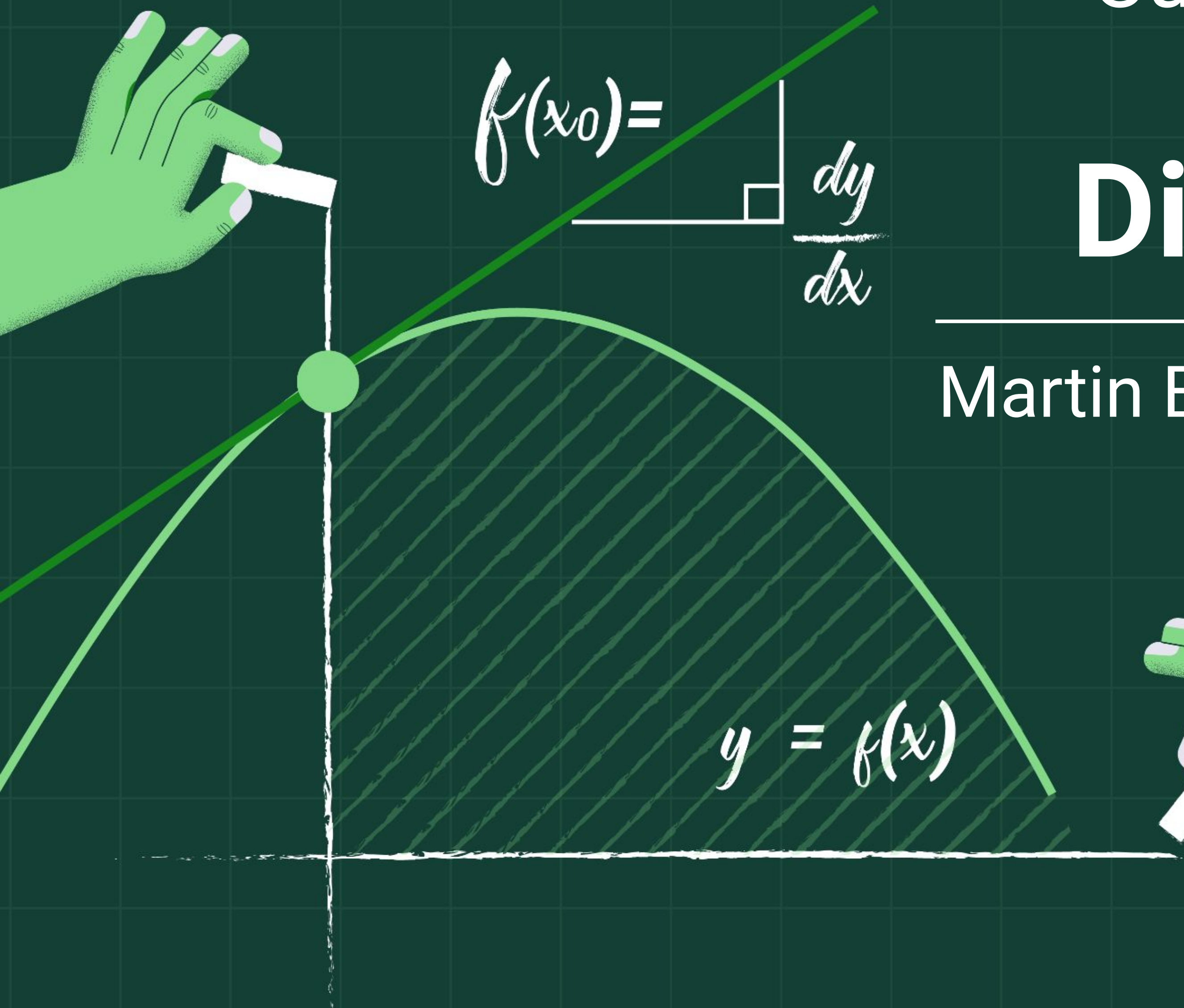
Curso básico de

Cálculo Diferencial

Martin E. Carrión Ramos



¿Para qué sirve el cálculo?

¿Qué es el cálculo?

El cálculo, también llamado cálculo infinitesimal, es la rama de las matemáticas que se enfoca en el estudio del cambio continuo.

¿De dónde surgió?

Inventado por Gottfried Leibniz e Isaac Newton en el Siglo XVII para determinar las pendientes en cualquier punto de una curva sin usar aproximaciones.

¡Mucho gusto!

Gottfried Wilhelm (von) Leibniz

Isaac Newton

Antes del cálculo y después

Ubicación	**vs.**	Cambio en posición
Volumen	**vs.**	Incremento de volumen
Área	**vs.**	Superficie en expansión
Velocidad promedio	**vs.**	Velocidad instantánea

¿Para qué sirve el cálculo?

Medicina	Estadística
Astronomía	Computación
Física	Negocios
Ingeniería	Demografía

Y mucho, mucho más...

Funciones, dominio y rango

¿Qué es una función?

Es una **regla** que **relaciona** a un conjunto de **entradas** con un conjunto de posibles **salidas**, donde a cada elemento en la entrada le corresponde **únicamente** un elemento de la salida.

¿Cómo se ve una función?

$$y = f(x)$$

$$y = f(x) = mx + b$$

¿Qué es el dominio?

El conjunto de valores que una función admite para ser procesados (las entradas).

X **(mayúscula) vs.** x **(minúscula)**

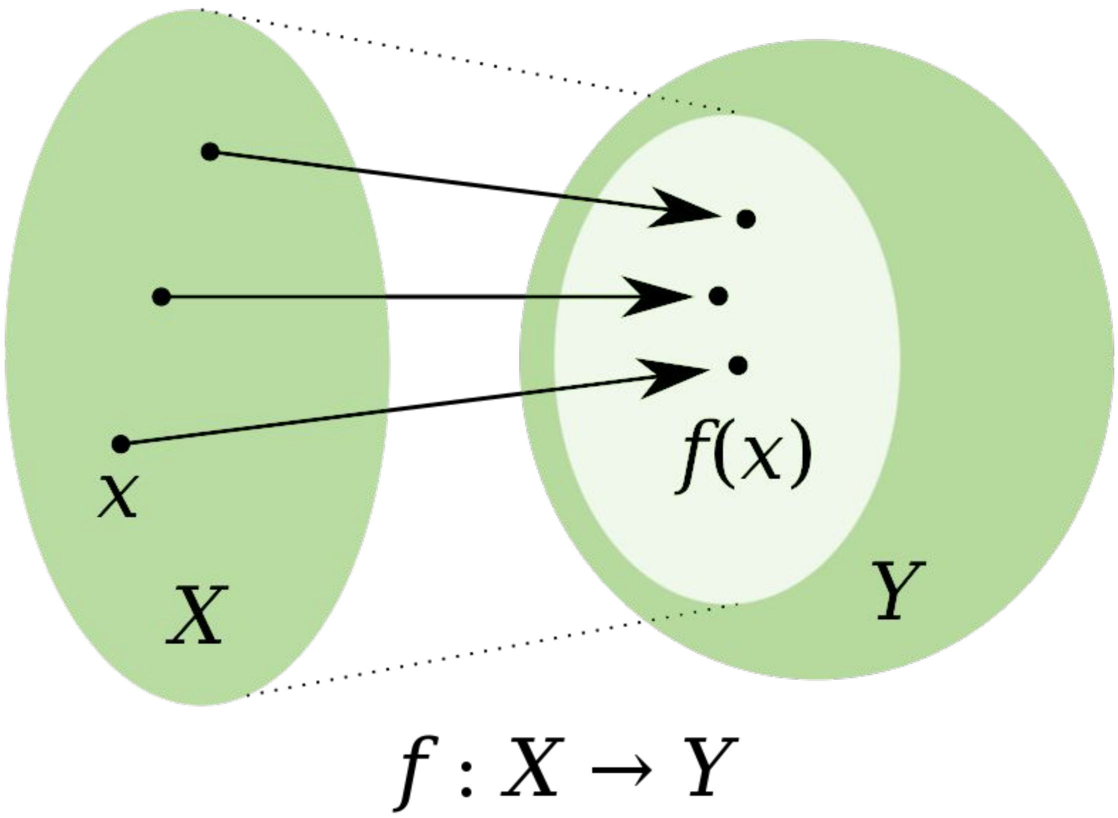
¿Qué es el codominio?

El conjunto de valores que pueden resultar del procesamiento que realiza la función (las salidas).

codominio vs. rango

Y **(mayúscula) vs.** y **(minúscula)**

Visualizando los elementos



¿Con cuáles funciones vas a trabajar?

- Funciones algebraicas.
- Funciones trascendentes.

Ejemplos de funciones

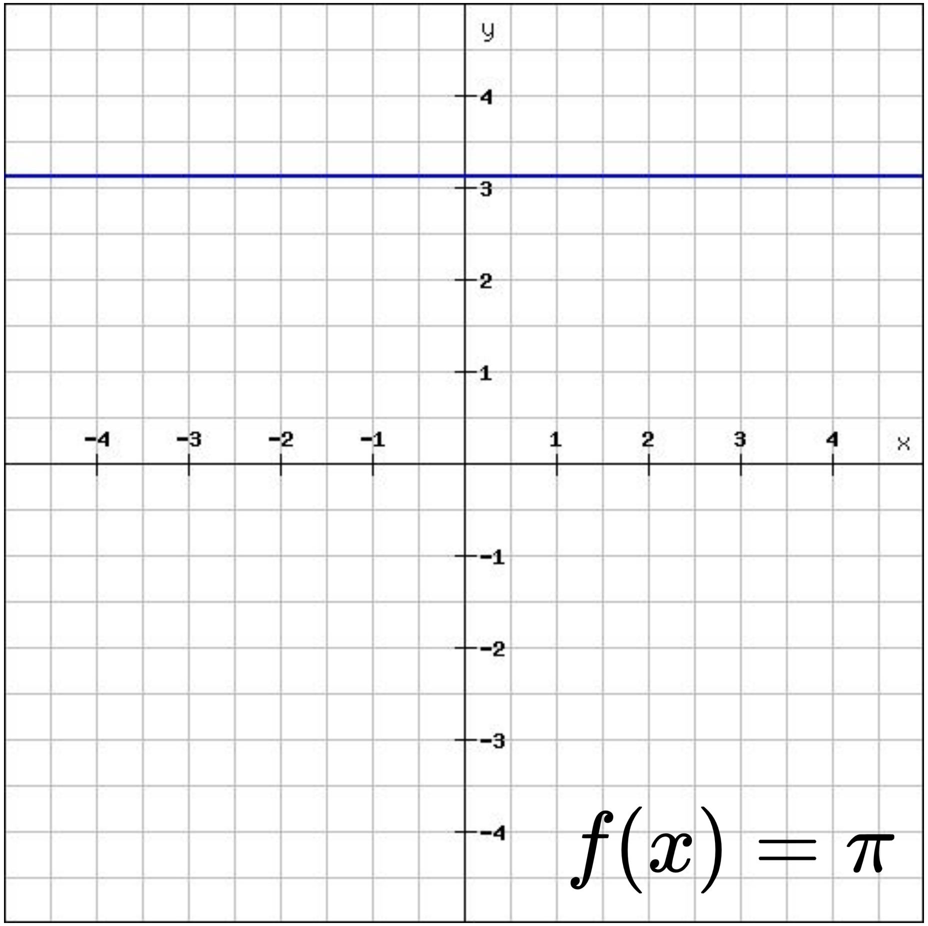
$$f(x) = \pi \qquad f(x) = x^2$$

$$y = x \qquad y = \sqrt{x}$$

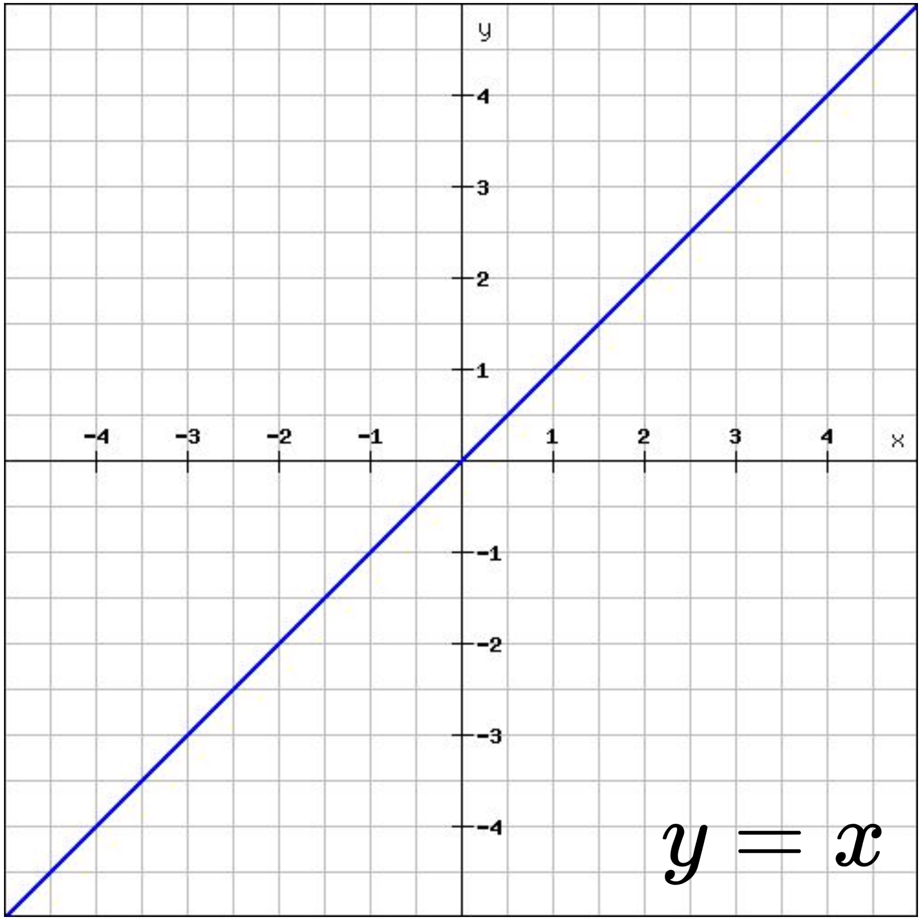
$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad y = \sin x$$

$$y = \ln x \qquad f(x) = 2^x$$

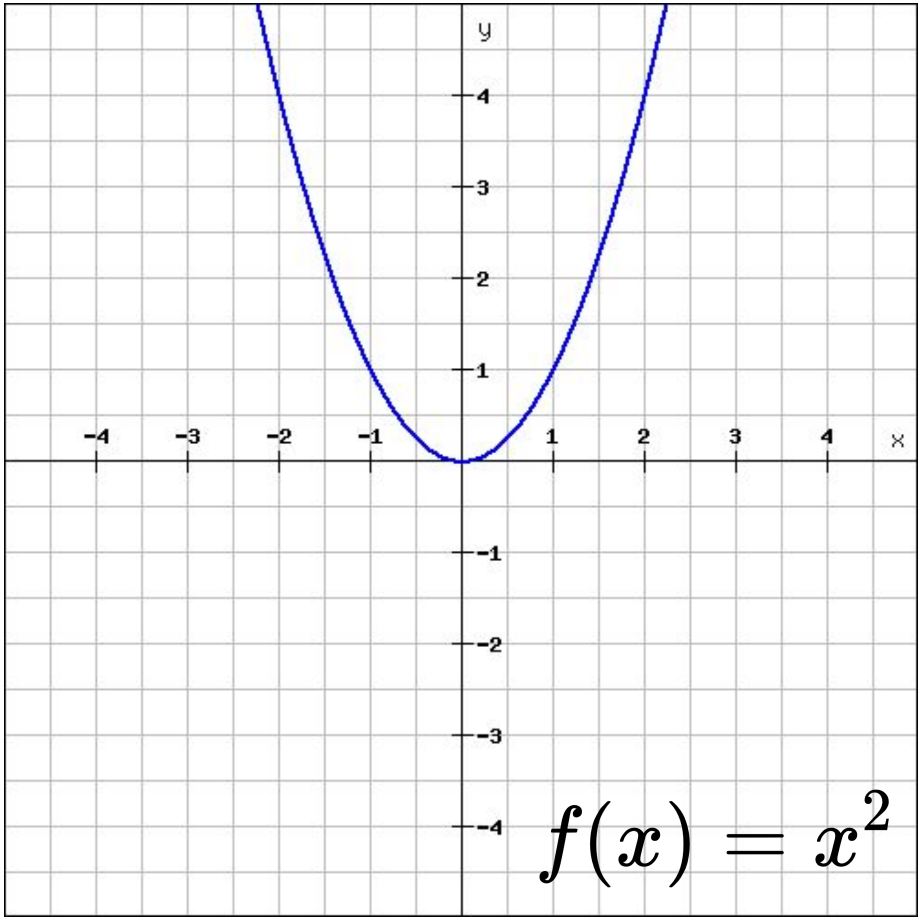
Función constante (π)



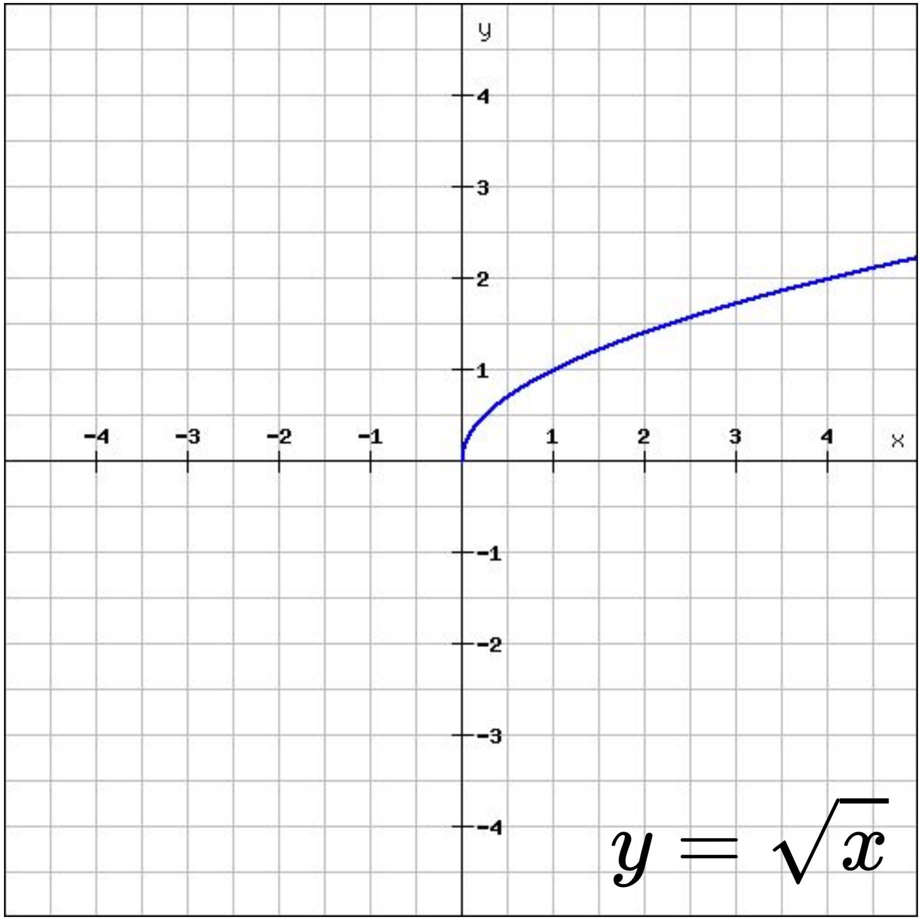
Función lineal (identidad)



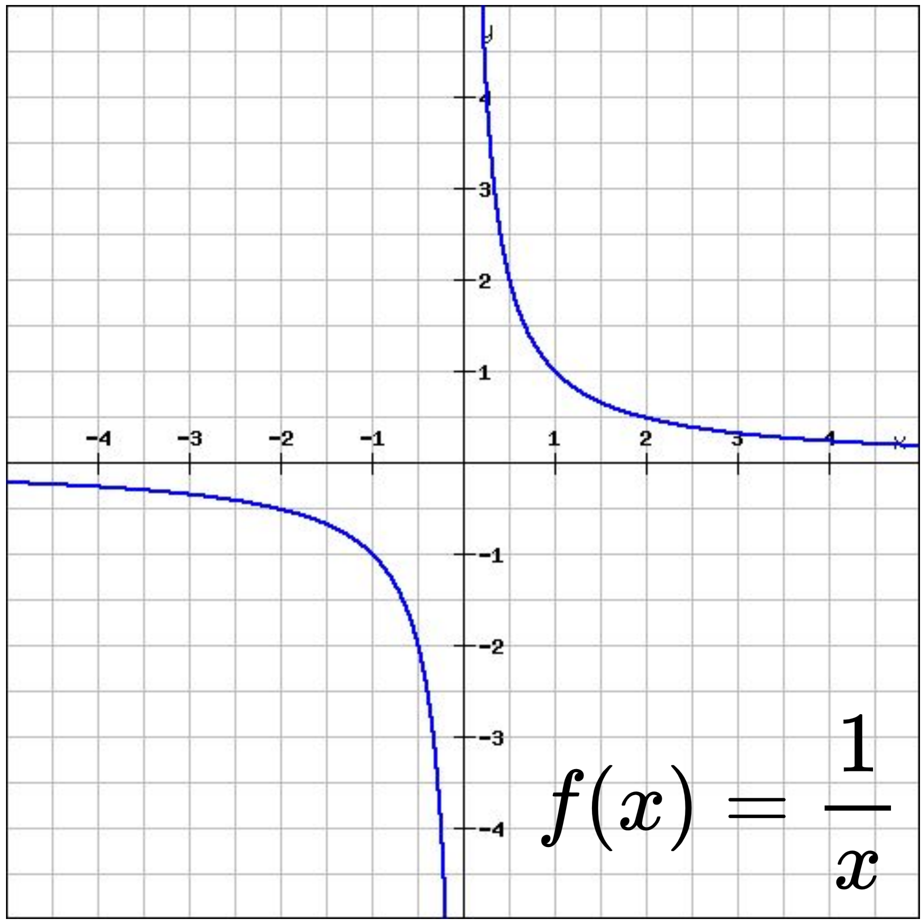
Función potencia (cuadrática)



Función radical (raíz cuadrada)

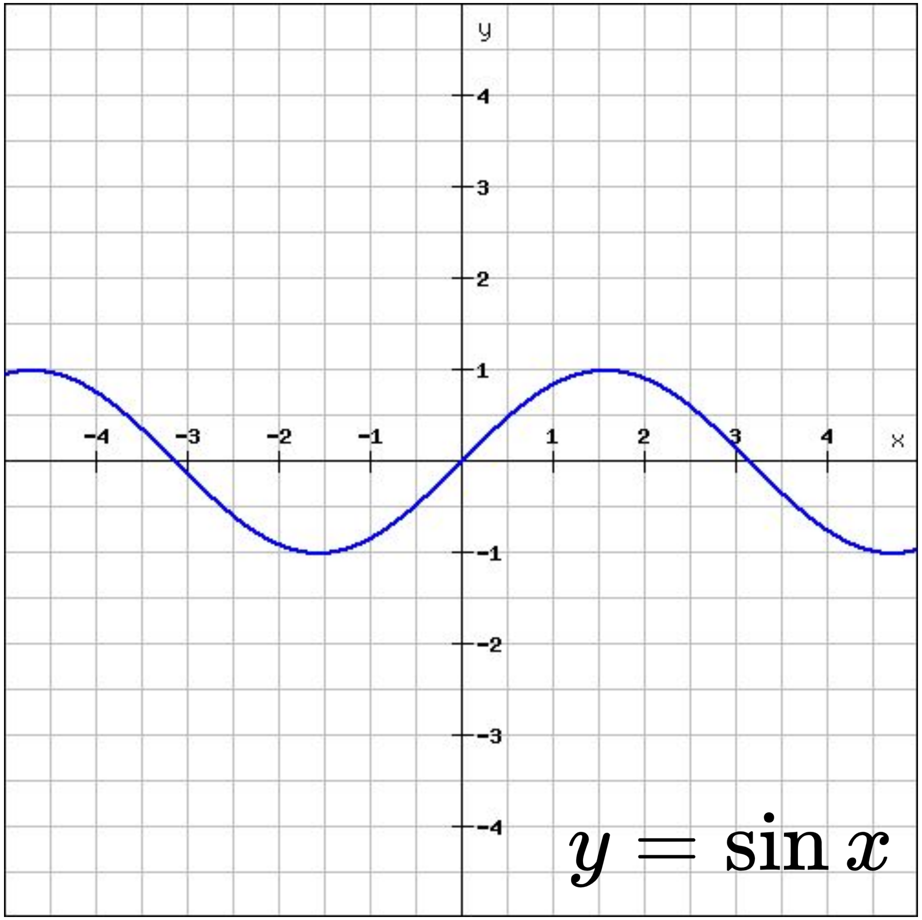


Función de proporcionalidad inversa

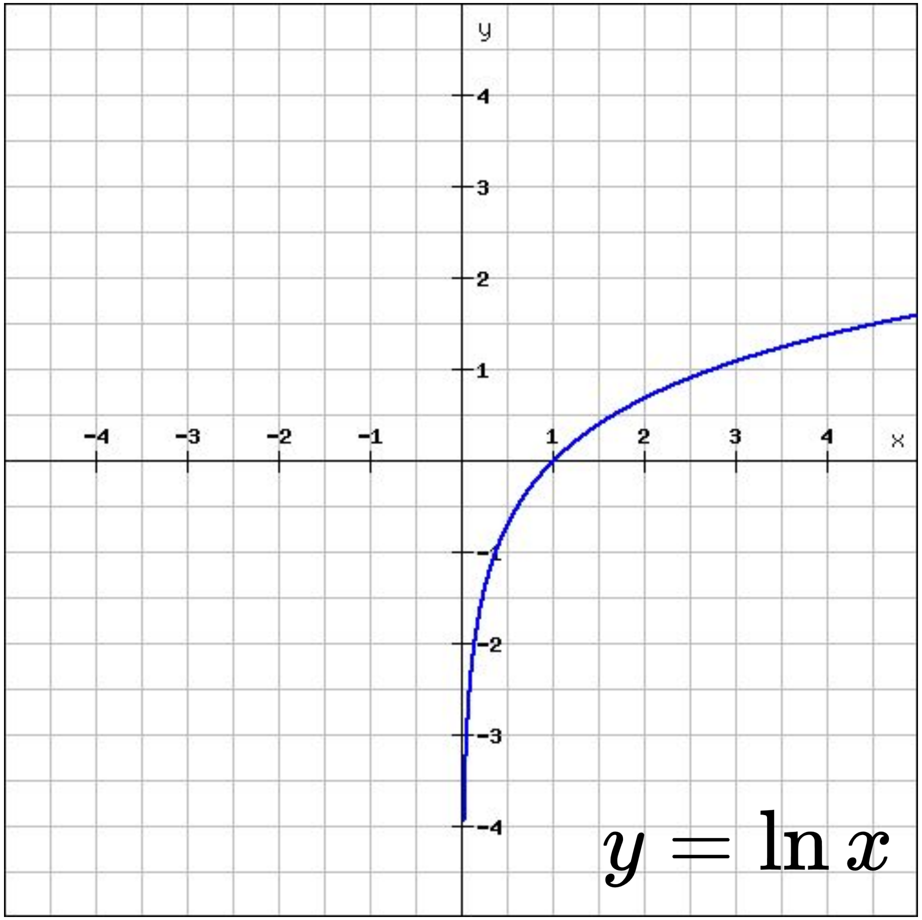


$$f(x) = \frac{1}{x}$$

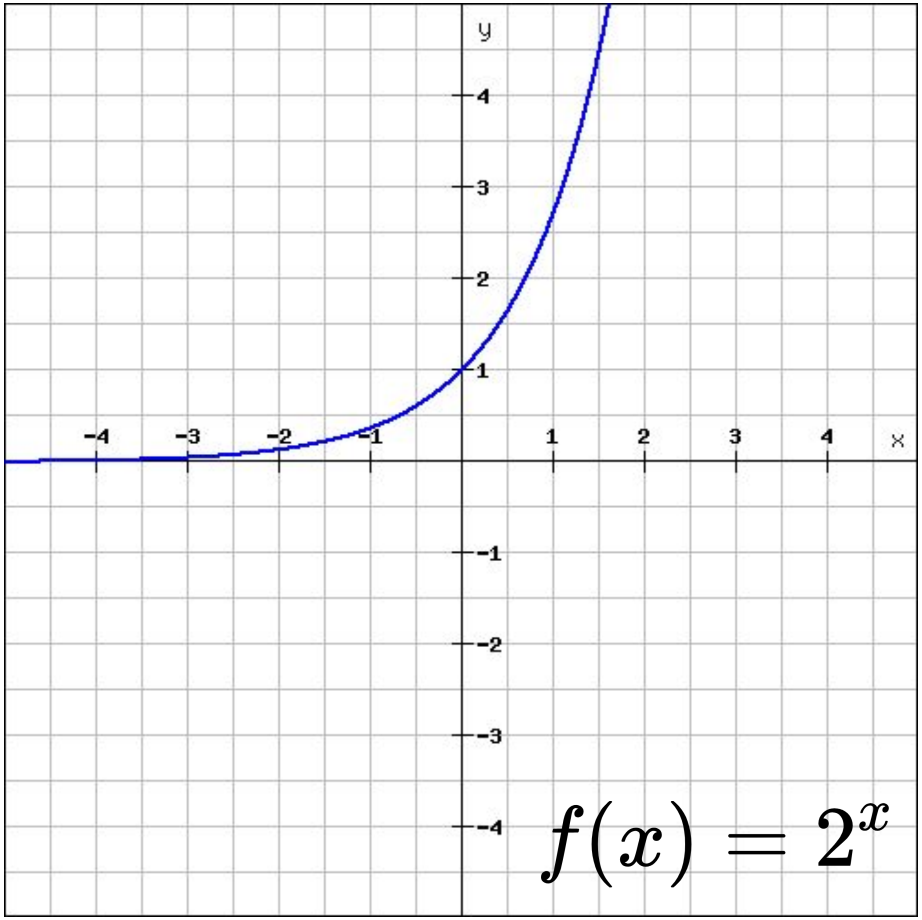
Función trigonométrica (seno)



Función logarítmica (logaritmo natural)



Función exponencial (exponencial base 2)



Reto: ¿Quién es quién?

Con base en lo estudiado en esta clase, relaciona las funciones del reto con su gráfica, dominio y rango.

Comparte tus dudas u observaciones en la sección de comentarios.

El concepto de límite

Para pensar un momento

Considera la función $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$

¿Qué pasa si evaluamos la función en $x=2$?

$$f(2) = \frac{(2)-2}{(2)^2-4} = \frac{0}{4-4} = \frac{0}{0}$$

¡Eso es indeterminado! ¿Qué puedes hacer?

Evaluando $f(x)$ por ambos lados

Desde la izquierda

x	$f(x)$
1.9	0.2564102
1.99	0.2506266
1.999	0.2500625
1.9999	0.2500063
1.99999	0.2500006

Desde la derecha

x	$f(x)$
2.00001	0.2499994
2.0001	0.2499938
2.001	0.2499375
2.01	0.2493766
2.1	0.2439024

¿Qué puedes concluir?

Que $f(x)$ "debería" estar en 0.25 cuando x se *aproxima* a 2 *desde ambos lados*. ¡Pero la evaluación directa no te permitió determinarlo!

Con algo así se enfrentaban en la época de Newton y Leibniz…

¿Qué es un límite?

Es el **valor** al que se aproxima una **función** cuando los **valores** que procesa se **acercan** a un cierto **valor fijo**.

¿Qué es un límite?

Es el valor (L) al que se aproxima una función ($y = f(x)$) cuando los valores que procesa (x) se acercan a un cierto valor fijo (a).

¿Para te qué sirve un límite?

Analizar qué pasa con una función $(y = f(x))$ en un cierto valor de su dominio (x) “sin necesidad de estar ahí”.

En otras palabras, un límite te habla del **comportamiento** de la función.

¿Qué resultados (L) puedes obtener?

Hay tres posibles resultados al estudiar una función con límites:

1. Un número real.
2. Un comportamiento al infinito negativo o al infinito positivo.
3. Que el límite no exista.

Notación de límites

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

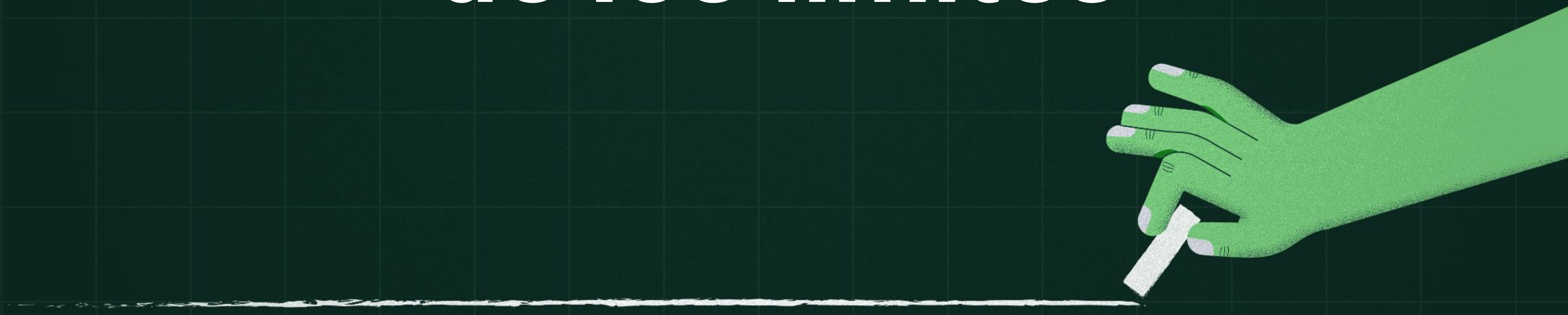
Se lee "el límite de la **función de** $\boldsymbol{x}$, cuando $\boldsymbol{x}$ se aproxima a $\boldsymbol{a}$, es $\boldsymbol{L}$".

Concluyendo el ejemplo

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{1}{4} = 0.25$$

Más adelante comprobarás algebraicamente este resultado.

Solución gráfica de los límites

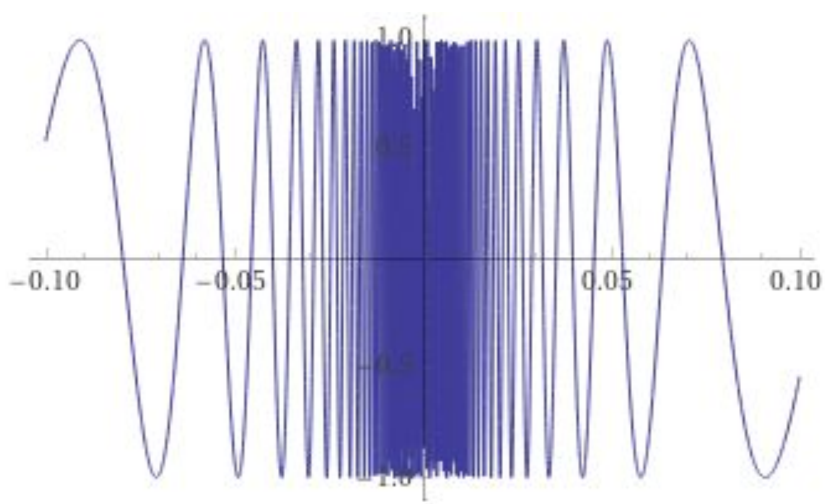


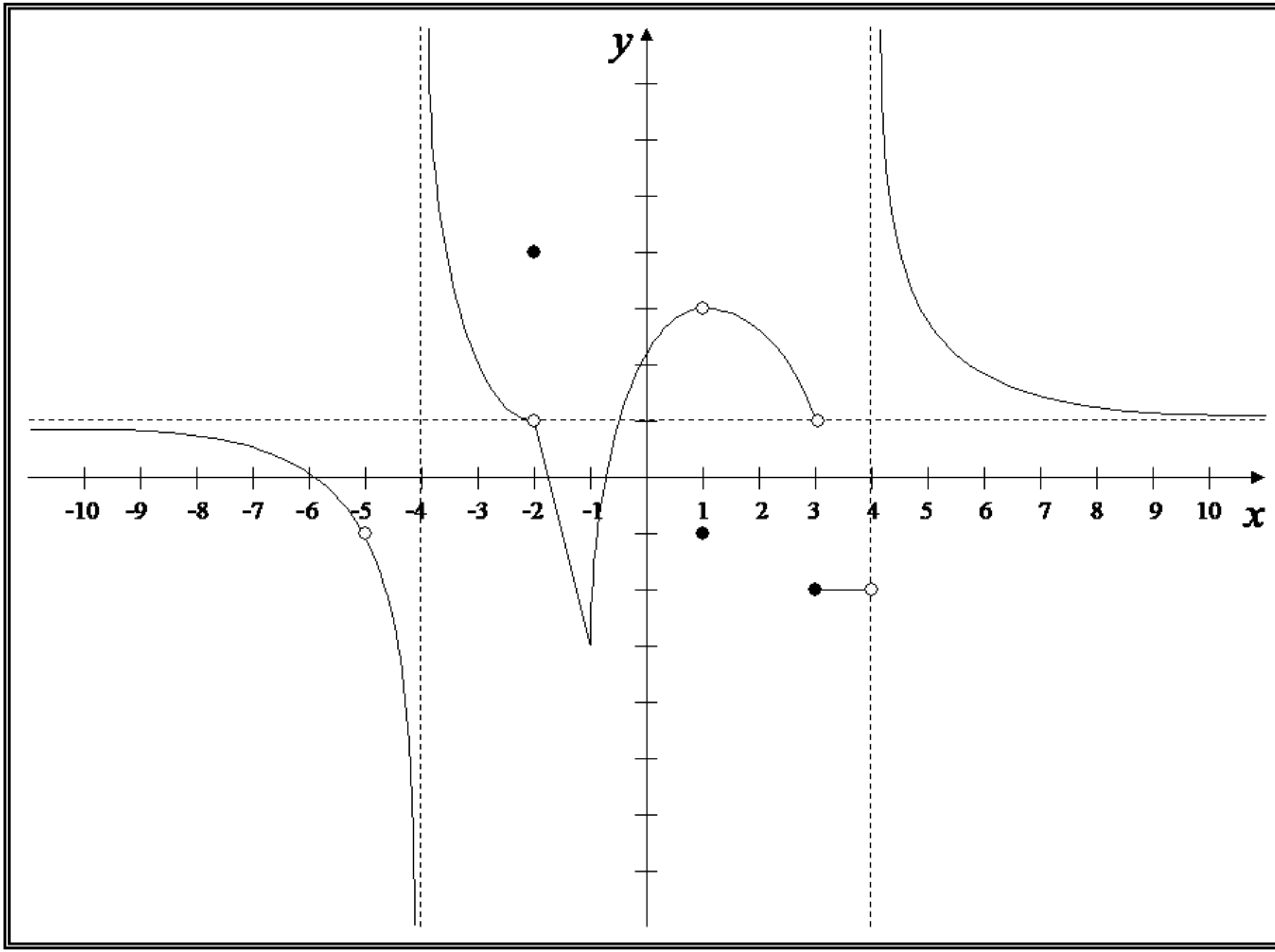
Límites usando una gráfica

Método muy sencillo, pero poco práctico e impreciso.

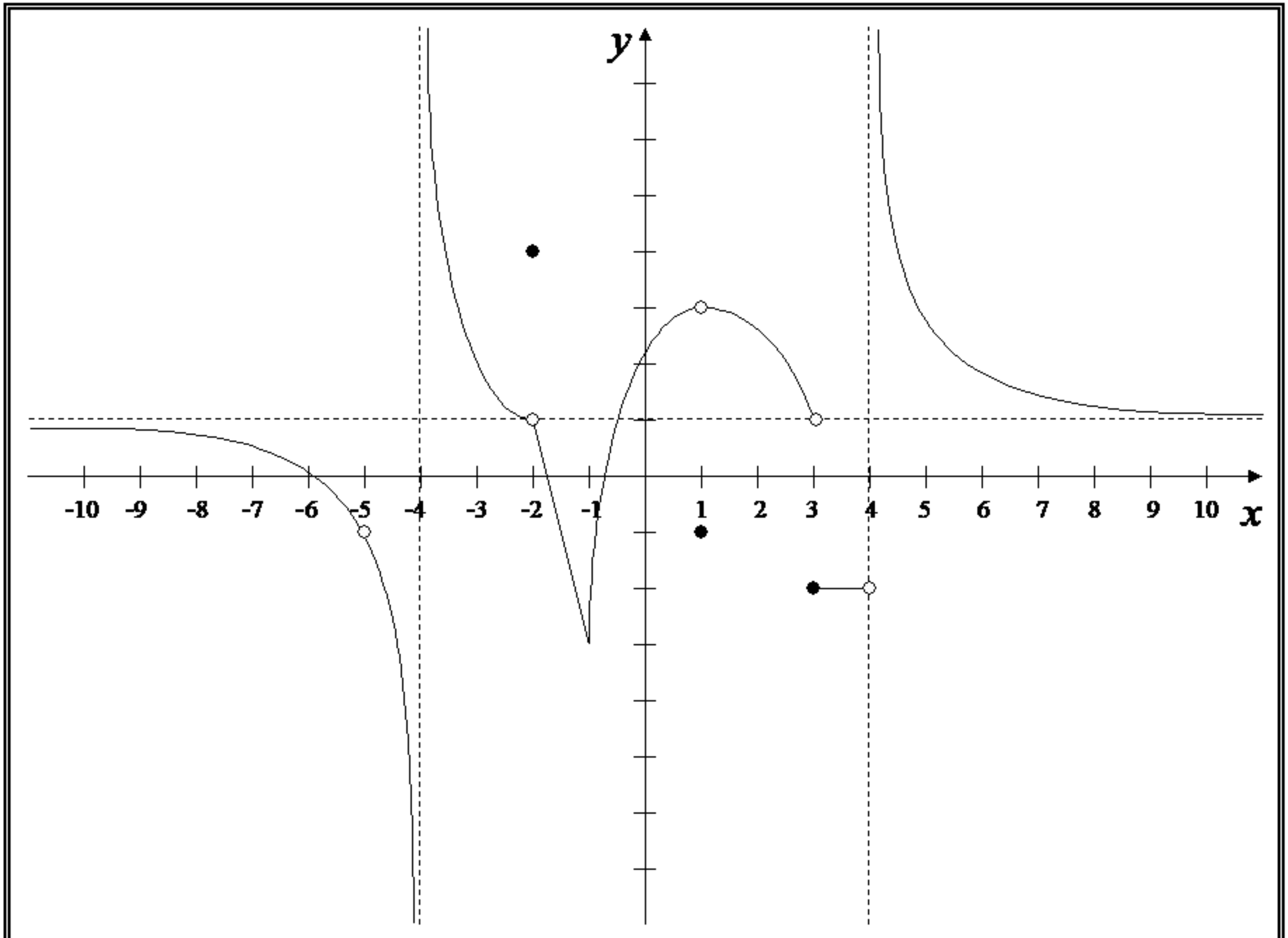
No funciona en todos los casos.

$$y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

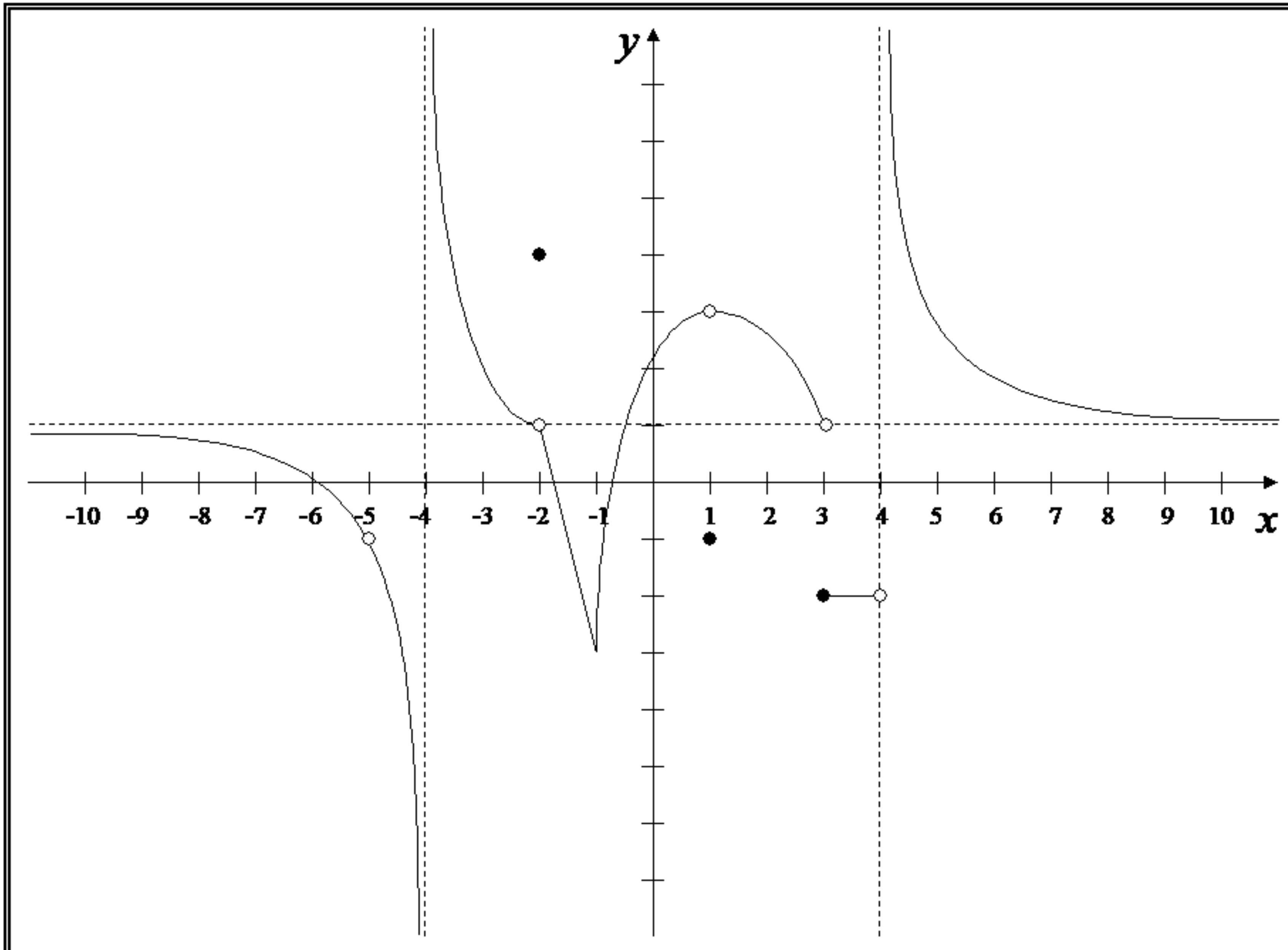




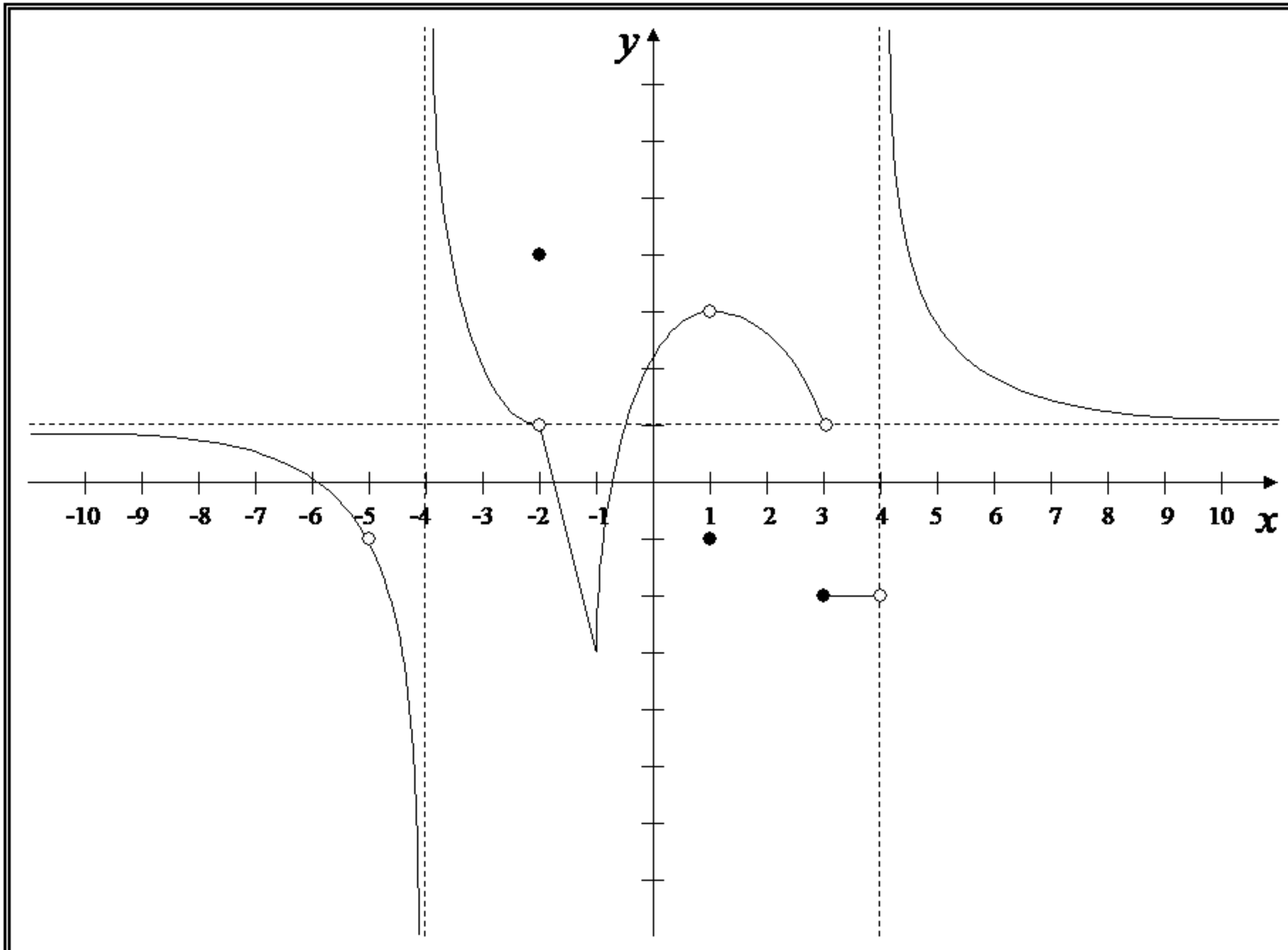
Evalúa $f(x)$ cuando x = -6, -5, -4, -2, -1, 0, 1, 3, 4, 5



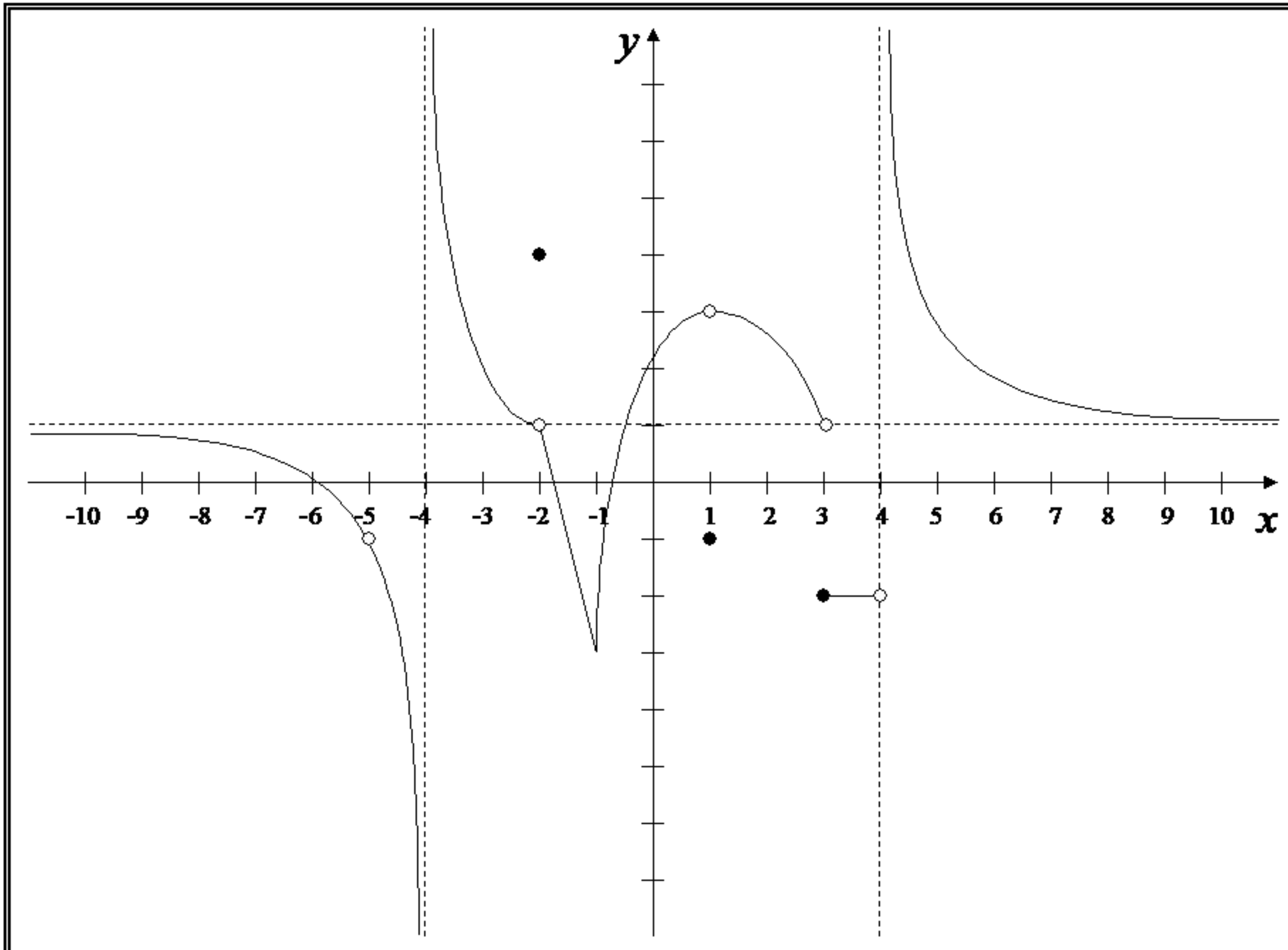
Determina $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ cuando a = -7, -5, -4, 1, 3, 4, 5



Determina $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \to \infty} f(x)$



Determina $\lim_{x \to a^+} f(x)$ cuando a = -6, -4, -2, 3, 4



Determina $\lim_{x \to a^-} f(x)$ cuando a = -6, -4, -2, 3, 4

Reto: llévame al límite

Busca en los apoyos el reto de solución límites gráficamente y resuélvelo.

Comparte tus descubrimientos y tus dudas en el espacio de comentarios.

Tipos de límites

Límites generales (análisis desde ambos lados)

- El valor de estudio a no indica análisis desde la izquierda (a^-) o la derecha (a^+).
- Para que existan, los límites unilaterales en ese punto deben existir y ser iguales.
- El límite (L) puede ser un número real o no existir.

Límites unilaterales (análisis desde un lado)

- El valor de estudio indica si el análisis se realiza desde la izquierda (a^-) o la derecha (a^+).
- El límite (L) puede ser un número real o indicar que la función presenta un decrecimiento hacia el infinito negativo o un crecimiento hacia el infinito positivo.

Límites infinitos

- Son límites generales donde la función, simultáneamente desde ambos lados, va hacia $-\infty$ o $+\infty$.
- También son los límites unilaterales donde la función va hacia $-\infty$ o $+\infty$.
- En realidad, estos límites *no existen* porque el resultado no es un número real.
- Ayudan a identificar la presencia de asíntotas verticales.

Límites al infinito

- El valor de estudio a indica -∞ o $+\infty$.
- Ayudan a identificar la presencia de asíntotas horizontales.
- El límite (L) puede ser un número real o no existir (límites infinitos al infinito).

Resuelve los siguientes límites algebraicamente:

a) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{1+x} =$

b) $\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-4} =$

c) $\lim_{x \to -3^+} \frac{\sqrt{x+3}}{x^2-9} =$

Continuidad

Continuidad en $x = a$

a) $f(x)$ debe estar definida en a

b) $\lim_{x \to a} f(x)$ debe existir

c) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Si una condición falla no hay continuidad.

Ejercicios de continuidad

Determina si las siguientes funciones son continuas en el valor indicado de x.

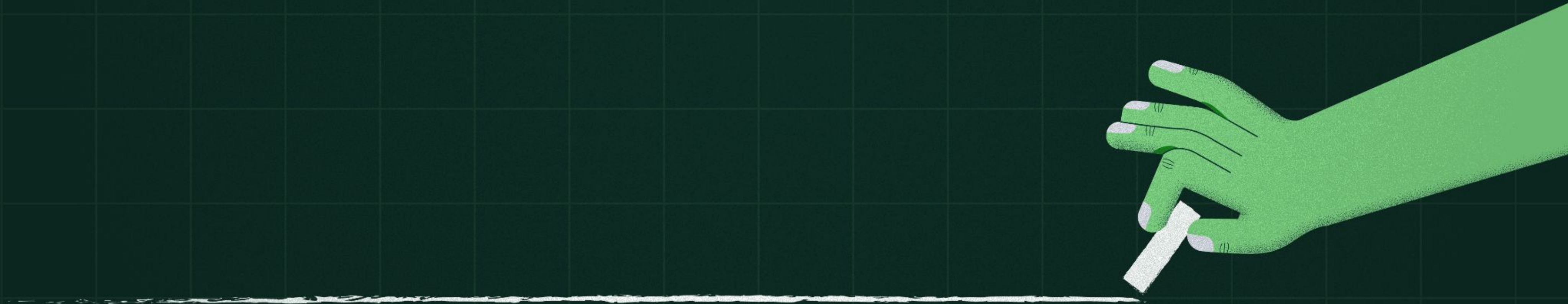
1) $f(x) = x^2 - 1$ en $x = 1$

2) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$ en $x =$ -1

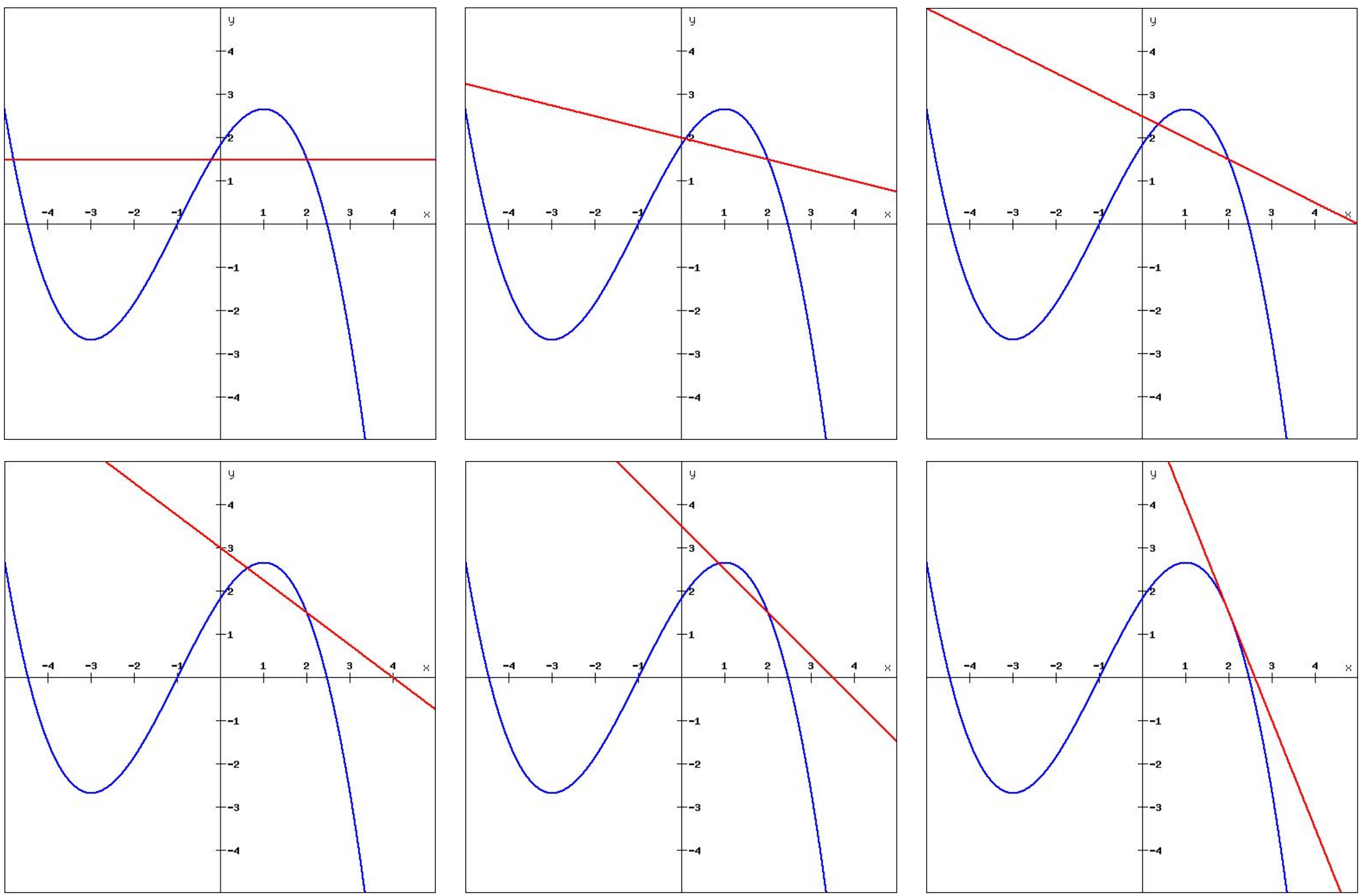
Reto: ¿Dónde hay discontinuidades?

Busca el reto para este tema y trabaja en su solución. ¡No olvides compartir tu experiencia en la sección de comentarios!

Visualizando la derivada



El problema de Newton y Leibniz



Aproximación por secantes

Estima la pendiente de la línea tangente en $x=2$ para la función indicada más abajo, utilizando aproximaciones de 0.1, 0.01, 0.001 y 0.0001 a izquierda y derecha del valor de x.

$$f(x) = -\frac{1}{6}(x+1)^3 + 2x + 2$$

La fórmula de la pendiente

La pendiente es una razón de cambio y se determina con la fórmula:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

La fórmula de la pendiente

Considerando la cantidad de aproximaciones, se deben calcular 8 puntos, más el punto donde se ubicará la tangente, y hacer los cálculos de las pendientes de las líneas secantes.

La fórmula modificada

Los puntos para calcular la pendiente estarían dados por $(x, f(x))$ para el punto de tangencia, y por $(x+h, f(x+h))$ para el segundo punto.

Por lo tanto, la fórmula para la pendiente sería:

$$m = \frac{f(x) - f(x+h)}{x - (x+h)}$$

Cálculo del punto de tangencia

Si $x = 2$, $f(x)$ se calcularía así:

$$f(2) = -\frac{1}{6}((2)+1)^3 + 2(2) + 2 = 1.5$$

Por lo tanto, el punto de tangencia $(x, f(x))$ es $(2, 1.5)$

Cálculo del punto para la primera secante

Para $h = -0.1$, $x + h = 2 + (-0.1) = 1.9$, entonces $f(x+h)$ se calcularía así:

$$f(1.9) = -\frac{1}{6}(1.9+1)^3 + 2(1.9) + 2 = 1.7352$$

Esto significa que el punto $((x+h), f(x+h))$ para determinar la pendiente de la primera secante es $(1.9, 1.7352)$

Cálculo de la primera pendiente

Utilizando la fórmula modificada de pendiente y los puntos obtenidos se puede obtener la pendiente de la primera secante.

$(x, f(x))$ es $(2, 1.5)$

$((x+h), f(x+h))$ es $(1.9, 1.7352)$

$$m = \frac{f(x) - f(x+h)}{x - (x+h)} = \frac{1.5 - 1.7352}{2 - 1.9} = -2.3517$$

La tabulación completa

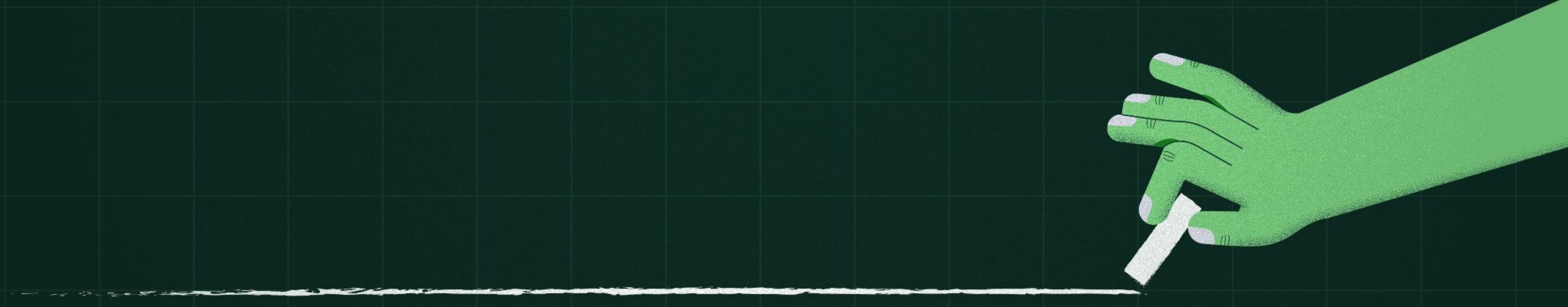
x	*h*	*x+h*	*f(x+h)*	*m*
2	-0.1	1.9	1.7352	-2.3517
2	-0.01	1.99	1.5249	-2.4850
2	-0.001	1.999	1.5025	-2.4985
2	-0.0001	1.9999	1.5002	-2.4999
2	0	2	1.5	0/0
2	0.0001	2.0001	1.4975	-2.5015
2	0.001	2.001	1.4975	-2.5015
2	0.01	2.01	1.4748	-2.5150
2	0.1	2.1	1.2348	-2.6517

Uniendo los puntos...

Se puede deducir de la tabla que la pendiente de la línea tangente en el punto $(2, 1.5)$ es -2.5

Trabajando directamente con la función, usando álgebra y límites para resolver el problema de la indeterminación 0/0 se pueden obtener expresiones para cualquier pendiente de una función. ¡Eso son las derivadas!

La definición de derivada



Recordando lo que hicimos

Se ajustó la fórmula de pendiente a la forma

$m = \dfrac{f(x) - f(x+h)}{x - (x+h)}$, que se puede simplificar

así: $m = \dfrac{f(x) - f(x+h)}{-h} = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Y recuerda que h se aproxima a 0.

Definición de derivada

La derivada de una función $f(x)$ es otra función $f'(x)$, que representa las pendientes de las tangentes para cualquier punto de $f(x)$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$f'(x)$ se lee "f prima de x" o "derivada de $f(x)$".

Notación de derivada

La derivada puede representarse por cualquiera de las siguientes expresiones:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[f(x)]$$

Las nuevas notaciones se leen como “y prima”, “derivada de y con respecto a x”, y “derivada de $f(x)$ con respecto a x”, respectivamente.

Derivada tras derivada

Debes recordar que la diferenciación puede aplicarse de forma sucesiva.

Por ejemplo, en física, la derivada de la función de posición es la función de velocidad. Y la derivada de esta es la función de aceleración.

Obtención de derivadas utilizando la definición

La derivada de una función cuadrática

Determina la derivada de $f(x) = x^2 + 1$

En este caso $f(x+h) = (x+h)^2 + 1$, y usando la fórmula tenemos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\left((x+h)^2 + 1\right) - (x^2 + 1)}{h}$$

La derivada de una función raíz cuadrada

Determina la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$

En este caso $f(x+h) = \sqrt{x+h}$, y usando la fórmula tenemos:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

La derivada de una función de proporcionalidad inversa

Determina la derivada de $f(x) = \dfrac{1}{x}$

En este caso $f(x+h) = 1/(x+h)$, y usando la fórmula tenemos:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

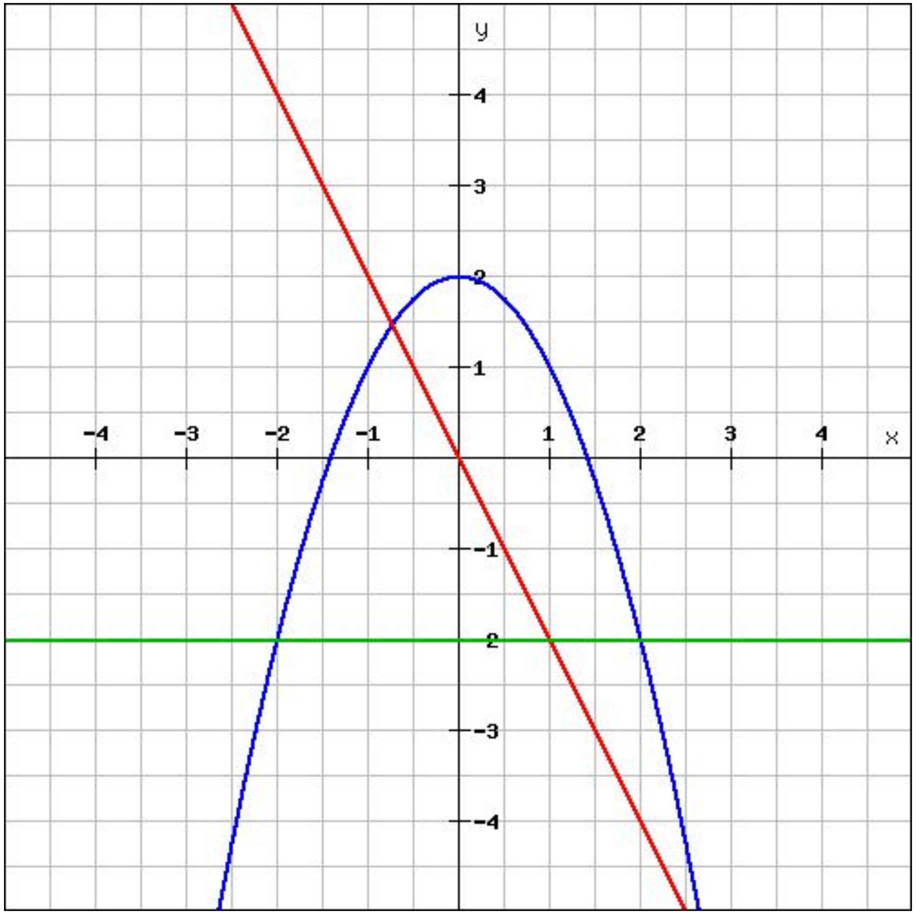
Reto: trote algebraico

El reto de esta ocasión requiere algo de paciencia, ¡toma tu tiempo en resolverlo!

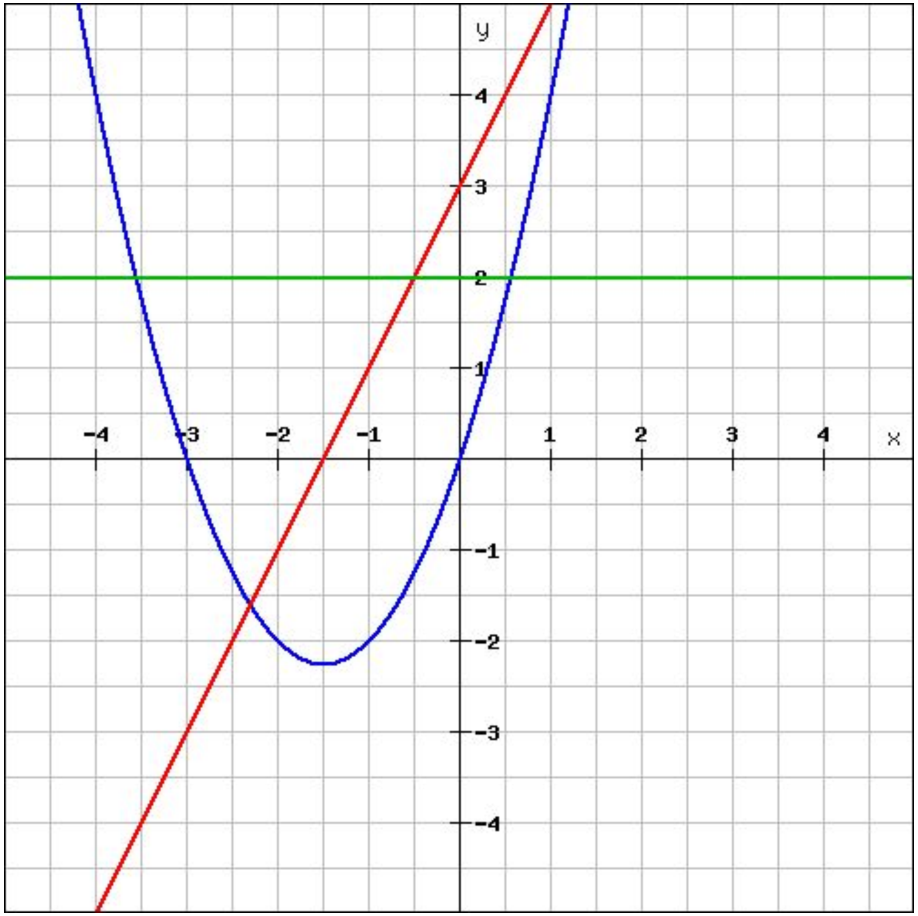
Esperamos tus dudas, comentarios y observaciones en la sección de comentarios.

Interpretando la derivada gráficamente

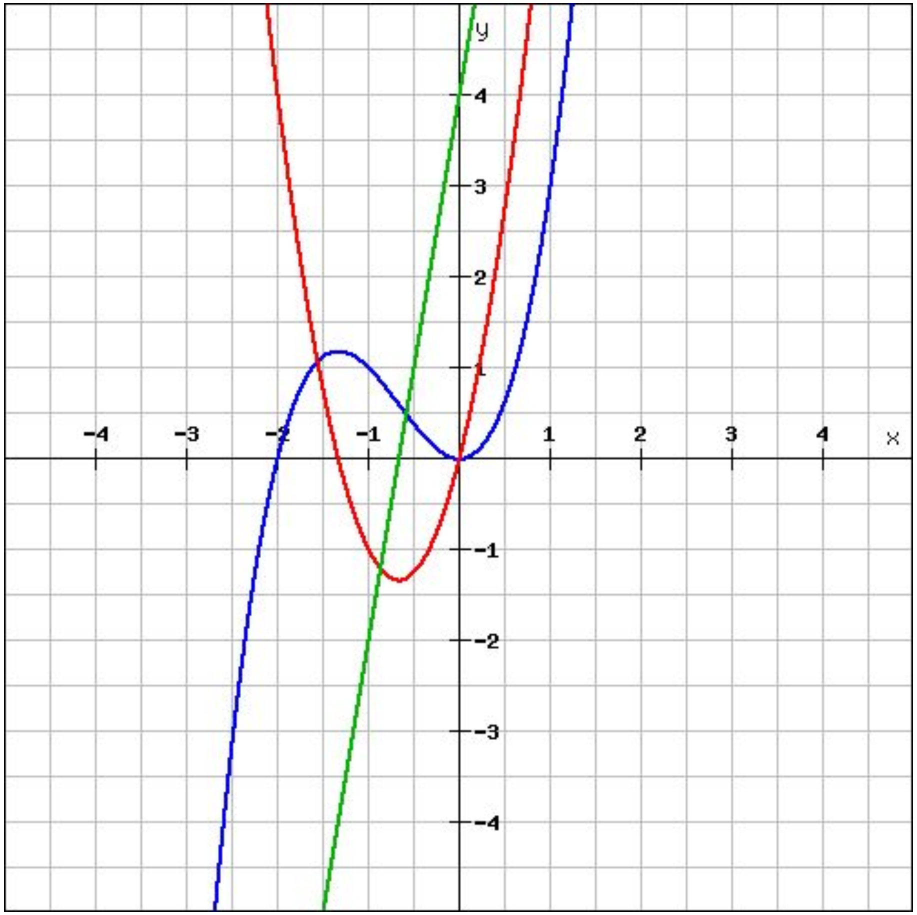
Considera $y = 2 - x^2$, $y' = -2x$, y $y'' = -2$



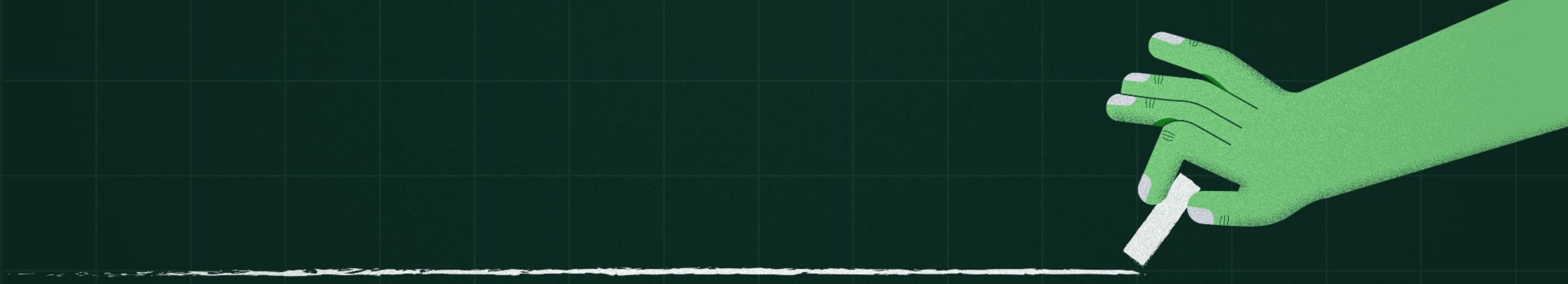
Considera $y = x^2 + 3x$**,** $y' = 2x + 3$**, y** $y'' = 2$



Considera $y = x^3 + 2x^2$, $y' = 3x^2 + 4x$, **y** $y'' = 6x + 4$



WolframAlpha y Symbolab



Recursos en línea

- Potencian el aprendizaje.
- Facilitan el autoestudio.
- Son muy rápidos.
- Permiten explorar escenarios.
- Por una suscripción obtienes soluciones completas.

WolframAlpha

- Máquina de conocimiento.
- Muy útil para diversos temas.
- Servicios básicos son gratuitos.
- Servicios avanzados tienen costo.
- Cuenta con muchos ejemplos.
- Se accede en www.wolframalpha.com.
- Está en inglés.

Symbolab

- Enfocado principalmente a matemáticas.
- Parte de la información en español.
- Más servicios gratuitos que WolframAlpha.
- Más enfoque didáctico.
- Se accede en www.symbolab.com.

Reto: ¿Cómo funciona?

Si eres fan de las computadoras, ¡este reto es para ti! Esta actividad trata de resolver algunos ejercicios utilizando WolframAlpha y Symbolab.

Será muy interesante leer las experiencias que hayas tenido con estos sitios. ¿Conoces alguno que consideres muy bueno? ¡Recomiéndalo a la comunidad en la sección de comentarios!

Derivadas de una función constante y de una función con un multiplicador constante

Regla de una función constante

$$\frac{d}{dx}[c] = 0$$

Regla de una función con múltiplo constante

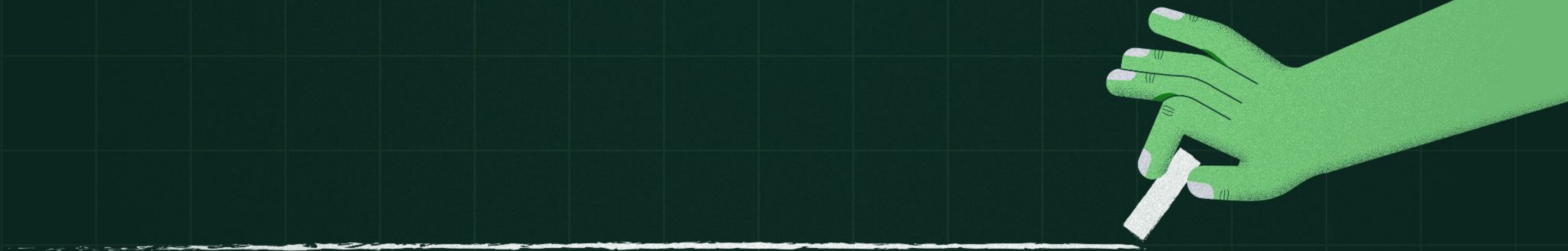
$$\frac{d}{dx}[kf(x)] = k\frac{d}{dx}[f(x)] = kf'(x)$$

Derivada de una función potencia

Regla de la función potencia

$$\frac{d}{dx}\left[x^{n}\right] = nx^{n-1}$$

Derivada de una suma o resta de funciones



Regla de la derivada de una suma o resta de funciones

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$$

Reto: aplicando las reglas

Quizás encuentres que este reto no es tan retador. Sí, obtener derivadas utilizando las reglas es bastante sencillo, aunque requiere cierto nivel de atención.

Esperamos tu participación en la sección de comentarios.

Derivada de un producto de funciones

Regla de la derivada de un producto de funciones

$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Derivada de un cociente de funciones

Regla de la derivada del cociente de funciones

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Reto: multiplicar y dividir al derivar

Este reto requiere paciencia con el álgebra (sí, aquella que algunos decían que no sirve para nada…). Toma tu tiempo. Si tienes dudas, consulta las soluciones en la sección de apoyos para orientar tu trabajo.
La sección de comentarios está esperando por ti.

Derivadas de funciones trigonométricas

Reglas para las derivadas de funciones trigonométricas

Función	Signo	Derivada
$\sin x$	+	$\cos x$
$\cos x$	-	$\sin x$
$\tan x$	+	$\sec^2 x$
$\cot x$	-	$\csc^2 x$
$\sec x$	+	$\sec x \tan x$
$\csc x$	-	$\csc x \cot x$

Derivada de funciones exponenciales

Reglas de funciones exponenciales

$$\frac{d}{dx}[a^x] = a^x \ln a$$

$$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$$

Derivada de funciones logarítmicas

Regla de funciones logarítmicas

$$\frac{d}{dx}[\log_a x] = \frac{1}{x \ln a}$$

$$\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}$$

Ejercicios "trascendentales"

Bueno, al estudiar, todos los ejercicios son trascendentales porque nos ayudan a consolidar nuestro aprendizaje. Esperamos que este reto te ayude a consolidar tus destrezas.

Recuerda dejar tus dudas y opiniones en la sección de comentarios. El aprendizaje en equipo siempre es más productivo.

Qué son las funciones compuestas

La composición de funciones

Se obtienen cuando las funciones son evaluadas con otras funciones.

$f \circ g(x) = f(g(x))$ "f de g de x"

$g \circ f(x) = g(f(x))$ "g de f de x"

El rango de la función interna debe satisfacer al dominio de la función externa.

Ejemplos

$$f(x) = \sqrt{x}$$
$$g(x) = x + 2$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \sqrt{x+2}$$
$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \sqrt{x} + 2$$

Ejemplos

$$f(x) = x^2 + x$$
$$g(x) = 1 - x$$

$$f(g(x)) = (1-x)^2 + (1-x) = x^2 - 3x + 2$$
$$g(f(x)) = 1 - \left(x^2 + x\right) = 1 - x^2 - x$$

Ejemplos

$$f(x) = \sin x$$
$$g(x) = x + 1$$

$$f(g(x)) = \sin(x+1)$$
$$g(f(x)) = \sin x + 1$$

Ejemplos

$$f(x) = e^x$$

$$g(x) = x^2 + 1$$

$$f(g(x)) = e^{x^2+1}$$

$$g(f(x)) = (e^x)^2 + 1 = e^{2x} + 1$$

Ejemplos

$h(x) = \dfrac{1}{x - x^2}$ es una función compuesta.

Determina las funciones f y g con que se elaboró.

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad\qquad g(x) = x - x^2$$

Ejemplos

$h(x) = (2-x)^2$ es una función compuesta. Determina las funciones f y g con que se elaboró.

$$f(x) = x^2 \qquad\qquad g(x) = 2 - x$$

Ejemplos

$h(x) = e^{\sqrt{x}}$ es una función compuesta.
Determina las funciones f y g con que se elaboró.

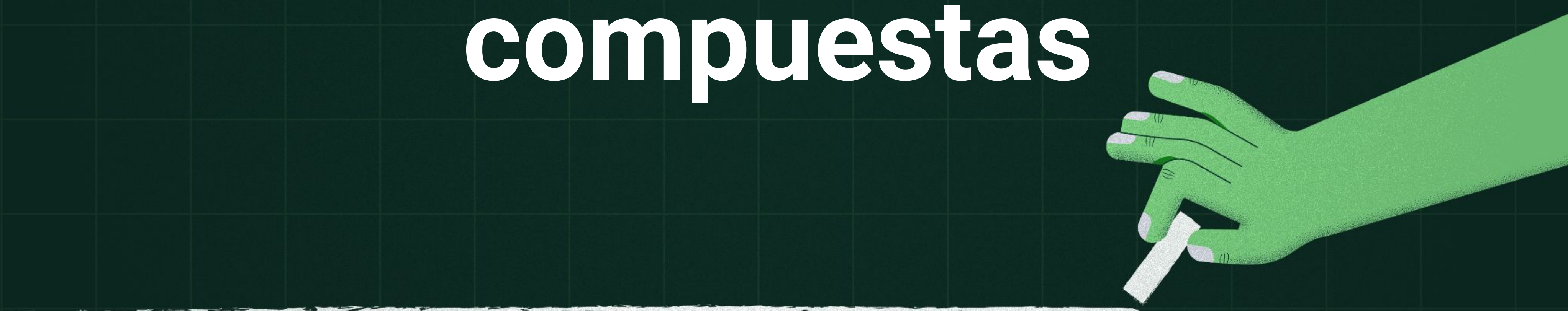
$$f(x) = e^x \qquad\qquad g(x) = \sqrt{x}$$

Derivadas de funciones algebraicas compuestas

Regla de la cadena

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Derivadas de funciones trascendentes compuestas



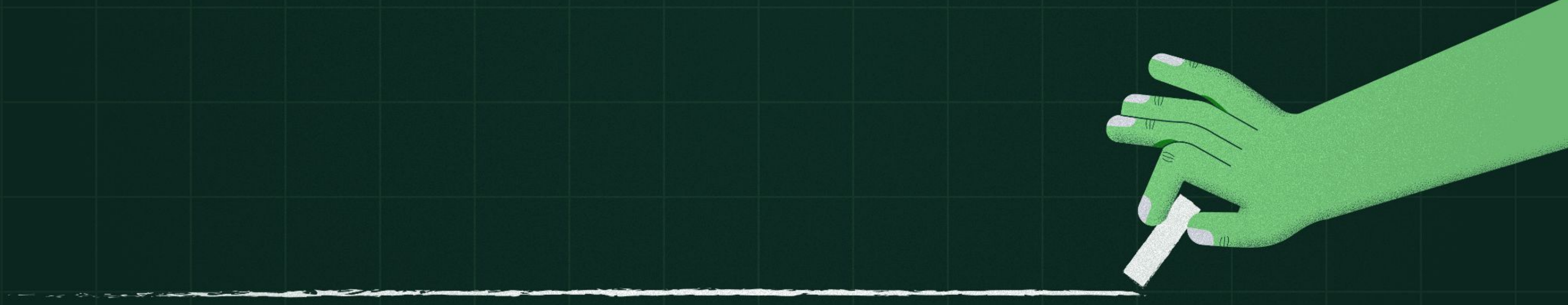
Regla de la cadena

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Reto: de todo un poco

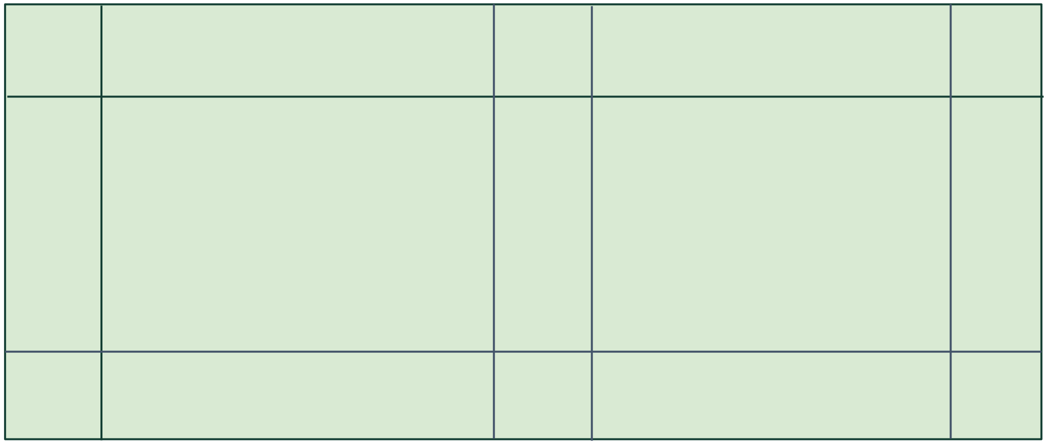
No, esto no es el examen final. Pero aquí tienes que aplicar todas las reglas de diferenciación. Esta tarea te será muy útil para que evalúes lo que has aprendido y las habilidades que has desarrollado. Comparte tu experiencia, dudas o recomendaciones a la comunidad en la sección de comentarios.

Así usamos cálculo en la vida real



Esto realmente ocurrió...

José maximizó el volumen de una caja con tapa, con el diseño de abajo, a partir de un cartón de 40 por 90 cm. Los cuadros de las esquinas y el centro son de tamaño de $x \times x$. ¿Cómo lo hizo?



¿En qué más podemos usar el cálculo?