МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

Кафедра информатики, математического и компьютерного моделирования

ОТЧЕТ

по лабораторной работе
по дисциплине «Вычислительная математика»

Выполнил студент
гр. Б9119-02.03.01сцт
Панченко Н.К. ____________
(ФИО) *(подпись)*

«02» июня 2022 г.

г. Владивосток
2022

Содержание

Введение

Отчёт по лабораторной работе на тему «Число обусловленности».

Число обусловленности

Числом обусловленности матрицы A называется

$$\mu(A) = \sup_{x\neq0, y\neq0} \left(\frac{||Ax||}{||x||} / \frac{||Ax||}{||x||} \right)$$

Чтобы понять смысл этой характеристики, Рассмотрим систему уравнений

$$Ax = f \qquad (2)$$

С невырожденной матрицей A и рассмотрим систему уравнений с возмщенной правйо частью

$$A(x + \xi) = f + \eta \qquad (3)$$

$\xi-$ возмущение решени, вызванное возмещением η правой части Вычтем (2) из (3) имеем $A\xi = \eta$ Оценим:

$$\frac{||\xi||}{||x||} \cdot \frac{||f||}{||\eta||} = \frac{||\xi||}{||x||} \cdot \frac{||Ax||}{||A\xi||} = \frac{||Ax||}{||x||} / \frac{||A\xi||}{||\xi||} \leq \mu(A) \frac{||\eta||}{||f||};$$

Отсюда:

$$\frac{||\xi||}{||x||} \leq \mu(A) \frac{||\eta||}{||f||}. \qquad (4)$$

Заметим, что из определения точной верхне2 грани непосредственно следует, что $\mu(A)-$ наименьшая их констант, для которых при всех $f \neq 0$ и всех $\mu \neq 0$ справедливо (4).
Величины:

$\frac{||\mu||}{||f||}$- наз. отсносительным возмущениес правой части

$\frac{||\mu||}{||f||}$- отсносительным возмещением решения.

Неравенство (4) показывает, что если число $\mu(A)$ велико, то даже при мальньком относительном возмущении правой части относительное возмущение решения может быть достаточно большим: последнее может быть боьльше первого в $\mu(A)$ раз. Инными словами, при большом числе обусловленности даже малое изменение правой части может привести к большому изменению или плохо обусловлено ее правой частью.

Если же число $\mu(A)$ невилико, то из (4) слеждует, что малое изменение правой части приводит к малому изменению решения. В этом случае говорят, что решение системы хорошо обусловленно ее правой частью.

Мерой обусловленности решения системы ее правой частью, как мы видим, и является число обусловленности матрицы этой системы.

Матрицы с большим числом обусловленности называют плохо обусловленными, а матрицы, имеющие большое число обусловленности - хорошо обусловленными.

Предполагаем, что A невырожденная, получим формулу для $\mu(A)$:

$$\mu(A) = \frac{\sup\limits_{x\neq 0}\frac{||Ax||}{||x||}}{\inf\limits_{y\neq 0}\frac{||Ay||}{||y||}}$$

Числитель есть $||A||$ подчиненная норме векторной$||x||$
Сделаем замену $x = Ay$

$$\inf_{y\neq 0}\frac{||Ay||}{||y||}=\inf_{z\neq 0}\frac{||z||}{||A^{-1}z||}=\inf_{z\neq 0}\frac{1}{\frac{||A^{-1}z||}{||z||}}=\frac{1}{\sup\limits_{z\neq 0}\frac{||A^{-1}z||}{||z||}}=\frac{1}{||A^{-1}||}$$

Окончательно, $\mu(A)=||A||\cdot||A^{-1}||$
Если , A- вырожденная, то однородная система $Ay=0$ имеет нетривиальное решение и следовательно

$$\inf_{y\neq 0}\frac{||Ay||}{||y||}=0$$

В этом случае $\mu(A)=\infty$
Отметим , что число обусловленности матрицы не может быть ≤ 1.
Выясняя смысл числа обусловленности $\mu(A)$ мы видели, что оно характеризует обусловленность решения системы $Ax=f$ ее праой частью. Оказывается, что $\mu(A)$ указывается и на характер обусловленности решения системы ее матрицей.
Наряду с системой $Ax=f$ рассмотрим систему

$$(A+\sigma)(x+\xi)=f+\eta$$

Здесь $\xi-$ возмущение решения, вызванное возмущением η правой части и возмущением σ матрицы системы.

Решение

Вычислить число обусловленности системы:

$$\begin{cases}2x+y=2\\(2-\varepsilon)x+y=1\end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 - 2x \\ 2x - \varepsilon x + 2 - 2x = 1 \end{cases}$$

$$\varepsilon x = 1 \quad x = \frac{1}{\varepsilon} \quad y = 2 - \frac{2}{\varepsilon}$$

$$||A||_1 = 2 + |2 - \varepsilon|$$

$$|A| = 2 - 2 + \varepsilon = \varepsilon$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 + \varepsilon & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \varepsilon - 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$||A^{-1}||_1 = \begin{cases} \frac{3}{\varepsilon}, \varepsilon \leq 4 \\ \dfrac{-1 + \varepsilon}{\varepsilon}, \varepsilon > 4 \end{cases}$$

$$\mu(A) = \begin{cases} \dfrac{6 + 3|2 - \varepsilon|}{\varepsilon}, \varepsilon \leq 4 \\ \dfrac{(2 + |2 - \varepsilon|)(-1 + \varepsilon)}{\varepsilon}, \varepsilon > 4 \end{cases}$$

$$\mu = \frac{6 + 3|2 + \varepsilon|}{\varepsilon} = \begin{cases} \dfrac{2 - 3\varepsilon}{\varepsilon}, \varepsilon \leq 2 \\ 3, \varepsilon > 2 \end{cases}$$

$$\mu(A) = \begin{cases} \dfrac{12 - 3\varepsilon}{\varepsilon}, 0 < \varepsilon \leq 2 \\ 3, 2 < \varepsilon \leq 4 \\ \varepsilon - 1, \varepsilon > 4. \end{cases}$$