ВМКМ

Лек 12.

27.03.20

6. Корневое условие.

Причина неустойчивости конечноразностного метода из п.5 – в том, что уравнение

$$\theta^2 + \theta - 2 = 0 ,$$

которое лишь множителем $\frac{1}{3}$ отлично от уравнения

$$\alpha_0\theta^2 + \alpha_1\theta + \alpha_2 = 0 ,$$

имеет корень $\theta_2 = -2$, по модулю бо́льший 1; это и привело к наличию быстро растущей компоненты в решении возмущённой дискретной задачи.

Коэффициентами записанного выше квадратного уравнения служат коэффициенты из левой части типового разностного уравнения рассмотренного метода. Оказывается, что и в общем случае надо присмотреться к корням подобного уравнения.

Вот только в левой части его будет стоять многочлен степени k. Запишем:

В общем случае для анализа устойчивости конечноразностного метода с типовым уравнением вида

$$(**) \qquad \frac{1}{h}\sum_{j=0}^{k}\alpha_j\, y_{n+1-j} = \Phi(t_n, y_{n+1-k}, \ldots, y_{n+1}, h),$$

следует рассмотреть корни (вообще говоря, комплексные) **первого характеристического многочлена** этого метода:

$$\varrho(\theta) = \alpha_0\theta^k + \alpha_1\theta^{k-1} + \ldots + \alpha_k .$$

Сразу же сделаем одно замечание по поводу корней данного многочлена.

Замечание. Многочлен $\varrho(\theta)$ *всегда* имеет корень $\theta_1 = 1$, так как по лемме о коэффициентах типового разностного уравнения

$$\varrho(1) = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_k = \sum_{j=0}^{k}\alpha_j = 0 .$$

Если $k > 1$ (т.е. метод – многошаговый), то у первого характеристического многочлена есть и другие корни.

Аккуратный анализ показывает вот что: если корень по модулю больше 1, то ему в общем решении разностного уравнения отвечает быстро растущая составляющая; если корень по модулю меньше 1, то ему отвечает быстро убывающая составляющая; если корень по модулю равен 1, то отвечающая ему составляющая остаётся ограниченной, если корень простой, иначе же растёт.

С этим связано введение следующего определения.

Конечноразностный метод удовлетворяет **корневому условию**, если все корни $\varrho(\theta)$ лежат внутри единичной окружности либо на ней само́й, причём те корни, которые лежат на окружности, являются простыми.

Теорема (б/д). Конечноразностный метод устойчив на конечном отрезке $\Leftrightarrow$ он удовлетворяет корневому условию.

Следствие. Все одношаговые методы устойчивы на конечном отрезке, так как единственный корень $\theta_1 = 1$ многочлена

$$\varrho(\theta) = \alpha_0\theta + \alpha_1 \equiv \theta - 1$$

является простым.

Ясно, что методы, не удовлетворяющие корневому условию, практически бесполезны. Для них даже те малые погрешности, которые возникают при вычислениях на ЭВМ за счёт конечной разрядности, быстро приводят к полной потере точности. При этом попытка уменьшить шаг ведёт лишь к ещё более быстрому нарастанию погрешности.

С другой стороны, как мы сейчас увидим, устойчивые методы, аппроксимирующие исходную задачу Коши с достаточной степенью точности, могут успешно применяться для её решения.

Это не означает, что здесь нет никаких проблем: метод может быть слишком грубым или же требовать слишком большого числа операций. Однако если отвлечься от всего этого, то в принципе ответ на вопрос о пригодности таких методов положителен.

7. Сходимость конечноразностных методов.

Глобальной погрешностью конечноразностного метода (**) называется сеточная функция $\varepsilon_\Delta : \Delta \to \mathbb{R}^m$, значения которой в узлах t_n равны разности

$$\boxed{\varepsilon_n = y(t_n) - y_n}$$

решений непрерывной и дискретной задач Коши.

Численной мерой глобальной погрешности метода будет, естественно, норма этой сеточной функции.

Следующее определение:

Конечноразностный метод называется **сходящимся**, если

$$\max_{0 \leqslant n \leqslant N} \|\varepsilon_n\| \to 0 \qquad \text{при } h \to 0\,;$$

если же справедлива оценка

$$\max_{0 \leqslant n \leqslant N} \|\varepsilon_n\| \leqslant \overline{C}\, h^p\,, \qquad p > 0\,,$$

то число p называется **порядком точности**; тогда $\varepsilon_n = O(h^p)$.

Обратите внимание: порядок точности конечноразностного метода мы обозначили буквой p, но точно также мы обозначали уже другую величину – порядок аппроксимации. Сейчас мы увидим, что это сделано не случайно.

Но прежде всего введём ещё одно определение.

Будем говорить, что стартовые значения $y_1, \ldots, y_{k-1}$ заданы с **порядком точности**, равным p, если

$$\max_{1 \leqslant n \leqslant k-1} \| y(t_n) - y_n \| \leqslant C_S h^p ;$$

по-прежнему предполагаем, что $y_0 = y(0)$.

Вот теперь можно сформулировать основную теорему данного пункта.

Теорема. Пусть конечноразностный метод:

1) имеет порядок аппроксимации, равный p;

2) устойчив на конечном отрезке.

Тогда он сходится с порядком точности, равным p, если только стартовые значения заданы с тем же порядком точности.

Последняя оговорка имеет технический характер; для одношаговых методов она вообще излишня.

■ Полагаем $y_n^* = y(t_n)$.

Пусть ψ_{n+1} – погрешность аппроксимации:

$$\psi_{n+1} = \frac{1}{h} \sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+1-j}^* - \Phi(t_n, y_{n+1-k}^*, \ldots, y_{n+1}^*, h),$$

$$n = k-1, \ldots, N-1 .$$

В силу предположения об аппроксимации

$$\max_n \| \psi_n \| \leqslant C_A h^p .$$

Переписав равенство для ψ_{n+1} в виде

$$(1) \qquad \frac{1}{h} \sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+1-j}^* = \Phi(t_n, \ldots, y_{n+1}^*, h) + \psi_{n+1},$$

видим, что y_n^* – решение возмущённой дискретной задачи (1) при стартовых значениях $y_0^*, \ldots, y_{k-1}^*$.

В силу предположения об устойчивости имеем неравенство

$$\max_{0 \leqslant n \leqslant N} \| y_n^* - y_n \| \leqslant C_T \left(\max_{0 \leqslant n < k} \| y_n^* - y_n \| + \sum_{n=k}^{N} \| \psi_n \| \cdot h \right) \leqslant$$

3 из 4.

$$\leqslant \ C_T\left(C_S h^p + T\max_n \|\psi_n\|\right) \ \leqslant$$

$$\leqslant \ C_T\left(C_S h^p + T C_A h^p\right) \ = \ C_T\left(C_S + T C_A\right) h^p .$$

Итак, метод действительно сходится с порядком точности, равным p, причём можно принять

$$\bar{C} \ = \ C_T\left(C_S + T C_A\right) .$$

■

Замечание. Для одношаговых методов $\max\limits_{0 \leqslant n < 1} \| y_n^* - y_n \| \ = \ 0$, так что для них $\bar{C} \ = \ C_T C_A T$.

Итак, мы доказали важнейший результат, лежащий в основе теории численных методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Его можно символически выразить следующей формулой.

Кратко:

АППРОКСИМАЦИЯ + УСТОЙЧИВОСТЬ = СХОДИМОСТЬ

Одновременно мы видели, что при наличии устойчивости порядок точности совпадает с порядком аппроксимации. Поэтому два этих термина в дальнейшем мы можем считать синонимами.

Доказанная теорема применима как к явным, так и к неявным методам. Сейчас мы рассмотрим некоторые вопросы, касающиеся именно *неявных* конечноразностных методов.

4 из 4.