1. (1) $p(t) = a_1 t^2$, $q(t) = a_2 t^2$

$p(t) + q(t) = (a_1 + a_2) t^2 = a t^2$ ∴加法封闭.

$a = 0$, $p(t) = 0$, ∴零向量在子空间中.

$c p(t) = c a_1 t^2 = a t^2$ ∴乘法封闭.

∴ $p(t)$ 是 P_n 的子空间.

(2) $p(t) = a_1 + t^2$, $q(t) = a_2 + t^2$

$p(t) + q(t) = (a_1 + a_2) + 2t^2 = a + 2t^2 \neq a + t^2$

∴加法不封闭, $p(t)$ 不是 P_n 的子空间.

2. (1) $Col(A) = Span\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \cancel{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}} \right\}$. 维数 $\overset{2}{\cancel{3}}$. R^3

$Ax = 0$

$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ∴ $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ ∴ $\begin{cases} x_1 = -4x_2 - 2x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$

∴ $Nul A = \left\{ \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. 维数 2, R^4.

$C(A^T) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. 维数 2, R^4.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$A^T x = 0$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ∴ $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 \text{ 是自由变量.} \end{cases}$ ∴ $N(A^T) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. 维数 1. R^3.

(2) $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 10 & 1 & 7 \\ -5 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, 两个上三角左乘一个下三角.

$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 10 & 1 & 7 \\ -5 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 10 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$C(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \cancel{\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}} \right\}$. 维数 $\overset{2}{\cancel{3}}$. R^3.

$Ax = 0$ $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 & 0 \\ 10 & 1 & 7 & 0 \\ -5 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ∴ $\begin{cases} 5x_1 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ ∴ $\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{5} x_3 \\ x_2 = -x_3. \end{cases}$

$\therefore Nul(A) = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ 维数1. R^3.

$C(A^T) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. 维数2. R^3.

$A^T = \begin{bmatrix} 5 & 10 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & -3 \end{bmatrix}$, $Ax=0$ $\begin{bmatrix} 5 & 10 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\therefore \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = x_3 \end{cases}$ $\therefore N(A^T) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. 维数1. R^3.

3. R^3 中, x. y. z 三维向量.

$\therefore x = -y - z$.

$\therefore x + y + z = 0$ 是由 y. z 两个线性无关向量生成的子空间

$\therefore$ 形状为过原点的平面

4. $\dim Row A = 3$.

$\dim Nul A = n - \dim Row A = 5$

$rank A^T = 3$.

5. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -5 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & 11 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 19 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\therefore rank(A) = 3$.

$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 3 & 5 & -9 \\ 0 & 4 & -3 & -2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -6 \end{bmatrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\therefore rank(B) = 3$.

6. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & \lambda & -1 \\ 5 & 6 & 3 & \mu \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 3+\lambda & -4 \\ 0 & -4 & 8 & 5+\mu \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 3+\lambda & -4 \\ 0 & 0 & \lambda-5 & -9-\mu \end{bmatrix}$

$\therefore \lambda = 5, \mu = -9$.

7.

(1) $\begin{bmatrix}1&3&9&-7\\0&1&4&-3\\2&1&-2&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&9&-7\\0&1&4&-3\\0&-5&-20&15\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&9&-7\\0&1&4&-3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ $\therefore \dim = 2.$

(2) $\begin{bmatrix}1&-3&-8&-3\\-2&4&6&0\\0&1&5&7\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-3&-8&-3\\0&-2&-10&-6\\0&1&5&7\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-3&-8&-3\\0&1&5&3\\0&0&0&-4\end{bmatrix}$ $\therefore \dim = 3.$

8. (1) $\dim Col(A)=3.$ ~~$Ax=0$~~ $\dim Nul(A)=5-3=2.$

(2) $\dim Col(A)=3$ $\dim Nul(A)=6-3=3.$

9. ~~$Ax=0$~~

$\begin{bmatrix}5&21&19&0\\13&23&2&0\\8&14&1&0\end{bmatrix}\sim$

即看Aw是否等于0.

$$Aw=\begin{bmatrix}5&21&19\\13&23&2\\8&14&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\-3\\2\end{bmatrix}=5\begin{bmatrix}5\\13\\8\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}21\\23\\14\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}19\\2\\1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$\therefore$ w在NulA中.

10. (1) $\begin{bmatrix}1&0&-3&1&2\\0&1&-4&-3&1\\-3&2&1&-8&-6\\2&-3&6&7&9\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-3&1&2\\0&1&-4&-3&1\\0&2&-8&-5&0\\0&-3&12&5&5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-3&1&2\\0&1&-4&-3&1\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&-4&8\end{bmatrix}$

$\sim\begin{bmatrix}1&0&-3&1&2\\0&1&-4&-3&1\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$ $\therefore$ 一个基为 $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-3\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\2\\-3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-3\\-8\\7\end{bmatrix}\right\}.$

(2) $\begin{bmatrix}1&-2&6&5&0\\0&1&-1&-3&3\\0&-1&2&3&-1\\1&1&-1&-4&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-2&6&5&0\\0&1&-1&-3&3\\0&0&1&0&2\\0&3&-7&-9&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-2&6&5&0\\0&1&-1&-3&3\\0&0&1&0&2\\0&0&-4&0&-8\end{bmatrix}$

$\sim\begin{bmatrix}1&-2&6&5&0\\0&1&-1&-3&3\\0&0&1&0&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$ $\therefore$ 一个基为 $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\1\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\-1\\2\\-1\end{bmatrix}\right\}.$