

## 离散数学：图论：图的定义

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

## 图论的创立

- 柯尼斯堡七桥问题的解决是图论创立的标志
- 1736年欧拉在发表的论文中证明七桥无法仅走一遍能遍历七座桥
- 并提出和解决了“一笔画”问题
- 欧拉将现实问题抽象为平面上的点和线的组合，并通过讨论点的奇偶性来判定能否遍历



## 图(Graph)的定义

- 由**结点**和联结结点的**边**所构成的**离散结构**
- 记做 $G = \langle V, E \rangle$
- 结点vertex集**V**：非空集合
- 边edge集**E**：**多重集合**（集合中可能**存在相同元素**，元素附带一个**重数的属性**）
- 边集是**多重集合**表示图可以有**多个相同的边**

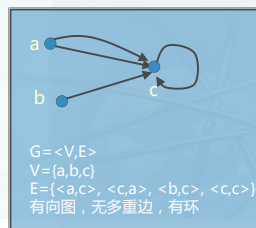
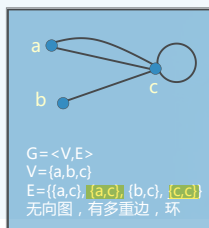
北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

## 边和结点的关系

- 有向边**(directed edge)用结点的**二元有序组**表示
- 第一分量称作**起点**，第二分量称作**终点**
- 无向边**(indirected edge)用结点的**两元素多重集合**表示
- 无向边可以是多重集**意味着**允许无向环(loop)**
- 无向边的端点称作**邻接(adjacent)**结点

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

## 图的例子



北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

## 离散数学：图论：基本概念

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

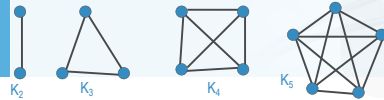
## 图的基本概念

- 对于图  $G = \langle V, E \rangle$
- 有限图**：V, E都是有限集，否则称为无限图
- 重边 multiple edge**：E中重数大于1的边称为重边（平行边）
- 重图 multigraph**：边集E中至少有一个元素重数大于1
- 单图**：每条边的重数都等于1

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

## 图的基本概念

- 简单图 simple graph**：无环和重边的无向图
- 完全图 complete graph**：任何两个不同结点间都有边关联的简单图，记做  $K_n$
- 孤立结点 isolated vertex**：不是任何边的端点的结点
- 零图**：仅有孤立结点构成的图（ $E = \emptyset$ ）



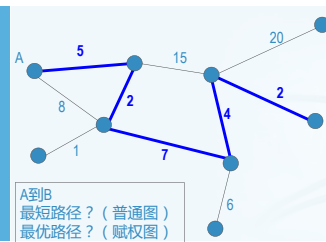
北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

## 赋权图

- 赋权图  $G = \langle V, E, f, g \rangle$
- 结点权函数**： $f: V \rightarrow W$
- 边权函数**： $g: E \rightarrow W$
- W可以是任何集合，常为实数的子集
- 普通的图研究结点和边之间的拓扑关系
- 如：邻接，连通，通路，划分等性质
- 赋权图给普通图附加了数量关系
- 研究距离，成本，代价，规模等性质
- 是GIS应用的基础

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

## 赋权图例子



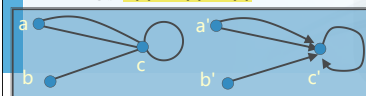
北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

## 离散数学：图论：度和正则图

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

## 结点的度(degree)

- 端点v的度  $d(v)$  定义为关联端点v的边的数目
- 有向图**中，度分为出度(out-degree)和入度(in-degree)
- 出度  $d^+(v)$  是端点v作为有向边起点的数目
- 入度  $d^-(v)$  是端点v作为有向边终点的数目
- 有向图中度  $d(v) = d^+(v) + d^-(v)$



北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

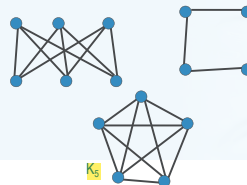
## 度的性质

- 所有端点度的总和为偶数，而且是边数目的两倍
- 有向图中出度的总和等于入度的总和
- 奇数度结点必为偶数个（反证法可证）
- 自然数序列  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  是某个图的度序列当且仅当序列中所有数的总和为偶数
- 一度的顶点称为悬挂点 (pendant node)

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

## 正则图(regular graph)

- 所有顶点的度均相同的图称为正则图，按照顶点的度数  $k$  称作  $k$ -正则图
- $K_n$  是  $n-1$  正则图



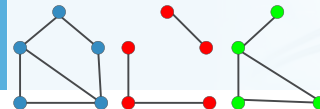
北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

## 离散数学：图论：子图与同构图

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

## 子图(subgraph)

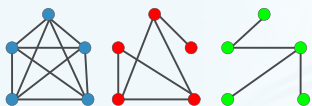
- $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle, G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$
- $V_1 \subseteq V_2, E_1 \subseteq E_2$ ，称  $G_1$  是  $G_2$  的子图
- 如果  $G_1 \neq G_2$ ，则  $G_1$  是  $G_2$  的真子图
- 生成子图 spanning subgraph
- 如果  $G_1$  是  $G_2$  的子图，且  $V_1 = V_2$



北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

## 补图

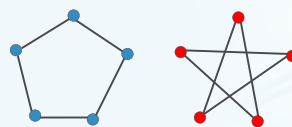
- $G_1, G_2$  互为补图：
- $V_1 = V_2, E_1 \cap E_2 = \emptyset, \langle V_1, E_1 \cup E_2 \rangle$  是完全图



北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

## 图的同构 isomorphic

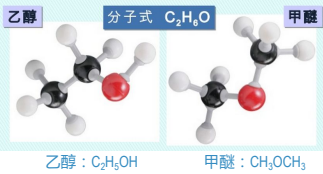
- $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle, G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$
- $|V_1| = |V_2|, |E_1| = |E_2|$
- 如果可以将  $V_1$  中所有的结点一一对应地置换为  $V_2$  中的结点名后得到的图等于  $G_2$



北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

## 不同构的图：化学中的同分异构体

- 分子式相同而结构和性质不同的化合物之间互称**同分异构体**。
- 分子式相同意味着 $V_1=V_2$ ,  $|E_1|=|E_2|$



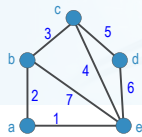
北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

## 离散数学：图论：路径与连通性

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gisichen@pku.edu.cn

## 拟路径(pseudo path)

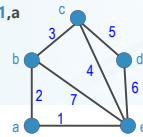
- 顶点 $v_1$ 到 $v_l$ 的**拟路径**：
- $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \dots, v_{l-1}, e_{l-1}, v_l$
- 其中 $e_i = \langle v_i, v_{i+1} \rangle$  (或者 $\{v_i, v_{i+1}\}$ )
- 拟路径中的**边数**称作拟路径的**长度**
- 拟路径例子：
- $a, 1, e, 7, b, 3, c, 3, b, 2, a$
- $c, 4, e, 4, c, 3, b, 7, e, 4, c$



北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

## 路径(walk)与通路(path)

- 如果拟路径中的**边各不相同**，称作**路径**
- $a, 1, e, 7, b, 3, c, 4, e, 6, d$
- 如果路径中的**顶点各不相同**，称作**通路**
- $a, 1, e, 7, b, 3, c, 5, d$
- $v_1 = v_l$ 的路径称为**闭路径**
- $a, 2, b, 7, e, 4, c, 5, d, 6, e, 1, a$
- $v_1 = v_l$ 的通路称作**回路**
- $a, 1, e, 6, d, 5, c, 3, b, 2, a$



北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

## 路径与通路性质

- 路径和通路定理**
- 在有 $n$ 个顶点的图 $G$ 中，如果有顶点 $u$ 到 $v$ 的拟路径，那么 $u$ 到 $v$ 必有**路径**，并且必有**长度不大于 $n-1$ 的通路**
- （考虑拟路径中重复顶点的压缩）
- 闭路径和回路定理**
- 在有 $n$ 个顶点的图 $G$ 中，如果有顶点 $v$ 到 $v$ 的**闭路径**，那么必定有一条从 $v$ 到 $v$ 的**长度不大于 $n$ 的回路**

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

## 图的连通性

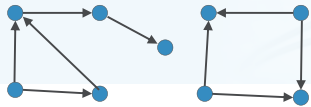
- $u$ 可达 $v$  (accessible)
- $u=v$ ，或者存在一条 $u$ 到 $v$ 的路径
- 连通的无向图** connected
- 无向图中任意两个顶点都是**可达**的
- 强连通的有向图**
- 有向图中任意两个顶点都是**互相可达**的



北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

## 图的连通性

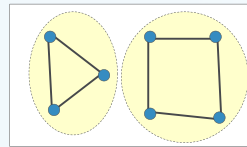
- › 单向连通的有向图
- › 任意两个顶点，至少从一个顶点到另一个是可达的
- › 弱连通的有向图
- › 将有向图看作无向图时是连通的



北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

## 连通分支 (connected component)

- › 图G的连通子图G', 而且G'不是任何其它连通子图的真子图 (最大性)



北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

## 离散数学：图论：欧拉图与哈密顿图

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

## 欧拉图及欧拉路径

- › 欧拉图 Euler graph
- › 如果图G上有一条经过所有顶点、所有边的闭路径 (边不重复, 允许顶点重复)
- › 欧拉路径 Euler walk
- › 如果图G上有一条经过所有顶点、所有边的路径 (边不重复, 允许顶点重复)

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

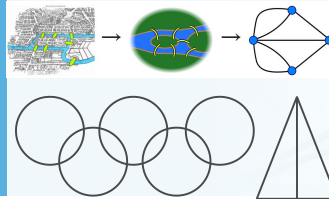
## 充分必要条件

- › 欧拉图
- › 无向图：G连通，所有顶点的度都是偶数
- › 有向图：G弱连通，每个顶点的出度与入度相等
- › 欧拉路径
- › 无向图：G连通，恰有两个顶点的度是奇数
- › 有向图：G连通，恰有两个顶点出度与入度不相等，其中一个出度比入度多1，另一个入度比出度多1

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

## 欧拉图和“一笔画”问题

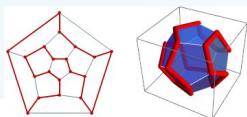
- › 柯尼斯堡七桥问题



北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

## 哈密顿图及哈密顿通路

- › 哈密顿图 Hamilton graph
- › 如果图G上有一条经过**所有顶点**的**回路**（不要求经过所有边，也称作哈密顿回路）
- › 哈密顿通路 Hamilton path
- › 如果图G上有一条经过**所有顶点**的**通路**（非回路）



北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

◀

▶

## 判定定理（充分非必要）

- › 如果具有 $n$ 个顶点的图G的每一对顶点的度数之和都不小于 $n-1$ ，那么G中有一条哈密顿通路
- › 如果G的每一对顶点度数之和不小于 $n$ ，且 $n \geq 3$ ，则G为一哈密顿图
- › 哈密顿通路问题在上个世纪七十年代被证明是“**NP完全的**”（算法时间随顶点个数呈**指数**增长）
- › 实际上对于某些顶点数**不到100**的网络，利用现有最好的算法和计算机也需要比较荒唐的时间（比如**几百年**）才能确定其是否存在一条这样的路径。

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

◀

▶