1. Vector Equations

1. $u+v=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}$

   $u-2v=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix}$

2. (1) $\begin{cases}6x_1-3x_2=1\\-x_1+4x_2=-7\\5x_1=-5\end{cases}$ (2) $x_1\begin{bmatrix}4\\1\\8\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}1\\-7\\6\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}3\\2\\-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\2\\15\end{bmatrix}$

3. 增广矩阵 $\begin{bmatrix}1&0&2&-5\\-2&5&0&11\\-2&5&8&-7\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&2&-5\\0&5&4&1\\2&5&8&-7\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&2&-5\\0&5&4&1\\0&0&0&2\end{bmatrix}$ 不相容,

   故 b 不是 $a_1.a_2.a_3$ 的线性组合.

4. 三维空间中在直线 $\begin{cases}x=4t\\y=t\\z=-3t\end{cases}$ 上的向量空间

2. The Matrix Equation

1. (1) 向量方程: $x_1\begin{bmatrix}8\\5\\1\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}-1\\4\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\1\\2\end{bmatrix}$ 矩阵方程: $\begin{bmatrix}8&-1\\5&4\\1&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\1\\2\end{bmatrix}$

   (2) 方程组: $\begin{cases}4z_1-4z_2-5z_3-5z_4=4\\-2z_1+5z_2+4z_3+4z_4=13\end{cases}$ 矩阵方程: $\begin{bmatrix}4&-4&-5&-5\\-2&5&4&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\\z_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\13\end{bmatrix}$

   (3) 方程组: $\begin{cases}5x_1+x_2-8x_3+4x_4=-8\\-2x_1-7x_2+3x_3-5x_4=16\end{cases}$ 向量方程: $x_1\begin{bmatrix}5\\-2\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}1\\-7\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}-8\\3\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}4\\-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8\\16\end{bmatrix}$

2. (1) 假 (2) 真 (3) 真 (言之有理即可)

3. 增广矩阵 $[A\ \ b]=\begin{bmatrix}2&4&-1&k\\1&6&1&m\\4&0&-5&n\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&4&-1&k\\0&4&\frac{3}{2}&m-\frac{k}{2}\\4&0&-5&n\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&4&-1&k\\0&4&\frac{3}{2}&m-\frac{k}{2}\\0&0&0&n+2m-3k\end{bmatrix}$

   当 $n+2m-3k=0$ 时, $[A\ \ b]$ 相容, $Ax=b$ 有解;

   当 $n+2m-3k\neq0$ 时, $[A\ \ b]$ 不相容, $Ax=b$ 无解.

   故 $k.m.n$ 满足 $n+2m-3k=0$ 时 $Ax=b$ 有解.

4、增广矩阵 $[A\ \ u] = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -2 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 相容.

故 u 在由 A 的列生成的 R^3 的子集中.

3. Solution Sets of Linear Systems

1. 增广矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 7 & 10 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & 7 & 10 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

增广矩阵相容且没有自由变量,故有唯一解,选B.

2. 增广矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 9 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 0 \\ 1 & 2 & 9 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 9 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \end{bmatrix}$

增广矩阵相容且没有自由变量,故有唯一解,不存在非平凡解.

3. 增广矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 4 & -8 & 0 \\ -3 & -7 & 9 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ -3 & -7 & 9 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

故原方程组的解集为 $\vec{x} = \begin{bmatrix} -4x_3 \\ 3x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4.(1) 增广矩阵为 $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -7 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & -7 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -7 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -7 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -7 & 0 \\ 0 & 7 & -9 & 19 & 0 \\ 0 & 7 & -10 & 14 & 0 \\ 0 & 9 & -19 & 34 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -7 & 0 \\ 0 & 7 & -9 & -19 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -52 & 67 & 0 \end{bmatrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -7 & 0 \\ 0 & 7 & -9 & -19 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 327 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{7} & -\frac{19}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,故原方程组的解集为 $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$

(2) 增广矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 10 & 1 & -5 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，

故原方程组的解集为 $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_4 \\ x_2 \text{为自由变量} \\ x_3 = 0 \\ x_4 \text{为自由变量} \end{cases}$.

5. 增广矩阵为 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & -3 & 5 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & -7 & 5 & -9 & 5 \\ 0 & -15 & 10 & -18 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & -7 & 5 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 9 & -5 \end{bmatrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{25}{7} & \frac{45}{7} & -\frac{25}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{5} & 1 \end{bmatrix}$，故原方程组的解集为 $\begin{cases} x_1 = \frac{2}{5}x_4 + 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \frac{9}{5}x_4 + 1 \\ x_4 \text{为自由变量} \end{cases}$.

4. Linear Independence

1.(1) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & -8 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ 只有平凡解，故线性无关.

(2) 向量个数 > 向量维数，故线性相关.

2. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 5 & -9 & h & 0 \\ -3 & 6 & -9 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & h-15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$x_3$为自由变量，必有非平凡解，必线性相关.

故不存在满足要求的h.

3. 由 $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 9 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$ 知 $\begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 9 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 0$，故 $Ax=0$ 的一个非平凡解为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

4. (1) ① 当S线性相关时，设 $\sum_{i=1}^{p} c_i v_i = 0$，其中 $c_1, c_2, \cdots, c_p$ 不全为0.

设 $c_k \neq 0$, $1 \le k \le p$. 则 $v_k = \sum_{i=1, i\neq k}^{p} \left(-\frac{c_i}{c_k}\right) v_i$，即 v_k 为其它向量的线性组合.

② 当S中至少有一个向量是其它向量的线性组合时，设 $v_k = \sum_{i=1, i\neq k}^{p} a_i v_i$，记 $a_k = -1$.

则 $\sum_{i=1}^{p} a_i v_i = 0$，即S线性相关.

综上，命题得证.

(2) 由 S 线性相关，设 $\sum_{i=1}^{p} c_i v_i = 0$，其中 $c_1, c_2, \cdots, c_p$ 不全为 0.

假设对 $\forall\, 2 \le i \le p$ 都有 $c_i = 0$，则 $c_1 v_1 = -\sum_{i=2}^{p} c_i v_i = 0$.

由 $c_1, c_2, \cdots, c_p$ 不全为 0 知 $c_1 \neq 0$，又 $v_1 \neq 0$，故 $c_1 v_1 \neq 0$，矛盾.

所以 $\exists\, 2 \le k \le p$ 使 $c_k \neq 0$. 设 $t = \max\{k \mid 2 \le k \le p \wedge c_k \neq 0\}$，则 $t \ge 2$，$c_t \neq 0$，

且对 $\forall\, t < i \le p$ 有 $c_i = 0$，从而 $\sum_{i=1}^{t} c_i v_i = -\sum_{i=t+1}^{p} c_i v_i = 0$.

又 $c_t \neq 0$，故 $v_t = \sum_{i=1}^{t-1} \left(-\frac{c_i}{c_t}\right) v_i$，其中 $t-1 \ge 0$.

故 v_t 为它前面的向量的线性组合，命题得证.

5. Extra

1. (1) $x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$ 的实际意义为由 A 设计产生的三室单元、两室单元和一室单元的个数.

(2) $x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 66 \\ 7 & 4 & 3 & 74 \\ 8 & 8 & 9 & 136 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 66 \\ 0 & -16 & -26 & -240 \\ 0 & -8 & -13 & -120 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 66 \\ 0 & 8 & 13 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & 22 \\ 0 & 1 & \frac{13}{8} & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，

故解集为 $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} x_3 + 2 \\ x_2 = -\frac{13}{8} x_3 + 15 \\ x_3 \text{ 为自由变量} \end{cases}$. 由 $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$ 知 $\begin{cases} \frac{1}{2} x_3 + 2 \ge 0 \\ -\frac{13}{8} x_3 + 15 \ge 0 \\ x_3 \ge 0 \end{cases}$，解得 $0 \le x_3 \le \frac{120}{13}$.

又由 $x_2 \in \mathbb{Z}$ 知 x_3 为 8 的倍数，故 $x_3 = 0$ 或 8.

当 $x_3 = 0$ 时，解为 $\begin{bmatrix} 2 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix}$；当 $x_3 = 8$ 时，解为 $\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}$.

综上，共有 2 种满足要求的方法.

2. (1) 设 $u = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，则由 $Au = u'$ 知 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$，即 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$，故 $\begin{cases} x_1 = -7 \\ x_2 = 3 \end{cases}$，$u = \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \end{bmatrix}$.

(2) 设变换为 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，则对 $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$，有 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$，即 $\begin{cases} ax + by = 2x \\ cx + dy = 2y \end{cases}$，即 $\begin{cases} (a-2)x + by = 0 \\ cx + (d-2)y = 0 \end{cases}$.

由 x, y 的任意性知 $a = 2, b = 0, c = 0, d = 2$，故 $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$，$u'' = 2u' = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$.

(3) $A^{-1} B^{-1} u'' = u$