МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Дальневосточный федеральный университет»

Сборник задач по дисциплине «Дифференциальные уравнения и теоретическая механика»

III семестр, раздел I: «Операционное исчисление. Преобразования Лапласа и Фурье»

Максимов П.А.

г. Владивосток

Содержание

1 Введение

В данном разделе будут описаны функции и операторы, которые будут использоваться в дальнейшем.

1. $\operatorname{sgn}(t)$ – функция знака аргумента. Определение:

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \\ -1, & t < 0; \end{cases}$$

2. $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака, функция бесконечного точечного импульса. Определение:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0, \\ 0 & t \neq 0; \end{cases}$$

Свойства:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\ dt = 1; \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t)\ dt = f(0);$$

3. $u(t), H(t)$ – функция Хевисайда, степ-функция, разрывная функция смещения. Определение:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0, \\ 0 & t \leq 0; \end{cases}$$

4. $\Pi_{a,b}(t)$ – функция прямоугольника, определяет ненулевой отрезок. Определение:

$$\Pi_{a,b}(t) = \begin{cases} 1 & a < t < b, \\ 0 & \text{иначе}; \end{cases}$$

5. $f(t) * g(t)$ – $(*)$ оператор свертки, конволюции. Определение:

$$f(t) * g(t) = h(t) = \int\limits_0^t f(t-\tau) \cdot g(\tau)\ d\tau;$$

Свойства:

$$f * g = g * f;$$

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

$$f * (g + h) = f * g + f * h$$

1.1 Задачи

Найти результат применения оператора свертки:

1. $1 * 1$
2. $1 * 2$
3. $2 * t$
4. $t * t$
5. $t^2 * t$
6. $t * e^t$
7. $e^t * e^{2t}$
8. $e^t * \sin t$
9. $t * \ln t$
10. $e^{1-t} * \cos(1+t)$
11. $(1-t) * \sqrt{t}$
12. $5 \sin 2t * \cos 3t$
13. $\cosh t * 2 \sin(-t)$
14. $\ln 3t * t^2$
15. $\big(12t * t^2\big) * t^3$
16. $t * \arctan t$
17. $t * \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
18. $t * e^{t^2}$

19. $t * \delta(t)$
20. $t^2 * \delta(t-1)$
21. $e^{t+1} * \delta(t)$
22. $\sin t^2 * \delta(t)$
23. $\ln(t) * \delta(t)$
24. $\tan t * \delta^2(t)$
25. $\log_4 2t * \delta(t-2)$
26. $\sin t * u(t)$

27. $\sin t * u(t+1)$

28. $\arcsin 2t * \delta(t)$

29. $\ln t * u(t+1)$

30. $(\cos t * \delta(t)) * u(t-1)$

2 Преобразование Лапласа

Преобразование Лапласа $\mathscr{L}\left\{f(t)\right\}(s)$ – интегральное преобразование из функции вещественной переменной $t \in \mathbb{R}$ в функцию комплексной переменной $s \in \mathbb{C}$, $s = \alpha + i\omega$, $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$, описывающееся следующим выражением:

$$\mathscr{L}\left\{f(t)\right\}(s) = F(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} \cdot f(t)\,dt.$$

Для упрощения, в дальнейшем будем записывать $\mathscr{L}\left\{f\right\}$, подразумевая $\mathscr{L}\left\{f(t)\right\}(s)$. Такое преобразование позволяет сводить задачи дифференциальных и интегральных уравнений к алгебраическим задачам. Здесь $f(t)$ – функция, называемая «оригиналом», а $F(s)$ – функция, называемая «образом», или результатом применения преобразования Лапласа.

Преобразование Лапласа является линейным, соответственно, удовлетворяет следующим условиям:

1. $\mathscr{L}\left\{f+g\right\} = \mathscr{L}\left\{f\right\} + \mathscr{L}\left\{g\right\}$;
2. $\mathscr{L}\left\{C \cdot f\right\} = C \cdot \mathscr{L}\left\{f\right\},\ \forall C - \mathrm{const}$;

2.1 Задачи

Найти результат применения оператора Лапласа $\mathscr{L}\left\{f\right\}$ для следующих функций:

31. $f(t) = 1$
32. $f(t) = t$
33. $f(t) = t^2 - 1$
34. $f(t) = e^t$
35. $f(t) = e^{2t} - t^4$
36. $f(t) = e^t + e^{-t}$
37. $f(t) = \sin t$
38. $f(t) = \cos 2t$
39. $f(t) = \cos^2 t$
40. $f(t) = \cosh 2t$

41. $f(t) = t \cdot e^{-t}$

42. $f(t) = t^2 \cdot e^{-2t}$

43. $f(t) = t^2 \cdot e^{-2t}$

44. $f(t) = \sin t \cdot \cos t$

45. $f(t) = \delta(t)$

46. $f(t) = \delta(t-1)$

47. $f(t) = u(t)$

48. $f(t) = u(t+1)$

49. $f(t) = \Pi_{1,3}(t)$

50. $f(t) = \Pi_{0,1}(t+1)$

51. $f(t) = t * e^t$

52. $f(t) = e^t * \sin 2t$

53. $f(t) = \delta(t) \cdot \sin t$

54. $f(t) = u(t+1) \cdot \cos(t+1)$

Определить результат применения преобразования Лапласа для функций общего вида:

55. $f(t) = t^n,\ n - \mathrm{const}$

56. $f(t) = e^{at},\ a - \mathrm{const}$

57. $f(t) \cdot \delta(t-a),\ a - \mathrm{const}$

58. $f(at),\ a - \mathrm{const}$

59. $f(t) \cdot u(t-a),\ a - \mathrm{const}$

60. $f(t) \cdot t$

61. $f(t) \cdot t^n,\ n - \mathrm{const}$

62. $f(t) \cdot e^{at},\ a - \mathrm{const}$

63. $\dfrac{f(t)}{t}$

64. $\dfrac{f(t)}{t^n},\ n - \mathrm{const}$

65. $f'(t)$

66. $f^{(n)}(t),\ n - \mathrm{const}$

67. $\displaystyle\int_0^t f(\tau)\, d\tau$

68. $f(t) * g(t)$

Свести следующие дифференциальные уравнения к алгебраическим путем применения преобразования Лапласа (полагая $y(0) = \tilde{C}_1$, $y'(0) = \tilde{C}_2$):

69. $y' - y = 0$
70. $y'' - y' = 0$
71. $y'' - 3y' + 2y = 0$
72. $y'' - y = 0$
73. $y'' + y = 0$
74. $y'' - 2y' + y = 0$
75. $y'' + 4y' - 5y = 0$
76. $y'' + 2y' + 2 = 0$

77. $y' - y = t$
78. $y'' - y' = t + e^{-t}$
79. $y'' - 3y' + 2y = e^t - \sin t$
80. $y'' - y = 2\cosh t + t - e^{-t}$

3 Обратное преобразование Лапласа

Обратное преобразование Лапласа $\mathscr{L}^{-1}\left\{F(s)\right\}(t)$ – интегральное преобразование из функции комплексной переменной $s \in \mathbb{C}$ в функцию вещественной переменной $t \in \mathbb{R}$. Для решения задач, связанных с поиском обратного преобразования, рекомендуется пользоваться таблицей оригиналов и изображений. Обратное преобразование Лапласа удовлетворяет следующему соотношению:

$$\mathscr{L}\left\{f(t)\right\} = F(s) \implies \mathscr{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = f(t).$$

3.1 Задачи

Найти оригиналы $\mathscr{L}^{-1}\left\{F\right\}$ для следующих изображений:

81. $F(s) = \dfrac{1}{s}$
82. $F(s) = \dfrac{1}{s+1}$
83. $F(s) = 1$
84. $F(s) = e^{-s}$
85. $F(s) = \dfrac{1}{s^2}$
86. $F(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$
87. $F(s) = \dfrac{1}{s^2-1}$
88. $F(s) = \dfrac{s}{s^2+1}$
89. $F(s) = \dfrac{1}{s^4+s^2}$
90. $F(s) = \dfrac{1}{s-1} + \dfrac{1}{s-2}$
91. $F(s) = \dfrac{6s}{s^2+4s+13}$
92. $F(s) = \dfrac{s+7}{s^2-3s-10}$
93. $F(s) = \dfrac{s^2+1}{s^3-8}$
94. $F(s) = \dfrac{1}{\sqrt{s}}$

95. $F(s) = \dfrac{e^{-s}}{s}$

96. $F(s) = \dfrac{e^{-s}}{s+1}$

97. $F(s) = \dfrac{1-e^{-s}}{s^2}$

98. $F(s) = \dfrac{s+2}{(s^3+8)\cdot e^{2s}}$

99. $F(s) = \ln\dfrac{s+1}{s^2+1}$

100. $F(s) = \dfrac{1}{s^2+1}\cdot\dfrac{1}{s^2-1}$

101. $F(s) = \dfrac{1-s^2}{(1+s^2)^2}$

102. $F(s) = \dfrac{2s}{(s^2+1)\cdot(s+1)^2}$

103. $F(s) = \dfrac{e^{-s}\cdot(2s-1)}{s^2+1}$

104. $F(s) = \dfrac{2e^{-s}}{s^3+2s^2+4s+8}$

105. $F(s) = \ln\left(1-\dfrac{1}{s}\right)$

106. $F(s) = \arctan\dfrac{1}{s}$

Определить результат применения обратного преобразования Лапласа для функций общего вида:

107. $F(s) = C,\ C - \mathrm{const}$

108. $F(s) = \dfrac{1}{s^n},\ n - \mathrm{const}$

109. $F(s)\cdot e^{-as},\ a - \mathrm{const}$

110. $F(s)\cdot G(s)$

111. $s\cdot F(s)$

112. $\dfrac{F(s)}{s}$

113. $F'(s)$

114. $\displaystyle\int_s^\infty F(\sigma)\,d\sigma$

Найти общее решение следующих дифференциальных уравнений с помощью преобразования Лапласа:

115. $y' = t+2,\ y(0) = 1$

116. $y' = 3\sin t,\ y(\pi) = 3$

117. $y'' - y' = 6e^{-2t},\ y(0) = 3,\ y'(0) = 0$

118. $y'' - y = e^{t} - e^{-t},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

119. $y'' + 2y' + y = 2\cosh t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1$

120. $y'' = 6t + t \cdot e^{t-1} - 6,\ y(1) = -1,\ y'(1) = 0$

121. $ty' + y = 1,\ y(1) = 1$

122. $ty'' - ty' + y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

123. $y''e^{t} - y'e^{t} = 1,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

124. $4t^2y'' + y = t + 1,\ y(1) = 0,\ y'(1) = 1$

125. $y' = \delta(t-1),\ y(1) = 0$

126. $y' = u(t-1) \cdot \dfrac{d}{dt}\delta(t-1),\ y(0) = 0$

127. $y'' + 2y' + y = 12t \cdot e^{-t},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

128. $y'' + y' = e^{-t} \cdot \delta(t),\ y(0) = y'(0) = 0$

129. $y'' + y = \sin t \cdot u(t-1),\ y(0) = y'(0) = 0$

130. $y'' - 2y' + y = 2t * \cosh t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$

131. $y'' + \delta(t) \cdot y' = 4u(t-1),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

132. $y''+2\delta(t-2)\cdot y'+u(t-2)\cdot y = 2(t-2)*e^{-t+2},\ y(2) = 0,\ y'(2) = -1$

4 Преобразование Фурье

Преобразование Фурье $\mathscr{F}\left\{f(t)\right\}(\omega)$ – интегральное преобразование из функций вещественной переменной $t \in \mathbb{R}$ в функцию вещественной переменной $\omega \in \mathbb{R}$. Преобразование аналогично преобразованию Лапласа, но аргумент преобразования состоит только из комплексной части, а область интегрирования покрывает все вещественные числа:

$$\mathscr{F}\left\{f(t)\right\}(\omega) = F(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi\omega t i} \cdot f(t)\ dt.$$

Преобразование Фурье подразделяется на вещественное и комплексное преобразования. Они получаются путем разложения экспоненты по формуле Эйлера: $e^{-2\pi\omega t i} = \cos(2\pi\omega t) - i\sin(2\pi\omega t)$. Таким образом, вещественное преобразование (косинус-преобразование) Фурье имеет вид:

$$\mathscr{F}_{\Re}\left\{f\right\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \cos(2\pi\omega t)\ dt,$$

и комплексное (синус-преобразование), соответственно:

$$\mathscr{F}_{\Im}\left\{f\right\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \sin(2\pi\omega t)\ dt.$$

Тогда:

$$\mathscr{F}\left\{f\right\} = \mathscr{F}_{\Re}\left\{f\right\} - i \cdot \mathscr{F}_{\Im}\left\{f\right\}$$

4.1 Задачи

Найти вещественные и комплексные преобразования Фурье для следующих функций:

133. $f(t) = 1$

134. $f(t) = \dfrac{1}{t^2}$

135. $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$

136. $f(t) = e^{-|t|}$

137. $f(t) = e^{-t^2}$

138. $f(t) = te^{-t^2}$

Определить результат применения преобразования Фурье для функций общего вида:

139. $f(t) = \dfrac{1}{t^n},\ n - \mathrm{const}, n \neq 1$

140. $f(t) = \dfrac{1}{a^2+x^2},\ a - \mathrm{const}$

141. $f(t) = e^{-a^2t^2},\ a - \mathrm{const}$

142. $f(t) = e^{-|at|},\ a - \mathrm{const}$

143. $f'(t)$

144. $f^{(n)}(t),\ n - \mathrm{const}$

Полагая t – параметром, определить результат преобразования Фурье для функций общего вида:

145. $f(x,t)$

146. $\dfrac{\partial f}{\partial t}$

147. $\dfrac{\partial f}{\partial x}$

148. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

149. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

150. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}$

Построить вещественную и комплексную спектральные функции для следующих выражений:

151. $f(t) = \sin t$

152. $f(t) = \sin t + 2\cos t$

153. $f(t) = \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{t}{2} - 2\sin 3t$

154. $f(t) = \sin t \cdot \cos t + 2\cos 3t - 3\sin t$

155. $f(t) = \delta(t)$

156. $f(t) = \delta(t-1)$

157. $f(t) = \Pi_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(t)$

158. $f(t) = \Pi_{0,1}(t)$

159. $f(t) = u(t)$

160. $f(t) = u(t-1)$

161. $f(t) = g(t)$

$$g(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1, \\ -1, & 1 \le t < 2; \end{cases}$$

162. $f(t) = g(t)$

$$g(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \le t < \pi, \\ \sin -t, & \pi \le t < 2\pi; \end{cases}$$

163. $f(t) = g(t)$

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t+1}, & 0 \le t < 1, \\ \dfrac{1}{t^2+1}, & 1 \le t < 2; \end{cases}$$

164. $f(t) = g(t)$

$$g(t) = \begin{cases} e^{-t^2}, & 0 \le t < 1, \\ \dfrac{1}{t}, & 1 \le t < 2; \end{cases}$$

5 Обратное преобразование Фурье

Обратное преобразование Фурье $\mathscr{F}^{-1}\left\{F(\omega)\right\}(t)$ – интегральное преобразование, обратное к преобразованию Фурье. Определяется с помощью следующего выражения:

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{F\right\} = f(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi\omega t i} \cdot F(\omega)\ d\omega$$

5.1 Задачи

Полагая t – параметром, найти решение следующих краевых задач с помощью преобразования Фурье (свести к конечному интегралу, и найти его, если возможно):

165. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(0,x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

166. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(0,x) = \dfrac{\pi}{2}e^{-4\pi|x|}$

167. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t\sin x,\ u(0,x) = \sin x$

168. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos x \sin t,\ u(0,x) = \delta(x)$

169. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(0,x) = \dfrac{1}{1+x^2},\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = H(x)$

170. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Pi_{-\pi,\pi}(x)\cdot\left(x^2+1\right),\ u(0,x) = \delta(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0$

6 Лабораторная работа

Реализовать алгоритм построения интегрального преобразования Фурье для произвольно-заданных функций одной переменной. Для реализации потребуются следующие параметры:

- $f(t)$ – определение функции,
- a, b – область интегрирования функции,
- n_1 – количество разбиений области интегрирования (также можно использовать шаг h_1),
- n_2 – количество разбиений частотного диапазона (также можно использовать шаг h_2),
- m – максимальное значение частоты.

Задача сводится к построению спектрального разложения одномерного сигнала $f(t)$ на частоты составляющих его волн.

Реализация проводится с помощью численных методов рассчета интегралов. Потребуется построить график функции $f(t)$, и ее вещественные и комплексные спектральные разложения ($\mathscr{F}_{\Re}\{f\}$ и $\mathscr{F}_{\Im}\{f\}$). Графики разложений строятся в диапазоне $\omega \in [0, m]$. Оси графиков разложений представляют из себя по горизонтали - частотный диапазон, по вертикали - амплитуда.

Решение оформить в среде LaTeX.

6.1 Пример

Рассмотрим функцию $f(t) = \sin t$ на диапазоне $[a, b] = [0, \pi]$, в остальном диапазоне полагая $f(t) = 0$. Для аналитического решения, функция примет вид: $f(t) = \sin t \cdot \Pi_{0,\pi}(t)$. Положим $\chi = 2\pi\omega$. Тогда преобразования Фурье примут вид:

$$\mathscr{F}_{\Re}\{\sin t\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin t \cdot \Pi_{0,\pi}(t) \cdot \sin \chi t \, dt = \int\limits_{0}^{\pi} \sin t \sin \chi t \, dt = \frac{\sin \pi\chi}{1-\chi^2},$$

$$\mathscr{F}_{\Im}\{\sin t\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin t \cdot \Pi_{0,\pi}(t) \cdot \cos \chi t \, dt = \int\limits_{0}^{\pi} \sin t \cos \chi t \, dt = \frac{\cos \pi\chi + 1}{1-\chi^2}.$$

В таком случае спектральный график в аналитической форме будет иметь следующий вид:

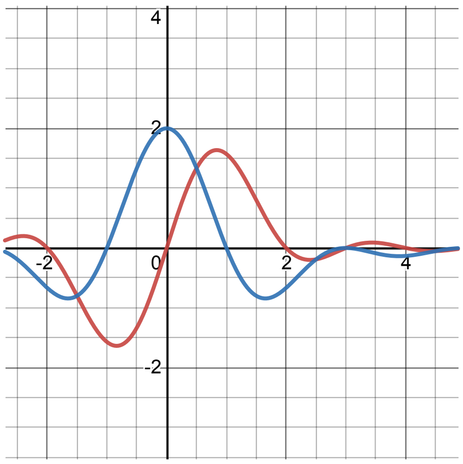

Рис. 1: Спектральный график волн синуса и косинуса (синий – косинус, красный – синус)

В результате реализации численного алгоритма, максимальное значение частоты выберем $m = 2$. Таким образом, численно найденный спектральный график имеет вид:

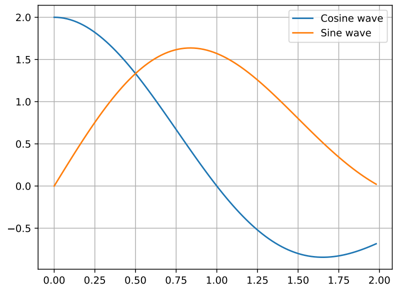

Рис. 2: Численно рассчитанный спектральный график волн синуса и косинуса (синий – косинус, оранжевый – синус)