Answer 3

Determinant

1. $C_{12}+C_{23}+C_{34}+C_{41}=12+8+24-6=38.$

2. (1)

   按第一行展开

$$\begin{vmatrix}3&0&4\\2&3&2\\0&5&1\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}3&2\\5&1\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}2&3\\0&5\end{vmatrix}=-21+40=19$$

   按第二列展开

$$\begin{vmatrix}3&0&4\\2&3&2\\0&5&1\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}3&4\\0&1\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}3&4\\2&2\end{vmatrix}=9+10=19$$

   (2)

   按第一行展开

$$\begin{vmatrix}2&3&-3\\4&0&3\\6&1&5\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}0&3\\1&5\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}4&3\\6&5\end{vmatrix}+(-3)\begin{vmatrix}4&0\\6&1\end{vmatrix}=-6-6-12=-24$$

   按第二列展开

$$\begin{vmatrix}2&3&-3\\4&0&3\\6&1&5\end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix}4&3\\6&5\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}2&-3\\4&3\end{vmatrix}=-6-18=-24$$

3. 解，该行列式可利用余因子展开式，3×3矩阵的行列式或者利用范德蒙行列式的变换求解

$$(1)\ D=2 \qquad\qquad (2)\ D=(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_3-a_2)$$

4. 解，此行列式即为 n阶范德蒙行列式 $(Vandermonde\ determinant)$

我们对第 i 行采取如下措施：$\boldsymbol{r_i}=\boldsymbol{r_i}-a_1\boldsymbol{r_{i-1}}$，$2\le i\le n$，按第一列展开，将每一列提取出公因式 (a_i-a_1) 后，得到 (2) ，容易观察到 (2) 是 (1) 的 $n-1$ 阶形式，可以进行递推归纳。

$$
\begin{aligned}
D_n &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \qquad (1) \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1-a_1 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & \dots & a_n-a_1 \\ a_1^2-a_1\cdot a_1 & a_2^2-a_1\cdot a_2 & a_3^2-a_1\cdot a_3 & \dots & a_n^2-a_1\cdot a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1}-a_1\cdot a_1^{n-2} & a_2^{n-1}-a_1\cdot a_2^{n-2} & a_3^{n-1}-a_1\cdot a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-1}-a_1\cdot a_n^{n-1} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & \dots & a_n-a_1 \\ 0 & a_2(a_2-a_1) & a_3(a_3-a_1) & \dots & a_n(a_n-a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2-a_1) & a_3^{n-2}(a_3-a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix} \\
&= \prod_{i_1=2}^{n}(a_{i_1}-a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} \qquad (2) \\
&= \prod_{i_1=2}^{n}(a_{i_1}-a_1)\prod_{i_2=3}^{n}(a_{i_2}-a_2)\dots\prod_{i_{n-1}=n}^{n}(a_{i_{n-1}}-a_{n-1}) \\
&= \prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)
\end{aligned}
$$

5. (1) $D=17$

(2) 将第一行分别加上第 i 行的 $-\frac{1}{a_i}$ 倍，其中 $i\in[2,n]$.

$$
\begin{aligned}
D=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{a_i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} \\
&= (a_1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{a_i})\prod_{i=2}^{n}a_i
\end{aligned}
$$

6. 解:

$$(1)\begin{vmatrix}1+a_1 & a_1 & \cdots & a_1\\ a_2 & 1+a_2 & \cdots & a_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_n & a_n & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}=(1+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a_2 & 1+a_2 & \cdots & a_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_n & a_n & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}$$

$$=(1+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

$$=1+\sum_{i=1}^{n}a_i$$

(2) 法一：

$$\begin{vmatrix}x & y & y & y & y\\ y & x & y & y & y\\ y & y & x & y & y\\ y & y & y & x & y\\ y & y & y & y & x\end{vmatrix}=(x+4y)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ y & x & y & y & y\\ y & y & x & y & y\\ y & y & y & x & y\\ y & y & y & y & x\end{vmatrix}$$

$$=(x+4y)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & x-y & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & x-y & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & x-y & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & x-y\end{vmatrix}$$

$$=(x+4y)(x-y)^4$$

法二：

$$\begin{vmatrix}x & y & y & y & y\\ y & x & y & y & y\\ y & y & x & y & y\\ y & y & y & x & y\\ y & y & y & y & x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x & y & y & y & y\\ y-x & x-y & 0 & 0 & 0\\ 0 & y-x & x-y & 0 & 0\\ 0 & 0 & y-x & x-y & 0\\ 0 & 0 & 0 & y-x & x-y\end{vmatrix}$$

$$=(x-y)^4\begin{vmatrix}x & y & y & y & y\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(x-y)^4\begin{vmatrix}x+4y & 4y & 3y & 2y & y\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(x-y)^4(x+4y)$$

$$(3)\begin{vmatrix}x & y & 0 & 0 & 0\\ 0 & x & y & 0 & 0\\ 0 & 0 & x & y & 0\\ 0 & 0 & 0 & x & y\\ y & 0 & 0 & 0 & x\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}x & y & 0 & 0\\ 0 & x & y & 0\\ 0 & 0 & x & y\\ 0 & 0 & 0 & x\end{vmatrix}-y\begin{vmatrix}0 & y & 0 & 0\\ 0 & x & y & 0\\ 0 & 0 & x & y\\ y & 0 & 0 & x\end{vmatrix}=x^5+y^5$$

7. 按第 n 行展开

$$D_n=(-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix}-1&0&0&\cdots&0\\x&-1&0&\cdots&0\\0&x&-1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&-1\end{vmatrix}_{n-1\times n-1}+(-1)^{n+n}xD_{n-1}$$
$$=(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}a_n+xD_{n-1}$$
$$=a_n+xD_{n-1}$$

所以有：

$$\begin{aligned}&D_{n-1}=a_{n_1}+xD_{n-2}\\&D_{n-2}=a_{n-2}+xD_{n-3}\\&\cdots\\&D_2=a_2+a_1x\end{aligned}$$

所以：$D_n=a_n+a_{n-1}x+a_{n-2}x^2+\cdots+a_1x^{n-1}$.

Cramer's Rule

1. 系数矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&3&3\\1&1&-2\end{bmatrix}$，向量 $b=\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}$.

$detA=4$，方程组有唯一解，并且

$$detA_1(b)=\begin{vmatrix}1&2&1\\3&3&3\\1&1&-2\end{vmatrix}=9$$
$$detA_2(b)=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&3\\1&1&-2\end{vmatrix}=-3$$
$$detA_3(b)=\begin{vmatrix}1&2&1\\2&3&3\\1&1&1\end{vmatrix}=1$$
$$x_1=\frac{detA_1(b)}{detA}=\frac{9}{4},x_2=\frac{detA_2(b)}{detA}=-\frac{3}{4},x_3=\frac{detA_3(b)}{detA}=\frac{1}{4}$$

故方程组解为：$x=\begin{bmatrix}\frac{9}{4}\\-\frac{3}{4}\\\frac{1}{4}\end{bmatrix}$.

2. $detA=-7$，伴随矩阵：$A^*=\begin{bmatrix}1&-3&-2\\-1&-4&2\\-3&2&-1\end{bmatrix}$，$A^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{7}&\frac{3}{7}&\frac{2}{7}\\\frac{1}{7}&\frac{4}{7}&-\frac{2}{7}\\\frac{3}{7}&-\frac{2}{7}&\frac{1}{7}\end{bmatrix}$

3. 方程组有非零解，即$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = 0.$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-1)^2 = 0$$

解得$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$