

离散数学：集合论：等价关系

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

等价关系(equivalent relation)定义

- 等价关系R定义为：
 - A上的自反、对称、传递的二元关系
 - $xRx; xRy \rightarrow yRx; xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$
- 例子：
 - 三角形的相似、全等关系；
 - 学生的舍友关系；
 - 人的亲戚关系（朋友关系？同学关系？）
 - 整数集上的“模k相等”关系： $x \sim_k y \Leftrightarrow k|(x-y)$

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

等价类 (equivalent class)

- 设R为A上的等价关系，
- 对于每个 $a \in A$ ，a的等价类记做 $[a]_R$ (简记 $[a]$)，定义为： $[a]_R = \{x | x \in A \wedge xRa\}$ ，
- a称作 $[a]_R$ 的代表元素
- 等价类是A的子集，每个代表元素确定一个等价类
- 例：“模2相等”，有2个等价类： $[0]$ 和 $[1]$
- 相等关系 E_A 有 $|A|$ 个不同的等价类，每个等价类都是单元素集合
- 全关系 $A \times A$ 只有一个等价类A

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

等价类的性质

- A上的任何一个等价关系R，任何一个元素a，
- 等价类 $[a]_R$ 都不会是空集，因为总有 aRa （等价关系的自反性）
- 同一个等价类可能有不同的代表元素
- 或者另一种说法：不同的元素可能有相同的等价类

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

等价类定理

- R是A上的等价关系，则任意的 $a, b \in A$ ， aRb 当且仅当 $[a]_R = [b]_R$
- 设 aRb ，又 $x \in [a]$ ，那么 xRa ，R的传递性，有 xRb ，所以 $x \in [b]$
- 同理 $x \in [b]$ 推出 $x \in [a]$ ，所以 $[a] = [b]$
- 设 $[a] = [b]$ ， $a \in [a]$ ，又有 $a \in [b]$ ，所以 aRb

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

等价类定理

- R是A上的等价关系，则任意的 $a, b \in A$ ，要么 $[a] = [b]$ ，要么 $[a] \cap [b] = \emptyset$
- 证明方法： $p \vee q \vdash \neg p \rightarrow q$
- 设 $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ ，有 $x \in [a] \cap [b]$ ，即 xRa 和 xRb
- 由R的对称性，有 aRx ，与前面的 xRb ，由R的传递性，有 aRb
- 根据前一个定理，有 $[a] = [b]$

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

离散数学：集合论：等价关系与划分

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

划分(partitions)的定义

- 划分是满足下列条件的集合A的**子集族** π
- $\forall B(B \in \pi \rightarrow B \neq \emptyset)$ (**不空**)
- $\cup \pi = A$ (**不漏**)
- $\forall B \forall B'(B \in \pi \wedge B' \in \pi \wedge B \neq B' \rightarrow B \cap B' = \emptyset)$ (**不交**)
- π 中的元素称为划分的**单元**
- 特别约定 $A = \emptyset$ 时只有划分 \emptyset

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

划分的例子

- $A = \{1, 2, 3, 4\}$
- $\pi_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$
- $\pi_2 = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$
- $\pi_3 = \{\{1, 3, 4\}, \{2\}\}$
- $\pi_4 = \{\{1, 2, 3, 4\}\}$
- $\{\{1, 2\}, \{4\}\}$?
- $\{\{1, 2, 3\}, \{2, 4\}\}$?

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

等价关系与划分

- 很明显，A上的等价关系R的**所有等价类的集合**，构成A的一个**划分**，
- 称作等价关系R**对应的**划分：
- $\{[x]_R | x \in A\}$ ，所有等价类的集合是一个划分
- 反过来，集合A的一个划分 π ，也对应A上的一个**等价关系**，
- 称作划分 π **对应的**等价关系
- $R = \{ \langle x, y \rangle \mid \exists B(B \in \pi \wedge x \in B \wedge y \in B) \}$
- $R = \cup_{B \in \pi} B \times B = \cup \{B \times B \mid B \in \pi\}$

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

等价关系和划分的一一对应

- 对应 π 的等价关系为R，**当且仅当**R对应的划分为 π
- 证明**必要性**，设对应 π 的等价关系为R，R对应的划分为 π' ，要证明 $\pi = \pi'$
- 设任意 $a \in A$ ，包含a的 $B \in \pi$ ， $B' \in \pi'$
- $b \in B \Leftrightarrow aRb \Leftrightarrow b \in [a]_R \Leftrightarrow b \in B'$
- 左半部： π 对应的等价关系是R
- 右半部：R对应的划分是 π'
- 所以 $B = B'$ ，由于a是任意的，所以 $\pi = \pi'$

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

等价关系和划分的一一对应

- 证明**充分性**，设R对应的划分为 π ， π 所对应的等价关系为 R' ，要证明 $R = R'$
- 取A中任意元素a, b
- $aRb \Leftrightarrow b \in [a]_R$
- $\Leftrightarrow \exists B(B \in \pi \wedge [a]_R = B \wedge b \in B)$ (R对应 π)
- $\Leftrightarrow \exists B(B \in \pi \wedge a \in B \wedge b \in B)$
- $\Leftrightarrow aR'b$ (π 对应等价关系 R')
- 所以 $R = R'$

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

离散数学：集合论：划分之间的关系

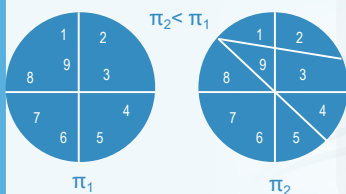
陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

划分之间的关系

- › 划分的“粗细”概念
- › 自然的, $|\pi|$ 越大, 越“细”
- › 两个划分之间如何比较粗细?
- › “细于”关系的定义
- › 如果 π_1 的每一个单元都包含于 π_2 的某个单元, 称 π_1 细于 π_2 , 表示为 $\pi_1 \leq \pi_2$
- › 如果 $\pi_1 \leq \pi_2$ 而且 $\pi_1 \neq \pi_2$, 则表示为 $\pi_1 < \pi_2$, 称作“真细于”

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

划分的“粗细”



北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

划分的“细于”和等价关系的“子集”

- › π_1, π_2 分别是等价关系 R_1, R_2 对应的划分, 那么 $R_1 \subseteq R_2 \leftrightarrow \pi_1 \leq \pi_2$
- › 证明必要性: 设 $R_1 \subseteq R_2$, B_1 为 π_1 中任意一个单元, 令 $B_1 = [a]_{R_1}$, $a \in A$.
- › 要证明 B_1 包含于 π_2 中的某个单元
- › 考虑 $[a]_{R_2} = B_2 \in \pi_2$, 对于任一 $b \in B_1$, 有 $b R_1 a$,
- › 而 $R_1 \subseteq R_2$, 所以有 $b R_2 a$, 故 $b \in [a]_{R_2} = B_2$, 得到了 $B_1 \subseteq B_2$, 所以 $\pi_1 \leq \pi_2$
- › 证明充分性: 设 $\pi_1 \leq \pi_2$, $x R_1 y$, 那么有 π_1 中单元 $B_1 = [x]_{R_1}$, 使 $x, y \in B_1$,
- › 由于 $\pi_1 \leq \pi_2$, 所以有 π_2 中的单元 B_2 , 使得 $B_1 \subseteq B_2$;
- › 从而 $x, y \in B_2$, 即 x, y 属于同一个 R_2 等价类, 所以有 $x R_2 y$, 得到了 $R_1 \subseteq R_2$

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

划分的“细于”和等价关系的“子集”

- › 定理说明, 越“小” (包含二元组较少) 的等价关系对应越细的划分;
- › 最小的等价关系是相等关系 E_A , 对应最细的划分: 每个单元仅含一个元素
- › 最大的等价关系是全关系, 对应最粗的划分: 仅有一个单元
- › 如模2相等关系、模3相等关系和模6相等关系三个等价关系中
 - 模2相等关系对应的划分包含2个单元
 - 模3相等关系对应的划分包含3个单元
 - 模6相等关系对应的划分包含6个单元
- › 模6的划分细于模3的划分: $[x]_6 \subseteq [x]_3$
- › 模6的划分细于模2的划分: $[x]_6 \subseteq [x]_2$

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

离散数学：集合论：划分运算

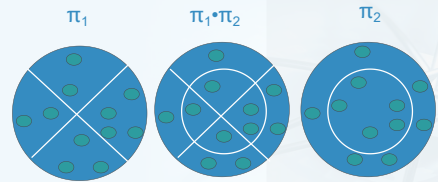
陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

划分的运算

- 对应于等价关系的并、交运算，划分也有相应的运算。
- 积划分运算：**
- 划分 π_1 和 π_2 的积划分 $\pi_1 \cdot \pi_2$ 是满足如下条件的划分：
- $\pi_1 \cdot \pi_2$ 细于 π_1 和 π_2
- 如果某个划分 π 细于 π_1 和 π_2 ，则 π 一定细于 $\pi_1 \cdot \pi_2$
- 也就是说， $\pi_1 \cdot \pi_2$ 是细于 π_1 和 π_2 的最粗划分

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

积划分运算



北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

积划分对应于等价关系交运算

- R_1 和 R_2 分别是 π_1 和 π_2 对应的等价关系，则 $\pi_1 \cdot \pi_2$ 是等价关系 $R_1 \cap R_2$ 对应的划分
- 首先， $R_1 \cap R_2 \subseteq R_1$ ， $R_1 \cap R_2 \subseteq R_2$ ，因此 $R_1 \cap R_2$ 对应的划分必然细于 π_1 和 π_2
- 其次，假设有细于 π_1 和 π_2 的划分 π ， π 对应的等价关系是 R ，则 $R \subseteq R_1$ ， $R \subseteq R_2$ ，所以有 $R \subseteq R_1 \cap R_2$ ，所以 R 所对应的划分 π 必然细于 $R_1 \cap R_2$ 所对应的划分
- 根据定义， $R_1 \cap R_2$ 所对应的划分就是 $\pi_1 \cdot \pi_2$

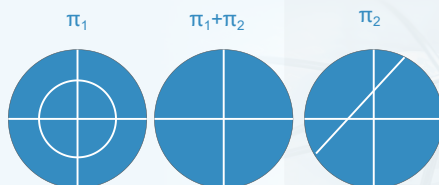
北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

和划分运算

- 划分 π_1 和 π_2 的**和划分** $\pi_1 + \pi_2$ 是满足如下条件的划分：
- π_1 和 π_2 均细于 $\pi_1 + \pi_2$
- 如果有划分 π ， π_1 和 π_2 均细于 π ，则 $\pi_1 + \pi_2$ 细于 π 。
- 也就是说， $\pi_1 + \pi_2$ 是粗于 π_1 和 π_2 的最细划分

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

和划分运算



北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

和划分对应于等价关系的并运算？

- 否！等价关系中的**传递**性质对于**并运算**不封闭
- 针对传递性质**扩展**并运算结果，定义：二元关系 R 的**传递闭包** $t(R)$
- $t(R)$ 是传递的， $R \subseteq t(R)$
- 同时，对于 A 上的任意一个具有传递性质且包含 R 的关系 R' ， $t(R) \subseteq R'$
- 和划分对应于等价关系并运算结果的传递闭包
- R_1 和 R_2 分别是 π_1 和 π_2 对应的等价关系
- 则 $\pi_1 + \pi_2$ 是等价关系 $t(R_1 \cup R_2)$ 对应的划分

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

商集(quotient sets)

- › R 是 A 上的等价关系，称 A 的划分 $\{[a]_R | a \in A\}$ 为 A 的 R 商集，记做 A/R
- › 每一个划分 π 均为 A 上的一个商集，相应的商集的和、积对应于划分的和与积。
- › $A/(R_1 \cap R_2) = A/R_1 \cdot A/R_2$
- › $A/t(R_1 \cup R_2) = A/R_1 + A/R_2$

离散数学：集合论：序关系

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

序关系 (ordered relation)

- › 序关系 R 定义为：
- › 集合 A 上的自反、反对称、传递的二元关系：
- › xRx ; $xRy \wedge yRx \rightarrow x=y$; $xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$
- › 存在序关系 R 的集合 A 称作有序集 (ordered set)
- › 用二元有序组 $\langle A, R \rangle$ 表示，一般的有序集表示成 $\langle A, \leq \rangle$

序关系例子

- › 实数集 R 上的“小于或等于”关系是序关系，有序集记做 $\langle R, \leq \rangle$
- › 集合 A 的幂集 $p(A)$ 上的“包含关系”是序关系，有序集记做 $\langle p(A), \subseteq \rangle$
- › 正整数集 I^+ 上的“整除”关系是序关系，有序集记做 $\langle I^+, | \rangle$

哈斯图 (Hasse graph)

- › 对序关系关系图的一种简化画法
- › 由于序关系自反，各结点都有环，省去；
- › 由于序关系反对称且传递，所以关系图中任何两个不同的结点直接不会有双向的边或通路，所以省去边的箭头，把向上的方向定为箭头方向
- › 由于序关系传递，所以省去所有推定的边，即 $a \leq b, b \leq c$ 有 $a \leq c$ ，省去 ac 边

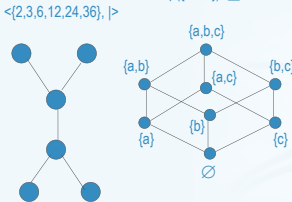
$\langle \{1,2,3,4,5\}, \leq \rangle$



哈斯图例子

$\langle \{2,3,6,12,24,36\}, | \rangle$

$\langle p(\{a,b,c\}), \subseteq \rangle$



有序集集合元素中的排序

- › $a \leq b$, 称a**先于或等于**b; a**小于或等于**b;
- › 如果 $\neg(a \leq b)$, 则称a,b**不可比较**或者**不可排序**。

离散数学：集合论：序关系中特殊元素

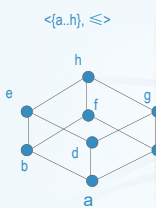
陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

最大（小）元、极大（小）元

- › $\langle A, \leq \rangle$ 为有序集, $B \subseteq A$
- › B的**最小元**b: $b \in B \wedge \forall x(x \in B \rightarrow b \leq x)$
- › B的**最大元**b: $b \in B \wedge \forall x(x \in B \rightarrow x \leq b)$
- › B的**极小元**b:
- › $b \in B \wedge \neg \exists x(x \in B \wedge x \neq b \wedge x \leq b)$
- › B的**极大元**b:
- › $b \in B \wedge \neg \exists x(x \in B \wedge x \neq b \wedge b \leq x)$
- › 极大和最大的差别在于B中是否包含不可比较的元素

有序集: $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

- › $B = \{a, b, c, f\}$
- › 最大元f, 最小元a
- › 极大元f, 极小元a
- › $B = \{a, b, c, d\}$
- › 没有最大元, 最小元a
- › 极大元b, c, d, 极小元a
- › $B = \{b, c, d, h\}$
- › 最大元h, 没有最小元
- › 极大元h, 极小元b, c, d



关于最大（小）元，极大（小）元的定理

- › B的最大（小）元必为B的极大（小）元
- › 如果B有最大（小）元，则它是唯一的
- › 如果B是有限集，则B的极大（小）元恒存在
- › 最大（小）元未必存在，存在则唯一
不包含不可比较的元素的有序集必然有最大（小）元
- › 极大（小）元对有限集必然存在，未必唯一
存在最大（小）元的有限有序集，其极大（小）元就等于最大（小）元

上（下）界，上（下）确界

- › $\langle A, \leq \rangle$ 为有序集, $B \subseteq A$
- › B的**上界**a: $a \in A \wedge \forall x(x \in B \rightarrow x \leq a)$
- › B的**下界**a: $a \in A \wedge \forall x(x \in B \rightarrow a \leq x)$
- › B的**上确界**a: a是B的所有上界的集合最小元
- › B的**下确界**a: a是B的所有下界的集合最大元

有序集：A={a,b,c,d,e,f,g,h}

› B={b,c,d}

› 上界h，下界a

› 上确界h，下确界a

› B={c,d}

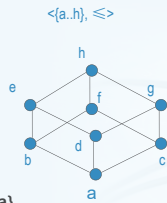
› 上界(g,h)，下界{a}

› 上确界g，下确界a

› B={d,g}

› 上界(g,h)，下界{d,a}

› 上确界g，下确界d



北京大学地球与空间科学学院/陈域/2015

关于上（下）界，上（下）确界的定理

- › 如果b是B的最大（小）元，则b是B的上（下）确界
- › 如果b是B的上（下）界，而且 $b \in B$ ，则b一定是B的最大（小）元
- › 如果B有上（下）确界，则上（下）确界是唯一的
- › 上下界未必存在，存在时也未必唯一
- › 有了上（下）界，也未必存在上（下）确界

北京大学地球与空间科学学院/陈域/2015

链和反链

› 链 (chain)

› 如果子集B中的任意两个元素都是可以比较的

› $\forall x \forall y (x, y \in B \rightarrow x \leq y \vee y \leq x)$

› 反链 (anti-chain)

› 子集B中的任意两个元素都是不可比较的

› $\forall x \forall y (x, y \in B \wedge x \neq y \rightarrow \neg(x \leq y) \wedge \neg(y \leq x))$

› |B|称作是链或者反链的长度

$\langle \{2, 3, 6, 12, 24, 36\}, \leq \rangle$



北京大学地球与空间科学学院/陈域/2015

链和反链定理

› $\langle A, \leq \rangle$ 是有限的有序集， $B \subseteq A$

› 如果A中最长的链长度为n

› 则A存在一个划分，划分有n个单元，每个单元都是一反链



北京大学地球与空间科学学院/陈域/2015

半序关系 (Partially ordered relation)

› 序关系R为集合A上的反自反、反对称、传递的二元关系

› $\neg(xRx), xRy \wedge yRx \rightarrow x=y, xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$

› 将 $\langle A, R \rangle$ 称作是半序集

› 实数集合上的“大于”关系

› 公司内部职员的“下属”关系

北京大学地球与空间科学学院/陈域/2015

离散数学：集合论：函数

陈域 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

函数是最重要的数学工具之一

- › 我们在不同阶段学习的函数概念
- › **因变量**：随自变量取值而变化；
- › $y=x+5$ ：算术表达式
- › **映射**：从定义域到值域的对应关系。
- › $y=f(x)$ ：更为普遍的对应
- › **集合论中的函数**
- › 将函数看作一种**特殊的关系**
- › 归结为集合，归结为关系进行研究
- › 我们介绍离散对象之间的函数关系

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

函数(function)定义

- › 如果 X 到 Y 的二元关系 $f \subseteq X \times Y$ ，对于每个 $x \in X$ ，都有唯一的 $y \in Y$ ，使得 $\langle x, y \rangle \in f$ ，则称 f 为 X 到 Y 的**函数**，记做： **$f: X \rightarrow Y$**
- › 当 $X = X_1 \times \dots \times X_n$ 时，称 f 为 n 元函数
- › 函数也称作映射(mapping)或变换(transformation)
- › 函数是特殊的关系：
 - ① 前域和定义域重合；
 - ② 单值性： $\langle x, y \rangle \in f \wedge \langle x, y' \rangle \in f \rightarrow y = y'$

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

函数特殊表示法

- › 由于函数的单值性
- › 表示为： **$y=f(x)$**
- › 称 x 为**自变元**， y 为函数在 x 处的**值**
- › y 为 x 的**像点**， x 为 y 的**源点**（基于映射）
- › 不满足单值性的关系不适合这种表示法
- › $\langle x, y_1 \rangle$ 和 $\langle x, y_2 \rangle$ 都属于关系 R ， $y_1 \neq y_2$ ，则不能用 $y_1=R(x)$ 这样的表示法，否则 $y_2=R(x)$ 无法区分

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

函数的例子

- › 任意集合 A 上的相等关系 E_A 为一函数，称为恒等函数(identical function)，也表示为 **I_A**
- › 自然数集合上的二倍关系为一函数， $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ， **$y=2x$**
- › 正整数集合上的整除关系**不是**函数，因为 $2|4$ ， $2|8$ ，不满足单值性
- › $X \neq \emptyset$ 时，空关系 \emptyset 不是函数，当 $X = \emptyset$ 时，空关系 \emptyset 是函数，称作空函数
- › 自然数加法Add: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ， **$y=x_1+x_2$** ，为自然数集上的二元函数

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

函数的规定方法

- › **列表法**
- › 将函数包含的所有序偶排成一个表
- › **图表法**
- › 用平面直角坐标系上的点集合表示函数
- › **解析法**
- › 采用算术表达式或者其它命名式表示函数
- › **递归定义函数**

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

归纳定义和递归定义

- › 作为关系和集合，函数也可以采用归纳定义方法来进行定义：
- › 函数初值定义
- › 函数调用自身部分的定义
- › 已经做过一些介绍
- › 如字符串长度的函数
- › $\text{len}(\text{空串})=0$ ；
- › $\text{len}(A)=\text{len}(\text{substr}(A,2))+1$

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

函数的相等和包含

- › $f: A \rightarrow B, g: C \rightarrow D$
- › 如果 $A=C, B=D$, 且对每个 $x \in A$, 都有:
- › $f(x)=g(x)$, 则函数 **f等于g**, 记为 **$f=g$**
- › 如果 $A \subseteq C, B=D$, 且对每个 $x \in A$, 都有:
- › $f(x)=g(x)$, 则函数 **f包含于g**, 记为 **$f \subseteq g$**

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

函数的个数

- › 如果 $|X|=m, |Y|=n$, 则 $\{f|f: X \rightarrow Y\}$ 的基数为 **n^m** , 共有 n^m 个 X 到 Y 的函数
- › 从 n 个元素当中取 m 个允许重复的排列, 共有 n^m 个
- › X 到 Y 的全体函数集合表示为 **Y^X**

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

定义域子集的映象(image)

- › $f: X \rightarrow Y, A \subseteq X$, 将 $f'(A)$ 称作 A 的**映象** 定义为:
- › $f'(A) = \{y | \exists x(x \in A \wedge y = f(x))\}$
- › 映象 f' 是 $\rho(X)$ 到 $\rho(Y)$ 的函数
- › $f'(\emptyset) = \emptyset$
- › $f'(X) = \text{Ran}(f)$,
- › $f'(\{x\}) = \{f(x)\} (x \in A)$

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

映象函数的特性

- › 设 $f: X \rightarrow Y$, 对任意 $A \subseteq X, B \subseteq X$
- › $f'(A \cup B) = f'(A) \cup f'(B)$
- › $f'(A \cap B) \subseteq f'(A) \cap f'(B)$
- › $f'(A) - f'(B) \subseteq f'(A - B)$
- › 存在 $x_1 \neq x_2$ 但是 $f(x_1) = f(x_2)$

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

离散数学：集合论：函数合成

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

函数的合成

- › 设 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$, 那么作为关系的合成 $f \circ g$ 是一个 X 到 Z 的**函数**
- › 先证明 **$\text{Dom}(f \circ g) = X$**
- › 对任意 $x \in X$, 有 $y \in Y$, 使 $\langle x, y \rangle \in f$; 对这个 y , 有 $z \in Z$, 使 $\langle y, z \rangle \in g$, 因此有 $\langle x, z \rangle \in f \circ g$, 所以 $x \in \text{Dom}(f \circ g)$
- › 再证明 **$f \circ g$ 的单值性**
- › 设对 x 有 z_1, z_2 , 使 $\langle x, z_1 \rangle \in f \circ g, \langle x, z_2 \rangle \in f \circ g$
- › 也就是有 y_1, y_2 , 使 $\langle x, y_1 \rangle \in f, \langle y_1, z_1 \rangle \in g, \langle x, y_2 \rangle \in f, \langle y_2, z_2 \rangle \in g$
- › 因为 f 是函数, 所以 $y_1 = y_2$, 又 g 是函数, 所以 $z_1 = z_2$

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

函数合成的习惯记法

- › 习惯上 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的合成, 记做 $g(f(x))$
- › 所以函数合成也会按照关系合成的相反顺序记做 $g \circ f$

函数合成运算的性质

- › 函数合成满足结合律, 不满足交换律
- › 函数 f 的 n 次迭代: f^n
- › $f \circ E_X = E_Y \circ f = f$
- › 对于 $f^2 = f$, 称作等幂函数

离散数学：集合论：特殊函数类

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

单射函数(injection)

- › 如果任意 $x_1 \neq x_2$ 有 $f(x_1) \neq f(x_2)$
- › 也称作“一对一”的函数
- › 如果 f 和 g 都是单射函数, 则其合成 $g \circ f$ 也是单射函数
- › $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$
- › 如果 $g \circ f$ 是单射函数, 则 f 是单射函数
- › 反证法, 如果 f 不是单射则 $g \circ f$ 也不会是单射

满射函数(surjection)

- › 如果任意 y 都有 x 使得 $y = f(x)$, 即 $\text{Ran}(f) = Y$
- › 也称作“映上的”函数
- › 如果 f 和 g 都是满射函数, 则其合成 $g \circ f$ 也是满射函数
- › 如果 $g \circ f$ 是满射函数, 则 g 是满射函数
- › 反证法, 如果 g 不是满射函数, $g \circ f$ 也不会是满射函数

双射函数(bijection)

- › 如果 f 既是单射函数又是满射函数, 称作双射函数
- › 也称作“一一对应”
- › 如果 f 和 g 都是双射函数, 则其合成 $g \circ f$ 也是双射函数
- › 如果 $g \circ f$ 是双射函数, 则 f 是单射函数, g 是满射函数
- › 容易由前面的定理证明

特殊函数类

$Y \times X$

单射

双射

满射

逆函数(inverse function)

- 函数作为关系，可以求逆，但是 f^{-1} 是否函数？
- 如果 f 不是单射，则 f^{-1} 无法满足单值性
- 如果 f 不是满射，则 $\text{Dom}(f^{-1}) \neq Y$
- 所以只有双射函数存在逆函数
- 双射函数 f 的逆函数记做 f^{-1} ，也是双射函数，称 f 是可逆的

逆函数的性质

- $(f^{-1})^{-1} = f$
- $f^{-1} \circ f = E_X$
- $f \circ f^{-1} = E_Y$
- 两个可逆函数 f, g 的合成：
- $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

逆函数

- 对于非双射函数，也存在类似逆函数的对应函数
- 左逆函数**(left inverse)
- 如果 $g \circ f = E_X$ ，则称 g 为 f 的左逆函数
- f 有左逆函数当且仅当 f 是单射函数
- 右逆函数**(right inverse)
- 如果 $f \circ g = E_Y$ ，则称 g 为 f 的右逆函数
- f 有右逆函数当且仅当 f 是满射函数
- 可逆**当且仅当 f 既有左逆函数，又有右逆函数，而且左逆函数和右逆函数相等