ВМКМ Лек. 11

5. Пример неустойчивого метода.

Запишем для точного решения $y = y(t)$ непрерывной задачи Коши

(*) $$\dot{y} = f(t, y), \qquad y(0) = y_0$$

два приближённых соотношения:

$$\frac{y(t_{n+1}) - y(t_{n-1})}{2h} = \dot{y}(t_n) + O(h^2) = f(t_n, y(t_n)) + O(h^2)$$

и

$$\frac{y(t_n) - y(t_{n-1})}{h} =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n-1}, y(t_{n-1})) \Big] + O(h^2).$$

Первое соотношение получается заменой $\dot{y}$ на центральную разностную производную, а второе вытекает из формулы трапеций.

Сложим эти соотношения с коэффициентами $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{3}$:

$$\frac{2}{3}\,\frac{y(t_{n+1}) - y(t_{n-1})}{2h} + \frac{1}{3}\,\frac{y(t_n) - y(t_{n-1})}{h} =$$

$$= \frac{5}{6}\,f(t_n, y(t_n)) + \frac{1}{6}\,f(t_{n-1}, y(t_{n-1})) + O(h^2).$$

Отсюда следует, что метод

$$\boxed{\frac{y_{n+1} + y_n - 2y_{n-1}}{3h} = \frac{5}{6}\,f_n + \frac{1}{6}\,f_{n-1}}$$

имеет второй порядок аппроксимации.

Здесь $\alpha_0 = \frac{1}{3}$, $\alpha_1 = \frac{1}{3}$, $\alpha_2 = -\frac{2}{3}$.

Метод – явный и двухшаговый.

Выясним теперь, как работает данный метод.

Перепишем разностное уравнение метода в виде

(1) $$y_{n+1} + y_n - 2\,y_{n-1} = h\left(\frac{5}{2}\,f_n + \frac{1}{2}\,f_{n-1}\right).$$

Применим данный метод к задаче Коши

$$\dot{y} = 2t, \qquad y(0) = 0;$$

её решение $y(t) = t^2$.

В точках сетки:

$$y(t_n) = t_n^2 = n^2h^2,$$
$$f(t_n, y(t_n)) = 2t_n = 2nh.$$

Покажем, что сеточная функция со значениями $y_n = n^2h^2$ является *точным* решением дискретной задачи Коши

(2) $$y_{n+1} + y_n - 2\,y_{n-1} = h\,(5\,t_n + t_{n-1}),$$
$$y_0 = 0, \qquad y_1 = h^2.$$

Во-первых, замечаем:

Стартовые значения удовлетворяют формуле $y_n = n^2h^2$.

Напомню, что эта формула есть решение непрерывной задачи Коши, которое рассматривается только в узлах сетки.

А далее будем рассуждать по индукции: убедимся, что если значения y_{n-1} и y_n удовлетворяют этой формуле, то и найденное из разностного уравнения (2) очередное значение y_{n+1} будет ей удовлетворять.

Рассуждая по индукции, получаем:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= 2\,y_{n-1} - y_n + h\left(5\,t_n + t_{n-1}\right) = \\ &= 2\,(n-1)^2 h^2 - n^2 h^2 + h\left(5nh + (n-1)h\right) = \\ &= h^2\,(2n^2 - 4n + 2 - n^2 + 6n - 1) = \\ &= h^2\,(n^2 + 2n + 1) = (n+1)^2 h^2 . \end{aligned}$$

Итак, $y_n = n^2 h^2$ – точное решение.

Таким образом, результат пока – не просто хороший, а превосходный. Решение исходной задачи, рассматриваемое в узлах сетки, в точности совпадает с решением дискретной задачи Коши.

Но мы собираемся исследовать *устойчивость* дискретной задачи, а для этого нужно рассматривать возмущённую задачу.

Переходя к возмущённой задаче, ограничимся возмущением стартовых значений:

$$(3) \qquad \begin{aligned} y_0^* &= y_0 + \varepsilon_0 = \varepsilon_0 , \\ y_1^* &= y_1 + \varepsilon_1 = h^2 + \varepsilon_1 , \qquad \psi_2^* = \ldots = \psi_n^* = 0 . \end{aligned}$$

Чтобы понять, что получится в результате, нам потребуется общее решение разностного уравнения.

Разностное уравнение (2) – линейное неоднородное разностное уравнение с постоянными коэффициентами. Как и в случае дифференциальных уравнений, общее решение есть сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения: $y_n^{\text{общ}} = y_n^{\text{одн}} + y_n$.

Частное решение у нас уже есть.

Частное решение: $y_n = n^2 h^2$.

Решение однородного уравнения $y_{n+1} + y_n - 2\,y_{n-1} = 0$ ищем в виде θ^n.

Здесь – полная аналогия с решением линейных дифференциальных уравнений: и там, и здесь решения ищем в виде экспоненты.

Подставляем:

$$\begin{aligned} &\theta^{n+1} + \theta^n - 2\,\theta^{n-1} = 0 ; \\ &\theta^2 + \theta - 2 = 0 ; \\ &\theta_1 = 1 , \qquad \theta_2 = -2 . \end{aligned}$$

Общее решение однородного уравнения:

$$y_n^{\text{одн}} = A\theta_1^n + B\theta_2^n = A + B(-2)^n .$$

Общее решение уравнения (2):

$$y_n^{\text{общ}} = A + B(-2)^n + n^2h^2 .$$

В частности, при $t_n = T$:

$$y_N^{\text{общ}} = A + B(-2)^N + T^2 ;$$

h мало $\Leftrightarrow$ N велико.

В самом деле, h получается делением T на число шагов N.

Константы A и B нетрудно выразить через стартовые значения.

Найдём A и B для стартовых значений (3):

$$\begin{cases} y_0^* \equiv \varepsilon_0 = A + B \\ y_1^* \equiv h^2 + \varepsilon_1 = A - 2B + h^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{2\varepsilon_0 + \varepsilon_1}{3} , \\ B = \dfrac{\varepsilon_0 - \varepsilon_1}{3} . \end{cases}$$

Заметим теперь, что слагаемое, содержащее $(-2)^N$, присутствует в решении, если $B \neq 0$. Когда это бывает?

$$B \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_0 \neq \varepsilon_1 .$$

Теперь ситуация с устойчивостью становится очевидной.

Следовательно, для сколь угодно малых ε_0 и ε_1, $\varepsilon_0 \neq \varepsilon_1$, найдётся столь малое h, что слагаемое $B(-2)^N$, а вместе с ним и разность $y_N^* - y_N$, будут по модулю сколь угодно велики.

Иными словами, мы не в состоянии задать такую константу C_T, не зависящую от шага, чтобы произведение этой константы на норму возмущения ограничивало бы сверху норму разности решений исходной и возмущённой дискретных задач Коши.

Вывод: рассмотренный нами метод неустойчив.

Обсудим, чем вызвано такое поведение данного метода.