Vector Spaces

2022.11

1. n 取适当值，判定给出的集合是否为 $\mathbb{P}_n$ 的子空间，给出理由.

（1）所有形如 $p(t)=at^2$ 的多项式，其中 $a\in\mathbb{R}$

（2）所有形如 $p(t)=a+t^2$ 的多项式，其中 $a\in\mathbb{R}$

2. 求 A 的列空间 $C(A)$、零空间 $N(A)$、行空间 $C(A^T)$ 和左零空间 $N(A^T)$ 的基，并写出各子空间的维数、以及各子空间分别在哪个实向量空间 $\mathbb{R}^n$ 里.

（1）$A=\begin{bmatrix}1&4&0&2\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

（2）$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&0&3\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$（理解概念，观察矩阵形式，用尽可能少的过程求解）

3. 在 $\mathbb{R}^3$ 中，$x+y+z=0$ 表示什么形状？为什么？请用空间和维数的相关知识回答.

4. 若一个 3×8 的矩阵 A 的秩为 3，求 $\dim\,\mathrm{Nul}A$、$\dim\,\mathrm{Row}A$、$\mathrm{rank}A^T$.

5. 求矩阵 A 和 B 的秩，其中 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&3&-5\\4&7&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3&2&0&5&0\\3&-2&3&6&-1\\2&0&1&5&-3\\1&6&-4&-1&4\end{bmatrix}$。

6. 设 $A=\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\3&2&\lambda&-1\\5&6&3&\mu\end{bmatrix}$, 已知 $\mathrm{R(A)}=2$, 求 λ 与 μ 的值。

7. 求由给定向量生成的子空间的维数。

(1) $\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}9\\4\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-7\\-3\\1\end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-3\\4\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-8\\6\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-3\\0\\7\end{bmatrix}$

8. 确定矩阵的 $NulA$ 和 $ColA$ 的维数。

$$(1) A = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 9 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(2) A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

9. 判断 $w = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ 是否在 $NulA$ 中，其中 $A = \begin{bmatrix} 5 & 21 & 19 \\ 13 & 23 & 2 \\ 8 & 14 & 1 \end{bmatrix}$

10. 求由给定向量 $v_1, ..., v_5$ 生成的空间的一个基。

$$(1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -8 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$