一、

1. $u+v=\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}$ $u-2v=\begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix}$

2. (1) $\begin{cases}6x_1-3x_2=1\\-x_1+4x_2=-7\\5x_1 \quad =-5\end{cases}$ (2) $x_1\begin{bmatrix}4\\1\\8\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}1\\-7\\6\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}3\\2\\-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\2\\15\end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix}1&0&2&-5\\-2&5&0&11\\2&5&8&-7\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&2&-5\\-2&5&0&11\\0&10&8&4\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}2&0&4&-10\\-2&5&0&11\\0&10&8&4\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&2&-5\\0&5&4&1\\0&10&8&4\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&2&-5\\0&-10&-8&-2\\0&10&8&4\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&2&-5\\0&5&4&1\\0&0&0&2\end{bmatrix}$

∴不是

4. Span$\{v_1, v_2\}$ 是R^3中包含 v_1、v_2 和 0 向量的平面.

二、

1. (1) $x_1\begin{bmatrix}8\\5\\1\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}-1\\4\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\1\\2\end{bmatrix}$ $\cancel{\begin{bmatrix}8&-1&4\\5&4&1\\1&-3&2\end{bmatrix}}$ $\begin{bmatrix}8&-1\\5&4\\1&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\1\\2\end{bmatrix}$

(2) $\begin{cases}4z_1-4z_2-5z_3-5z_4=4\\-2z_1+5z_2+4z_3+4z_4=13\end{cases}$ $\begin{bmatrix}4&-4&-5&-5\\-2&5&4&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\\z_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\13\end{bmatrix}$

(3) $\begin{cases}5x_1+x_2+(-8)x_3+4x_4=-8\\-2x_1-7x_2+3x_3-5x_4=16.\end{cases}$ $x_1\begin{bmatrix}5\\-2\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}1\\-7\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}-8\\3\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}4\\-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8\\16\end{bmatrix}$

2. (1) 真，最后一行 $0=b_4$，不相容.

(2) 真 根据定义可知，R^m 中每个向量 b 都是 A 的列的线性组合.

(3) 假. R^m 中可能有 A 列的线性组合.

3. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & k \\ 1 & 6 & 1 & m \\ 4 & 0 & -5 & n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & k \\ 0 & -8 & -3 & -2m+k \\ 4 & 0 & -5 & n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & k \\ 0 & -8 & -3 & -2m+k \\ 0 & -8 & -3 & -2k+n \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & k \\ 0 & -8 & -3 & -2m+k \\ 0 & 0 & 0 & 3k-n-2m \end{bmatrix}$ ∴ $3k-n-2m=0$

$3k=n+2m.$

4. $\begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -2 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -2 & 6 & 4 \\ 0 & 8 & 12 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 8 & 12 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

∴ 是.

三.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 7 & 10 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & 7 & 10 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ ∴ 是, 有唯一解.

2. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 9 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \end{bmatrix}$ ∴ 是.

3. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 4 & -8 & 0 \\ -3 & -7 & 9 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ -3 & -7 & 9 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{cases} x_1+3x_2-5x_3=0 \\ -x_2+3x_3=0. \end{cases}$ ∴ $x=x_3 v$, $v=\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

∴ $x_2=3x_3$

$x_1=4x_3$

4. (1) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -7 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & -7 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -7 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & -9 & 19 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -7 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 7 & -9 & 19 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -7 & 29 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 7 & -9 & 19 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -7 & 29 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 10 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -7 & 29 & 0 \\ 0 & \cancel{-42} & -82 & 117 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -7 & 29 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 93 & 0 \end{bmatrix}$

∴无解. ∴ $X = 0$.

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 10 & 1 & -5 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 10 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

∴ $x_2 = 0$ $\quad x_1 + x_3 - x_4 = 0$ $\quad$ ∴ $\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = x_4 - x_3 \end{cases}$ $\quad$ ∴ $X = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & -3 & 5 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 5 & -9 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 9 & -5 & 9 & -5 \\ 0 & -7 & 5 & -9 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 9 & -5 & 9 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

∴ $x_2 = 0$ $\quad \cancel{2x_1 = -x_2 + x_3 - x_4 + 1}$ $\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 9 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} 2x_1 - x_3 + x_4 = 1 \\ -5x_3 + 9x_4 = -5 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_3 = \frac{9}{5}x_4 + 1 \\ x_1 = \frac{2}{5}x_4 + 1 \end{cases}$ $\quad$ ∴ $X = x_4 \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ 0 \\ \frac{9}{5} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

四.

1. (1) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 2 & -8 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -8 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ ∴无解. 线性无关.

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{matrix} \Rightarrow$ 线性无关.

(2) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -2 & 0 \\ -3 & 7 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ 线性有关.

2. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 5 & -9 & h & 0 \\ -3 & 6 & -9 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 5 & -9 & h & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 5 & -9 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -15+h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2h-27 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ∴ 不存在 h 能使各向量组线性无关.

3. $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$.

4. (1) ∵ S中至少有一个向量是其他向量的线性组合. 假设该向量为 v_1

证 ∴ $v_1 = c_2v_2 + c_3v_3 + \cdots c_pv_p$

∴ $-v_1 + c_2v_2 + \cdots c_pv_p = 0$. ∴ $c_1 = -1$ ∴ 权不全为零.

∴ S线性相关. 反之亦然.

(2) 证: ~~∵ S 线性相关.~~ 反证法: 若没有一个 v_j 是它前面几个向量的线性组合

~~∴ $c_1v_1 + \cdots c_pv_p = 0$.~~ 那么 ∵ S线性相关

~~∴ 存在某个 v_j~~

∴ $c_1v_1 + \cdots c_pv_p = 0$.

∴ $-c_pv_p = c_1v_1 + \cdots c_{p-1}v_{p-1}$

∴ $v_p = -\frac{c_1}{c_p}v_1 - \cdots - \frac{c_{p-1}}{c_p}v_{p-1}$ 成立

与条件矛盾. ∴ S线性相关, 则某个 v_j 是它前面几个向量的线性组合

五.

1. (1) 采用A设计有多少个三室单元，两室单元，一室单元，

(2) $N = x_1\begin{bmatrix}3\\7\\8\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}4\\4\\8\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}5\\3\\9\end{bmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix}3 & 4 & 5 & 66\\7 & 4 & 3 & 74\\8 & 8 & 9 & 136\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}3 & 4 & 5 & 66\\7 & 4 & 3 & 76\\0 & 8 & 13 & 120\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}3 & 4 & 5 & 66\\0 & 8 & 13 & 117\\0 & 8 & 13 & 120\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}3 & 4 & 5 & 66\\0 & 8 & 13 & 117\\0 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$

∴不可能.

2. (1) $\begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ ∴ $\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\0 & 1 & 3\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}x_2 = 3\\x_1 = -7\end{matrix}$ ∴ $u = \begin{bmatrix}3\\-7\end{bmatrix}$.

(2) $B = \begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$ $u'' = \begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix}$

(3) $u''\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix} = u'$ $u'\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -3\end{bmatrix} = u$