Exercise 1: Linear Equations

1 Vector Equations

1. $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}, \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$. 计算 $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{2v}$.

2. 写出等价于所给向量方程的线性方程组，或者等价于所给线性方程组的向量方程：

(1) $x_1\begin{bmatrix}6\\-1\\5\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}-3\\4\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-7\\-5\end{bmatrix}$ (2) $\begin{cases}4x_1+\ \ x_2+3x_3=9\\ \ \ x_1-7x_2+2x_3=2\\ 8x_1+6x_2-5x_3=15\end{cases}$

3. $\boldsymbol{a_1}=\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}, \boldsymbol{a_2}=\begin{bmatrix}0\\5\\5\end{bmatrix}, \boldsymbol{a_3}=\begin{bmatrix}2\\0\\8\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}-5\\11\\-7\end{bmatrix}$. 确定 $\boldsymbol{b}$ 是否是 $\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{a_3}$ 的线性组合.

4. $\boldsymbol{v_1}=\begin{bmatrix}8\\2\\-6\end{bmatrix}, \boldsymbol{v_2}=\begin{bmatrix}12\\3\\-9\end{bmatrix}$. 给出 $\textbf{Span}\{\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2}\}$ 的几何解释.

2 The Matrix Equation

1. 方程组可写成向量方程、矩阵方程，写出下列所给方程的另外两种形式：

(1) $\begin{cases}8x_1-\ \ x_2=4\\ 5x_1+4x_2=1\\ \ \ x_1-3x_2=2\end{cases}$ (2) $z_1\begin{bmatrix}4\\-2\end{bmatrix}+z_2\begin{bmatrix}-4\\5\end{bmatrix}+z_3\begin{bmatrix}-5\\4\end{bmatrix}+z_4\begin{bmatrix}-5\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\13\end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix}5&1&-8&4\\-2&-7&3&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\-1\\3\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8\\16\end{bmatrix}$

2. 判断下列命题的真假，并说明理由：

(1) 若增广矩阵 $\begin{bmatrix}A & \boldsymbol{b}\end{bmatrix}$ 在每一行有一个主元位置，则方程方程 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 不相容.

(2) 若 $m\times n$ 矩阵 A 的列生成 $\boldsymbol{R}^m$，则对 $\boldsymbol{R}^m$ 中任意的 $\boldsymbol{b}$，方程 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 相容.

(3) 若 $m\times n$ 矩阵 A 的列不生成 $\boldsymbol{R}^m$，则对 $\boldsymbol{R}^m$ 中某个 $\boldsymbol{b}$，方程 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 不相容.

3. 试判断 k, m, n 满足什么条件可以使得 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有解，其中 $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 4 & 0 & -5 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} k \\ m \\ n \end{bmatrix}$.

4. 设 $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$，$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{u}$ 是否在由 A 的列所生成的 $\boldsymbol{R}^3$ 的子集当中？为什么？

3 Solution Sets of Linear Systems

1. 线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 7x_2 + 10x_3 = 1 \end{cases}$ （　　）

（A）无解　　（B）有唯一解　　（C）有无穷多解　　（D）其导出组只有零解

2. 确定方程组是否有非平凡解：$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$

3. 用参数向量形式表示方程组的解集：$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 0 \\ -3x_1 - 7x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$

4. 求解齐次方程组：

（1）$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 10x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$

5. 解非齐次方程组：$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -2 \end{cases}$

4 Linear Independence

1. 确定向量组或矩阵的各列是否线性无关：

（1）$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$　　（2）$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -2 \\ -3 & 7 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$

2. 求 h 使向量组线性无关，并给出理由：$\begin{bmatrix}1\\5\\-3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\-9\\6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\h\\-9\end{bmatrix}$

3. 给定 $A = \begin{bmatrix}4 & 1 & 6\\-7 & 5 & 3\\9 & -3 & 3\end{bmatrix}$，观察到第 1 列加上第 2 列的两倍等于第三列. 求 $A\boldsymbol{x} = 0$ 的一个非平凡解.

4. 证明：(1) 两个或多个向量的集合 $S = \{v_1, ..., v_p\}$ 线性相关，**当且仅当** S 中至少有一个向量是其他向量的线性组合. (2) 事实上，若 S 线性相关，且 $v_1 \neq 0$，则某个 $v_j (j > 1)$ 是它前面几个向量的线性组合.

5 附加题

1. 一幢大的公寓建筑使用模块建筑技术. 每层楼的建筑设计从 3 种设计中选择. A 设计每层有 18 个公寓，包括 3 个三室单元、7 个两室单元和 8 个一室单元；B 设计每层有 4 个三室单元、4 个两室单元和 8 个一室单元；C 设计每层有 5 个三室单元、3 个两室单元和 9 个一室单元. 设该建筑有 x_1 层采取 A 设计，x_2 层采取 B 设计，x_3 层采取 C 设计.

（1）向量 $x_1 \begin{bmatrix}3\\7\\8\end{bmatrix}$ 的实际意义是什么？

（2）写出向量的线性组合表示该建筑所包含的三室、两室和一室单元的总数.

（3）[M] 是否可能设计该建筑，使恰好有 66 个三室单元、74 个两室单元和 136 个一室单元？若可能的话，是否有多种方法？说明你的答案.

2. 阅读课本 1.8-1.9 节（或在 b 站观看线性代数的本质 03-04 集），乘法 Au 可以表示一个变换 T。下图为一个绵羊，假设经过剪切变换 $A = \begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{bmatrix}$ 后，绵羊右眼的坐标为 $u' = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$（点 2）.

（1）请求出变换之前，右眼的坐标 u.（2）若希望在剪切变换之后，将图像宽高均放大为原来的 2 倍，求变换矩阵 B 和新的右眼坐标 u''.（3）写出 u'' 变回 u 的表达式（用符号表示即可）.

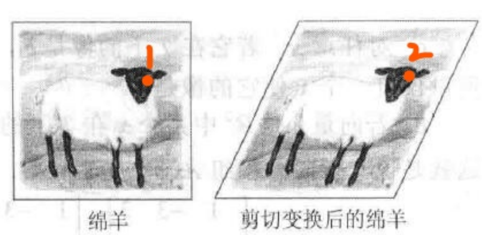

图 1: 剪切变换

3.（选做）尝试用 MATLAB 或者 Python 的 NumPy 包执行几种矩阵相关的运算（加、减、乘、转置、逆等等），并尝试求解线性方程组。该题可以用报告/博客的形式展示，大致需要包含几个部分：(1) 软件环境的安装和配置步骤 (2) 执行相应运算的命令、执行的输入与输出 (运行截图)、与自己用纸笔方式计算的比较（3）其他.

可参考使用的用例：

$$u=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},v=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1&-1\\2&3\end{bmatrix},$$

计算：（1）$u+v$（2）$3u$（3）AB（4）$Au+Av$（5）A^T（6）B^{-1}（7）$\begin{cases}5x_1+4x_2=1\\x_1-3x_2=2\end{cases}$

注：

1. 选做题占分非常低，有兴趣的同学可以尝试，在期末考试之前上交即可。(直接找自己班的助教，随时做完随时交)

2. 该题需要单独上交一份 pdf 文件，形式不限，可以用 markdown 也可以用 word。命名方式：**姓名-学号-第 1 章选做.pdf**。

3. 学校提供 MATLAB 正版下载，请自行查找。

4. 可以搜索相关内容作为参考，但不允许抄袭。