Exercise 2：Matrix Algebra

1 Matrix Operations

1、 求矩阵 A 和 B 的乘积

（1）$A=\begin{bmatrix}4 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 3 & 1 & 4\end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 3 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}$

（2）$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & -1\\ 3 & 1 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 1 & 4\end{bmatrix}$

2、已知 $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 7 & -1\\ 4 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$，求 $(AB)^T$

3、利用两种方法计算乘积 AB

（a）根据定义分别计算Ab_1，Ab_2

（b）利用计算 AB 的行列法则

其中 $A=\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 0\\ 3 & 5\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix}$

4、设 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$，且$AX+E=A^2+X$，求X

5、设 $A=\begin{bmatrix}2 & 5\\ -3 & 1\end{bmatrix}$和 $B=\begin{bmatrix}4 & -5\\ 3 & k\end{bmatrix}$，$k$ 取什么值时 AB = BA

6、举反例说明下列命题是错误的：

（1）若$A^2=O$，则 $A=O$

（2）若$A^2=A$，则 $A=O$ 或 $A=E$

（3）若 $AX=AY$，且 $A\neq O$，则 $X=Y$

7、设 A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$，B = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$，问：（要求给出判断依据）

（1）AB = BA 吗

（2）$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$吗

（3）$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$吗

8、（1）A 和 B 为矩阵，乘积 AB 有意义，并且乘积 AB 结果得到的是一个方阵。那么乘积 BA 是否有意义？如果有意义，其乘积结果是否是一个方阵？

（2）现有矩阵 A，B 为两个$n \times n$方阵，并且 AB $= O$，其中矩阵 O 是一个$n \times n$的零矩阵，那么乘积 BA 是否也是一个零矩阵？如果是请给出证明，如果不是请给出反例

2 The Inverse of Matrix

1、$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$ = （ ）

2、设 A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}$，用初等变换法求$A^{-1}$

3、计算$(A^T - B)^T + C(B^{-1}C)^{-1}$

其中 A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$，B = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$，C = $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4、 设矩阵 A = $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$，B = $A^2 - 3A + 2I$，求B^{-1}

5、 考虑线性方程组$\begin{cases} x_1 = 2 \\ -2x_1 + x_2 = 3 \\ 5x_1 - 4x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$

（1）写出系数矩阵 A

（2）计算 A 的逆A^{-1}

（3）利用A^{-1}解方程组

6、矩阵的初等变换可以用矩阵乘法表达，给出下列对 A 使用初等变换到 B 表达式 B＝ ...（初等矩阵需要分别对应变换的每一步，并作说明）

（1）$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$

（2）$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix}$

（3）A 为 3 阶方阵，先将 A 的第 2 行的 3 倍加到第 1 行，再将其第 2 列的-1 倍加到第 3 列得到 B。若这两步操作相反，得到的 B 是否相同

7、证明：一个可逆 n 阶方阵的逆唯一

3 Characterizations of Invertible Matrices

1、 判断以下矩阵是否可逆，并给出相应的理由

（1）$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -3 & -7 & 0 \\ 8 & 5 & -1 \end{bmatrix}$　（2）$\begin{bmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 0 & 3 & 4 \\ -3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

（3）$\begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 8 & -3 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$　（4）$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$

2、 设方阵 A 满足$A^2-A-2E=O$，证明 A 及 A＋2E 都可逆

4 Partitioned Matrices

1、 用矩阵分块法求 AB

（1）设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

（2）设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

2、用矩阵分块法求下列矩阵的逆

（1）设 $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$，求$A^{-1}$

（2）设 $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$，求$A^{-1}$

8 Subspaces of $\mathbb{R}^n$

1、求给出向量v_1，⋯，v_5生成的空间的一个基

$$\begin{bmatrix} -8 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ -7 \\ -9 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -8 \\ 7 \\ 4 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -9 \\ 3 \\ -4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

9 Dimension and Rank

1、求下列题目：

（a） 若 3×8 矩阵 A 的秩为 3，求$dim\, Nul\ \ A, dim\, Row\ A$和$rank\ A^T$

（b） 假设一个 4×7 矩阵 A，有 4 个主元列，$Col\ A = R^4$吗？$Nul\ A = R^3$吗？并给出理由

（c） 若 5×6 矩阵 A 的零空间是 5 维的，A 的列空间的维数是多少

（d） 若 A 是 4×3 矩阵，A 的秩最大可能是多少？若 A 是 3×4 矩阵，A 的行空间的维数最大可能为多少？并给出理由

（e） 若 A 是一个 6×4 矩阵，$Nul\ A$的最小可能的维数是多少