На рис.2.2 приведены диаграммы (осциллограммы) зависимости выходных сигналов элемента И и элемента ИЛИ в зависимости от входных сигналов.

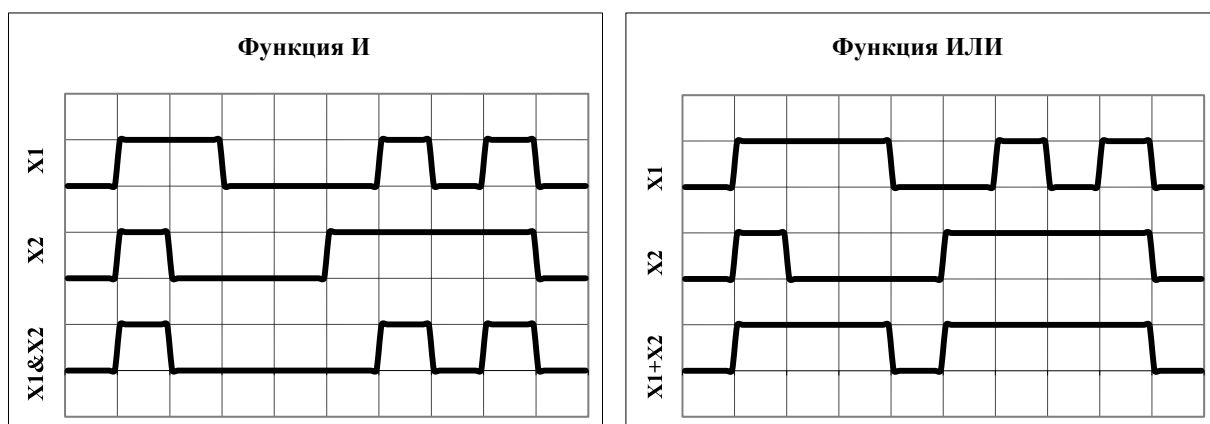


Рис. 2.2. Зависимости выходного сигнала от входных:  
а – для элемента И; б – для элемента ИЛИ

Рассмотрим пример реализации простейших функций. Пусть необходимо реализовать БФ, заданные формулами:

$$F = a\bar{b}c \quad Q = \bar{a} + b + \bar{c}.$$

Функция F представляет из себя конъюнкцию, т. е.  $F=1$  только на одном единственном наборе 101 ( $1 * \bar{0} * 1 = 1 * 1 * 1 = 1$ ), а на всех остальных наборах она равна 0. Чтобы получить логическое произведение переменных, необходимо использовать элемент И, имеющий три входа. На два входа подаются прямые значения сигналов «а» и «b», а на третий вход сигнал «с» следует проинвертировать (рис. 2.3, а). Для этого в схему включается инвертор, реализующий функцию Не.

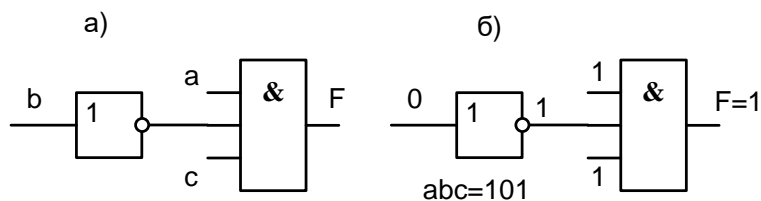


Рис. 2.2. Реализация функции F

а – схема; б – сигналы на элементе И при входе равном  $abc=101$

На рис. 2.3 (б) показано значение входных и выходного сигнала в том случае, если переменные примут значения 110. Любая другая комбинация сигналов на входах приведет к тому, что один из сомножителей обратится в 0, а значит и произведение станет равным нулю.

Функция Q задана в виде дизъюнкции. Она реализуется на элементе ИЛИ с тремя входами (рис. 2.4, а). Функция принимает значение  $Q=0$  только на одном наборе, а именно  $a=1, b=0, c=1$ , т. к. только в этом случае выполняется условие  $Q = \bar{1} + 0 + \bar{1} = 0 + 0 + 0 = 0$ . При любой другой комбинации сигналов на входе одно из слагаемых становится равным 1, и вся логическая сумма становится равной 1 (рис. 2.4, б).

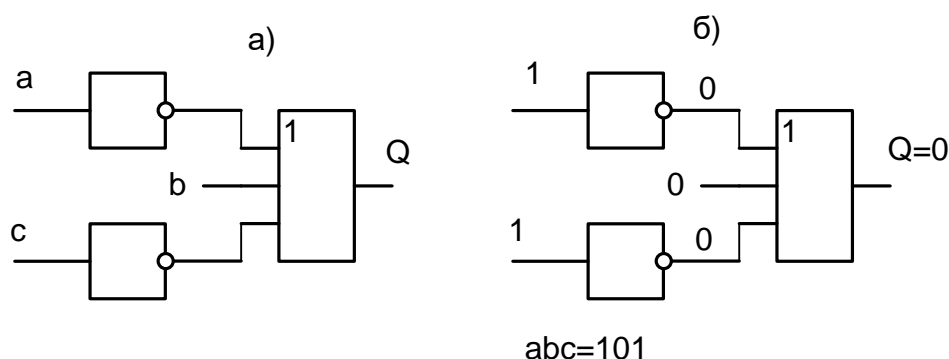


Рис. 2.4. Реализация функции Q:  
а – схема; б – сигналы на элементе ИЛИ при входе равном  $abc=101$

## 2.2 Примеры реализации комбинационных схем

В табл. 2.1 заданы БФ  $f_1$  и  $f_2$ . Реализуем на логических элементах  $f_1$  в форме СДНФ (рис. 2.5),  $f_2$  в форме СКНФ (рис. 2.6):

Таблица 2.1

Таблица истинности функций  $f_1$  и  $f_2$

	$x_1x_2x_3$	$f_1$	$f_2$
0	0 0 0	1	1
1	0 0 1	0	1
2	0 1 0	0	0
3	0 1 1	1	0
4	1 0 0	1	1
5	1 0 1	0	1
6	1 1 0	1	0
7	1 1 1	0	0

$$f_1 = \overline{X_1} \overline{X_2} \overline{X_3} + \overline{X_1} X_2 X_3 + X_1 \overline{X_2} \overline{X_3} + X_1 X_2 \overline{X_3} \quad (L = 12)$$

$$f_2 = (X_1 + \overline{X_2} + X_3)(X_1 + \overline{X_2} + \overline{X_3})(\overline{X_1} + \overline{X_2} + X_3)(\overline{X_1} + \overline{X_2} + \overline{X_3}) \quad (L = 12)$$

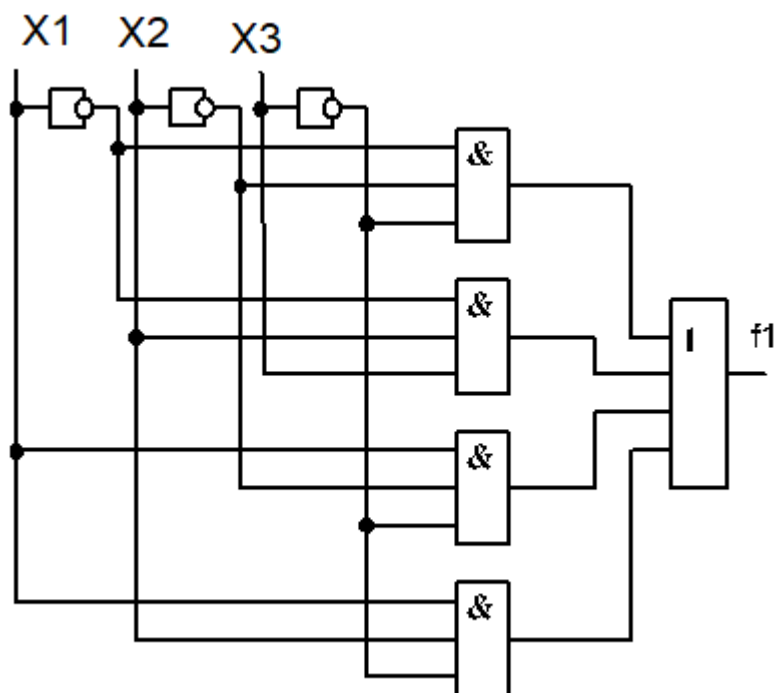


Рис. 2.5. Реализация функции f1 в формате СДНФ

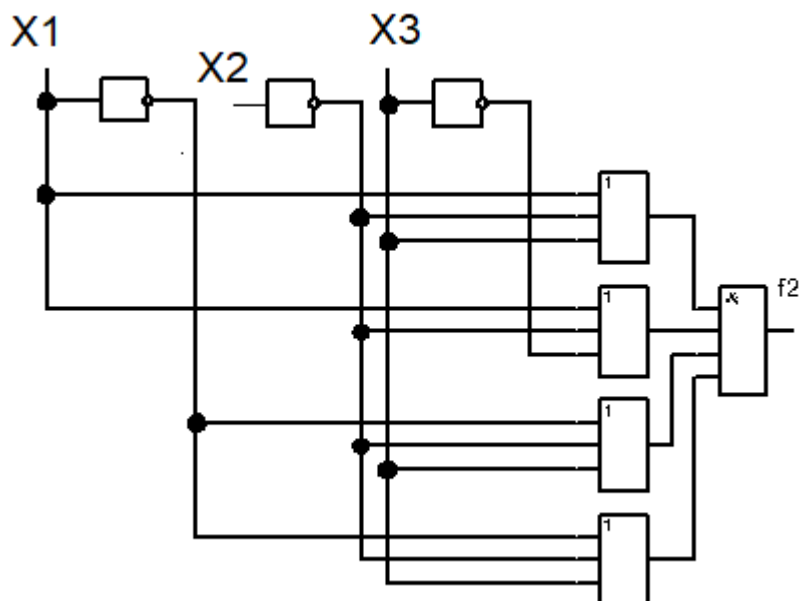


Рис. 2.6. Реализация функций f2 в формате СКНФ

Важной характеристикой электронной схемы является количество оборудования, необходимое для реализации БФ. Введем понятие цены схемы. Под ценой схемы  $C$  будем понимать количество оборудования,

т. е. количество логических элементов, входящих в данную схему. Цена схемы определяется как сумма цен всех элементов, причем **цена** одного элемента – это **количество** его **входов**. Такая оценка, конечно, является условной. *При подсчете цены схемы не учитываются элементы Не, обеспечивающие инвертирование переменных.* Цены для схем (рис. 2.5, 2.6) равняются  $C_1=16$ ,  $C_2=16$  соответственно.

Если к  $f_1$  применить операцию склеивания, то в результате получится БФ с меньшей длиной.

$$f_1 = \overline{X_1}X_2X_3 + \overline{X_2}\overline{X_3} + X_1\overline{X_3} \quad L = 7$$

Схема реализующая  $f_1$  после минимизации представлена на рис. 2.7. Цена этой схемы  $C=10$ .

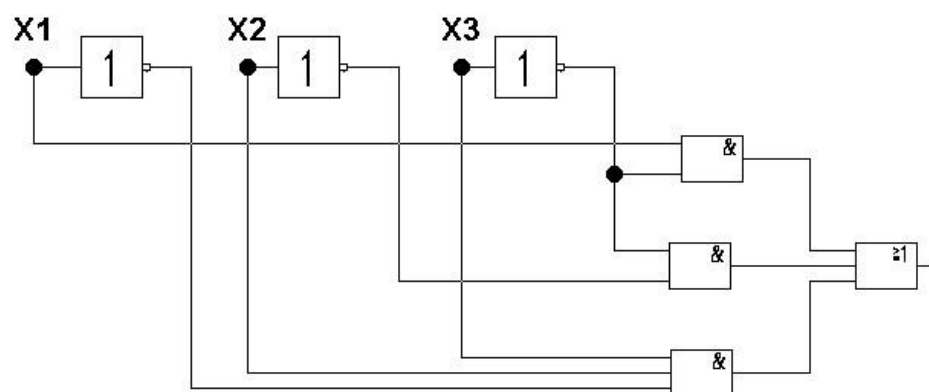


Рис.2.7. Реализация функций  $f_1$  после минимизации

Отсюда следует вывод, что чем короче формула БФ, тем экономичнее будет схема, реализующая БФ, с точки зрения количества электронных компонентов. Т.е. сначала БФ необходимо минимизировать и только потом строить схему.

## 2.3 Минимизация булевых функций с помощью карт Карно-Вейча

Минимизация БФ с использованием закона склеивания часто представляет из себя довольно громоздкую процедуру, особенно при увеличении числа аргументов. Это связано с тем, что приходится искать различные комбинации для склеивания, выбирая из них наиболее короткий. Поэтому были разработаны другие методы минимизации. Они, как правило, также громоздки, хотя и дают отличные результаты. Практически все они хорошо алгоритмируются и реализуются в виде компьютерных программ. Рассмотрим более простой метод минимизации, который можно условно назвать графическим. Этот метод был предложен независимо друг от друга Карно и Вейчем и называется по их именам. В нем

все наборы переменных БФ располагаются в таблицах, называемых картами Карно и картами Вейча. Их удобно использовать для минимизации БФ от 2, 3, 4 и реже от 5 и 6 переменных.

Карты Карно-Вейча для БФ от  $n$  переменных представляют собой таблицы ( $n$ -мерное пространство, развернутое на плоскости), содержащие  $2^n$  клеток, каждая из которых соответствует одному единственному набору аргументов БФ. Карты Карно отличаются от карт Вейча только разметкой, т. е. тем, как идентифицируется каждая клетка карты.

Разметка карты Вейча для БФ от двух аргументов (рис. 2.8, а) осуществляется булевыми переменными, отмечающими столбцы и строки карты.

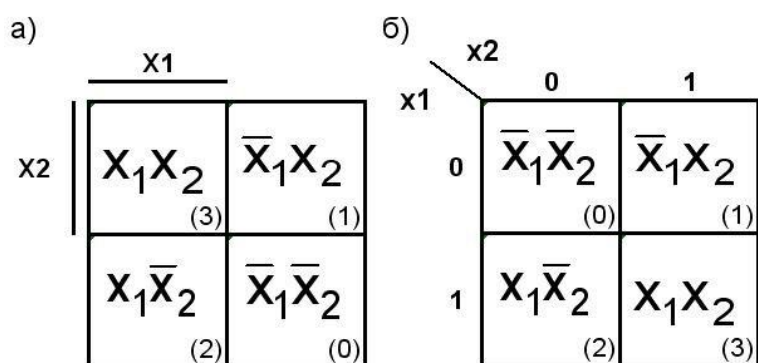


Рис. 2.8. Карты от двух переменных:  
а – Вейча; б – Карно

Так, переменная  $x_1$  покрывает обе клетки левого столбца, а переменная  $\bar{x}_1$  (ее не принято показывать на карте, чтобы не загромождать ее) покрывает обе клетки правого столбца. Переменная  $x_2$  покрывает две клетки верхней строки таблицы, а переменная  $\bar{x}_2$  покрывает две клетки нижней строки таблицы. Таким образом, каждая клетка карты имеет имя, составленное из набора переменных, покрывающих эту клетку. На карте Вейча (рис. 2.8, а) и карте Карно (рис. 2.8 б) показаны имена каждой клетки, а в скобках приведены номера двоичных кодов, соответствующих наборам аргументов, покрывающих эту клетку.

Отличие карт Карно в том, что на ней переменная, отмечающая строку или столбец карты, обозначается 0, если она принимает инверсное значение  $\bar{x}_1$  или 1, если переменная принимает прямое значение  $x_1$ .

Если рассмотреть любые две соседние клетки карт, то очевидно, что конъюнкции, записанные в них, являются соседними (не только физически, но и логически) и к ним возможно применение операции склеивания. На картах операция склеивания проводится геометрически – склеиваемые клетки карты обводятся контуром.

Нанесение БФ на карту заключается в расстановке значений БФ в соответствующие клетки карты. Если БФ задана ДНФ, то в соответствующие клетки карты заносятся 1, а если КНФ, то 0.

Пусть заданы две БФ  $Z1 = \Sigma(0,1,2)$  и  $Z2 = P(0,1,3)$ . Результат нанесения на карту Вейча ( $Z1$ ) и карту Карно ( $Z2$ ) представлен на рис. 2.8.

а)		б)	
		$x_2$	
$x_1$	0	1	
	1	1	

		$x_2$	
$x_1$	0	1	
	0	0	
1	1	0	

Рис. 2.8. Функции  $Z1$  и  $Z2$ , нанесенные на карты:

*а – Вейча; б – Карно*

Минимизация с помощью карт Карно-Вейча осуществляется в соответствии со следующим алгоритмом:

1. соседние клетки карты, отмеченные 1 для СДНФ или 0 для СКНФ, покрываются контурами, имеющими форму квадрата или прямоугольника;
2. контур может покрывать  $2^k$  клеток, где  $k=0, 1, 2 \dots n$  ( $n$  – количество переменных, от которых зависит БФ), т.е. 1, 2, 4, 8 и т.д. клеток;
3. **все клетки**, отмеченные 1 для СДНФ или 0 для СКНФ, должны быть покрыты контурами;
4. одна и та же клетка карты может входить в несколько контуров;
5. количество контуров должно быть минимально, а их размер максимальным;
6. каждому контуру присваивается свое имя;

БФ записывается как логическая сумма (СДНФ) или логическое произведение (СКНФ) имен контуров.

Имена контуров для ДНФ составляются по следующему алгоритму:

1. все переменные для данного контура просматриваются поочередно;
2. если для всех клеток контура переменная принимает прямое значение, то в имени контура на ее месте записывается 1;
3. если для всех клеток контура переменная принимает инверсное значение, то в имени контура на ее месте записывается 0;
4. если для одних клеток контура переменная принимает прямое значение (1 или  $x$ ), а для других инверсное (0 или  $\bar{x}$ ), то переменная является независимой, и в имени контура на ее месте записывается крест  $X$ ;

5. конъюнкция, соответствующая имени контура, записывается как произведение переменных, причем, если в имени контура на месте переменной стоит 1, то переменная записывается в прямом виде, а если на месте переменной стоит 0, то в конъюнкции на ее месте записывается инверсное значение переменной.

На рис. 2.9 показаны обозначения имен клеток и всех возможных контуров покрытия. Так имена контуров записываются не зависимо от формы задания булевой функции, т.е. и для СДНФ и для СКНФ имена контуров одинаковы.

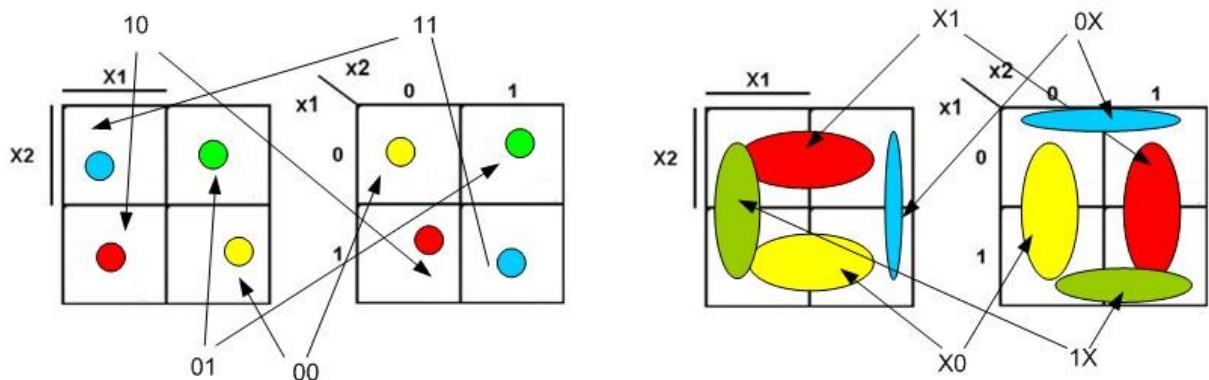


Рис. 2.9 Имена каждой клетки и двухклеточных контуров

Переменная, отмеченная как X, из записи конъюнкции исключается. Для КНФ алгоритм получения имен контуров, следующий:

1. все переменные для данного контура просматриваются поочередно;
2. если для всех клеток контура переменная принимает прямое значение, то в имени контура на ее месте записывается 1;
3. если для всех клеток контура переменная принимает инверсное значение, то в имени контура на ее месте записывается 0;
4. если для одних клеток контура переменная принимает прямое значение, а для других инверсное, то переменная является независимой и в имени контура на ее месте записывается крест X.
5. дизъюнкция, соответствующая имени контура, записывается как сумма переменных, причем, если в имени контура на месте переменной стоит 1, то переменная записывается в инверсном виде, а если на месте переменной стоит 0, то на ее месте записывается прямое значение переменной. Переменная, отмеченная как X, из записи дизъюнкции исключается.

Например

- для БФ, заданной в СДНФ имена контуров в формуле функции, запишутся следующим образом:



$$1X1X = ac, \quad 1001 = a\bar{b}\bar{c}d, \quad 10X0 = a\bar{b}\bar{d}, \quad X01 = \bar{b}c, \quad 101 = a\bar{b}c$$

- для БФ, заданной в СКНФ имена контуров в формуле функции, запишутся следующим образом:

$$1X1X = \bar{a} + \bar{c}, \quad 1001 = \bar{a} + b + c + \bar{d}, \quad 10X0 = \bar{a} + b + d, \\ X01 = b + \bar{c}, \quad 101 = \bar{a} + b + \bar{c}$$

Применение алгоритма построения контуров показано на рис. 2.10.

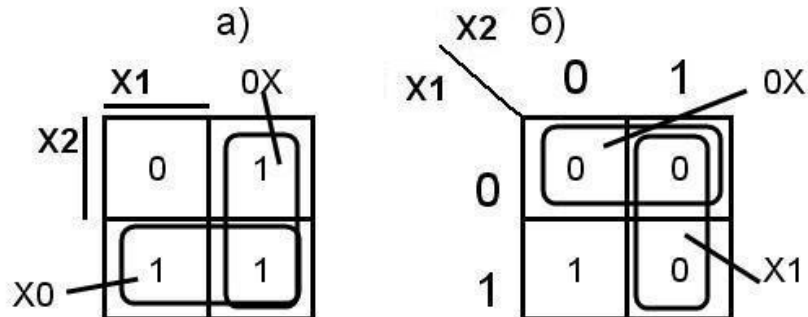


Рис. 2.10 Покрытие контурами функций:  
а – Z1; б – Z2

Функции Z1 и Z2 после минимизации имеют вид:

$$Z_1 = \bar{X}_1 \bar{X}_2 \quad Z_2 = X_1 \bar{X}_2$$

Карты для БФ трех аргументов имеют по восемь клеток ( $2^3$ ). Они имеют вид, показанный на рис. 2.11. Внутри каждой клетки показаны наборы переменных, покрывающих эту клетку, и десятичные коды, соответствующие числовому эквиваленту набора аргументов.

Особенностью этих карт является то, что их можно сворачивать, как цилиндр, по широкой стороне (4 и более клеток). Это основано на том, что, клетки левого и правого столбцов карт отмечены соседними конъюнкциями (рис. 2.11 а,б).

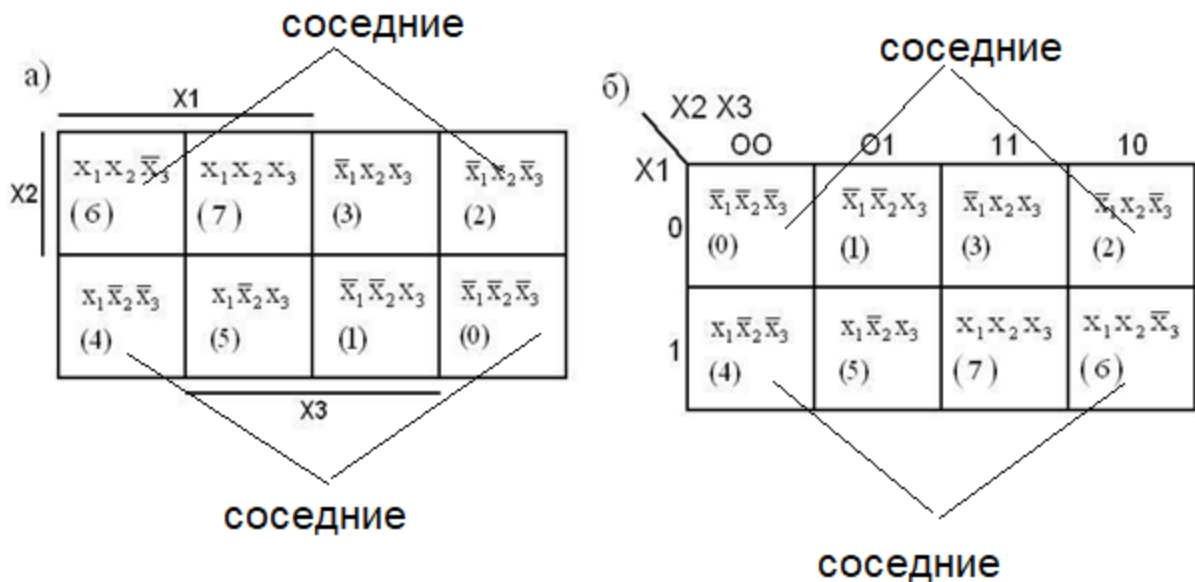


Рис. 2.11 Карты для трех переменных:  
а – Вейча; б – Карно

Рассмотрим пример двух функций от трех переменных:

$$Y_1 = \Sigma(0, 2, 6, 7) \quad \text{и} \quad Y_2 = P(0, 2, 3, 6, 7).$$

Первая задана ДНФ и нанесена на карту Карно, а вторая КНФ и нанесена на карту Вейча (рис. 2.12).

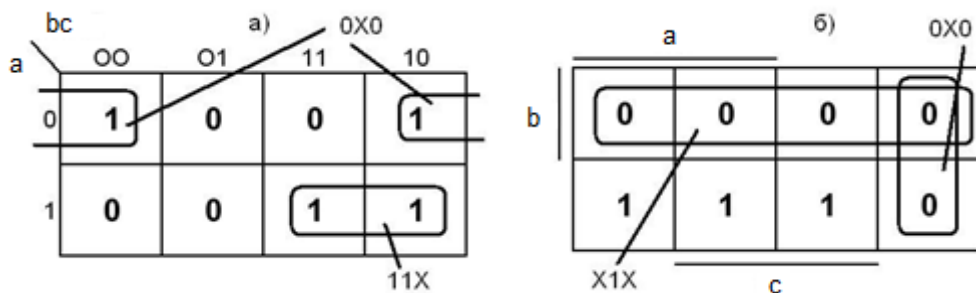


Рис. 2.12 Минимизация БФ:  
а –  $Y_1$ ; б –  $Y_2$

БФ  $Y_1$  покрывается двумя контурами по две клетки в каждом,  $Y_2$  двумя контурами из четырех и двух клеток. Если записать эти БФ в СДНФ и СКНФ соответственно, то получатся следующие формулы:

$$Y_1 = \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}b\bar{c} + ab\bar{c} + abc,$$

$$Y_2 = (a + b + c)(a + \bar{b} + c)(a + \bar{b} + \bar{c})(\bar{a} + \bar{b} + c)(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})$$

После минимизации формулы этих БФ принимают вид:

$$Y_1 = \bar{a}\bar{c} + ab, \quad Y_2 = \bar{b}(a + c).$$

Карты для БФ от четырех аргументов содержат  $2^4=16$  клеток. Карта Вейча изображена на рис. 2.13 а, карта Карно на рис. 2.13 б. Имена клеток карт нанесены в виде десятичных чисел, соответствующих наборам переменных.

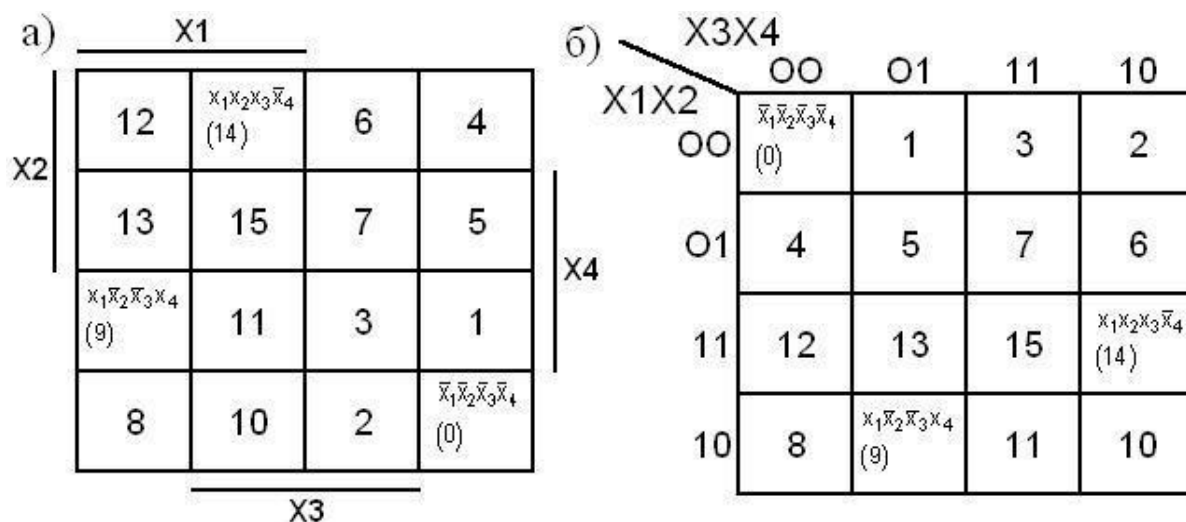


Рис. 2.13 Карты для четырех переменных:  
а – Вейча; б – Карно

Карты от четырех переменных можно сворачивать как по вертикали, так и по горизонтали. Причем, это можно делать одновременно (*это фигура из четырехмерного пространства, развернутая в двумерном плоскости*), поэтому четыре угловые клетки карт образуют один контур из четырех клеток. Минимизируем булевы функции  $S_1=\Sigma(0,2,4,5,6,7,8,9,10)$  с помощью карты Карно и  $S_2=P(0,1,3,4,5,7,8,9,10,12,13)$  с помощью карты Вейча (рис. 2.14). После минимизации булевы функции будут иметь вид

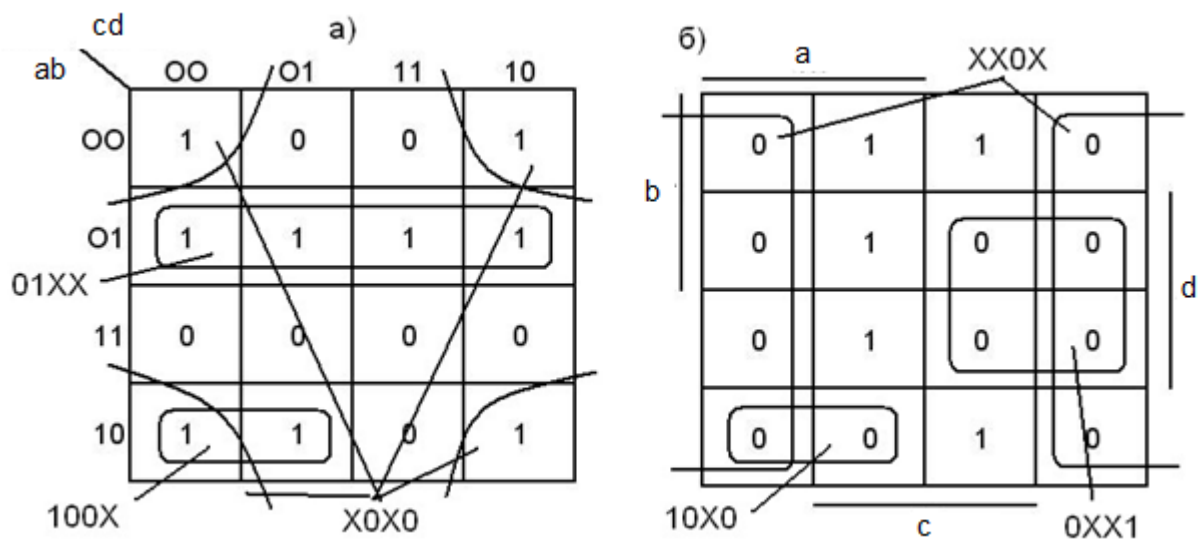


Рис. 2.14. Минимизация БФ:

a –  $S_1$ ; б –  $S_2$

$$S_1 = \bar{a}b + a\bar{b}\bar{c} + \bar{b}\bar{d}, \quad S_2 = c(\bar{a} + b + d)(a + \bar{d})$$

На рис. 2.15 приведена карта Карно для пяти переменных.

		X3X4X5							
		000	001	011	010	110	111	101	100
X1X2	00	0	1	3	2	6	7	5	4
	01	8	9	11	10	14	15	13	12
	11	24	25	27	26	30	31	29	28
	10	16	17	19	18	22	23	21	20

Рис. 2.15 Разметка карты Карно для БФ от пяти аргументов

Сложность применения карт Карно и Вейча от пяти переменных заключается в том, что соседними являются столбцы, расположенные не только рядом, но и на расстоянии друг от друга. На рис. 2.15, например, это столбцы, отмеченные переменными  $x_2x_3x_4$  – 001 и 101, 011 и 111. Для карт от шести переменных появляются такие же соседние строки. Поэтому карты Карно и Вейча чаще применяются для минимизации БФ от 2, 3, и 4 переменных. А булевы функции от пяти и более переменных минимизируются другими способами.

На рис 2.16, рис 2.17 приведены примеры БФ, нанесенных на карты Вейча и Карно, и показан результат их возможной минимизации:

1.  $P_1 = \Sigma(1, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 14, 15)$   $P_1 = a\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}d + \bar{a}b\bar{c}$
2.  $P_2 = P(1, 2, 8, 10, 13, 14, 15)$
3.  $P_2 = (\bar{a} + \bar{b} + \bar{d})(\bar{a} + \bar{c} + d)(\bar{a} + b + d)(b + \bar{c} + d)(a + b + c + d)$
4.  $P_3 = P(1, 3, 6, 7, 10, 11, 12, 14, 15)$

$$P_3 = (\bar{a} + \bar{c})(a + b + \bar{d})(\bar{b} + \bar{c})(\bar{a} + \bar{b} + d)$$

5.  $P_4 = \Sigma(0, 3, 5, 6, 9, 13, 14)$   $P_4 = a\bar{c}d + \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + b\bar{c}d + \bar{a}\bar{b}cd + bcd$

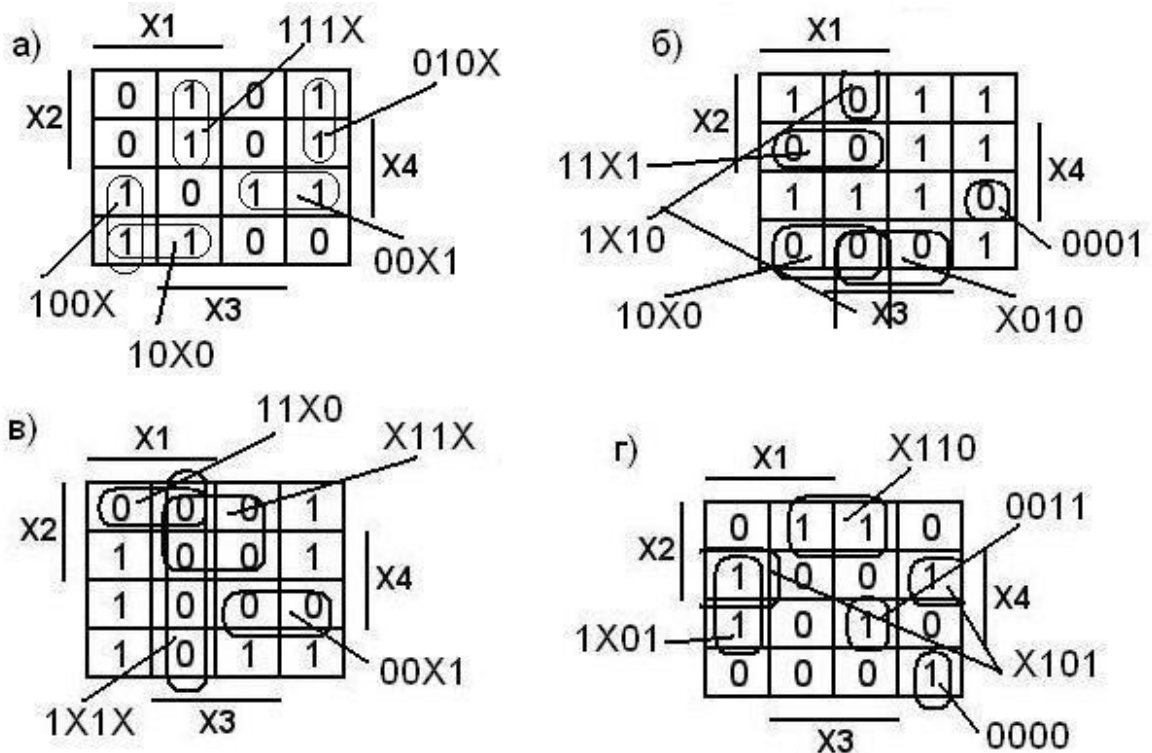


Рис. 2.16 Примеры минимизации булевых функций с помощью карт Вейча:  
а -  $P_1$ ; б -  $P_2$ ; в -  $P_3$ ; г -  $P_4$

1.  $F_1 = \Sigma(2, 8, 9, 13, 15)$   $F_1 = abd + a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c\bar{d}$
2.  $F_2 = \Sigma(0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14, 15)$   $F_2 = \bar{a}\bar{d} + b\bar{d} + c + \bar{a}b$
3.  $F_3 = P(1, 5, 6, 8, 9, 10, 14, 15)$   
 $F_3 = (\bar{a} + b + c)(\bar{a} + \bar{c} + d)(\bar{b} + \bar{c} + d)(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})(a + c + \bar{d})$
4.  $F_4 = \Sigma(0, 6, 7, 8, 10, 12, 13)$   $F_4 = \bar{b}\bar{c}\bar{d} + ab\bar{c} + a\bar{b}\bar{d} + \bar{a}bc$

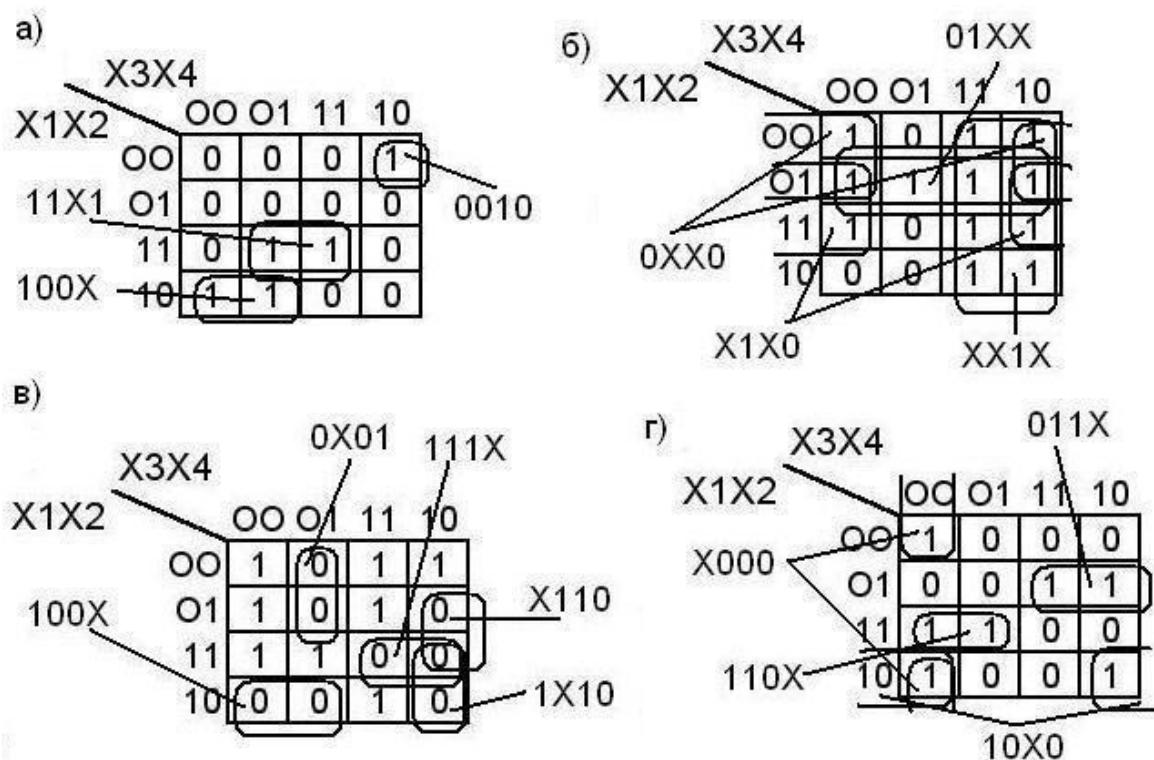


Рис. 2.17 Примеры минимизации булевых функций с помощью карт Карно а -  $F_1$ ; б -  $F_2$ ; в -  $F_3$ ; г -  $F_4$

## 2.4 Функционально полные системы БФ

Систему БФ  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  называют полной, если любая БФ может быть выражена суперпозицией функций  $f_1, f_2, \dots, f_n$ . Функции, полученные применением суперпозиции, отличаются от исходных функций, и их свойства отличаются от свойств исходных функций. Среди БФ есть такие, которые обладают основными свойствами. Доказано, что число функций в полной системе не превышает четырех.

Базисом называют полную систему функций алгебры логики, с помощью которых любую БФ можно представить как суперпозицию функций базиса. Минимальный базис состоит из такого набора функций, что исключение любой из них превращает этот набор в неполную систему функций. Известны и широко применяются несколько базисов, состоящих из элементарных функций.

Базис, который называют основным, включает три функции – И, ИЛИ, Не и соответственно реализуется тремя логическими элементами. Базис И, Не включает две функции – конъюнкцию (И) и отрицание (Не). Базис ИЛИ, Не включает две функции – дизъюнкцию (ИЛИ) и отрицание (Не). (Базисы  $u$ ,  $He$  и  $ИЛИ$ ,  $He$  практически не используются)

Базис И-Не включает в себя только одну функцию И-Не и один логический элемент. Его еще называют универсальным. БФ элемента этого базиса

$$f = \overline{ab}.$$

На основе этого элемента производятся различные цифровые устройства. Чтобы реализовать любую функцию в этом базисе, необходимо провести преобразования БФ в данный базис. Для этого используются теоремы Де Моргана. Например:

$$f_1 = x_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_1 x_2 = \overline{\overline{x_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_1 x_2}} = \overline{\overline{x_1 \bar{x}_2} \cdot \overline{\bar{x}_1 x_2}}.$$

Таким образом, в окончательной формуле присутствуют только операции И-Не. Схема, реализующая эту БФ, приведена на рис. 2.18.

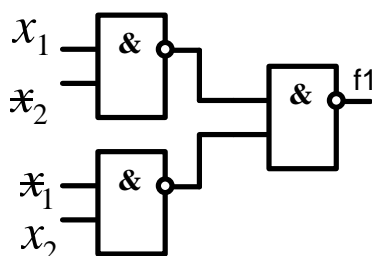


Рис. 2.18 Реализация БФ в базисе И-Не

Базис ИЛИ-Не включает в себя одну функцию ИЛИ-Не и только один логический элемент также называется универсальным. БФ элемента этого базиса

$$f = \overline{a + b}$$

Чтобы реализовать любую функцию в этом базисе, необходимо провести преобразования БФ:

$$f_2 = x_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_1 x_2 = \overline{\overline{x_1 \bar{x}_2} + \overline{\bar{x}_1 x_2}} = \overline{\bar{x}_1 + x_2 + x_1 + \bar{x}_2}.$$

Схема, реализующая эту БФ, приведена на рис. 2.19.

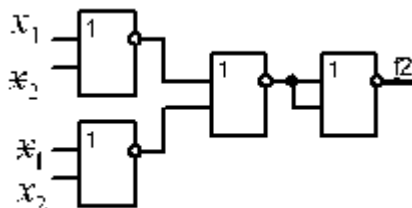


Рис. 2.19 Реализация БФ в базисе ИЛИ-Не

Рассмотрим особенности базисов И-Не и ИЛИ-Не. Элемент И-Не описывается функцией. Таблица истинности этой функции приведена в табл. 2.2.

Таблица 2.2

X1	X2	F
0	0	1
0	1	1
0	1	1
1	1	0

Если на оба входа элемента И-Не подать одну и ту же переменную (первая и четвертая строки таблицы), то в результате получается функция:

$$f = \overline{X_1 X_1} = \overline{X_1},$$

т. е. элемент И-Не становится инвертором (рис. 2.20а). При последовательном соединении двух элементов И-Не, как показано на рис. 2.20 (б), схема выполняет функцию И. Таким образом, базис И-Не содержит как бы три элемента – И-Не, И, Не.

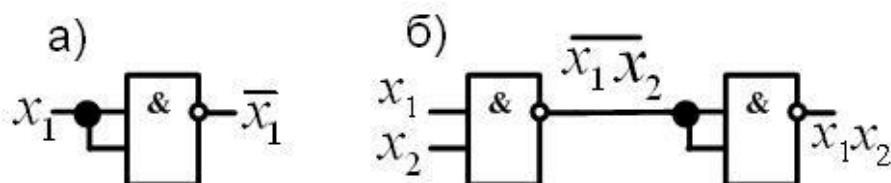


Рис. 2.20 Соединение элементов базиса И-Не:  
а – инвертор (Не); б – элемент И

Элемент ИЛИ-Не описывается функцией

$$f = \overline{X_1 + X_2}.$$

Таблица истинности этой функции приведена в табл. 2.2.



Таблица 2.3

X1	X2	F
0	0	1
0	1	0
0	1	0
1	1	0

Если на оба входа элемента ИЛИ-Не подать одну и ту же переменную, то получим функцию:  $f = \overline{X_1 + X_1} = \overline{X_1}$  т. е. элемент ИЛИ-Не становится инвертором (рис. 2.21 а). При последовательном соединении двух элементов ИЛИ-Не, как показано на рис. 2.21 б, элемент ИЛИ-Не преобразуется в элемент ИЛИ. Таким образом, базис ИЛИ-Не содержит как бы три элемента – ИЛИ-Не, ИЛИ, Не.

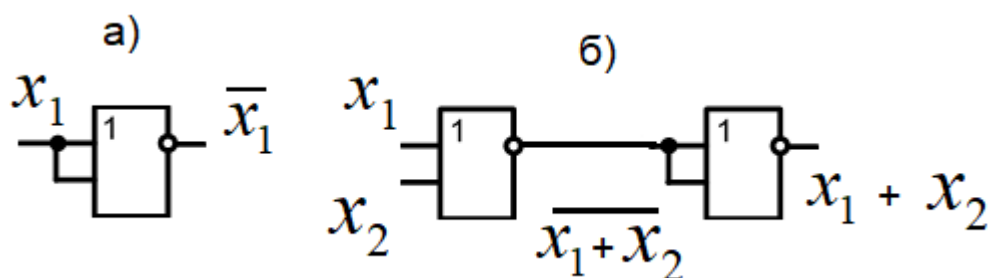


Рис. 2.21 Соединение элементов базиса ИЛИ-Не:

а – инвертор (Не); б – элемент ИЛИ

Рассмотрим примеры реализации функций в различных базисах.

1. Функция D (ДНФ) в базисе И-Не сначала минимизируется, затем переводится в базис а потом реализуется (рис. 2.22):

$$\begin{aligned}
 D &= \sum (1,3,4,5,6,7,8,14) = x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 x_4 + x_2 x_3 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 x_2 = \\
 &= \overline{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 x_4 + x_2 x_3 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 x_2} = \\
 &= \overline{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4} \cdot \overline{\bar{x}_1 x_4} \cdot \overline{x_2 x_3 \bar{x}_4} \cdot \overline{\bar{x}_1 x_2}.
 \end{aligned}$$

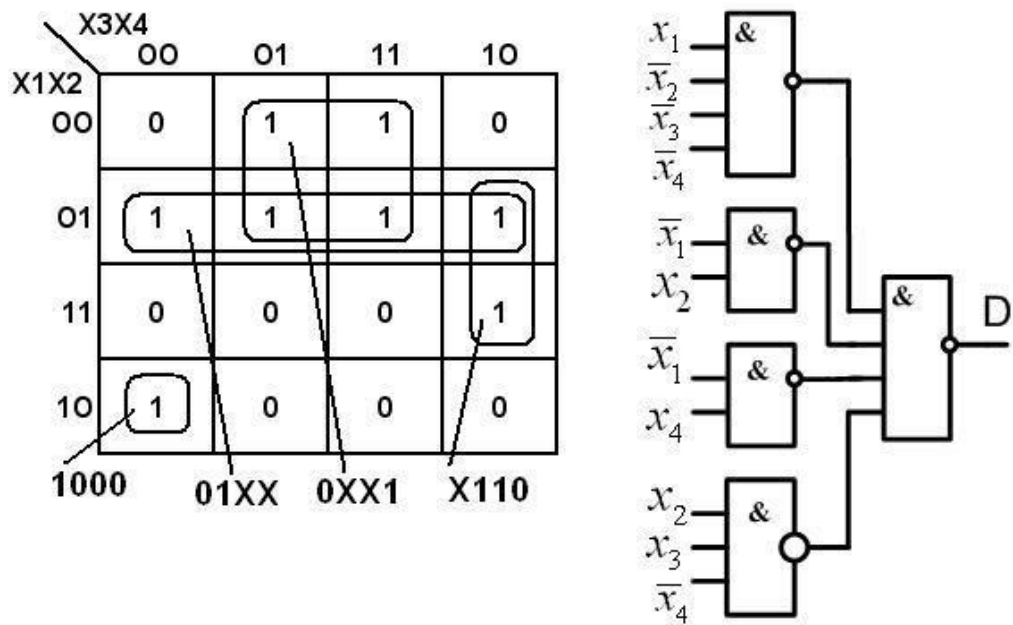


Рис. 2.22 Функция D:

а – карта Карно; б – схема в базисе И-Или 2.

Функция К (ДНФ) в базисе И-Не (рис. 2.23):

$$K = \sum (0,1,2,3,4,5,6,7,8,10,15) = \bar{x}_1 + x_2 x_3 x_4 + \bar{x}_2 \bar{x}_4 =$$

$$= \overline{\bar{x}_1 + x_2 x_3 x_4 + \bar{x}_2 \bar{x}_4} = x_1 \cdot \overline{x_2 x_3 x_4} \cdot \overline{\bar{x}_2 \bar{x}_4}.$$

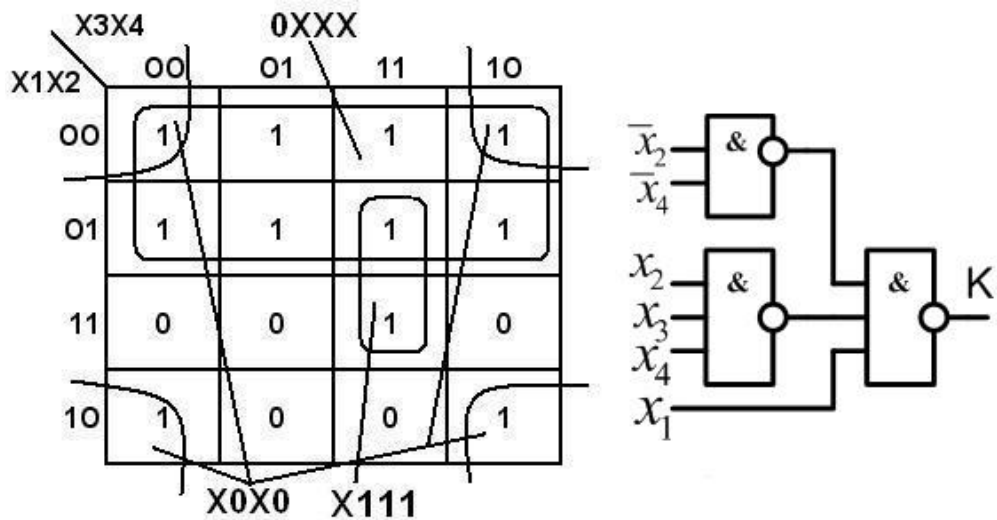


Рис. 2.23 Функция К:

а – карта Карно; – схема в базисе И-Не

3. Функция F (КНФ) в базисе И-Не (рис. 2.24):

$$F = \prod (0,4,5,6,7,9,11,12,13,14,15) = \bar{x}_2(\bar{x}_1 + \bar{x}_4)(x_1 + x_3 + x_4) =$$

$$= \overline{(\bar{x}_2)} \overline{(\bar{x}_1 + \bar{x}_4)} \overline{(x_1 + x_3 + x_4)} = \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_4 \bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{x}_4.$$

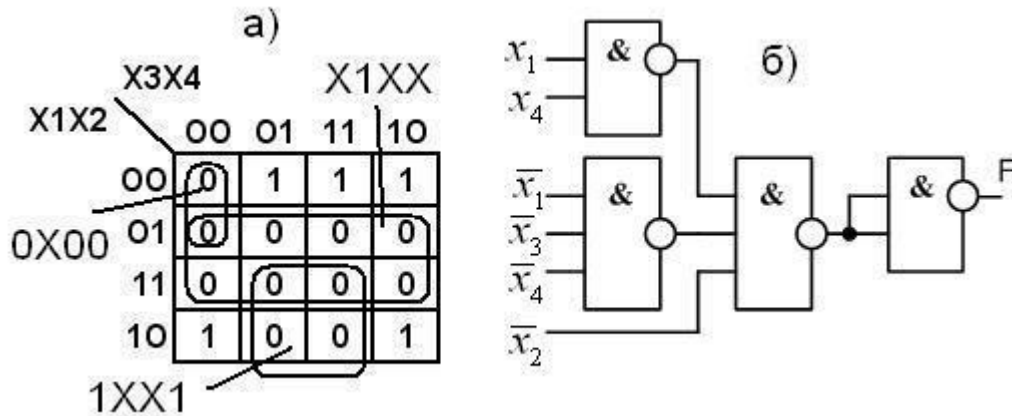


Рис. 2.24 Функция F:  
а – карта Карно; б – схема в базисе И-Не

4. Функция Q (КНФ) в базисе И-Не (рис. 2.25):

$$Q = \prod (0,1,3,4,5,7,12,13,15) = (\bar{x}_2 + \bar{x}_4)(\bar{x}_2 + x_3)(x_1 + x_3)(x_1 + \bar{x}_4) =$$

$$= \overline{(\bar{x}_2 + \bar{x}_4)} \overline{(\bar{x}_2 + x_3)} \overline{(x_1 + x_3)} \overline{(x_1 + \bar{x}_4)} = \bar{x}_2 \bar{x}_4 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{x}_1 \bar{x}_4.$$

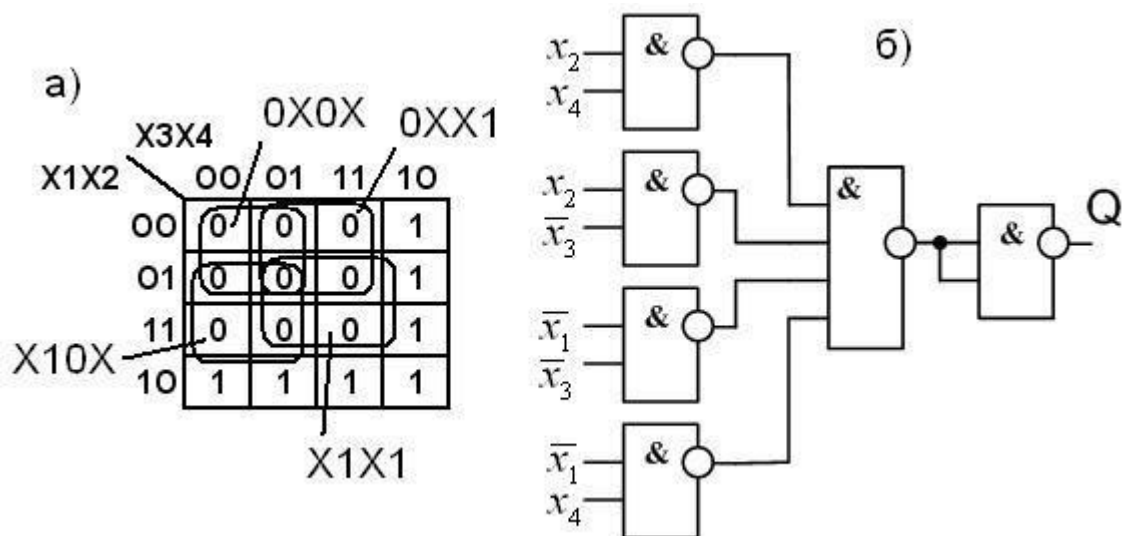


Рис. 2.25 Функция Q: а – карта Карно;  
б – схема в базисе И-Не

5. Функция R в базисе ИЛИ-НЕ (рис. 2.26):

$$\begin{aligned}
 R &= \prod (2,6,7,8,9,10,11,12,13,15) = \\
 &= (\bar{x}_1 + x_3) (x_2 + \bar{x}_3 + x_4) (x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) (\bar{x}_1 + \bar{x}_4) = \\
 &= \overline{(\bar{x}_1 + x_3) (x_2 + \bar{x}_3 + x_4) (x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) (\bar{x}_1 + \bar{x}_4)} = \\
 &= \overline{\bar{x}_1 + x_3 + x_2 + \bar{x}_3 + x_4 + x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_1 + \bar{x}_4}.
 \end{aligned}$$

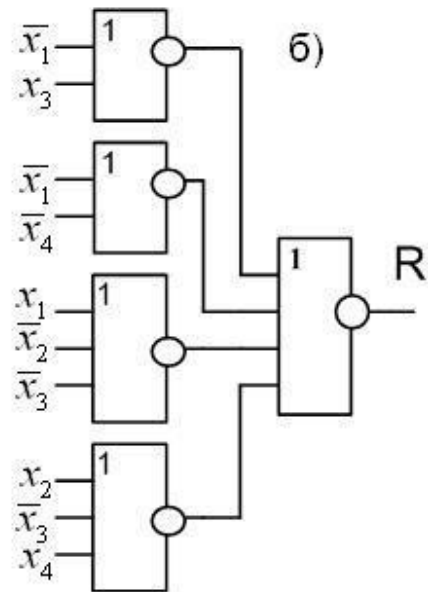
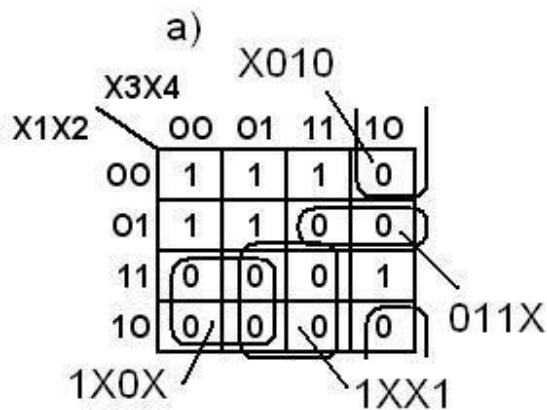


Рис. 2.26 Функция R:  
а – карта Карно; б – схема в базисе ИЛИ-НЕ

6. Функция S (КНФ) в базисе ИЛИ-НЕ (рис. 2.27):

$$\begin{aligned}
 S &= \prod (0,1,3,5,7,9,11,13,14,15) = \bar{x}_4 (x_1 + x_2 + x_3) (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) = \\
 &= \overline{\bar{x}_4 (x_1 + x_2 + x_3) (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)} = \overline{\bar{x}_4 + x_1 + x_2 + x_3 + \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3}.
 \end{aligned}$$

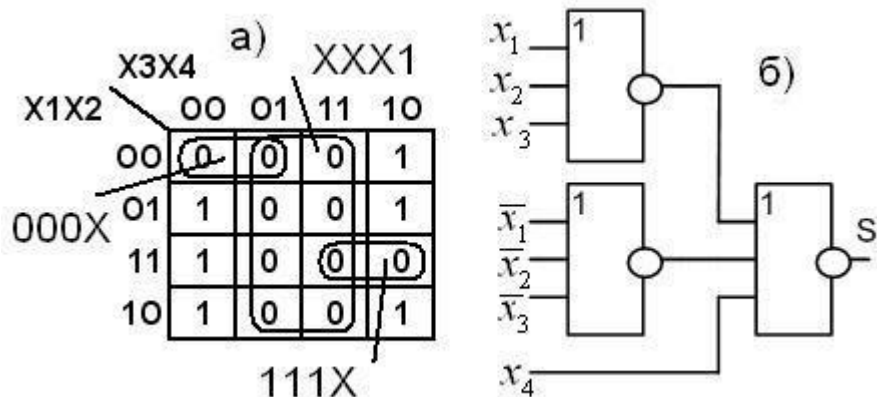


Рис. 2.27 Функция S:  
а – карта Карно; б – схема в базисе ИЛИ-Не

7. Функция G (ДНФ) в базисе ИЛИ-Не (рис. 2.28):

$$G = \sum (0, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 14) = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_4 + \bar{x}_2 x_3 =$$

$$= \overline{\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3} + \overline{\bar{x}_2 x_3} + \bar{x}_4 = \bar{x}_4 + \overline{x_1 + \bar{x}_2 + x_3} + \overline{x_2 + \bar{x}_3}.$$

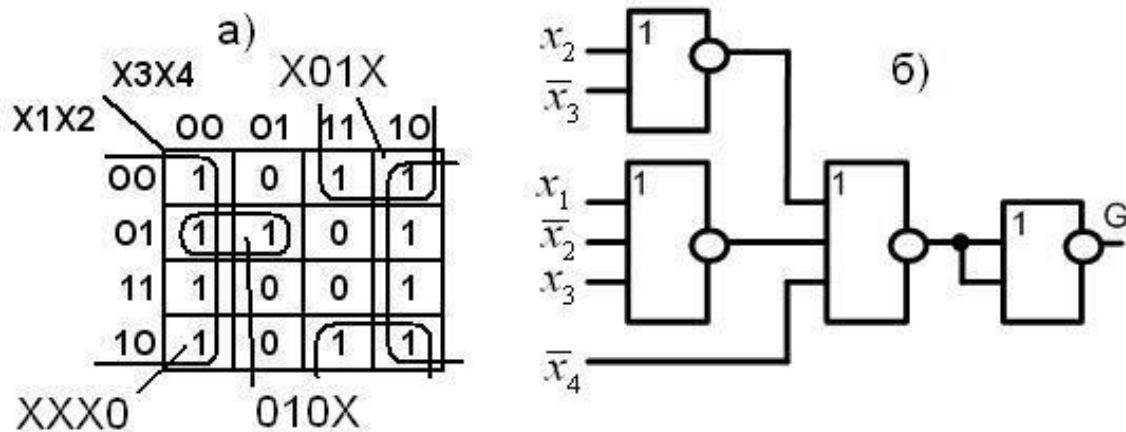


Рис. 2.28 Функция G:  
а – карта Карно; б – схема в базисе ИЛИ-Не

8. Функция W (ДНФ) в базисе ИЛИ-Не (рис. 2.29):

$$W = \sum (0, 2, 8, 10, 12, 13, 14, 15) =$$

$$= x_1 x_2 + \bar{x}_2 \bar{x}_3 = \overline{\bar{x}_1 \bar{x}_2} + \overline{\bar{x}_2 \bar{x}_3} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_2 + x_3$$

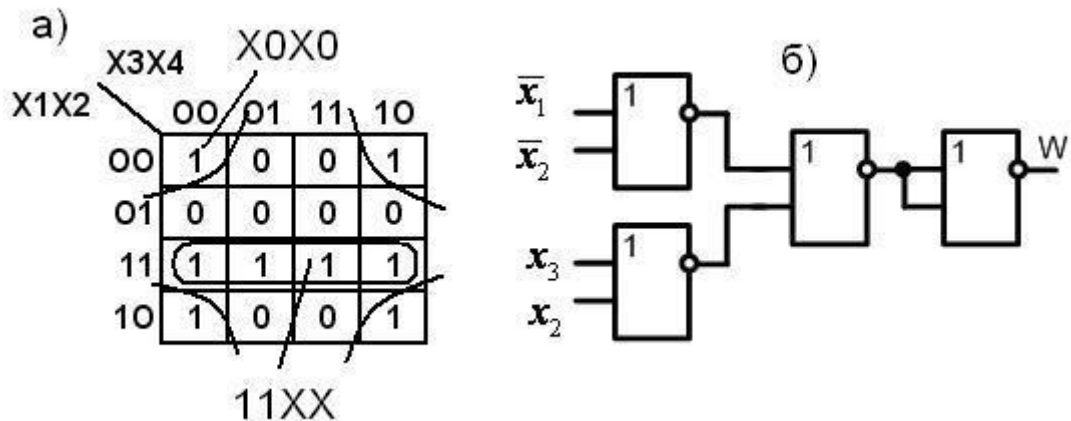


Рис. 2.29 Функция W:  
а – карта Карно; б – схема в базисе ИЛИ-НЕ

## 2.4 Не полностью определенные БФ

Если значение БФ на некоторых наборах не определено, то такая БФ называется **не полностью определенной**. В таблице истинности значения БФ на этих наборах обозначаются крестом (X), в отличие от определенных значений, обозначаемых 0 или 1. Например, не полностью определенная БФ f1 задана таблицей истинности (табл. 2.4).

Таблица 2.4

	X1	X2	X3	X4	f1
0	0	0	0	0	X
1	0	0	0	1	X
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	X
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	X
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	0

Из табл. 2.4 видно, что на 0, 1, 8, 10 наборах данная функция не определена. При задании не полностью определенных БФ числовым способом, не определенные наборы заключаются в дополнительные скобки, например, для  $f_1$ , заданной СДНФ  $f_1 = \Sigma(2, 4, 9, 11(0, 1, 8, 10))$ , а при задании этой же функции в СКНФ  $f_1 = P(3, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15(0, 1, 8, 10))$ .

При минимизации не полностью определенных БФ с помощью карт Карно-Вейча алгоритм образования контуров дополняется следующими правилами:

- при образовании контура, клетки карты, отмеченные X, т. е. не определенным значением, в любой момент времени, **если это выгодно для образования контура большего размера**, могут считаться отмеченными 1 для СДНФ или 0 для СКНФ;
- любой контур не должен покрывать только клетки, отмеченные неопределенными значениями X;
- не все клетки, отмеченные X, могут быть использованы при образовании контуров.

На рис. 2.30 показана карта Карно, на которую нанесена БФ  $f_1$  и проведена ее минимизация.

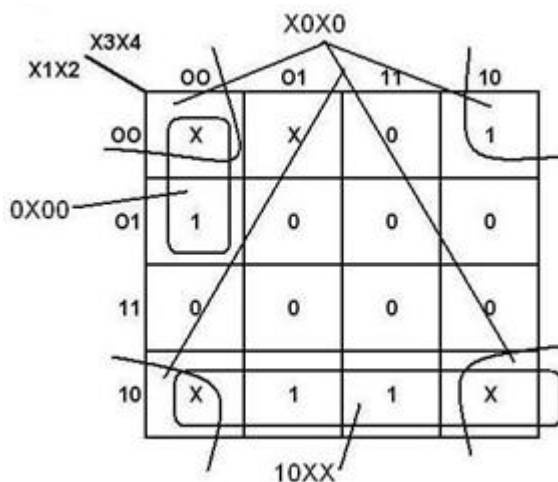


Рис. 2.30 Минимизация БФ  $f_1$

Функция (рис. 2.30) покрывается тремя контурами и описывается следующей формулой

$$f_1 = \overline{X_1} \overline{X_3} \overline{X_4} + X_1 \overline{X_2} + \overline{X_2} \overline{X_4}.$$

На рис. 2.31 приведены примеры не полностью определенных БФ  $S_i$  и проведена их минимизация (используются карты Карно и Вейча):

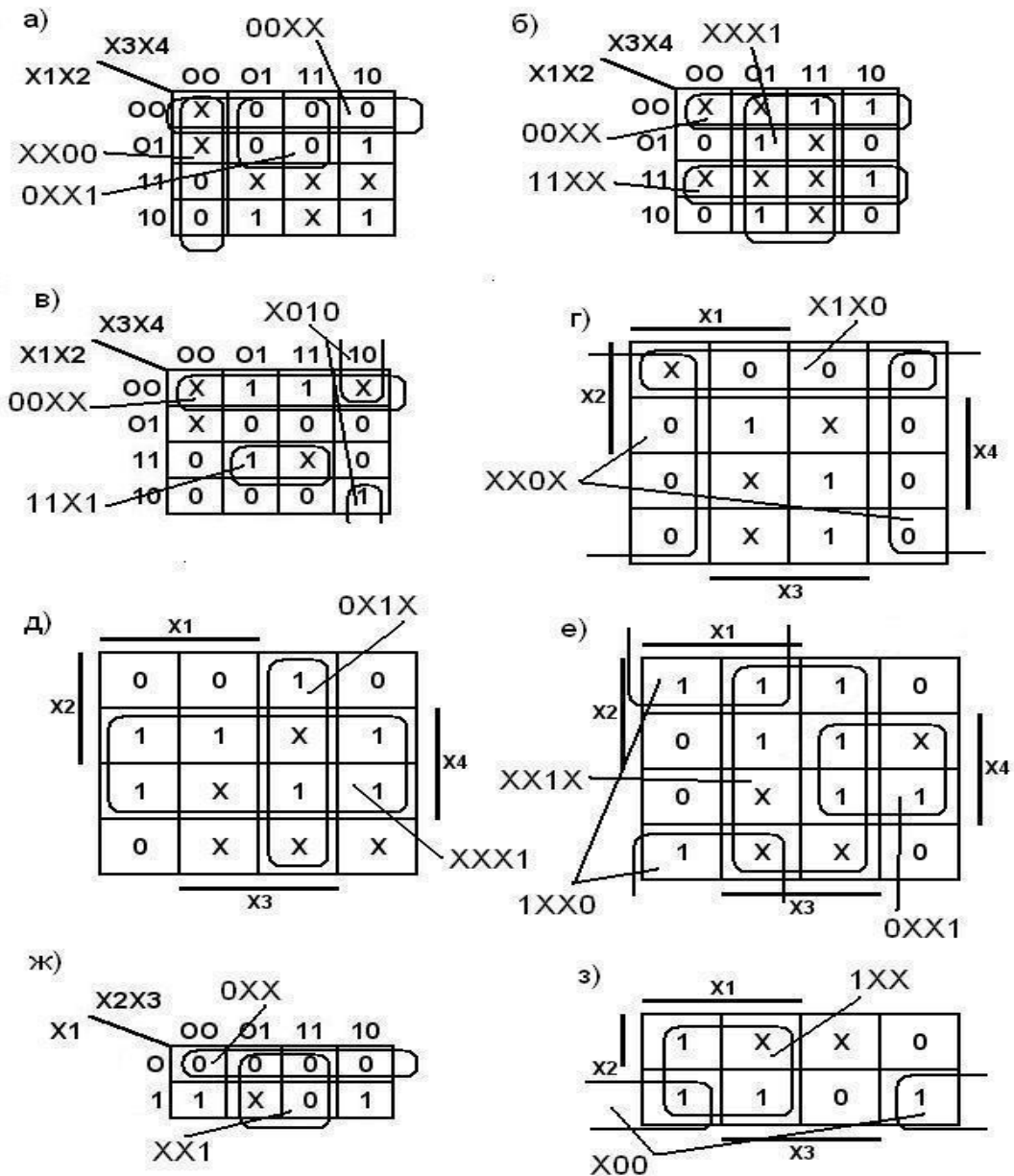


Рис. 2.31 Минимизация не полностью определенных БФ:

$S1=P(1,2,3,5,7,8,12(0,4,11,13,14,15))$  (рис. 2.39 а) ( $L=6, C=9$ )

$$S1 = (X_3 + X_4)(X_1 + \overline{X_4})(X_1 + X_2)$$

$S2=\Sigma(2,3,5,9,14(0,1,7,11,12,13,15))$  (рис. 2.39 б) ( $L=5, C=7$ )

$$S2 = X_4 + X_1 X_2 + \overline{X_1} \overline{X_2}$$

$S3=\Sigma(1,3,10,13(0,2,4,15))$  (рис. 2.39 в) ( $L=8, C=11$ )

$$S3 = \overline{X_1} \overline{X_2} + X_1 X_2 X_4 + \overline{X_2} X_2 \overline{X_4}$$

$S4=P(0,1,4,5,6,8,9,13,14(7,10,11,12))$  (рис. 2.39 г) ( $L=3, C=4$ )

$$S4 = X_3(\overline{X_2} + X_4)$$

$S5=\Sigma(1,3,5,6,9,13,15(0,2,7,10,11))$  (рис. 2.39 д) ( $L=3, C=4$ )

$$S5 = X_4 + \overline{X_1} X_3$$



$S6 = \Sigma(1,3,6,7,8,12,14,15(2,5,10,11))$  (рис. 2.39 е) ( $L=5, C=7$ )

$$S6 = X_3 + X_1 \overline{X_4} + \overline{X_1} X_4$$

$S7 = P(0,1,2,3,7(5))$  (рис. 2.39 ж) ( $L=2, C=2$ )

$$S7 = X_1 \overline{X_3}$$

$S8 = \square(0,4,5,6(3,7))$  (рис. 2.39 з) ( $L=3, C=4$ )

$$S8 = X_1 + \overline{X_2} \overline{X_3}$$

## 2.5 Скобочные формы БФ

Тупиковые ДНФ и КНФ могут быть не самыми короткими формулами БФ. Например, формула  $f = ab + a\overline{c}$  имеет длину  $L=4$ , но если вынести за скобку переменную  $a$ , то получим  $f = a(b + \overline{c})$ , и длина формулы уменьшается до  $L=2$ . Такая форма БФ носит название **скобочной**.

Рассмотрим пример построения скобочной формы функции, заданной ДНФ:  $Q = ABE + ABF + ACDE + BCDF$ .

Преобразуем функцию вынесением за скобки общих сомножителей:

$$Q = ABE + ABF + ACDE + BCDF = AB(AE + BF) + CD(AE + BF) = (AE + BF)(AB + CD).$$

Цена схемы для исходной функции  $C=14$ , для функции после преобразования в скобочную форму  $C=8$ . На рис. 2.32 приведены КС, реализующие обе функции.

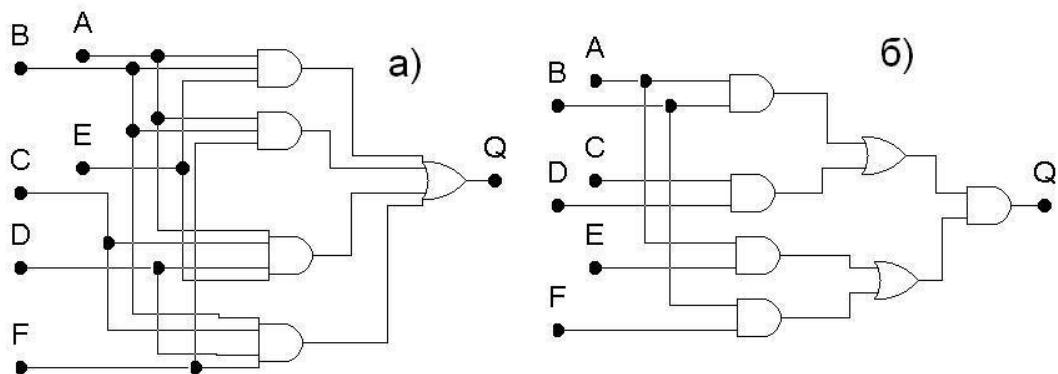


Рис. 2.32 Реализация функции Q:  
а – в форме ДНФ; б – в скобочной форме

## 2.6 Анализ комбинационных схем

Задача анализа комбинационных схем состоит в нахождении булевой функции КС. БФ при анализе может быть представлена или

в аналитической форме, или в виде таблицы истинности. Анализ проводят для того, чтобы определить функциональные свойства КС или для проверки правильности функционирования КС, или же для того, чтобы определить работоспособность схемы в режимах, отличающихся от заданных при проектировании КС. Работу устройств автоматики необходимо анализировать и при повреждениях некоторых его элементов.

При анализе КС важным является определение возможности упрощения КС. Этого можно достичь минимизацией и упрощением БФ. Отдельной задачей является выяснение поведения устройства в переходных режимах и нарушения работы именно в эти периоды. Анализ КС проводят в два этапа.

Из имеющейся принципиальной схемы устройства удаляют все несущественные или вспомогательные элементы, которые не влияют на логику работы КС, а предназначены для обеспечения надежности или устойчивости, или дополнительных возможностей схемы. Например, удаляются инверторы, которые используются для получения инверсных значений переменных. Тогда схема будет состоять только из элементов, выполняющих логические функции.

На основе полученной таким образом схемы записывается булева функция, которая и подвергается анализу.

При анализе схемы на электронных элементах функция записывается непосредственно по самой схеме. Но при сложной схеме это может оказаться затруднительным. В этом случае можно предложить следующий алгоритм:

- выходу каждого логического элемента приписывается какое-либо имя;
- выходная функция каждого элемента записывается в терминах переменных на ее входах;
- последовательно от входов к выходам описывается вся схема;
- функция преобразуется в базис И, ИЛИ, Не и представляется в ДНФ;
- при необходимости функция доопределяется до СДНФ и минимизируется;
- проводится анализ БФ.

Рассмотрим схему, приведенную на рис. 2.33 а.

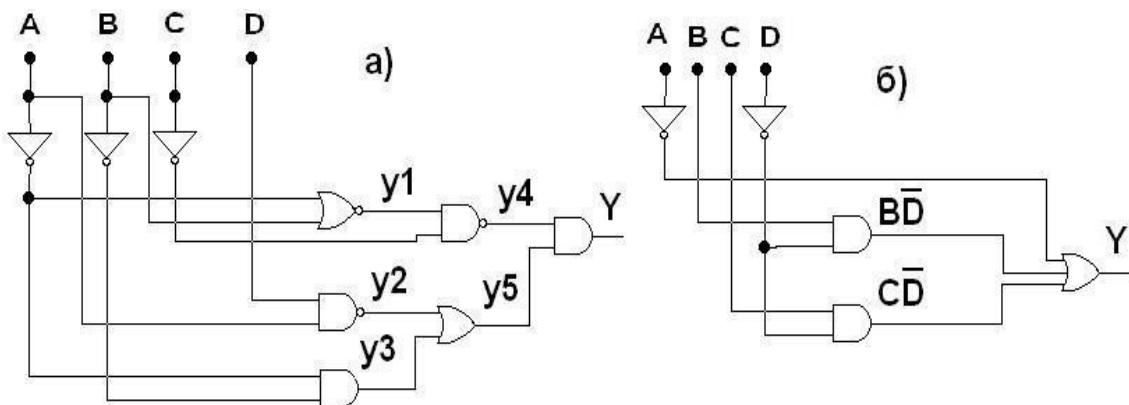


Рис. 2.33 Комбинационная схема и функция  $Y$   
 а – исходная КС; б – минимизированная КС

Выход каждого элемента обозначен своей функцией. Запишем функцию каждого элемента, выведем БФ  $Y$  и построим схему (рис. 2.33 б):

$$Y1 = \overline{A + B} \quad Y2 = \overline{AD} \quad Y3 = \overline{A \overline{B}} \quad Y4 = \overline{Y1 * C}$$

$$Y5 = Y2 + Y3 \quad Y = Y4 * Y5$$

Теперь подставим все в  $Y$  и выполним все преобразования:

$$\begin{aligned}
 Y &= Y4 * Y5 = \overline{Y1 * C} * (Y2 + Y3) = \overline{\overline{A + B} * C} * (\overline{AD} + \overline{A \overline{B}}) \\
 &= \overline{A \overline{B} \overline{C}} (\overline{AD} + \overline{A \overline{B}}) = (\overline{A} + B + C)(\overline{A} + \overline{D} + \overline{A \overline{B}}) \\
 &= \overline{A} + B(\overline{A} + \overline{D}) + C(\overline{A} + \overline{D}) = \overline{A} + \overline{A \overline{B}} + BD + \overline{A \overline{C}} + C\overline{D} \\
 &= \overline{A} + B\overline{D} + C\overline{D}.
 \end{aligned}$$

Очевидно, что исходная схема (Рис. 2.33 а) спроектирована избыточно и ее можно заменить эквивалентной ей (Рис. 2.33 б).

Закон схемы можно представить и в виде таблицы истинности. Для этого составляют таблицу, в левой части которой записаны все возможные наборы аргументов. Затем вычисляется значение выходного сигнала схемы для каждого набора переменных и результат заносится в таблицу. При этом можно использовать следующие очевидные свойства элементов. А. Для электронных схем:

- 0 на любом входе схемы И приводит к появлению 0 на выходе, независимо от сигналов на любых других входах;
- 1 на любом входе схемы ИЛИ приводит к появлению 1 на выходе, независимо от сигналов на любых других входах;
- 0 на любом входе схемы И-Не приводит к появлению 1 на выходе, независимо от сигналов на любых других входах;

- 1 на любом входе схемы ИЛИ-Не приводит к появлению 0 на выходе, независимо от сигналов на любых других входах.

Например, задана КС (Рис. 2.34). Составить для нее таблицу истинности.

Обозначим выходы элементов Z, G, F, Y и составим таблицу истинности:

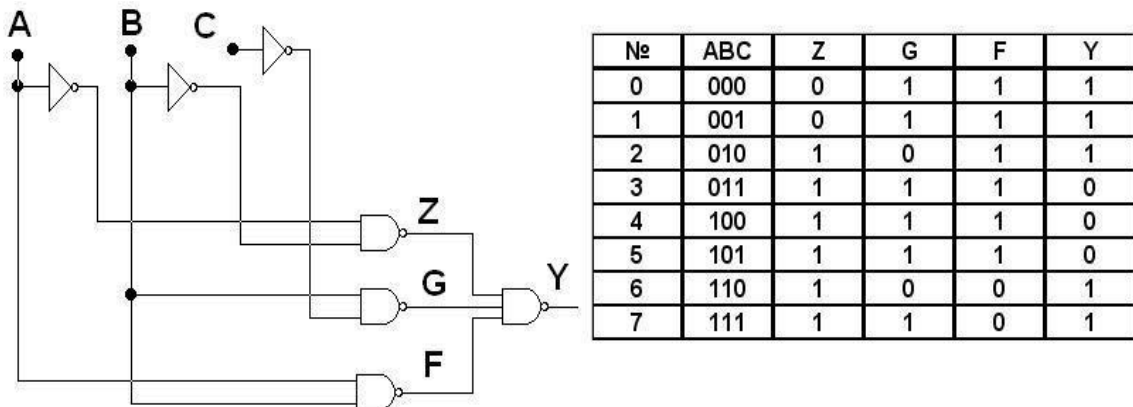


Рис. 2.34 Комбинационная схема и таблица истинности

- функцию Z реализует элемент И-Не, на выходе которого будет 1, если A=1 или B=1 (строки со второй по 7);
- функцию G реализует элемент И-Не, на выходе которого будет 1, если B=0 или C=1 (строки 0, 1, 3, 4, 5, 7);
- функцию F реализует элемент И-Не, на выходе которого будет 1, если A=0 или B=0 (строки 0, 1, 2, 3, 4, 5);
- функцию Y реализует элемент И-Не, на выходе которого будет 1 в тех строках, где или Z=0, или G=0, или F=0 (строки 0, 1, 2, 6, 7).

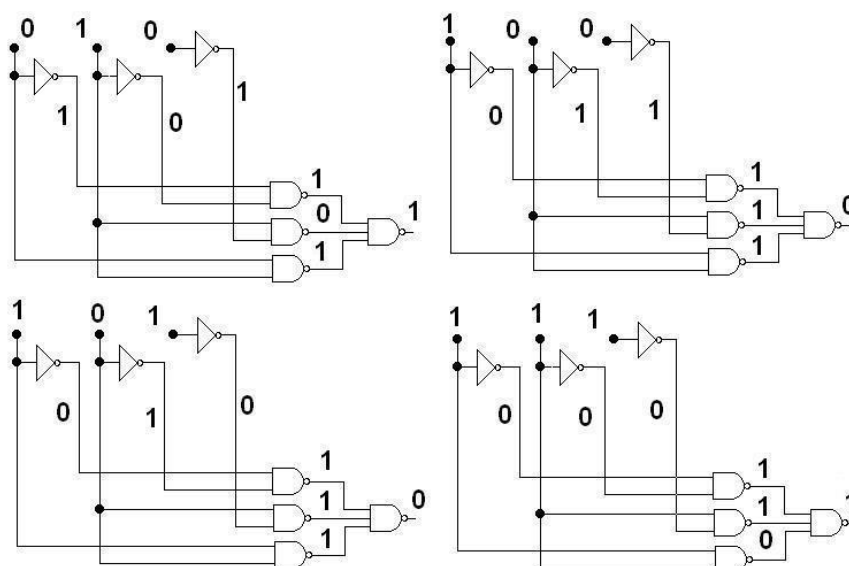


Рис. 2.35 Значения выхода схемы для некоторых наборов

При решении таких задач промежуточные столбцы (Z, G, F) в таблице истинности могут быть опущены, а вычисление выходных сигналов производится прямо на схеме. На рис. 2.35 для примера, рассмотрены состояния выхода схемы для нескольких наборов переменных  $ABC=\{010, 100, 101, 111\}$ . Результат совпадает со значениями функции  $Y$  в таблице истинности. Если минимизировать эту функцию, то получим формулу:

$$Y = \bar{a}\bar{b} + ac + a\bar{c}$$

В результате анализа получена эквивалентная функция, записанная в базисе И, ИЛИ, НЕ. Поскольку цены схем одинаковы, то можно сказать, схема (Рис. 2.34) спроектирована без избыточности.

На рис. 2.36, 2.37, 2.38 приведены схемы устройств. Таблицы истинности схем сведены в табл. 2.6. Полученные функции минимизированы и построены новые схемы на основе в форме ДНФ в различных базисах.

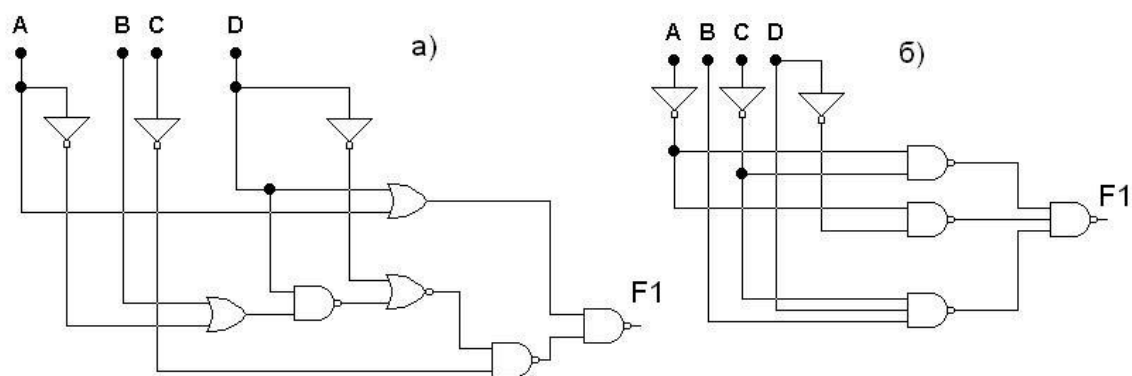


Рис. 2.36 Преобразование схемы:

*а* – исходная схема; *б* – минимизированная схема в базисе И-НЕ

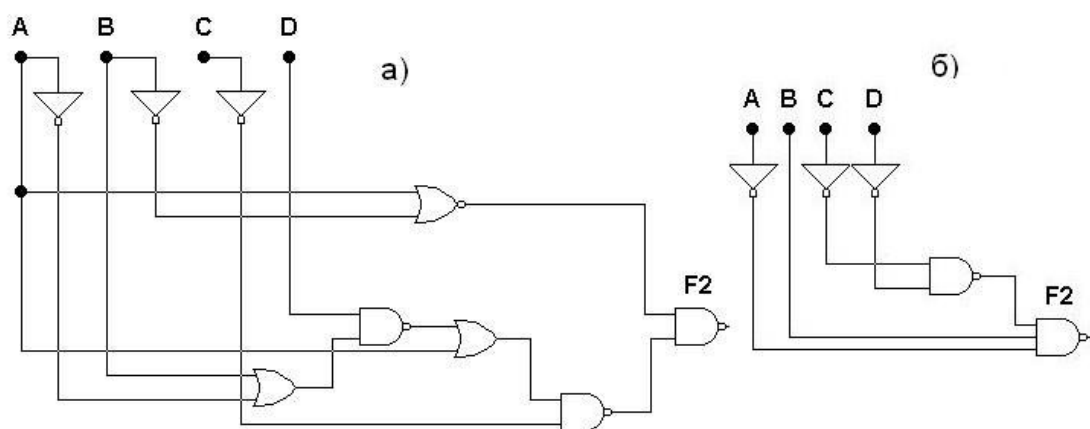


Рис. 2.37 Преобразование схемы:  
а – исходная схема; б – минимизированная схема в базисе И-НЕ

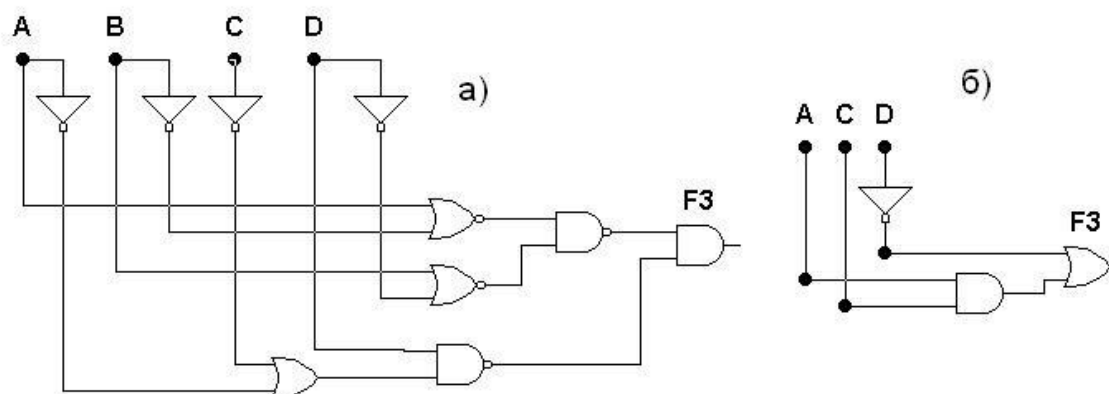


Рис. 2.38 Преобразование схемы:  
а – исходная схема; б – минимизированная схема в базисе И, ИЛИ, НЕ

Таблица 2.6

Таблица истинности для F1, F2, F3

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
ABCD	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
F1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
F2	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
F3	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1

В следующих примере, (рис. 2.39) приведена схема устройства. Выведены значения выходной функции (элементы DD5) и приведена эквивалентная схема (выход – элемент DD6).

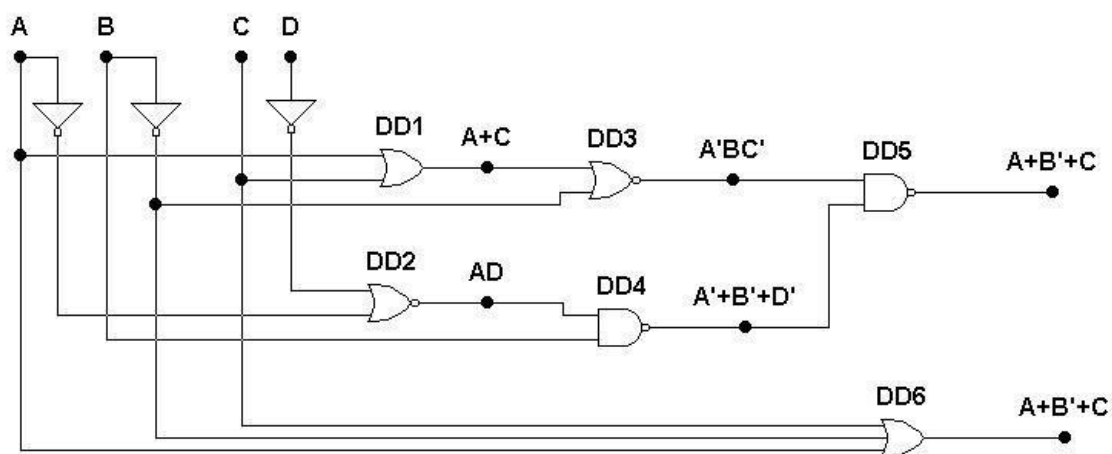


Рис. 2.39. Анализ схемы и ее минимизация

Продemonстрируем вывод выходной функции схемы (DD5):

$$DD1: \quad A + C;$$

$$DD2: \quad \overline{\overline{A} + \overline{D}} = AD;$$

$$DD3: \quad \overline{(A + C) + B} = \overline{(A + C)B} = \overline{ACB};$$

$$DD4: \quad \overline{ADB} = \overline{A + B + D};$$

$$DD5: \quad \overline{(ACB)(A + B + D)} = \overline{(ACB)} + \overline{(A + B + D)} = \\ = A + C + B + ABD = A + C + B .$$

На рис. 2.40, 2.41 приведены еще две схемы, для которых приведены значения выходных функций.

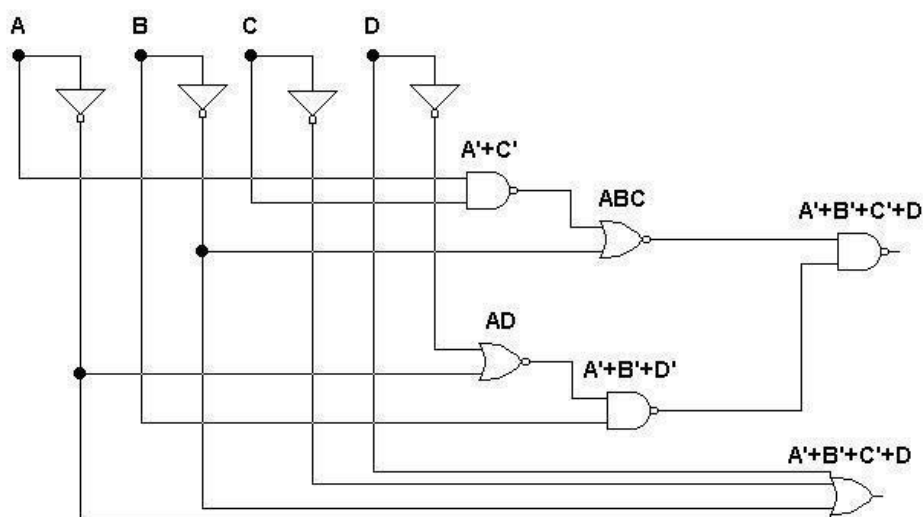


Рис. 2.40 Анализ схемы и ее минимизация

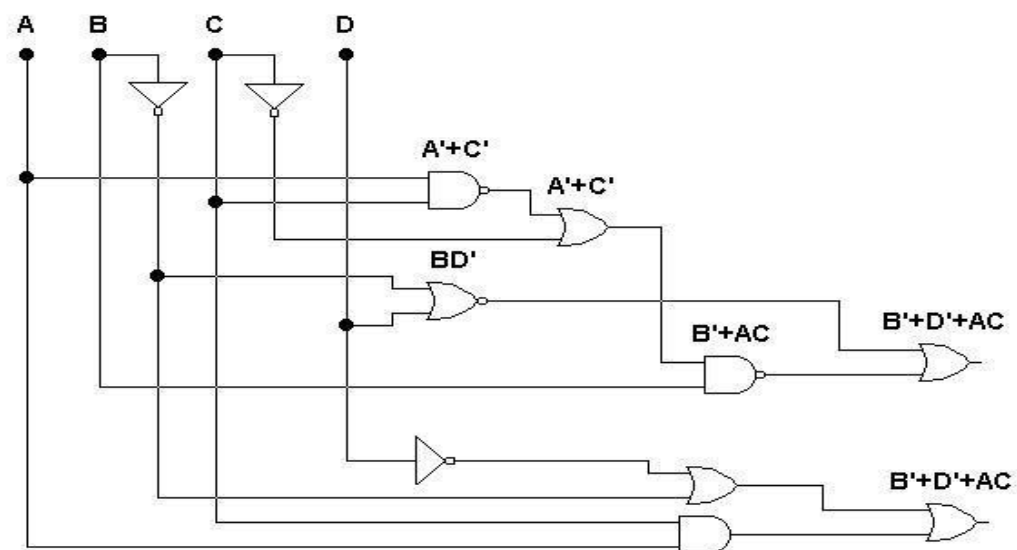


Рис. 2.41 Анализ схемы и ее минимизация