# Orthogonality & Quadratic Form

## 1 Orthogonality

**1.** 回答下列问题，并说明原因：

（1）$u \cdot v = u^T v = 0$，$u$ 和 $v$ 正交. 对应方向的单位向量为 $e_1 = \frac{u}{||u||} = \frac{1}{\sqrt{38}}(3,2,-5,0)^T$，$e_2 = \frac{v}{||v||} = \frac{1}{\sqrt{57}}(-4,1,-2,6)^T$.

（2）两个空间 $S$ 与 $T$ 正交，即 $S$ 中的每个向量都与 $T$ 中的每个向量正交.

① 列空间 $C(A)$ 和左零空间 $N(A^T)$ 正交：设矩阵 $A$ 各列为 $a_1, a_2, ..., a_n$，则 $C(A)$ 中任意向量可以写成 $c_1a_1 + c_2a_2 + ... + c_na_n$. 根据左零空间的定义有 $x^TA = \begin{bmatrix} x^Ta_1 & x^Ta_2 & ... & x^Ta_n \end{bmatrix} = 0$，显然列空间中每个向量都与左零空间中每个向量正交，所以两个空间正交.

② 行空间 $C(A^T)$ 与零空间 $N(A)$ 正交：设矩阵 $A$ 各行为 $a_1^T, a_2^T, ..., a_m^T$，则 $C(A^T)$ 中任意向量可以写成 $c_1a_1 + c_2a_2 + ... + c_ma_m$. 根据零空间的定义有 $Ax = \begin{bmatrix} a_1^Tx \\ a_2^Tx \\ ... \\ a_m^Tx \end{bmatrix} = 0$，显然行空间中每个向量都与零空间中每个向量正交，所以两个空间正交.

（3）是. $e_1$ 与 $e_2$ 正交，且二者均为单位向量.

（4）$A$ 是，因为 $A^TA = AA^T = I$；$B$ 不是，因为不是方阵.

**2.** 证明：

（1）设置换矩阵为 $Q$，根据定义，置换矩阵的每行每列仅一个 1，其余为 0. 所以 $(Q^TQ)_{ij} = \sum_k (Q^T)_{ik}Q_{kj} = \sum_k Q_{ki}Q_{kj} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$，$Q^TQ = I$；$QQ^T = I$ 同理. 置换矩阵 $Q$ 为方阵，所以 $Q^TQ = QQ^T = I$，$Q$ 为正交矩阵.

（2）若方阵 $Q$ 有单位正交列，则有 $Q^TQ = I$，且可知方阵 $Q$ 满秩（$Q$ 可逆）. 所以 $Q^T = Q^{-1}$，$Q$ 是正交矩阵，且 $QQ^T = I$，有单位正交行.

**3.** 计算投影：

（1）根据图示关系，$p$ 与 $a$ 共线，设 $p = xa$（$x$ 为未知数），有 $p^T(b-p) = 0$. 代入得 $p^T(b-p) = 0 \Rightarrow xa^T(b - xa) = 0 \Rightarrow xa^Tb - x^2a^Ta = 0 \Rightarrow x = \frac{a^Tb}{a^Ta}$（$x$ 为常数）. 所以投影为 $p = xa = \frac{a^Tb}{a^Ta}a = a\frac{a^Tb}{a^Ta} = \frac{aa^T}{a^Ta}b$，投影矩阵 $P = \frac{aa^T}{a^Ta}$.

（2）设 $p = Ax$（$x$ 为 2 维向量）. 根据图示关系，有 $\begin{cases} a_1^T(b-p) = 0 \Rightarrow a_1^T(b - Ax) = 0 \\ a_2^T(b-p) = 0 \Rightarrow a_2^T(b - Ax) = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$A^T(b-Ax)=0 \Rightarrow x=(A^TA)^{-1}A^Tb$，$p=A(A^TA)^{-1}A^Tb$，投影矩阵 $P=A(A^TA)^{-1}A^T$.

**4.** ① 正交化：

$$
\begin{aligned}
b_1 &= a_1 = (1,1,1)^T \\
b_2 &= a_2 - \frac{b_1^Ta_2}{b_1^Tb_1}b_1 = (-1,0,1)^T \\
b_3 &= a_3 - \frac{b_2^Ta_3}{b_2^Tb_2}b_2 - \frac{b_1^Ta_3}{b_1^Tb_1}b_1 = (\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3})^T
\end{aligned}
$$

② 单位化：

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \frac{b_1}{||b_1||} = \frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1)^T \\
q_2 &= \frac{b_2}{||b_2||} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1,0,1)^T \\
q_3 &= \frac{b_3}{||b_3||} = \frac{\sqrt{6}}{2}(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3})^T
\end{aligned}
$$

**5. QR 分解.**

$$(1)A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&0&-\frac{\sqrt{6}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{6}}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{3}&2\sqrt{3}&\frac{14\sqrt{3}}{3}\\0&\sqrt{2}&4\sqrt{2}\\0&0&\frac{\sqrt{6}}{3}\end{bmatrix}.$$（矩阵 $R$ 对角线即 $||b_1||$, $||b_2||$, $||b_3||$）

$$(2)\ R=\begin{bmatrix}<a_1,q_1>&<a_2,q_1>&\dots&<a_n,q_1>\\0&<a_2,q_2>&\dots&<a_n,q_2>\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&<a_n,q_n>\end{bmatrix}$$（$<a,q>$ 表示向量 $a$ 与 $q$ 的内积）

# 2 Quadratic Form

**1.** $Q^TAQ=\Lambda$

(1)特征值: $10,5$, 特征向量: $(-1,2)^T$, $(2,1)^T$; 标准正交化特征向量: $(-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}})^T$, $(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}})^T$.
所以，$\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{2}{\sqrt{5}}\\\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&-2\\-2&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{2}{\sqrt{5}}\\\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&\\&5\end{bmatrix}$

(2) 特征值：$3,5$，特征向量：$(-1,0,1,0)^T$，$(0,-1,0,1)^T$，$(1,0,1,0)^T$，$(0,1,0,1)^T$；标准正交化特征向量：$(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}},0)^T$，$(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})^T$，$(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}},0)^T$，$(0,\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})^T$. 所以，

$$\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&0&1&0\\0&4&0&1\\1&0&4&0\\0&1&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&&&\\&3&&\\&&5&\\&&&5\end{bmatrix}$$

**2.** 二次型

（1）$f=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -2\\ -2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$. 配方：$f=3x_1^2-4x_1x_2+5x_2^2=3(x_1-\frac{2}{3}x_2)^2+\frac{11}{3}x_2^2=3y_1^2+\frac{11}{3}y_2^2$. 坐标变换：$\begin{cases}y_1=x_1-\frac{2}{3}x_2\\ y_2=x_2\end{cases}\Rightarrow y=\begin{bmatrix}1 & -\frac{2}{3}\\ 0 & 1\end{bmatrix}x\Rightarrow x=\begin{bmatrix}1 & \frac{2}{3}\\ 0 & 1\end{bmatrix}y$

（2）$f=\begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$. 配方：$f=x^2+4xy+4y^2+2xz+z^2+4yz=(x+2y+z)^2=a^2$. 坐标变换：$\begin{cases}a=x+2y+z\\ b=y\\ c=z\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}$

**3.** 判断正定可以用：定义（$x^TAx$ 与 0 的关系，配方）、特征值符号、顺序主子式符号、初等行变换后主元符号（只做倍加，考研数学：初等行变换求正负惯性指数）.

（1）正定，正惯性指数为 2，负惯性指数为 0.

法一（配方）：对于 $\forall x\neq 0$，有 $x^TAx=2x_1^2+12x_1x_2+20x_2^2=2(x_1+3x_2)^2+2x_2^2>0$

法二（特征值）：计算得两个特征值 $\frac{22\pm\sqrt{468}}{2}$ 均为正数

法三（顺序主子式）：$|2|=2>0$，$\begin{vmatrix}2 & 6\\ 6 & 20\end{vmatrix}=4>0$，该矩阵为正定矩阵

法四（主元）：$\begin{bmatrix}2 & 6\\ 6 & 20\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2 & 6\\ 0 & 2\end{bmatrix}$，2 个主元均大于 0

（2）负定，正惯性指数为 0，负惯性指数为 3.（下省略方法 12）

法三（顺序主子式）：$|-5|=-5<0$，$\begin{vmatrix}-5 & 2\\ 2 & -6\end{vmatrix}=26>0$，$\begin{vmatrix}-5 & 2 & 2\\ 2 & -6 & 0\\ 2 & 0 & -4\end{vmatrix}=-40<0$. 奇数阶为负，偶数阶为正，该矩阵为负定矩阵.

法四（主元）：$\begin{bmatrix}-5 & 2 & 2\\ 2 & -6 & 0\\ 2 & 0 & -4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}-1 & -4 & -2\\ 0 & -2 & -12\\ 0 & 0 & -40\end{bmatrix}$，3 个主元均小于 0

**4.** $a=0$.

二次型 $x^TAx$ 经正交变换 $x=Py$ 变为 $y^T\Lambda y$，因此有 $x^TAx=(Py)^TA(Py)=y^T(P^TAP)y$，$P^TAP=\Lambda$，且 $P$ 为正交矩阵，所以 $\Lambda$ 与 $A$ 不仅合同而且相似. $\Lambda$ 主对角线上元素是矩阵 $A$ 的特征值，也是标准形 $y^T\Lambda y$ 平方项的系数. 所以，$A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & a\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & & \\ & b & \\ & & -1\end{bmatrix}$，

$$\begin{cases} 2+0+a=1+b+1 & \text{（特征值的和等于矩阵的迹）} \\ -2=-b, & \text{（特征值的积矩阵的行列式）} \end{cases}，解得 a=0.$$

**5.** D

$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$，正惯性指数为 1，负惯性指数为 1.

（A）$\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}$，正惯性指数为 0，负惯性指数为 2.

（B）$\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$，正惯性指数为 2，负惯性指数为 0.

（C）$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$，正惯性指数为 2，负惯性指数为 0.

（D）$\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{bmatrix}$，正惯性指数为 1，负惯性指数为 1.

**6.** 因为 $A$ 是 $n$ 阶正定对称矩阵，

（1）$|A|>0$，所以 $A$ 可逆

（2）$A=A^T \Rightarrow (A^{-1}A)^T=A^T(A^{-1})^T=A(A^{-1})^T=I \Rightarrow (A^{-1})^T=A^{-1}$，$A^{-1}$ 是对称的

（3）$A$ 的特征值均大于零，又因为 $A^{-1}$ 的特征值与 $A$ 的特征值互为倒数，所以 $A^{-1}$ 的特征值均大于零，$A^{-1}$ 是正定的

## 3 附加题

**1. 最小二乘法（Least Squares）/ 线性回归（Linear Regression）.**

由题意有 $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C\\ D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 2\end{bmatrix}$，无解，求 $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C\\ D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 2\end{bmatrix}$.

解得：$\begin{bmatrix}C\\ D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}$，所以 $y=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}x$.

**2. 奇异值分解（Singular Value Decomposition, SVD）.**

$A^TA=(V\Sigma^TU^T)(U\Sigma V^T)=V\Sigma^2V^T$，$AA^T=(U\Sigma V^T)(V\Sigma^TU^T)=U\Sigma^2U^T$

① $A^TA=\begin{bmatrix}5 & 1\\ 1 & 5\end{bmatrix}$，特征值 $\lambda_1=6,\lambda_2=4$，对应的单位特征向量为 $v_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^T$，$v_2=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^T$

② $AA^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$，特征值 $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 0$，对应的单位特征向量为 $u_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})^T$，$u_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T$，$u_3 = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})^T$

③ 利用 $Av_i = \sigma_i u_i$ 求出奇异值：$\sigma_1 = \sqrt{6}$，$\sigma_2 = 2$

$\therefore$V=$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$，U=$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$，$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. $A = U\Sigma V^T$.