Exercise 2 答案

1 Matrix Operations

1、(1)

$$AB=\begin{bmatrix}4&-1&2&1\\1&1&0&3\\0&3&1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\\3&0\\-1&2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4\times1+(-1)\times0+2\times3+1\times(-1) & 4\times2+(-1)\times1+2\times0+1\times2\\ 1\times1+1\times0+0\times3+3\times(-1) & 1\times2+1\times1+0\times0+3\times2\\ 0\times1+3\times0+1\times3+4\times(-1) & 0\times2+3\times1+1\times0+4\times2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}9&9\\-2&9\\-1&11\end{bmatrix}$$

(2)

$$AB=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&0&-1\\3&1&2&1\\-1&3&1&4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1\times1+0\times3+0\times(-1) & 1\times2+0\times1+0\times3 & 1\times0+0\times2+0\times1 & 1\times(-1)+0\times1+0\times4\\ -2\times1+1\times3+0\times(-1) & -2\times2+1\times1+0\times3 & -2\times0+1\times2+0\times1 & -2\times(-1)+1\times1+0\times4\\ 0\times1+0\times3+1\times(-1) & 0\times2+0\times1+1\times3 & 0\times0+0\times2+1\times1 & 0\times(-1)+0\times1+1\times4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&2&0&-1\\1&-3&2&3\\-1&3&1&4\end{bmatrix}$$

2、$AB=\begin{bmatrix}0&14&-3\\17&13&10\end{bmatrix}$ $(AB)^T=\begin{bmatrix}0&17\\14&13\\-3&10\end{bmatrix}$ 解法1

$(AB)^T=B^TA^T=\begin{bmatrix}1&4&2\\7&2&0\\-1&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\0&3\\-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&17\\14&13\\-3&10\end{bmatrix}$ 解法2

3、

(a) $AB=[Ab_1, Ab_2]$

$$Ab_1=\begin{bmatrix}4&-2\\-3&0\\3&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-3\\13\end{bmatrix}$$

$$Ab_2=\begin{bmatrix}4&-2\\-3&0\\3&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14\\-9\\4\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}0&14\\-3&-9\\13&4\end{bmatrix}$$

(b) $$AB=\begin{bmatrix}4\times1+(-2)\times2 & 4\times3-2\times(-1)\\-3\times1+0\times2 & -3\times3+0\times(-1)\\3\times1+5\times2 & 3\times3+5\times(-1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&14\\-3&-9\\13&4\end{bmatrix}$$

4、

解： $AX+E=A^2+X \Rightarrow AX-X=A^2-E \Rightarrow (A-E)X=(A-E)(A+E)$，

因 $A-E=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，故 $A-E$ 为可逆矩阵，

所以 $X=(A-E)^{-1}(A-E)(A+E)=A+E=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$.

5、k=5

6、

(1) 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\neq\boldsymbol{O}$ 而 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$；

(2) 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，有 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O},\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{E}$ 而 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$；

(3) 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，有 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{Y}$ 而 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{AY}$.

7、经过计算可得出以下结论

（1）$AB\neq BA$

（2）$(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2$

（3）$(A+B)(A-B)\neq A^2-B^2$

8、

(1) 设 A 为 $m \times n$ 的矩阵，B 为 $r \times s$ 的矩阵，因为乘积 AB 有意义，所以我们有 $n = r$, 又因为 AB 是一个 $m \times s$ 的方阵，所以有 $m = s$，所以矩阵 B 是一个 $n \times m$ 的矩阵，所以 BA 是有意义的，并且其结果是一个 $n \times n$ 的方阵。

(2) 取 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.此时 $AB = O, BA \neq O$.

2 The Inverse of Matrix

1、$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 7/2 & -3/2 \end{bmatrix}$

2、$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -\frac{13}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ -16 & 7 & -1 \end{bmatrix}$

3、

$$(A^T - B)^T + C(B^{-1}C)^{-1}$$
$$= (A^T)^T - B^T + CC^{-1}(B^{-1})^{-1}$$
$$= A - B^T + B$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

4、

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow B = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

者根据 $B = (A - 2I)(A - I)$ 得 $B^{-1} = (A - I)^{-1}(A - 2I)^{-1}$ 来求.

5、

(1) $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\5&-4&1\end{bmatrix}.$

（2）

$$[A,I]=\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&0\\-2&1&0&0&1&0\\5&-4&1&0&0&1\end{bmatrix}\to$$
$$\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&2&1&0\\5&-4&1&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&2&1&0\\0&0&1&3&4&1\end{bmatrix}=[I,A^{-1}]$$

(3) $\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\7\\20\end{bmatrix}.$

6、

(1) $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}c&d\\a&b\end{bmatrix}$

$B=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}A$

(2) $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}b&a\\d&c\end{bmatrix}$

$B=A\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$

（3）

根据描述，$E_1=\begin{bmatrix}1&3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}, E_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$，$B=(E_1A)E_2=E_1(AE_2)$，所以若两步操作相反结果依然相同。

7、

设 A 为 n 阶方阵且可逆，B, C 均为 A 的逆，那么
$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$.从而 A 的逆唯一。

3 Characterizations of Invertible Matrices

1、（1）可逆 （2）不可逆 （3）可逆 （4）可逆

2、① 由 $A^2-A-2E=O$ 得

$A^2-A=2E$

$A(A-E)=2E$

$A\cdot\frac{1}{2}(A-E)=E$

由存在 $n\times n$ 矩阵 D 使 $AD=E$ 知：

A 是可逆矩阵，且 $A^{-1}=\frac{1}{2}(A-E)$

② 由 $A^2-A-2E=O$ 得

$A^2-A-6E=-4E$

即：$(A+2E)(A-3E)=-4E$

$(A+2E)\cdot\frac{1}{4}(3E-A)=E$

由存在 $n\times n$ 矩阵 D 使 $AD=E$ 知：

$A+2E$ 是可逆矩阵，且 $(A+2E)^{-1}=\frac{1}{4}(3E-A)$

4 Partitioned Matrices

1、(1) $A=\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} E & O \\ A_1 & E \end{bmatrix}$

$B=\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} B_{11} & E \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$

$$AB=\begin{bmatrix} E & O \\ A_1 & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} & E \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B_{11} & E \\ A_1B_{11}+B_{21} & A_1+B_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) $A=\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} A_1 & E \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$

$B=\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} E & B_1 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}$

$$AB=\begin{bmatrix} A_1 & E \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & B_1 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_1 & A_1B_1+B_2 \\ 0 & A_2B_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

2、(1) $A=\left[\begin{array}{c|cc} 5 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix}$

$A_1^{-1}=\left[\frac{1}{5}\right]$ $A_2^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

(2)
$A=\left[\begin{array}{cc|cc} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix}$

$A_1^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ $A_2^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 8 \end{bmatrix}$$

8 Subspaces of $\mathbb{R}^n$

1、

令$A=\begin{bmatrix}-8 & 8 & -8 & 1 & -9\\ 7 & -7 & 7 & 4 & 3\\ 6 & -9 & 4 & 9 & -4\\ 5 & -5 & 5 & 6 & -1\\ -7 & 7 & -7 & -7 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1 & 5 & -6\\ 1 & 2 & 3 & -5 & 7\\ 1 & -4 & -1 & 3 & -3\\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 2 & -4 & 5\\ 0 & -3 & -2 & 4 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

得到 A 的行间化阶梯形中存在三个主元列，即第一列，第二列，第四列，因此 $\{v_1, v_2, v_4\}$ 即为该向量空间的一个基。

9 Dimension and Rank

1、

（a）由$rankA = 3$，则$\therefore \dim NulA = 8 - rankA = 5$
且$\dim RowA = \dim ColA = rankA = 3$，$rankA^T = rankA = 3$。

（b）设 A=[$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6, \mathbf{v}_7$]，其中 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ 均为主元列，且 $\mathbf{v}_i \in R^4 (i \in [1,7])$，有 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ 线性无关，所以$R^4 = Span\{\boldsymbol{v}1, \boldsymbol{v}2, \boldsymbol{v}3, \boldsymbol{v}4\}$，则$ColA = R^4$，那么$rankA = \dim ColA = 4$，从而$\dim NulA = 3$，$NulA = R^3$。

（c）由 $rankA + \dim NulA = 6$ 得 $rankA = 1$ 即 $ColA$ 维数为 1。

（d）由$rankA \le \min\{m,n\}$，有$rankA \le 3$, 即 A 的秩最大值为 3，
又$\dim RowA = \dim ColA = rankA \le \min\{3,4\} = 3$，所以，A 的行空间最大可能维数为 3。

（e）当 A 矩阵的列均为主元列时，$NulA$有最小值 0。