МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

Департамент информатики, математического и компьютерного моделирования

ОТЧЕТ

по лабораторной работе
по дисциплине «Вычислительная математика»

Выполнил студент
гр. Б9119-02.03.01сцт
Панченко Н.К. ____________
(ФИО) *(подпись)*

«02» июня 2022 г.

г. Владивосток
2022

Содержание

Введение

Отчёт по лабораторной работе на тему «Метод квадратного корня».

Метод QR

Изучить и реализовать метод QR для решения СЛАУ, а также описать работу алгоритма и привести результаты.

Алгоритм

Метод состоит в выполнении $n-1$ шагов (n - порядок матрицы), в результате чего матрица A системы приводится к верхней треугольной форме, и последующем решении системы с верхней треугольной матрицей.

Цель $k-$й шага - обнулить все поддиагональные элементы $k-$го столбца. Для этого орпделим вектор нормали $p^{(k)} = (0, \cdots, 0, p_k^{(k)}, p_{k+1}^{(k)}, \cdots, p_n^{(k)})^T$ положив:

$$p_k^{(k)} = a_{kk}^{(k-1)} + \sigma_k \sqrt{\sum_{l=k}^{n} (a_{lk}^{(k-1)})^2}, \quad \sigma_k = \begin{cases} 1, a_{kk}^{(k-1)} \geq 0, \\ 1, a_{kk}^{(k-1)} < 0, \end{cases}$$

$$p_l^{(k)} = a_{lk}^{(k-1)}, l = k+1, \cdots, n.$$

Определим теперь матрицу отражений P_k с элементами $p_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij} - 2p_i^{(k)} p_j^{(k)} / \sum_{l=k}^{n} (p_l^{(k)})^2$.

Остальные элементы вычисляются по формулам:

$$a_{kk}^{(k)} = -\sigma_k \sqrt{\sum_{l=k}^{n} (a_{lk}^{(k-1)})^2}, \quad a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - 2p_i^{(k)} \frac{\sum_{l=k}^{n} (p_l^{(k)} a_{lj}^{(k-1)})}{\sum_{l=k}^{n} (p_l^{(k)})^2}$$

$$i = k, k+1, \cdots, n, \qquad j = k+1, \cdots, n.$$

В результате выполенния всех $n-1$ шагов матрица A приведется к верхней треугольной матрице:

$$A_{n-1} = P_{n-1}P_{n-2}...P_2P_1A,$$

$R = A_{n-1}, Q = P_1P_2...P_{n-1}$ Если мы нашли разложение $A = QR$, то для решения нам достаточно решить систему $Rx = Q*f$ с треугольной марицей R и правой частью $g = Q*f$. Решение находится по формулам:

$$x_n = \frac{g_n}{r_{nn}}, \quad x_i = \frac{g_i - \sum_{j=i+1}^{n} r_{ij}x_j}{r_{ij}}, \quad i = n-1, n-2, ..., 1.$$

Но сначала надо вычислить вектор $g = P_{n-1}...P_2P_1f$. Обозначим $f^{(k)} = P_kP_{k-1}P_1f$. Тогда $f^{(k)} = P_kf^{(k-1)}$. Предположим, что вектор f^{k-1} имеет вид:

$$f^{k-1} = (f_1^1, f_2^2, ..., f_{k-1}^{k-1}, f_k^{k-1}, f_{k+1}^{k-1}, ..., f_n^{k-1})^T.$$

В силу определения матрицы P_k и определяющего ее вектора p^k легко проверить, что вектор f^k будет иметь вид:

$$f^{(k)} = (f_1^{(1)}, f_2^{(2)}, ..., f_{k-1}^{(k-1)}, f_k^{(k)}, f_{k+1}^{(k)}, ..., f_n^{(k)})^T,$$

где элементы f_i^k вычисляются по формулам:

$$f_i^{(k)} = f_i^{(k-1)} - 2p_l^{(k)}\frac{\sum_{l=k}^{n} p_l^{(k)}f_l^{(k-1)}}{\sum_{l=k}^{n}(p_l^{(k)})^2}, \quad i = k, k+1, ..., n.$$

Тесты