МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

Департамент информатики, математического и компьютерного моделирования

ОТЧЕТ

по лабораторной работе
по дисциплине «Вычислительная математика»

Выполнил студент
гр. Б9119-02.03.01сцт
Панченко Н.К. __________
(ФИО) *(подпись)*

«02» июня 2022 г.

г. Владивосток
2022

Содержание

Введение

Отчёт по лабораторной работе на тему «Метод квадратного корня».

Метод QR

Изучить, понять и реализовать алгоритм метода оптимального исключения для решения СЛАУ, а также описать работу алгоритма и привести результаты.

Алгоритм

Метод состоит в выполнении $n-1$ шагов (n - порядок матрицы), в результате чего матрица A системы приводится к верхней треугольной форме, и последующем решении системы с верхней треугольной матрицей.

Цель $k-$й шага - обнулить все поддиагональные элементы $k-$го столбца. Для этого орпделим вектор нормали $p^{(k)} = (0, \cdots, 0, p_k^{(k)}, p_{k+1}^{(k)}, \cdots, p_n^{(k)})^T$ положив:

$$p_k^{(k)} = a_{kk}^{(k-1)} + \sigma_k \sqrt{\sum_{l=k}^{n} (a_{lk}^{(k-1)})^2}, \quad \sigma_k = \begin{cases} 1, a_{kk}^{(k-1)} \geq 0, \\ 1, a_{kk}^{(k-1)} < 0, \end{cases}$$

$$p_l^{(k)} = a_{lk}^{(k-1)}, l = k+1, \cdots, n.$$

Определим теперь матрицу отражений P_k с элементами $p_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij} - 2p_i^{(k)} p_j^{(k)} / \sum_{l=k}^{n} (p_l^{(k)})^2$.

Остальные элементы вычисляются по формулам:

$$a_{kk}^{(k)} = -\sigma_k \sqrt{\sum_{l=k}^{n} (a_{lk}^{(k-1)})^2}, \quad a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - 2p_i^{(k)} \frac{\sum_{l=k}^{n} (p_l^{(k)} a_{lj}^{(k-1)})}{\sum_{l=k}^{n} (p_l^{(k)})^2}$$

$$i = k, k+1, \cdots, n, \qquad j = k+1, \cdots, n.$$

В результате выполенния всех $n-1$ шагов матрица A приведется к верхней треугольной матрице:

$$A_{n-1} = P_{n-1}P_{n-2}...P_2P_1A,$$

$R = A_{n-1}, Q = P_1P_2...P_{n-1}$ Если мы нашли разложение $A = QR$, то для решения нам достаточно решить систему $Rx = Q * f$ с треугольной марицей R и правой частью $g = Q * f$. Решение находится по формулам:

$$x_n = \frac{g_n}{r_{nn}}, \quad x_i = \frac{g_i - \sum_{j=i+1}^{n} r_{ij}x_j}{r_{ij}}, \quad i = n-1, n-2, ..., 1.$$

Но сначала надо вычислить вектор $g = P_{n-1}...P_2P_1f$. Обозначим $f^{(k)} = P_kP_{k-1}P_1f$. Тогда $f^{(k)} = P_kf^{(k-1)}$. Предположим, что вектор f^{k-1} имеет вид:

$$f^{k-1} = (f_1^1, f_2^2, ..., f_{k-1}^{k-1}, f_k^{k-1}, f_{k+1}^{k-1}, ..., f_n^{k-1})^T.$$

В силу определения матрицы P_k и определяющего ее вектора p^k легко проверить, что вектор f^k будет иметь вид:

$$f^{(k)} = (f_1^{(1)}, f_2^{(2)}, ..., f_{k-1}^{(k-1)}, f_k^{(k)}, f_{k+1}^{(k)}, ..., f_n^{(k)})^T,$$

где элементы f_i^k вычисляются по формулам:

$$f_i^{(k)} = f_i^{(k-1)} - 2p_l^{(k)} \frac{\sum_{l=k}^{n} p_l^{(k)} f_l^{(k-1)}}{\sum_{l=k}^{n} (p_l^{(k)})^2}, \quad i = k, k+1, ..., n.$$

Тесты

Все вычисления так же будут проводиться с $\epsilon = 10^{-10}$. Матрицы генерируются случайным образом. Точное решение будем находить при помощи библиотеки numpy.linalg.

Первый тест, размер матрицы 3×3:

```
A
[32, 17, 13]
[18, 43, 12]
[6, 4, 20]
Собственное значение через numpy [58.874001309102496, 21.08856368524041, 15.037435005657152]
Число итераций
Iters 68
Собственное значение через QR [58.87400130910241, 21.088563685132787, 15.037435005764738]
Разница [8.526512829121202e-14, 1.0762235547190357e-10, 1.0758682833511557e-10]
```

Второй тест, размер матрицы 4×4:

```
A
[29, 5, 4, 1]
[12, 49, 17, 3]
[5, 7, 25, 10]
[2, 9, 6, 20]
Собственное значение через numpy [58.29555609538694, 26.175260313488202, 22.2001405476201, 16.329043043504623]
Число итераций
Iters 132
Собственное значение через QR [58.295556095387184, 26.17526031373474, 22.200140547373497, 16.329043043504655]
Разница [2.4158453015843406e-13, 2.4653701302668196e-10, 2.4660451458657917e-10, 3.197442310920451e-14]
```

Третий тест, размер матрицы 5×5:

```
A
[57, 10, 11, 10, 8]
[12, 47, 2, 8, 11]
[9, 0, 29, 11, 4]
[2, 3, 19, 50, 17]
[12, 4, 2, 16, 51]
Собственное значение через numpy [83.7489082240964, 51.34724507475521, 41.320826953699004, 37.96396790714696, 19.61905184030236]
Число итераций
Iters 247
Собственное значение через QR [83.74890822409664, 51.34724507475488, 41.32082695423506, 37.96396790661067, 19.6190518403024]
Разница [2.4158453015843406e-13, 3.2684965844964610e-13, 5.360547561394924e-10, 5.362892352422932e-10, 3.907985046680551e-14]
```

Четвертый тест, размер матрицы 6×6:

```
A
[40, 1, 7, 15, 2, 1]
[1, 36, 4, 8, 0, 5]
[8, 13, 55, 10, 9, 5]
[12, 14, 18, 92, 13, 16]
[14, 18, 12, 3, 75, 18]
[19, 19, 9, 4, 18, 87]
Собственное значение через numpy [121.57023848436222, 80.89263294804176, 62.62884003870739, 49.28689481285392, 38.20887037799311, 32.41252333804176]
Число итераций
Iters 141
Собственное значение через QR [121.57023848436204, 80.89263294804121, 62.628840038707324, 49.286894812853596, 38.20887037773565, 32.412523338299096]
Разница [1.8474111129762605e-13, 5.542233338928781e-13, 6.394884621840902e-14, 3.268496584496461e-13, 2.574580548753147e-10, 2.573372626102355e-10]
```