3. Порядок аппроксимации конечноразностного метода.

Рассмотрим задачу Коши

$$(*) \qquad \dot{y} = f(t, y), \qquad y(0) = y_0$$

и конечноразностный метод

$$(**) \qquad \frac{1}{h} \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \, y_{n+1-j} = \Phi(t_n, y_{n+1-k}, \quad , y_{n+1}, h).$$

Если $y = y(t)$ решение задачи Коши $(*)$, то сеточная функция $\psi_\Delta : \Delta \to \mathbb{R}^m$, определяемая формулами

$$n = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \psi_n = 0,$$

$$n = 0, \quad , k \quad 2 \qquad \Rightarrow \qquad \psi_{n+1} = y(t_{n+1}) \quad \varphi_n(y(t_0), \quad , y(t_n), h),$$

$$n = k \quad 1, \quad , N \qquad \Rightarrow \qquad \psi_{n+1} = \frac{1}{h} \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \, y(t_{n+1-j})$$

$$\Phi(t_n, \quad , y(t_{n+1}), h),$$

называется **погрешностью аппроксимации** разностного уравнения $(**)$ на решении $y = y(t)$.

Итак, погрешность аппроксимации это сеточная функция. Её значение в очередном узле сетки это невязка, возникающая при подстановке точного решения непрерывной задачи Коши в разностное уравнение.

Заметьте, что конечноразностный метод рассматривается вместе с конкретной стартовой процедурой, и это естественно: неудачный выбор стартовой процедуры может обесценить все оценки погрешности.

Нам предстоит численно оценивать погрешность аппроксимации, и в качестве её величины будем рассматривать норму этой сеточной функции в смысле уклонения от нуля.

Вводим следующее определение.

Пусть $h \to 0$ (тогда $N \to \infty$, так как $h = T/N$). Говорят, что система разностных уравнений $(**)$ **аппроксимирует** дифференциальное уравнение $(*)$, если при этом

$$\max_{0 \leqslant n \leqslant N} \| \psi_n \| \to 0;$$

если же справедлива оценка

$$\max_{0 \leqslant n \leqslant N} \| \psi_n \| \leqslant C_A h^p, \qquad p > 0,$$

то число p называется **порядком аппроксимации**; тогда $\psi_n = O(h^p)$.

Пример. Покажем, что явный метод Эйлера имеет первый порядок аппроксимации.

■ Ограничимся одномерным случаем.

При изучении правой разностной производной была получена оценка

$$\left| R'(t_n) \right| \leqslant \frac{M_2}{2} h\,, \quad \text{где} \quad M_2 = \max_{[t_n,\, t_{n+1}]} \left| y(t) \right| .$$

В данном случае

$$R'(t_n) = \underbrace{y(t_n)}_{f(t_n,\, y(t_n))} \qquad \frac{y(t_n+h) - y(t_n)}{h} \equiv \psi_{n+1}\,,$$

$$n = 0, \quad , N \quad 1\,.$$

Так как $\psi_0 = 0$, то $\max\limits_{0 \leqslant n \leqslant N} \| \psi_n \| \leqslant \underbrace{\frac{M_2}{2}}_{C_A} h$, где уже

$$M_2 = \max_{[0,T]} \left| y(t) \right| .$$

Итак, $p = 1$. ■

Без доказательства запишем аналогичный вывод для других известных нам простейших методов.

Неявный метод Эйлера также имеет первый порядок аппроксимации, а методы 3° 4° из п.2 второй.

Речь идёт соответственно о правиле средней точки и правиле трапеций.

Вообще говоря, для метода высокого порядка аппроксимации проверка того, что он действительно обладает таким порядком аппроксимации, может быть хотя и трудоёмкой, но достаточно рутинной процедурой.

Теперь введём ещё одну характеристику, также применяемую для оценки точности конечноразностных методов.

Пусть y_{n+1} значение, найденное из уравнения

$$\frac{1}{h} \left[\alpha_0 y_{n+1} + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j\, y(t_{n+1-j}) \right] =$$

$$= \Phi\left(t_n,\, y(t_{n+1-k}), \quad , y(t_n),\, y_{n+1},\, h \right);$$

тогда **локальной погрешностью** метода $(**)$ называется разность

$$\boxed{l_{n+1} = y(t_{n+1}) \quad y_{n+1}}\,.$$

Здесь во всех узлах сетки, кроме самого правого, вместо значений сеточной функции подставлены значения, которые принимает в этих узлах решение исходного дифференциального уравнения. А поэтому понятие локальной погрешности может быть интерпретировано следующим образом.

Локальная погрешность   это погрешность, которую допускает за один шаг конечноразностный метод, стартовавший с точного решения.

Убедимся, что для явных методов локальная погрешность весьма просто связана с погрешностью аппроксимации.

Для явного метода

$$l_{n+1} = \frac{h}{\alpha_0}\left[\frac{\alpha_0}{h}\,y(t_{n+1}) \quad \frac{\alpha_0}{h}\,y_{n+1}\right] =$$

$$= \frac{h}{\alpha_0}\left[\frac{\alpha_0}{h}\,y(t_{n+1}) + \frac{1}{h}\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\,y(t_{n+1-j}) \right.$$

$$\left. \Phi(t_n, \quad , y(t_n), y(t_{n+1}), h)\right] =$$

фиктивный аргумент

$$= \frac{h}{\alpha_0}\,\psi_{n+1}\,.$$

Мы получили простое соотношение между локальной погрешностью метода и погрешностью аппроксимации:

$$\boxed{l_{n+1} = \frac{1}{\alpha_0}\,\psi_{n+1}\,h}\,.$$

Из этого соотношения сразу вытекает, что по величине локальной погрешности можно судить и о порядке аппроксимации явного метода.

Вывод: метод имеет порядок аппроксимации $p \Leftrightarrow l_{n+1} = O(h^{p+1})$.

Вывод верен и для неявных методов.

Для них нет такой простой взаимосвязи между локальной погрешностью метода и погрешностью аппроксимации, но по-прежнему верно, что первая из них имеет на единицу больший порядок малости относительно шага h, чем вторая.

Теперь может показаться, что достаточно установить, что данный конечноразностный метод имеет требуемый порядок аппроксимации, и им можно пользоваться. На самом же деле это не так. Оказывается, метод должен удовлетворять ещё так называемому требованию устойчивости; иначе никакого приемлемого решения (даже очень грубого) мы вообще не получим.

Лекция 16.

4. Устойчивость на конечном отрезке.

Мы сейчас рассматриваем один из видов устойчивости, известных в теории конечноразностных методов. Бывают и другие; поэтому в названии мы уточнили, о каком из требований к устойчивости мы будем говорить.

Внесём малые возмущения в стартовые значения и в правые части разностных уравнений.

Пусть $y_\Delta^* : \Delta \to \mathbb{R}^m$ решение возмущённой дискретной задачи Коши:

$$y_0^* = y_0 + \varepsilon_0 , \quad , \quad y_{k-1}^* = y_{k-1} + \varepsilon_{k-1} ,$$

а при $n = k \quad 1, \quad , N \quad 1$ значение y_{n+1}^* удовлетворяет разностному уравнению

$$\frac{1}{h} \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \, y_{n+1-j}^* = \Phi (t_n , y_{n+1-k}^* , \quad , y_{n+1}^* , h) + \psi_{n+1}^* .$$

Тогда исходная дискретная задача Коши (**) (***) называется **устойчивой на конечном отрезке** $[0, T]$, если $\exists \, h_0 > 0 :$ $\forall h \leqslant h_0$

$$\max_{0 \leqslant n \leqslant N} \| y_n^* \quad y_n \| \leqslant C_T \left(\max_{0 \leqslant n < k} \| \varepsilon_n \| + \sum_{n=k}^{N} \| \psi_n^* \| \quad h \right) ,$$

где константа C_T не зависит от h, ε_0, , ε_{k-1}, ψ_k^*, …, ψ_N^* (но может зависеть от T).

Сделаем одно замечание к данному определению.

Замечание. Константа C_T играет роль абсолютного числа обусловленности для дискретной задачи Коши; она характеризует степень расхождения решений точной и возмущённой задач.

Действительно, в определении утверждалось, что норма погрешности решения задачи не превосходит произведение нормы погрешности возмущения на эту константу.

Обсудим немного приведённое определение. Фактически оно означает, что при малых возмущениях решение возмущённой дискретной задачи Коши мало отличается от решения исходной дискретной задачи. Полезно посмотреть, во что выливается аналогичное требование применительно к непрерывной задаче Коши.

Аналогия для непрерывной задачи Коши: задача

(*) $$y = f(t, y) , \qquad y(0) = y_0$$

называется **устойчивой на конечном отрезке**, если для решения $y^* = y^*(t)$ возмущённой задачи

4

475

$$y^* = f(t, y^*) + \psi^*(t), \qquad y^*(0) = y_0 + \varepsilon_0$$

выполняется неравенство

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \| y^*(t) \quad y(t) \| \leqslant C_T \left(\| \varepsilon_0 \| + \int_0^T \| \psi^*(t) \| \, \mathrm{d}t \right),$$

где C_T не зависит от ε_0 и $\psi^*(t)$.

Известно, что для выполнения приведённого неравенства достаточно, чтобы в той области, которой принадлежит решение $y = y(t)$, норма матрицы Якоби $\left\| \dfrac{\partial f(t, y)}{\partial y} \right\|$ была ограничена сверху некоторой константой L; тогда $C_T = e^{LT}$.

Таким образом, для непрерывных задач Коши требование устойчивости на конечном отрезке весьма слабое требование, и для обычно встречающихся задач оно заведомо выполнено. Содержательная теория устойчивости для обыкновенных дифференциальных уравнений строится на бесконечном промежутке интегрирования.

Например, если ограничиться возмущениями только в начальных данных (т.е. считать, что $\psi^*(t) \equiv 0$), устремить T к бесконечности и потребовать, чтобы C_T не зависело от T, получается известное Вам определение устойчивости по Ляпунову. Это достаточно содержательное понятие; Вы знаете немало примеров как устойчивых, так и не устойчивых по Ляпунову задач Коши.

Для дискретных задач Коши ситуация иная. Здесь понятие устойчивости на конечном отрезке отнюдь не тривиально.

Именно, сейчас я приведу пример конечноразностного метода, который на первый взгляд выглядит довольно естественно и, в частности, обеспечивает второй порядок аппроксимации. Однако устойчивостью на конечном отрезке он не обладает.

5. Пример неустойчивого метода.

Запишем для точного решения $y = y(t)$ непрерывной задачи Коши

$$(*) \qquad y = f(t, y), \qquad y(0) = y_0$$

два приближённых соотношения:

$$\frac{y(t_{n+1}) - y(t_{n-1})}{2h} = y(t_n) + O(h^2) \equiv f(t_n, y(t_n)) + O(h^2)$$

и

$$\frac{y(t_n) - y(t_{n-1})}{h} =$$

$$= \frac{1}{2} \Big[f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n-1}, y(t_{n-1})) \Big] + O(h^2).$$

5

из 5