



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

**Департамент информатики, математического и
компьютерного моделирования**

ОТЧЕТ

по лабораторной работе
по дисциплине «Вычислительная математика»

Выполнил студент
гр. Б9119-02.03.01сцт
Панченко Н.К.

(ФИО)

(подпись)

«02» июня 2022 г.

**г. Владивосток
2022**

Содержание

Введение	3
Метод QR	4

Введение

Отчёт по лабораторной работе на тему «Метод квадратного корня».

Метод QR

Изучить и реализовать метод QR для решения СЛАУ, а также описать работу алгоритма и привести результаты.

Алгоритм

Метод состоит в выполнении $n - 1$ шагов (n - порядок матрицы), в результате чего матрица A системы приводится к верхней треугольной форме, и последующем решении системы с верхней треугольной матрицей.

Цель k -й шага - обнулить все поддиагональные элементы k -го столбца. Для этого определим вектор нормали $p^{(k)} = (0, \dots, 0, p_k^{(k)}, p_{k+1}^{(k)}, \dots, p_n^{(k)})^T$ положив:

$$p_k^{(k)} = a_{kk}^{(k-1)} + \sigma_k \sqrt{\sum_{l=k}^n (a_{lk}^{(k-1)})^2}, \quad \sigma_k = \begin{cases} 1, & a_{kk}^{(k-1)} \geq 0, \\ -1, & a_{kk}^{(k-1)} < 0, \end{cases}$$

$$p_l^{(k)} = a_{lk}^{(k-1)}, l = k + 1, \dots, n.$$

Определим теперь матрицу отражений P_k с элементами $p_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij} - 2p_i^{(k)} p_j^{(k)} / \sum_{l=k}^n (p_l^{(k)})^2$.

Остальные элементы вычисляются по формулам:

$$a_{kk}^{(k)} = -\sigma_k \sqrt{\sum_{l=k}^n (a_{lk}^{(k-1)})^2}, \quad a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - 2p_i^{(k)} \frac{\sum_{l=k}^n (p_l^{(k)} a_{lj}^{(k-1)})}{\sum_{l=k}^n (p_l^{(k)})^2}$$

$$i = k, k + 1, \dots, n, \quad j = k + 1, \dots, n.$$

В результате выполнения всех $n - 1$ шагов матрица A приведется к верхней треугольной матрице:

$$A_{n-1} = P_{n-1}P_{n-2}...P_2P_1A,$$

$R = A_{n-1}$, $Q = P_1P_2...P_{n-1}$ Если мы нашли разложение $A = QR$, то для решения нам достаточно решить систему $Rx = Q * f$ с треугольной матрицей R и правой частью $g = Q * f$. Решение находится по формулам:

$$x_n = \frac{g_n}{r_{nn}}, \quad x_i = \frac{g_i - \sum_{j=i+1}^n r_{ij}x_j}{r_{ii}}, \quad i = n - 1, n - 2, \dots, 1.$$

Но сначала надо вычислить вектор $g = P_{n-1}...P_2P_1f$. Обозначим $f^{(k)} = P_kP_{k-1}P_1f$. Тогда $f^{(k)} = P_kf^{(k-1)}$. Предположим, что вектор f^{k-1} имеет вид:

$$f^{k-1} = (f_1^1, f_2^2, \dots, f_{k-1}^{k-1}, f_k^{k-1}, f_{k+1}^{k-1}, \dots, f_n^{k-1})^T.$$

В силу определения матрицы P_k и определяющего ее вектора p^k легко проверить, что вектор f^k будет иметь вид:

$$f^{(k)} = (f_1^{(1)}, f_2^{(2)}, \dots, f_{k-1}^{(k-1)}, f_k^{(k)}, f_{k+1}^{(k)}, \dots, f_n^{(k)})^T,$$

где элементы f_i^k вычисляются по формулам:

$$f_i^{(k)} = f_i^{(k-1)} - 2p_l^{(k)} \frac{\sum_{l=k}^n p_l^{(k)} f_l^{(k-1)}}{\sum_{l=k}^n (p_l^{(k)})^2}, \quad i = k, k + 1, \dots, n.$$

Тесты

Возьмем матрицу A :

$$A = \begin{pmatrix} 2.2 & 4 & -3 & 1.5 & 0.6 & 2 & 0.7 \\ 4 & 3.2 & 1.5 & -0.7 & -0.8 & 3 & 1 \\ -3 & 1.5 & 1.8 & 0.9 & 3 & 2 & 2 \\ 1.5 & -0.7 & 0.9 & 2.2 & 4 & 3 & 1 \\ 0.6 & -0.8 & 3 & 4 & 3.2 & 0.6 & 0.7 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 0.6 & 2.2 & 4 \\ 0.7 & 1 & 2 & 1 & 0.7 & 4 & 3.2 \end{pmatrix}$$

Возьмем вектор b :

$$b = \begin{pmatrix} 3.2 \\ 4.3 \\ 0.1 \\ 3.5 \\ 5.3 \\ 9 \\ 3.7 \end{pmatrix}$$

Сравним с точным решением.

Результаты

```
Результат QR: [ 1.0957  0.2604  0.3176  0.6612  0.2558 -0.6281  1.1592]
Точное решение: [ 1.0957  0.2604  0.3176  0.6612  0.2558 -0.6281  1.1592]
Разница:
[0.0, 0.0, 6.661338147750939e-16, 1.1102230246251565e-16, 7.771561172376096e-16, 1.1102230246251565e-15, 1.3322676295501878e-15]
```