



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
**«Дальневосточный федеральный университет»**  
**(ДВФУ)**

---

## **ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК**

**Департамент информатики, математического и  
компьютерного моделирования**

### **ОТЧЕТ**

по лабораторной работе  
по дисциплине «Дифференциальные уравнения»

Выполнил студент  
гр. Б9119–02.03.01сцт  
Панченко Н.К.  
\_\_\_\_\_  
(ФИО) (подпись)

«17» мая 2022 г.

**г. Владивосток  
2022**

# Содержание

Введение	3
Постановка задачи	4
Эксперимент	5
Решение	7
Код	10
Заключение	11

# Введение

Реализовать алгоритм построения интегрального преобразования Фурье для произвольно-заданных функций одной переменной.

## Постановка задачи

Для реализации алгоритма потребуются следующие параметры:

- $f(t)$  – определение функции,
- $a, b$  – область интегрирования функции,
- $n_1$  – количество разбиений области интегрирования (также можно использовать шаг  $h_1$ ),
- $n_2$  – количество разбиений частотного диапазона (также можно использовать шаг  $h_2$ ),
- $m$  – максимальное значение частоты.

Задача сводится к построению спектрального разложения одномерного сигнала  $f(t)$  на частоты составляющих его волн.

Реализация проводится с помощью численных методов расчета интегралов. Потребуется построить график функции  $f(t)$ , и ее вещественные и комплексные спектральные разложения ( $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}\{f\}$  и  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}\{f\}$ ). Графики разложений строятся в диапазоне  $\omega \in [0, m]$ . Оси графиков разложений представляют из себя по горизонтали - частотный диапазон, по вертикали - амплитуда.

Решение оформить в среде L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.

## Эксперимент

Рассмотрим функцию  $f(t) = \sin t$  на диапазоне  $[a, b] = [0, \pi]$ , в остальном диапазоне полагая  $f(t) = 0$ . Для аналитического решения, функция примет вид:  $f(t) = \sin t \cdot \Pi_{0,\pi}(t)$ . Положим  $\chi = 2\pi\omega$ . Тогда преобразование Фурье примут вид:

$$\mathcal{F}_{\mathbb{R}}\{\sin t\} = \int_{-\infty}^{\infty} \sin t \cdot \Pi_{0,\pi}(t) \cdot \cos \chi t \, dt = \int_0^{\pi} \sin t \cos \chi t \, dt = \frac{\sin \pi\chi}{1 - \chi^2},$$

$$\mathcal{F}_{\mathbb{S}}\{\sin t\} = \int_{-\infty}^{\infty} \sin t \cdot \Pi_{0,\pi}(t) \cdot \sin \chi t \, dt = \int_0^{\pi} \sin t \sin \chi t \, dt = \frac{\cos \pi\chi + 1}{1 - \chi^2}.$$

В таком случае спектральный график в аналитической форме будет иметь следующий вид:

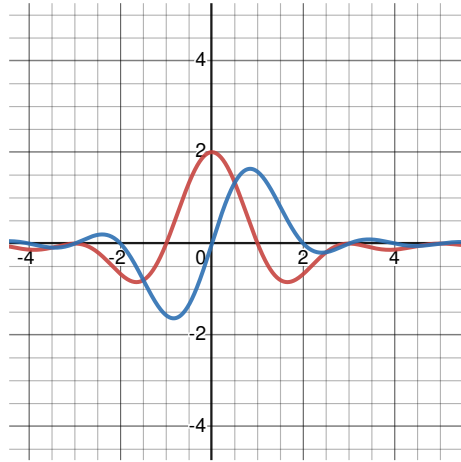


Рис. 1: Спектральный график волн синуса и косинуса (красный – косинус, синий – синус)

В результате реализации численного алгоритма, максимальное значение частоты выберем  $m = 2$ . Таким образом, численно найденный спектральный график имеет вид:

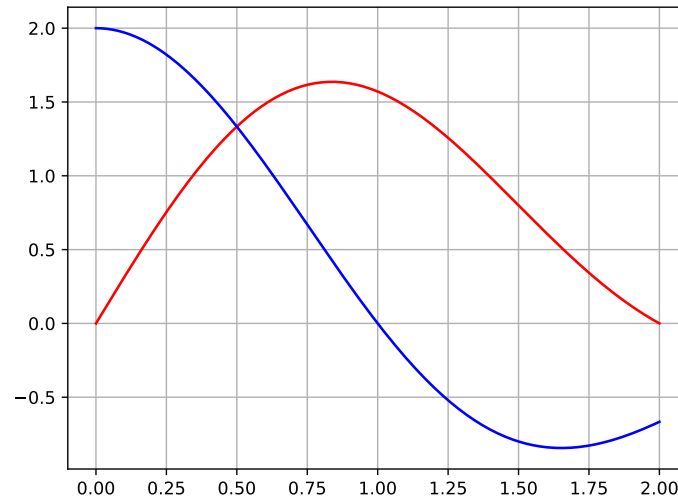


Рис. 2: Численно рассчитанный спектральный график волн синуса и косинуса (синий – косинус, оранжевый – синус)

## Решение

Рассмотрим функцию  $f(t) = \frac{t}{1-4t^2}$  на диапазоне  $[a, b] = \left[0, \frac{1}{4}\right]$ , в остальном диапазоне полагая  $f(t) = 0$ . Для аналитического решения, функция примет вид:  $f(t) = \frac{t}{1-4t^2} \cdot \Pi_{0, \frac{1}{4}}(t)$ . Положим  $\chi = 2\pi\omega$ . Тогда преобразование Фурье примут вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{t}{1-4t^2} \right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{1-4t^2} \cdot \Pi_{0, \frac{1}{4}}(t) \cdot \cos \chi t \, dt = \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{t}{1-4t^2} \cos \chi t \, dt = \\ &= -\frac{(-1)^{\omega} \operatorname{Ci} \left( \frac{3\pi\omega}{2} \right)}{8} + \frac{(-1)^{\omega} \operatorname{Ci} (\pi\omega)}{8} - \frac{(-1)^{\omega} \operatorname{Ci} \left( -\frac{\pi\omega}{2} \right)}{8} + \frac{(-1)^{\omega} \operatorname{Ci} (-\pi\omega)}{8}. \\ \mathcal{F}_{\mathbb{S}} \left\{ \frac{t}{1-4t^2} \right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{1-4t^2} \cdot \Pi_{0, \frac{1}{4}}(t) \cdot \sin \chi t \, dt = \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{t}{1-4t^2} \sin \chi t \, dt = \\ &= -\frac{(-1)^{\omega} i \operatorname{Si} \left( \frac{3\pi\omega}{2} \right)}{8} + \frac{(-1)^{\omega} i \operatorname{Si} (\pi\omega)}{8} - \frac{(-1)^{\omega} i \operatorname{Si} \left( -\frac{\pi\omega}{2} \right)}{8} + \frac{(-1)^{\omega} i \operatorname{Si} (-\pi\omega)}{8}. \end{aligned}$$

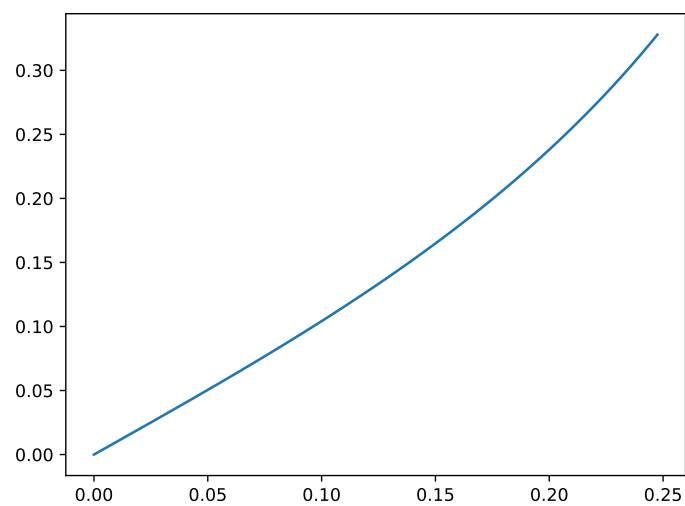


Рис. 3: График функции

В результате реализации численного алгоритма, максимальное значение частоты выберем  $m = 2$ . Таким образом, численно найденный спектральный график имеет вид:



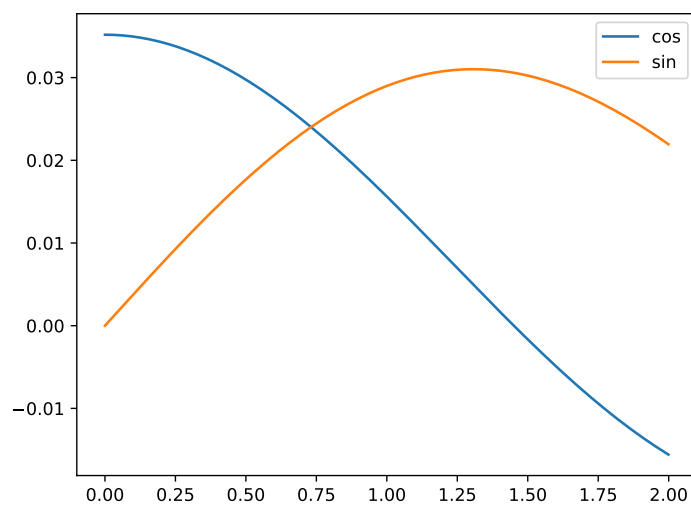


Рис. 4: Спектральный график волн синуса и косинуса

## Код

```
def f(t):
    return t / (1 - 4 * t**2)

def intelCos(t, w):
    return cos(2 * pi * w * t)

def intelSin(t, w):
    return sin(2 * pi * w * t)

def intel(f, x, func, w):
    return (sum([f(i) * func(i, w) * (x[-1] - x[0]) / len(x) for i in
        x]))

a = 0
b = 1/4
h1 = 200
h2 = 1000
m = 2
x = [(i / h1) * (b - a) + a for i in range(h1)]
y = [f(i) for i in x]
W = [i / h2 * m for i in range(h2)]
integ = [[integ(f, x, intelCos, i), integ(f, x, intelSin, i)] for i
    in W]
```

## Заключение

Во время выполнения данной лабораторной работы была решена поставленная задача и оформлена в L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.