离散数学：集合论：有序组

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

有序组

- 元素的**无序**性是集合的特征之一
- 元素的**有序**组合如何从集合定义？
- 二元有序组，或者二元组(2-tuple)，或者序偶(ordered pairs)
- 设a,b为任意对象，称集合族{{a},{a,b}}为二元有序组，简记为<a,b>
- 称a为<a,b>的**第一分量**，b为**第二分量**

“有序”的含义？

- 定理：对于任意序偶<a,b>, <c,d>，<a,b>=<c,d>当且仅当a=c且b=d
- 充分性是显然的
- 证明必要性：设<a,b>=<c,d>，也就是
- {{a},{a,b}}={{c},{c,d}}
- ⇒∪{{a},{a,b}}=∪{{c},{c,d}} ⇒ {a,b}={c,d}
- 以及，{{a},{a,b}}={{c},{c,d}}
- ⇒ ∩{{a},{a,b}}= ∩{{c},{c,d}} ⇒ {a}={c}
- 综合两式，有a=c且b=d

有序的含义

- 当a≠b时：<a,b>≠<b,a>
- 但{a,b}={b,a}
- 有序组{{a},{a,b}}的巧妙定义
- 利用元素和集合的两个不同层次实现两个对象a,b的有序排列

n元有序组的定义

- n元有序组(n-tuple)$<a_1,\ldots,a_n>$
- 递归定义：
- n=2时，$<a_1,a_2>=\{\{a_1\},\{a_1,a_2\}\}$
- n>2时，$<a_1,\ldots,a_n>=<<a_1,\ldots,a_{n-1}>, a_n>$
- a_i称为n元组的第i分量
- 定理：对于任意n元组$<a_1,\ldots,a_n>=<b_1,\ldots,b_n>$ 当且仅当$a_1=b_1,\ldots,a_n=b_n$

离散数学：集合论：笛卡儿积

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

集合的一种运算

- 对任意集合$A_1,A_2,\ldots,A_n$，$A_1\times A_2$称作集合A_1，A_2的**笛卡儿积**，定义如下：
- $A_1\times A_2 = \{<u,v> \mid u\in A_1,v\in A_2\}$
- $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n = (A_1\times A_2\times\ldots\times A_{n-1})\times A_n$
- 例子：A={1,2}，B={a,b}，则：
- $A\times B$等于$\{<1,a>, <1,b>, <2,a>, <2,b>\}$
- $B\times A$等于$\{<a,1>, <a,2>, <b,1>, <b,2>\}$

笛卡儿积例子

- $A\times\varnothing = \varnothing\times A = \varnothing$
- $R^2=\{<x,y>|x,y是实数\}$，R^2为笛卡儿平面
- R^3为三维笛卡儿空间
  笛卡尔是解析几何创始人，首次用三元组表示空间中的点，统一了代数与几何
- 一般来说：
- $A\times B\neq B\times A$（不满足交换律）
- $A\times(B\times C)\neq(A\times B)\times C$（不满足结合律）

笛卡儿积对集合运算的分配律

- 定理：设A,B,C为任意集合，\$表示∪,∩或-运算，那么：$A\times(B\$C)=(A\times B)\$(A\times C)$，$(B\$C)\times A=(B\times A)\$(C\times A)$
- 证明： $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$
- $<x,y>\in A\times(B\cup C)$
- $\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in(B\cup C)$
- $\Leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)$
- $\Leftrightarrow(x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)$
- $\Leftrightarrow(<x,y>\in A\times B)\vee(<x,y>\in A\times C)$
- $\Leftrightarrow <x,y>\in(A\times B)\cup(A\times C)$

笛卡儿积的基数

- 定理：对于任意有限集合$A_1,\ldots,A_n$，有$|A_1\times\ldots\times A_n|=|A_1|*\ldots*|A_n|$

离散数学：集合论：关系定义

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

关系的基本概念

- 关系是各个对象之间的联系和对应
- 最常见到是两组对象之间的联系和对应
  职员-部门的隶属关系
- 也有三组或者更多对象之间的联系和对应
  供应商-工程-零件的供应关系
- 采用**二元组**或者**多元组**的**集合**来表示**关系**
  ED={<张三,人事部>,<李四,销售部>,<王五,技术部>}
  SPJ={<公司甲,大楼,水泥>,<公司甲,公路,水泥>,<公司乙,大楼,钢筋>,<公司丙,公路,沥青>}

关系的定义

- R称为集合$A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$到$A_n$的n元关系，如果R是$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$的一个子集。当$A_1 = A_2 = \ldots = A_{n-1} = A_n$时，也称R为A上的n元关系
- 如果R是A×B的一个子集，称R是A到B的二元关系，如果R是A×A的一个子集，则称R是A上的二元关系
- 我们主要研究二元关系

关系的例子

- 自然数的相等关系
  $E_N=\{<0,0>,<1,1>,<2,2>,\ldots\}$（列举法）
- 整除关系$D=\{<x,y>|x整除y\}$（描述法）
- 小于关系L：归纳法
- 基础条款：$<0,1>\in L$
- 归纳条款：若$<x,y>\in L$，则$<x,y+1>\in L$，$<x+1,y+1>\in L$
- 终极条款（略）

几个特殊的二元关系

- 空关系∅，$\varnothing \subseteq A\times B$，称∅为A到B的空关系
- 全关系A×B，笛卡儿积A×B是A到B的全关系
- 相等关系$E_A=\{<x,x>|x\in A\}$，称作A上的相等关系

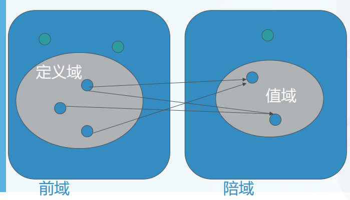
关系的几个概念

- 定义：设R为A到B的二元关系($R\subseteq A\times B$)
- xRy表示$<x,y>\in R$，¬xRy表示$<x,y>\notin R$
- R的定义域domain：
- $Dom(R)=\{x|x\in A \wedge \exists y(<x,y>\in R)\}$
- R的值域range：
- $Ran(R)=\{y|y\in B \wedge \exists x(<x,y>\in R)\}$
- 称A为R的前域，B为R的陪域

关系的表示法

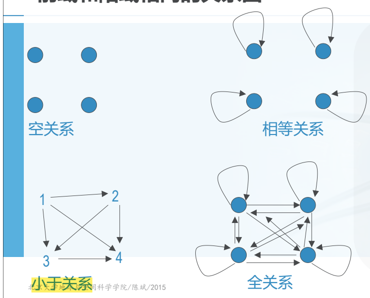
- 集合表示法
- $R=\{<x,y>|P(x,y)\}$
- 适合于表示集合的几种方法均可，如前面的关系例子
- 关系图法
- 前域和陪域都是有限集合
- 一般的关系图，有向箭头表示元素之间存在关系
- 可以表示前域和陪域相同的关系图

前域和陪域不同的关系图



前域　　陪域

前域和陪域相同的关系图



关系矩阵法表示

- 前域和陪域都是有限集合
- 设关系$R \subseteq A \times B$，$A=\{a_1,\ldots,a_m\}$，$B=\{b_1,\ldots,b_n\}$
- 关系R的**关系矩阵**M_R的定义：
- $m_{ij}=1$当且仅当$a_i R b_j$
- $m_{ij}=0$当且仅当$\neg a_i R b_j$

关系矩阵例子

$$M_R=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

空关系

$$M_R=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

相等关系

$$M_R=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

小于关系

$$M_R=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

全关系

离散数学：集合论：关系基本运算

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

运算基本定义

- **关系相等**
- 如果关系R和S具有**相同的前域和陪域**，并且$\forall x \forall y(xRy \leftrightarrow xSy)$
- 关系运算中的前域和陪域
- $R \subseteq A \times B$，A为前域，B为陪域
- 参与关系运算的两个关系应该具有**相同的前域和陪域**

这个条件不是本质的，因为总可以对关系的前域和陪域做适当的扩充，使之满足条件

作为集合的关系运算

- R和S为A到B的二元关系，$R,S \subseteq A \times B$
- 并：$R \cup S=\{<x,y>|xRy \vee xSy\}$
- 交：$R \cap S=\{<x,y>|xRy \wedge xSy\}$
- 差：$R - S=\{<x,y>|xRy \wedge \neg xSy\}$
- 补：$R^- = A \times B - R=\{<x,y>| \neg xRy\}$

并不是全集U-R，而是全关系与R的差

对应的关系矩阵运算

- M_R和M_S为R、S的关系矩阵
- 并：$M_{R\cup S}=M_R\vee M_S$（矩阵对应分量做析取）
- 交：$M_{R\cap S}=M_R\wedge M_S$（矩阵对应分量做合取）
- 补：$M_{S^-}=(M_S)^-$（矩阵对应分量做否定）
- 差：$M_{R-S}=M_{R\cap S^-}=M_R\wedge M_{S^-}$

关系逆运算(converse)

- $R^\sim=\{<y,x>|xRy\}$，$R\subseteq A\times B$
- 显然，R的逆关系是B到A的关系：$R^\sim\subseteq B\times A$
- 逆关系关系矩阵的运算：$M_{R^\sim}=M_{R^T}$，矩阵转置
- 逆运算例子

  $E_A^\sim=E_A$；$\varnothing^\sim=\varnothing$；$(A\times B)^\sim=B\times A$

  自然数“小于<”关系的逆关系是“大于>”

  自然数“小于<”关系的补关系是“大于或等于≥”

关系逆运算的性质

- 逆运算和并交差补等运算都满足分配律
- $R,S\subseteq A\times B$，\$代表并交差运算之一
- $R^{\sim\sim}=R$（两次逆复原）
- $R^{\sim -}=R^{-\sim}$（逆的补等于补的逆）
- $(R\$S)^\sim=R^\sim\$S^\sim$（对并交叉运算分配律）
- $R\subseteq S$当且仅当$R^\sim\subseteq S^\sim$
- 从矩阵转置角度来看，表现为转置运算不会改变矩阵分量的值

离散数学：集合论：关系合成运算

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

关系合成运算(composition)

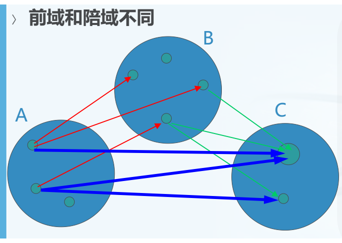
- R为A到B的二元关系，$R\subseteq A\times B$
- S为B到C的二元关系，$S\subseteq B\times C$
- R和S的合成关系$R\circ S$定义为：
- $R\circ S=\{<x,z>|x\in A\wedge z\in C\wedge\exists y(y\in B\wedge xRy\wedge ySz)\}$
- 简化形式：$R\circ S=\{<x,z>|\exists y(xRy\wedge ySz)\}$
- $R\circ S\subseteq A\times C$，是A到C的二元关系
- 由于参与合成的第一个关系的陪域要等于第二个关系的前域，所以合成关系不满足交换律

关系合成运算的例子

- 设E_A是A上的相等关系，E_B是B上的相等关系，$R\subseteq A\times B$
- $E_A\circ R=R\circ E_B=R$
- $\varnothing\circ R=R\circ\varnothing=\varnothing$
- $R\circ R^\sim=E_A$（A×B，B×A）
- $\{<x,x>|\exists y(xRy\wedge yRx)\}$
- $R^\sim\circ R=E_B$（B×A，A×B）
- $\{<y,y>|\exists x(yRx\wedge xRy)\}$
- 兄弟关系和父子关系的合成是“叔侄”关系

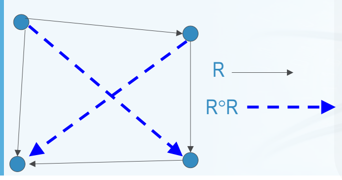
用关系图表示合成运算

- 前域和陪域不同



用关系图表示合成运算

- 前域和陪域相同



用关系矩阵表示合成运算

- 关系合成运算对应**关系矩阵**的**乘法**
- 将**数乘换成合取**，将**数加换成析取**
- 设$|A|=m$，$|B|=n$，$|C|=p$，
- $R \subseteq A \times B$，$S \subseteq B \times C$，
- 则$M_R=[r_{ij}]_{m*n}$， $M_S=[s_{ij}]_{n*p}$
- $T=R \circ S$，有$T \subseteq A \times C$，
- $M_T=M_R*M_S=[t_{ij}]_{m*p}$
- 其中$t_{ij}=\vee_{k=1..n}(r_{i,k} \wedge s_{k,j})$（$i=1,..,m;j=1,..,p$）

合成运算的性质

- $R \circ (S \cup T)=(R \circ S) \cup (R \circ T)$（**左分配律**）
- $(S \cup T) \circ R=(S \circ R) \cup (T \circ R)$（**右分配律**）
- $\exists x(A(x) \vee B(x)) \models\!\!\dashv \exists xA(x) \vee \exists xB(x)$
- $R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ T)$
- $(S \cap T) \circ R \subseteq (S \circ R) \cap (T \circ R)$
- $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \models \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$
- $(R \circ S)^{\sim}=S^{\sim} \circ R^{\sim}$
- $R \circ (S \circ T)=(R \circ S) \circ T$（**结合律**，下页证明）

证明$R \circ (S \circ T)=(R \circ S) \circ T$

- $<x,y> \in R \circ (S \circ T)$
- $\Leftrightarrow \exists u(<x,u> \in R \wedge <u,y> \in S \circ T)$
- $\Leftrightarrow \exists u(<x,u> \in R \wedge \exists v(<u,v> \in S \wedge <v,y> \in T))$
- $\exists xA(x) \wedge B \models\!\!\dashv \exists x(A(x) \wedge B)$
- $\Leftrightarrow \exists v \exists u(<x,u> \in R \wedge <u,v> \in S \wedge <v,y> \in T)$
- $\Leftrightarrow \exists v(\exists u(<x,u> \in R \wedge <u,v> \in S) \wedge <v,y> \in T)$
- $\Leftrightarrow \exists v(<x,v> \in R \circ S \wedge <v,y> \in T)$
- $\Leftrightarrow <x,y> \in (R \circ S) \circ T$

关系的幂运算R^n

- 定义为自身的n次合成
- $R^n=R \circ \ldots \circ R$（n个R合成）
- $R^0=E_A$
- 幂运算的性质
- $R^m \circ R^n=R^{m+n}$
- $(R^m)^n=R^{mn}$
- 可以把m看作参数，对n进行归纳法证明

幂关系有限定理

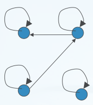
- 设集合A的基数为n，R是A上的二元关系，则存在自然数i,j使得$0\le i<j\le 2^{n^2}$，有$R_i=R_j$
- 证明：
- R的任意次幂运算**仍是**A上的二元关系
- 有限集A上不同的二元关系数量是**有限**的
- 因为$R\subseteq A\times A$，而$A\times A$**子集**的个数有限
- 如果$|A|=n$，A上的二元关系的数量是2^{n^2}
- 根据“**鸽笼原理**”，在$0\sim 2^{n^2}$共计$2^{n^2}+1$个R的幂关系中，一定有两个是相同的

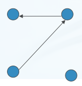
离散数学：集合论：关系基本特性

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

A上一些特殊性质的二元关系

- **自反关系**(reflexive)
- $\forall x(x\in A\rightarrow xRx)$
- 关系图：每个节点都有环
- 关系矩阵：对角线全为1
- **反自反关系**(irreflexive)
- $\forall x(x\in A\rightarrow \neg xRx)$
- 关系图：每个节点都没有环
- 关系矩阵：对角线全为0





A上一些特殊性质的二元关系

- **对称关系**(symmetric)
- $\forall x\forall y(x,y\in A\wedge xRy\rightarrow yRx)$
- 关系图：两个节点之间有边的就有反向边
- 关系矩阵：对称矩阵
- **反对称关系**(antisymmetric)
- $\forall x\forall y(x,y\in A\wedge xRy\wedge yRx\rightarrow x=y)$
- 关系图：两个节点之间只能有一条单向边
- 关系矩阵：$c_{i,j}=1(i\ne j)$时$c_{j,i}=0$

A上一些特殊性质的二元关系

- **传递关系**(transitive)
- $\forall x\forall y\forall z(x,y,z\in A\wedge xRy\wedge yRz\rightarrow xRz)$
- 关系图：如果有边$v_1v_2,\ldots,v_{n-1}v_n$，则有边v_1v_n
- 例子：
- 设A={1,2,3}，R是A上的二元关系
- R={<1,1>,<1,3>,<2,2>,<3,3>}是自反的
- R={<1,3>,<3,1>}是反自反的，不是自反的
- R={<1,1>}不是自反，也不是反自反

特殊性质二元关系的例子

- A上的空关系∅是**反自反**的，不是自反的
- 如果A=∅，那么A上的空关系就是**自反**的，同时也是**反自反**的
  因为注意定义谓词的前件x∈A始终为假
- R={<1,3>,<3,1>,<1,2>,<1,1>} 不是对称的，也不是反对称的
- R={<1,2>,<2,1>}是**对称**的
- R={<1,2>,<3,1>}是**反对称**的
- A上的相等关系E_A既是**对称**的，又是**反对称**的

特殊性质二元关系的例子

- R={<1,2>,<2,3>,<1,3>,<3,3>}是**传递**的，但R-{<1,3>}不是传递的
- 空关系∅是**传递**的，R={<1,2>,<1,3>}也是**传递**的，因为它们使得传递定义的**前件为假**
- 所有非空集合上的：
  空关系都是反自反、对称、反对称、传递的；
  全关系是自反，对称，传递的；
  相等关系是自反，对称，反对称，传递的；
- 整数集合上的**整除关系**是自反、反对称、传递的；
- 三角形的**相似关系**、**全等关系**都是自反、对称、传递的

离散数学：集合论：关系特性定理

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

关系特性的一些定理

- R自反**当且仅当**$E_A \subseteq R$
- R反自反**当且仅当**$E_A \cap R \subseteq \varnothing$
- R对称**当且仅当**$R \subseteq R^{\sim}$
- 设R对称，则：
- $<x,y> \in R \Rightarrow <y,x> \in R \Leftrightarrow <x,y> \in R^{\sim}$
- 设$R \subseteq R^{\sim}$，则：
- $xRy \Rightarrow xR^{\sim}y \Leftrightarrow yRx$，所以R对称

关系特性的一些定理

- R反对称**当且仅当**$R \cap R^{\sim} \subseteq E_A$
- 设R反对称，则：
- $<x,y> \in R \cap R^{\sim} \Leftrightarrow <x,y> \in R \wedge <x,y> \in R^{\sim}$
- $\Leftrightarrow$ **$<x,y> \in R \wedge <y,x> \in R \Rightarrow x=y$**
- $\Leftrightarrow <x,y> \in E_A$
- 设$R \cap R^{\sim} \subseteq E_A$，由$<x,y> \in R \wedge <y,x> \in R$
- $\Leftrightarrow <x,y> \in R \wedge <x,y> \in R^{\sim}$
- $\Leftrightarrow$ **$<x,y> \in R \cap R^{\sim} \Rightarrow <x,y> \in E_A$**
- $\Leftrightarrow x=y$，所以R是反对称

关系特性的一些定理

- R传递**当且仅当**$R^2 \subseteq R$
- 设R传递：
- $<x,y> \in R^2$
- $\Leftrightarrow$ **$\exists u(xRu \wedge uRy) \Rightarrow \exists u(xRy)$**
  $\Leftrightarrow <x,y> \in R$
- 设$R^2 \subseteq R$：
- $xRy \wedge yRz \Leftrightarrow$ **$xR^2z \Rightarrow xRz$**，所以R传递

关系基本特性的运算封闭性

- 具有某特性的关系，在运算后，运算结果是否保持这个特性，称为运算封闭性
- 所有5个特性对**交运算**封闭，即如果R_1、R_2都具有某个特性，则R1∩R2仍具有这个特性：
- 例证：对称性，$xR_1 \cap R_2y \Leftrightarrow$ **$xR_1y \wedge xR_2y \Leftrightarrow yR_1x \wedge yR_2x$** $\Leftrightarrow yR_1 \cap R_2x$
- 自反、反自反、对称性对**并运算**封闭
- 例证：自反性，$xR_1x \Rightarrow xR_1x \vee xR_2x \Leftrightarrow xR_1 \cup R_2x$（并不要求$R_2$具有特性）
- 反自反、对称、反对称对**差运算**封闭
- 例证：反对称：$xR_1-R_2y \wedge yR_1-R_2x \Rightarrow xR_1y \wedge yR_1x \Rightarrow x=y$
- 实际上，只要R_1反对称，任何R_2，R_1-R_2都是反对称的

关系基本特性的运算封闭性

- 对称性对**补运算**封闭
- $xR^{-}y$，**假设** $\neg yR^{-}x$，那么yRx，即xRy，和已知矛盾，所以有$yR^{-}x$
- 所有5个特性对**求逆运算**均封闭
- 例证：传递，$xR^{\sim}y \wedge yR^{\sim}z$
- $\Leftrightarrow yRx \wedge zRy \Rightarrow zRx \Leftrightarrow xR^{\sim}z$
- 自反对**合成运算**封闭，其它性质对合成运算均不封闭：
- $xR_1x \wedge xR_2x \Rightarrow xR_1 \circ R_2x$