

Julia 言語で FEM を書いてポテンシャル流れを解く

きゅーしす

2021 年 12 月 17 日

概要

Julia 言語は近年開発された言語で、簡潔に表現されたコードで高速に実行できる特徴をもつ。これらの特徴からデータサイエンスや機械学習、科学技術計算での利用が広がっている。この例として、筆者が自作した 2 次元 Poisson 方程式の有限要素法 (Finite Element method, FEM) のコードを取り上げ、Julia 言語の特徴を実例を交えながら示す。

1 イン트로ダクション

Julia 言語は近年開発された言語で、自由なライセンスで高速で書きやすく、強力なマクロがあり、汎用性をもち、統計や科学技術計算にも強い [1]。また、パッケージ管理も十分に整備されており、Python をはじめとしたユーザーの多い言語には及ばないものの、パッケージは充実している。

汎用性がありつつも科学技術計算に強いという特徴やパッケージ管理システムが整備されていることは数値解析に大いに役立ちます。なぜなら、数値計算で使われている C 言語や Fortran はパッケージ管理システムに乏しく、メンテナンス性が高いとはとても言えないからである (個人の見解)。

Julia 言語は利点も多数あるが、新しいプログラミング言語であるので情報が少ない。さらに、海外では利用例が増えているが、日本での利用例が少ないのも課題である。科学技術計算での利用はは尚更その傾向が強い。この記事で Julia 言語の日本語での科学技術の情報を少しでも提供できたら幸いである。

続いて構成を示す。はじめに、今回解くポテンシャル流れについて概説する。次に有限要素法での近似と離散化、アルゴリズムについて概説する。その後に Julia 言語の特徴と書いたプログラムの実装を示す。そして計算結果と考察をし、記事全体のまとめを記す。

2 ポテンシャル流れとは

今回解く問題はポテンシャル流れと呼ばれる。ポテンシャル流れの「ポテンシャル」とは何者なのか、支配方程式は何なのか、文献 [3] を参考にその導出を行って概説する。

ポテンシャル流れの対象となるのは非圧縮完全流体と呼ばれるものである。性質を以下に列挙する。

- **非圧縮**とは流体の密度が変わらないこと ($\partial\rho/\partial t = 0$)*1
- **完全流体**は非粘性である (粘性がない)
- 完全流体は非熱伝導性である (熱を一切伝えない)

*1 非圧縮な流体は音速が無限大になるので現実世界には存在しない

なお, 完全流体の定義は神部ら [3] の定義を採用した. 非圧縮完全流体の支配方程式は以下に示す連続の式 (式 (1)) と Euler の運動方程式 (式 (2)) である.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f} \quad (2)$$

ここで速度を \mathbf{u} , 密度を ρ , 圧力を p , 外力を \mathbf{f} とした. Euler 方程式は非圧縮かつ完全流体という仮定を入れたにもかかわらず, 解析的な解を求めることはほぼ不可能である^{*2}. さらに幾つかの仮定を導入してより簡単な方程式を導出し, 流れを近似的に求めることを行いたい.

まず, 流れ場が時間に対して変化しない定常状態 ($\partial \mathbf{u} / \partial t = 0$) を仮定する. このとき, Euler 方程式は以下のようになる.

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f} \quad (3)$$

次に, 渦度 $\boldsymbol{\omega}$ を速度の回転 $\nabla \times \mathbf{u}$ と定義する. このとき, 外力がポテンシャル χ によるもので $\mathbf{f} = -\nabla \chi$ と表されれば, 式 (3) は以下のように変形できる.

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = -\nabla \left(\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + \frac{p}{\rho} + \chi \right) \quad (4)$$

この式の右辺は速度と渦度のそれぞれに直交したベクトルである. つまり, 式の値は流線 (\mathbf{u} にそった線) と渦線 ($\boldsymbol{\omega}$ にそった線) それぞれの上で $\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + \frac{p}{\rho} + \chi$ が変化しないことを示している. よって, 渦線もしくは流線に沿って

$$\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + \frac{p}{\rho} + \chi = \text{constant}, \quad \text{渦線もしくは流線に沿って} \quad (5)$$

が成り立つ. これを Bernoulli の定理という. 詳細は神部ら [3] を参照されたい.

次に渦なしという概念を導入する. 渦なしとはいたるところで渦度が 0 であることを意味する. 渦なしの場合, Stokes の定理より

$$\oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \nabla \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (6)$$

が成立する, ここで C は単純閉曲線で, S は C を境界とする面である. この結果から, 積分路に依存せず, 開始と終点のみで値が決まる. 速度ポテンシャルが存在することを示せる.

以下の式で定義される関数 Φ がポテンシャルであることを示す.

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int_O^{\mathbf{x}} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} \quad (7)$$

2 点 P, Q があり, P から出発して Q で終わる異なる曲線 C_1, C_2 があり, C_1 と C_2 で囲まれる領域が曲面となっているものとする. 点 P から C_1 を通って点 Q にいたり, 点 Q から C_2 を通って点 P に戻る積分路を考

^{*2} この問題は大変難しく, 未だ解析解があるかどうかすらわかっていない

える。この周回積分の値は式 (6) より 0 となることが示されるので

$$\oint_{C_1-C_2} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (8)$$

$$\int_{C_1} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} - \int_{C_2} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (9)$$

$$\int_{C_1} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \int_{C_2} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} \quad (10)$$

以上の式変形から、式 (7) で定めた関数 Φ の値は積分路に依存しない。よって関数 Φ がポテンシャルである。

Φ はポテンシャルであるので、

$$\mathbf{u} = \nabla \Phi \quad (11)$$

を満たす。ポテンシャル流れのポテンシャルとはこの速度ポテンシャルのことを意味する。連続の式 (1) に式 (11) を代入すれば Laplace 方程式

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (12)$$

が導けた。

ここで Bernoulli の定理を思い出して、渦なしの場合はどうなるかを考察する。式 (4) は渦なしの場合、

$$\nabla \left(\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + \frac{p}{\rho} + \chi \right) = 0 \quad (13)$$

となり、すべての領域において

$$\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + \frac{p}{\rho} + \chi = \text{constant}, \quad \text{for all area} \quad (14)$$

これも Bernoulli の定理として知られている。

最後に境界条件について述べる。壁境界は壁に対して流体は浸透しないので、壁境界の外向き法線ベクトルを \mathbf{n}_{wall} とすると

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{\text{wall}} = \nabla \Phi \cdot \mathbf{n}_{\text{wall}} = 0 \quad (15)$$

となる。次に流体の流入境界を考える。流入境界は流体領域の外向き法線ベクトルを \mathbf{n}_{in} として、流入速度を U としたときに

$$\mathbf{u} = -U \mathbf{n}_{\text{in}} \quad (16)$$

$$\nabla \Phi \cdot \mathbf{n}_{\text{in}} = -U \mathbf{n}_{\text{in}} \cdot \mathbf{n}_{\text{in}} \quad (17)$$

$$\nabla \Phi \cdot \mathbf{n}_{\text{in}} = -U \quad (18)$$

が得られる。 $\mathbf{n}_{\text{in}} \cdot \mathbf{n}_{\text{in}} = 1$ を用いた。最後に流出境界条件を考える。流出境界は外向き法線ベクトル \mathbf{n}_{out} に沿って一様の速さで流体が流出するとモデリングする^{*3}。このとき、接線ベクトル \mathbf{t}_{out} と速度場で以下の関係が成立する。

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_{\text{out}} = \nabla \Phi \cdot \mathbf{t}_{\text{out}} = 0 \quad (19)$$

これより、境界に沿って速度場を線積分しても一切の変化がないため、流出境界は Dirichlet 条件となる^{*4}。

^{*3} これは計算しやすいため導入している。また流体の流出条件の与え方は深い沼。

^{*4} 一般にポテンシャルは基準のとり方によって変わるので境界条件の値のとり方もそれによって変わる

3 有限要素解析

文献 [2] を参考にして式 (12) の Laplace 方程式を解く。取り扱いの都合上, 流入・流出・壁境界を Dirichlet 境界条件と Neumann 境界条件にまとめて, 以下のように表記する。

$$\nabla^2 u = 0 \quad (20)$$

$$u = f_D, \quad \text{on } \partial\Omega_D \quad (21)$$

$$\nabla u \cdot \mathbf{n} = f_N, \quad \text{on } \partial\Omega_N \quad (22)$$

ここで, $\partial\Omega_D$ は Dirichlet 境界が貼られている境界で, $\partial\Omega_N$ が Neumann 境界条件が貼られている境界である。

4 結果

FEM で翼の周りの流れを計算した。

計算結果が解析解と定性的に一致しており, 正しく問題を解くことができたと考えられる。

参考文献

- [1] Jeff Bezanson et al. *Why We Created Julia*. 2012. URL: <https://julialang.org/blog/2012/02/why-we-created-julia/>.
- [2] Mats G. Larson and Fredrik Bengzon. *The Finite Element Method: Theory, Implementation, and Applications*. Springer Berlin Heidelberg, 2013. DOI: [10.1007/978-3-642-33287-6](https://doi.org/10.1007/978-3-642-33287-6).
- [3] 神部 勉 and 石井 克哉. **流体力学**. 第 8 版. 裳華房. ISBN: 978-4785320638.