离散数学：图论：图的定义

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

图论的创立

- 柯尼斯堡七桥问题的解决是图论创立的标志
- 1736年**欧拉**在发表的论文中证明七桥无法仅走一遍能遍历七座桥
- 并提出和解决了"**一笔画**"问题
- 欧拉将现实问题抽象为平面上的点和线的组合，并通过讨论点的奇偶性来判定能否遍历

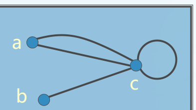
图(Graph)的定义

- 由**结点**和联结结点的**边**所构成的**离散结构**
- 记做G=**<V, E>**
- 结点vertex集**V**：非空集合
- 边edge集**E**：**多重集合**（集合中可能**存在相同元素**，元素附带一个**重数的属性**）
- 边集是**多重集合**表示图可以有**多个相同的边**

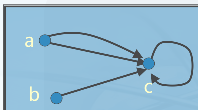
边和结点的关系

- **有向边**(directed edge)用结点的**二元有序组**表示
- 第一分量称作**起点**，第二分量称作**终点**
- **无向边**(indirected edge)用结点的**两元素多重集**表示
- **无向边可以是多重集**意味着**允许无向环**(loop)
- 无向边的端点称作**邻接**(adjacent)结点

图的例子



G=<V,E>
V={a,b,c}
E={{a,c}, {a,c}, {b,c}, {c,c}}
无向图，有多重边，环



G=<V,E>
V={a,b,c}
E={<a,c>, <c,a>, <b,c>, <c,c>}
有向图，无多重边，有环

离散数学：图论：基本概念

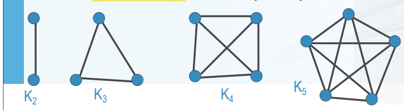
陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

图的基本概念

- 对于图G=<V,E>
- **有限图**：V,E都是**有限集**，否则称为无限图
- **重边**multiple edge：E中**重数大于1**的边称为重边（平行边）
- **重图**multigraph：边集E中**至少有一个元素重数大于1**
- **单图**：**每条边的重数都等于1**

图的基本概念

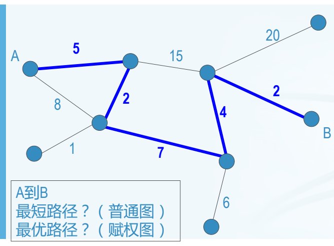
- **简单图**simple graph：**无环和重边**的无向图
- **完全图**complete graph：任何两个不同结点间**都有边关联**的简单图，记做Kn
- **孤立结点**isolated vertex：**不是任何边的端点**的结点
- **零图**：**仅有孤立结点**构成的图（$E=\varnothing$）



赋权图

- 赋权图G=<V,E,f,g>
- **结点权**函数：**f:V→W**
- **边权**函数：**g:E→W**
- W可以是任何集合，常为**实数的子集**
- 普通的图研究结点和边之间的**拓扑关系**
- 如：邻接，连通，通路，划分等性质
- 赋权图给普通图附加了**数量关系**
- 研究距离，成本，代价，规模等性质
- 是GIS应用的基础

赋权图例子

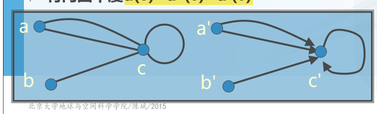


离散数学：图论：度和正则图

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

结点的度(degree)

- 端点v的**度**d(v)定义为关联端点v的**边的数目**
- **有向图**中，度分为**出度**(out-degree)和**入度**(in-degree)
- 出度$d^+(v)$是端点v作为有向边**起点**的数目
- 入度$d^-(v)$是端点v作为有向边**终点**的数目
- 有向图中度$d(v)=d^+(v)+d^-(v)$

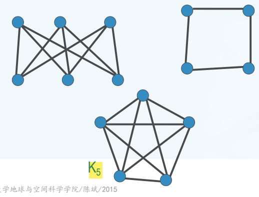


度的性质

- 所有端点度的总和为偶数，而且是边数目的两倍
- 有向图中出度的总和等于入度的总和
- 奇数度结点必为偶数个（反证法可证）
- 自然数序列$(a_1,a_2,\ldots a_n)$是某个图的度序列当且仅当序列中所有数的总和为偶数
- 一度的顶点称为悬挂点(pendant node)

正则图(regular graph)

- 所有顶点的度均相同的图称为正则图，按照顶点的度数k称作k-正则图
- Kn是n-1正则图

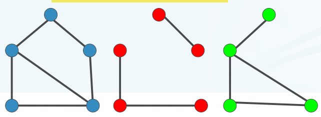


离散数学：图论：子图与同构图

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

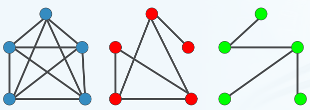
子图(subgraph)

- $G_1=\langle V_1,E_1\rangle$, $G_2=\langle V_2,E_2\rangle$
- $V_1 \subseteq V_2$, $E_1 \subseteq E_2$，称G_1是G_2的子图
- 如果$G_1 \neq G_2$，则G_1是G_2的真子图
- 生成子图spanning subgraph
- 如果G_1是G_2的子图，且$V_1=V_2$



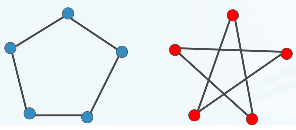
补图

- G_1,G_2互为补图：
- $V_1=V_2$, $E_1 \cap E_2=\varnothing$, $\langle V_1, E_1 \cup E_2\rangle$是完全图



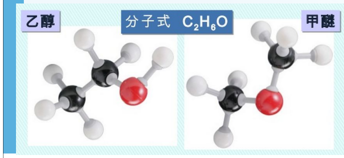
图的同构isomorphic

- $G_1=\langle V_1,E_1\rangle$, $G_2=\langle V_2,E_2\rangle$
- $|V_1|=|V_2|$, $|E_1|=|E_2|$
- 如果可以将V_1中所有的结点一一对应地置换为V_2中的结点名后得到的图等于G_2



不同构的图：化学中的同分异构体

- 分子式相同而结构和性质不同的化合物之间互称**同分异构体**。
- 分子式相同意味着$V_1=V_2$, $|E_1|=|E_2|$



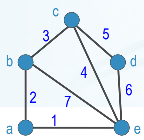
乙醇：C_2H_5OH　　甲醚：CH_3OCH_3

离散数学：图论：路径与连通性

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

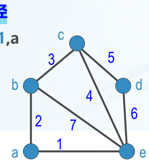
拟路径(pseudo path)

- 顶点v_1到v_l的**拟路径**：
- $v_1,e_1,v_2,e_2,v_3,\ldots,v_{l-1},e_{l-1},v_l$
- 其中$e_i=<v_i,v_{i+1}>$（或者$\{v_i,v_{i+1}\}$）
- 拟路径中的**边数目**称作拟路径的**长度**
- 拟路径例子：
- a,1,e,7,b,3,c,3,b,2,a
- c,4,e,4,c,3,b,7,e,4,c



路径(walk)与通路(path)

- 如果**拟路径**中的**边各不相同**，称作**路径**
- a,1,e,7,b,3,c,4,e,6,d
- 如果**路径**中的**顶点各不相同**，称作**通路**
- a,1,e,7,b,3,c,5,d
- $v_1=v_l$的路径称为**闭路径**
- a,2,b,7,e,4,c,5,d,6,e,1,a
- $v_1=v_l$的通路称作**回路**
- a,1,e,6,d,5,c,3,b,2,a

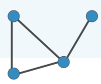


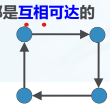
路径与通路性质

- **路径和通路定理**
- 在有n个顶点的图G中，如果**有顶点u到v的拟路径**，那么u到v**必有路径**，并且**必有长度不大于n-1的通路**
- （考虑**拟路径中重复顶点的压缩**）
- **闭路径和回路定理**
- 在有n个顶点的图G中，如果有顶点v到v的**闭路径**，那么必定有一条从v到v的**长度不大于n的回路**

图的连通性

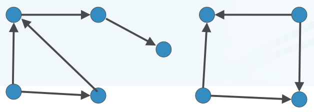
- u**可达**v(accessible)
- u=v，或者存在一条u到v的路径
- **连通**的**无向图**connected
- **无向图**中**任意**两个顶点都是**可达**的
- **强连通**的**有向图**
- **有向图**中**任意**两个顶点都是**互相可达**的





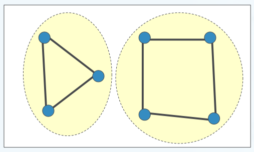
图的连通性

- 单向连通的有向图
- 任意两个顶点，至少从一个顶点到另一个是可达的
- 弱连通的有向图
- 将有向图看作无向图时是连通的



连通分支（connected component）

- 图G的连通子图G'，而且G'不是任何其它连通子图的真子图（最大性）



离散数学：图论：欧拉图与哈密顿图

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

欧拉图及欧拉路径

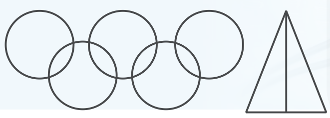
- 欧拉图Euler graph
- 如果图G上有一条经过所有顶点、所有边的闭路径（边不重复，允许顶点重复）
- 欧拉路径Euler walk
- 如果图G上有一条经过所有顶点、所有边的路径（边不重复，允许顶点重复）

充分必要条件

- 欧拉图
- 无向图：G连通，所有顶点的度都是偶数
- 有向图：G弱连通，每个顶点的出度与入度相等
- 欧拉路径
- 无向图：G连通，恰有两个顶点的度是奇数
- 有向图：G连通，恰有两个顶点出度与入度不相等，其中一个出度比入度多1，另一个入度比出度多1

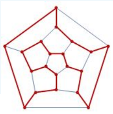
欧拉图和“一笔画”问题

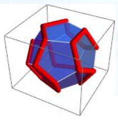
- 柯尼斯堡七桥问题



哈密顿图及哈密顿通路

- 哈密顿图Hamilton graph
- 如果图G上有一条经过所有顶点的回路（不要求经过所有边，也称作哈密顿回路）
- 哈密顿通路Hamilton path
- 如果图G上有一条经过所有顶点的通路（非回路）





判定定理（充分非必要）

- 如果具有n个顶点的图G的每一对顶点的度数之和都不小于n-1，那么G中有一条哈密顿通路
- 如果G的每一对顶点度数之和不小于n，且n>=3，则G为一哈密顿图
- 哈密顿通路问题在上个世纪七十年代被证明是“NP完全的”（算法时间随顶点个数呈指数增长）
- 实际上对于某些顶点数不到100的网络，利用现有最好的算法和计算机也需要比较荒唐的时间（比如几百年）才能确定其是否存在一条这样的路径。