2 次元 FEM のメモ

きゅーしす

文献 [1] を参考にして 2 次元有限要素法の境界値問題を定式化して解く.

1 Dirichlet 問題の有限要素解析

以下の偏微分方程式の境界値問題を考える. 以下の条件の未知関数 u を求める. ここで Ω は単連結な領域で f と g_D は既知の関数であるものとする.

$$\nabla^2 u + f = 0 \qquad \mathrm{in}\,\Omega \tag{1}$$

$$u = g_D \quad \mathrm{on}\,\partial\Omega \tag{2}$$

重み関数 v を $f = -\nabla^2 u$ に掛けて積分し, 以下の式を得る.

$$\begin{aligned} \int_\Omega f v \,\mathrm{d}V &= -\int_\Omega \nabla^2 u \,\mathrm{d}V \\ &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}V + \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \boldsymbol{n} v \,\mathrm{d}S \\ &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}V \end{aligned} \tag{3}$$

ここで u の近似解を u_h とし,

$$u_h = \sum_i N_i u_i \tag{4}$$

とする. N_i は形状関数である. u_h を代入し, 形状関数を重み関数とすると次の式が得られる.

$$\int_\Omega f N_i \,\mathrm{d}V = \int_\Omega \nabla N_i \cdot \nabla N_j u_j \,\mathrm{d}V \tag{5}$$

ここで Einstein の規約を用いて表記した.

次に領域を要素ごとに分割する. 要素はすべて三角形 1 次要素であるとする. 領域 Ω は三角形要素 Ω^e で分割される. したがって弱形式も要素 Ω^e 上で成り立つ. ここで要素内部での節点番号が全体での節点番号と異なるので, 右上に e をつけて区別する.

$$\int_{\Omega^e} \nabla N_i^e \cdot \nabla N_j^e u_j^e \,\mathrm{d}V = \int_{\Omega^e} f^e N_i^e \,\mathrm{d}V \tag{6}$$

三角形一次要素は三角形の頂点 1, 2, 3, において

$$N_i^e(\boldsymbol{x}_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{7}$$

$$N_1^e + N_2^e + N_3^e = 1 \tag{8}$$

を満たす形状関数を持つ．形状関数 N_i は

$$N_i^e = a_i^e + b_i^e x + c_i^e y \tag{9}$$

と表される．係数はそれぞれ

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1^e & y_1^e \\ 1 & x_2^e & y_2^e \\ 1 & x_3^e & y_3^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^e & a_2^e & a_3^e \\ b_1^e & b_2^e & b_3^e \\ c_1^e & c_2^e & c_3^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

の関係を満たす．そこで係数について解くと,

$$a_i = \frac{x_j y_k - x_k y_j}{2|\Omega^e|}, \quad b_i = \frac{y_j - y_k}{2|\Omega^e|}, \quad c_i = \frac{x_k - x_j}{2|\Omega^e|} \tag{11}$$

と表される．ここで i, j, k は 1,2,3 の周期的置換であり, $|\Omega^e|$ は要素の面積である．

次に式 (6) の弱形式を行列形式にまとめるとこのようになる．

$$\boldsymbol{A}^e \boldsymbol{u}^e = \boldsymbol{b}^e \tag{12}$$

ここで以下の式を用いた．

$$\boldsymbol{A}_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \mathrm{d}V \tag{13}$$

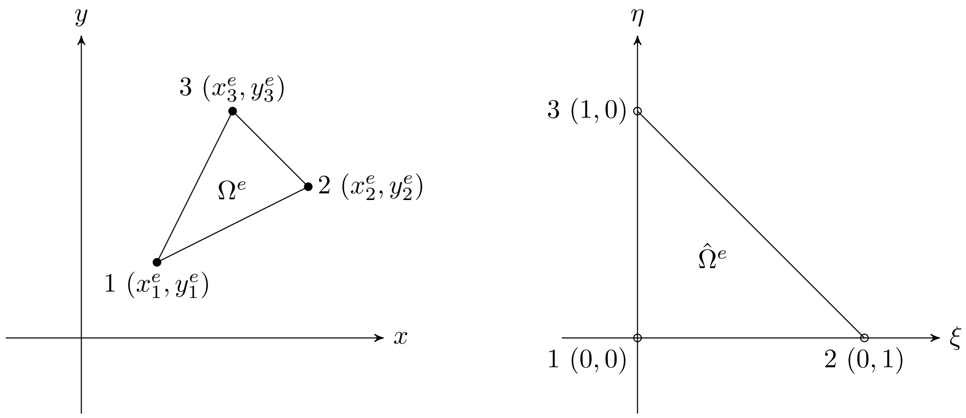
$$\boldsymbol{u}_i^e = u_i \tag{14}$$

$$\boldsymbol{b}_i^e = \int_{\Omega^e} f^e N_i^e \, \mathrm{d}V \tag{15}$$

式 (13) は形状関数 (式 (9)) を代入して

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_{ij}^e &= \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \mathrm{d}V \\ &= \int_{\Omega^e} (b_i b_j + c_i c_j) \, \mathrm{d}V \\ &= (b_i b_j + c_i c_j)|\Omega^e|. \end{aligned} \tag{16}$$

ここで $|\Omega^e|$ は領域の面積である．次に式 (15) を計算するが, 解析解が求められないので Gauss 求積を用いて近似解を求める．文献 [2] に記載されている 2 次精度の手法を用いる．



(a) x-y 座標系　　(b) ξ-η 座標系

図 1: 座標変換

図 1a のような x-y 座標系にある要素を図 1b に示す ξ-η 座標系に座標変換する． この変換は 1 次関数で表すことができるので,

$$x = \alpha + \beta\xi + \gamma\eta \tag{17}$$

と表される．これに図 1 の対応関係から係数 α, β, γ の値が以下の通りとなる．

$$\alpha = x^e_1, \quad \beta = x^e_2 - x^e_1, \quad \gamma = x^e_3 - x^e_1 \tag{18}$$

行列を用いて表記すると以下の式が得られる．

$$x = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{19}$$

ξ-η 形状関数を考える．図 1b から

$$N^e_1 = 1 - \xi - \eta, \quad N^e_2 = \xi, \quad N^e_3 = \eta \tag{20}$$

となる．行列を用いて表記すると以下の式が得られる．

$$\begin{bmatrix} N^e_1 & N^e_2 & N^e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{21}$$

式 (19) の関係から

$$x = \begin{bmatrix} N^e_1 & N^e_2 & N^e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^e_1 \\ x^e_2 \\ x^e_3 \end{bmatrix} \tag{22}$$

となり, y 座標の変数変換についても同様に考察すると, 以下の式が得られる.

$$y = \begin{bmatrix} N_1^e & N_2^e & N_3^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^e \\ y_2^e \\ y_3^e \end{bmatrix} \tag{23}$$

ベクトル表記でまとめると

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{3} N_i^e(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{x}_i^e. \tag{24}$$

式 (24) のヤコビ行列 $\boldsymbol{J}^e$ は以下の通りに求められる.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}^e &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_i \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} \boldsymbol{x}_i^e & \sum_i \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \boldsymbol{x}_i^e \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\boldsymbol{x}_1^e + \boldsymbol{x}_2^e & -\boldsymbol{x}_1^e + \boldsymbol{x}_3^e \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{25}$$

したがってヤコビ行列の行列式 $|\boldsymbol{J}^e|$ は

$$|\boldsymbol{J}^e| = \begin{vmatrix} -\boldsymbol{x}_1^e + \boldsymbol{x}_2^e & -\boldsymbol{x}_1^e + \boldsymbol{x}_3^e \end{vmatrix} = 2|\Omega^e|. \tag{26}$$

次にベクトルの積分を評価する. 座標変換により積分は以下のように書き換えられる.

$$\int_{\Omega^e} f^e N_i^e \, \mathrm{d}V = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} f^e N_i^e |\boldsymbol{J}^e| \, \mathrm{d}\eta \, \mathrm{d}\xi \tag{27}$$

次に積分を領域上の被積分関数の値の重み付き和で近似すると以下の式が得られる. n_p は評価点の数である.

$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi} f^e N_i^e |\boldsymbol{J}^e| \, \mathrm{d}\eta \, \mathrm{d}\xi \approx 2 \sum_{p=1}^{n_p} f^e(\xi_p, \eta_p) N_i^e(\xi_p, \eta_p) |\Omega^e| W_p \tag{28}$$

ここで式 (26) の結果を用いた. 文献 [2] によると 3 次精度の場合, 評価点の位置と重みは表 1 の通りとなる.

表 1: 三角形要素のガウス求積

p	ξ_p	η_p	W_p
1	1/3	1/3	−27/96
2	1/5	1/5	25/96
3	3/5	1/5	25/96
4	1/5	3/5	25/96

2 計算例

先程述べた有限要素解析を検証するために以下の問題を解く.

$$\nabla^2 u + 2\pi^2 \sin(\pi x)\sin(\pi y) = 0 \quad \text{in}\,(0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1) \tag{29}$$

$$u = 0 \quad \text{on boundary} \tag{30}$$

厳密解は

$$u = \sin(\pi x)\sin(\pi y). \tag{31}$$

要素を短辺の長さが 0.1 の直角二等辺三角形で分割し, 計算を行った. 結果を図 2 に示す. 計算結果

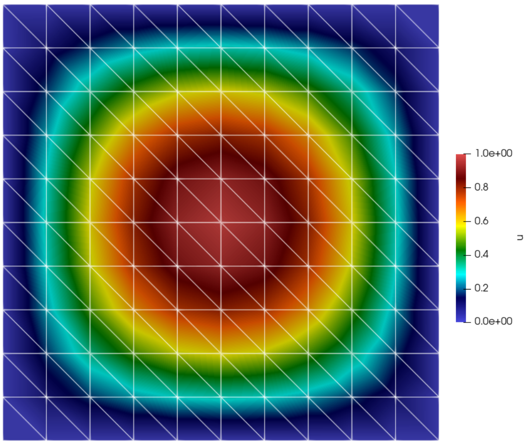


図 2: 計算結果

が解析解と定性的に一致しており, 正しく問題を解くことができたと考えられる.

参考文献

[1] Mats G. Larson and Fredrik Bengzon, “The Finite Element Method: Theory, Implementation, and Applications”, Springer Berlin Heidelberg, https://doi.org/10.1007/978-3-642-33287-6, pp. 71–112, 2013

[2] Peter Wriggers, “Computational Contact Mechanics”, Springer Berlin Heidelberg, https://doi.org/10.1007/978-3-540-32609-0, pp.473–476, 2006