Eigenvalues and Eigenvectors

1 Eigenvectors and Eigenvalues

1. （1）是. 因为 $\begin{vmatrix} 3-2 & 2 \\ 3 & 8-2 \end{vmatrix} = 0$，方程 $(A-2I)x = 0$ 有非平凡解.

（2）是. 因为 $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1+\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+2\sqrt{2} \\ 3+\sqrt{2} \end{bmatrix} = (3+\sqrt{2}) \begin{bmatrix} -1+\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$.

（3）$\lambda_1 = 1$, $(A-I)x = 0 \Rightarrow (0,1,0)^T$；

$\lambda_2 = 2$, $(A-2I)x = 0 \Rightarrow (-\frac{1}{2},1,1)^T$;

$\lambda_3 = 3$, $(A-3I)x = 0 \Rightarrow (-1,1,1)^T$.

2. （1）$\lambda_2 = 7+(-1)-1 = 5$.

(2)显然该矩阵行列式为 0,所以必然有一个特征值为 0,特征向量为 $(-2,1,0)^T$ 和 $(-3,0,1)^T$.

（3）观察发现该矩阵为三角阵，所以 $\lambda = 3,0,2$.

2 The Characteristic Equation

1. （1）特征多项式为 $(3-\lambda)^2 - 1 = 0$，解得 $\lambda_1 = 2$，$(1,1)^T$；$\lambda_2 = 4$，$(-1,1)^T$.

（2）特征多项式为 $(2-\lambda)(\lambda-1)^2$，解得 $\lambda_1 = 2$，$(0,0,1)^T$；$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$，$(-1,-2,1)^T$.

2. $\lambda^6 - 4\lambda^5 - 12\lambda^4 = \lambda^4(\lambda-6)(\lambda+2)$. 所以 $\lambda = 0$，4 重；$\lambda = 6$，1 重；$\lambda = -2$，1 重.

3. $A^2 - 4A + 3I = (A-3I)(A-I) = 0 \Rightarrow |A-3I||A-I| = 0$，$A$ 的特征值为 3 或者 1.

4. （1）$A^2x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda^2 x$.

（2）$Ax = \lambda x \Rightarrow \frac{1}{\lambda}x = A^{-1}x$.

5. 证明:

（1）$Ax_1 = \lambda_1 x_1$，$Ax_2 = \lambda_2 x_2$. 假设 x_1 与 x_2 线性相关，即 $x_1 = cx_2$. $Ax_1 = \lambda_1 x_1 \Rightarrow A(cx_2) = \lambda_1(cx_2) \Rightarrow Ax_2 = \lambda_1 x_2$. $\lambda_1 = \lambda_2$ 与已知不符，所以 x_1 与 x_2 线性无关.

（2）自行查阅栾老师在群内发的证明：特征子空间的维数小于等于特征值重数.pdf.

6. （1）已知 B 为 3×3 的矩阵，有 3 个不同的特征值，所以每个特征值为 1 重. 几何重数小于等于代数重数，所以 $\lambda = 0$，$Bx = 0$，B 的零空间必为 1 维，所以 $r(B) = 2$.

（2）$|B^TB| = |B^T||B| = |B|^2 = (0*1*2)^2 = 0$.

(3) $B^TBx=\lambda B^Tx$，无法求出.

(4) $Bx=\lambda x\Rightarrow B^2x=\lambda^2x\Rightarrow(B^2+I)x=(\lambda^2+1)x\Rightarrow(B^2+I)^{-1}x=\frac{1}{\lambda^2+1}x$. 所以特征值为 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{5}$

3 Diagonalization

1. $A^k=PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)\cdots D(P^{-1}P)DP^{-1}=PD^kP^{-1}$.

(1) 解得 $\lambda=-2,5$，对应的通解为 $x_2(-\frac{3}{4},1)^T$ 和 $x_2(1,1)^T$，方便起见取 $(-3,4)^T$ 和 $(1,1)^T$ 作为特征向量. 所以 $D=\begin{bmatrix}-2&0\\0&5\end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix}-3&1\\4&1\end{bmatrix}$，$P^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{7}&\frac{1}{7}\\\frac{4}{7}&\frac{3}{7}\end{bmatrix}$. $A^k=PD^kP^{-1}=\begin{bmatrix}-3&1\\4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-2)^k&0\\0&5^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{7}&\frac{1}{7}\\\frac{4}{7}&\frac{3}{7}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{7}\cdot(-2)^k+\frac{4}{7}\cdot5^k&-\frac{3}{7}\cdot(-2)^k+\frac{3}{7}\cdot5^k\\-\frac{4}{7}\cdot(-2)^k+\frac{4}{7}\cdot5^k&\frac{4}{7}\cdot(-2)^k+\frac{3}{7}\cdot5^k\end{bmatrix}$.

(2) 解得 $\lambda=4,1,1$. 取 $(1,1,1)^T$、$(-1,1,0)^T$ 和 $(-1,0,1)^T$ 作为特征向量. 所以 $D=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，$P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}$.

$$A^k=PD^kP^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4^k&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4^k+2}{3}&\frac{4^k-1}{3}&\frac{4^k-1}{3}\\\frac{4^k-1}{3}&\frac{4^k+2}{3}&\frac{4^k-1}{3}\\\frac{4^k-1}{3}&\frac{4^k-1}{3}&\frac{4^k+2}{3}\end{bmatrix}.$$

(3)解得 $\lambda=a,b$,取 $(\frac{1}{2},1)^T$ 和 $(1,1)^T$ 作为特征向量. 所以 $D=\begin{bmatrix}a&0\\0&b\end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&1\\1&1\end{bmatrix}$，$P^{-1}=\begin{bmatrix}-2&2\\2&-1\end{bmatrix}$. $A^k=PD^kP^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a^k&0\\0&b^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&2\\2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a^k+2b^k&a^k-b^k\\-2a^k+2b^k&2a^k-b^k\end{bmatrix}$.

2. 判断是否可对角化:

(1) 3×3 的三角阵，有 3 个不同的特征值 $\lambda=1,2,3$，所以可以对角化.

(2) 3×3 的三角阵，特征值 $\lambda=a$ 重数为 3. $A-aI$ 零空间为 1 维，所以没有 3 个线性无关的特征向量，不可对角化.

(3) $|A-\lambda I|=0\Rightarrow\lambda=1,1,-1$，若 A 可对角化，则 $\lambda=1$ 时必须有两个线性无关的特征向量，即 $A-I$ 的秩必须为 1. $A-I=\begin{bmatrix}-1&0&1\\1&0&t\\1&0&-1\end{bmatrix}$，显然仅 $t=-1$ 时矩阵秩为 1.

3. B.

(A) $\lambda E-A=\lambda E-P^{-1}BP=P^{-1}(\lambda E-B)P$. 所以 $\lambda E-A$ 与 $\lambda E-B$ 相似，但不等.

(B) $P^{-1}AP=B\Rightarrow|P^{-1}||A||P|=|B|\Rightarrow|A|=|B|$.

(C) $Ax=\lambda x\Rightarrow P^{-1}BPx=\lambda x\Rightarrow BPx=\lambda Px$. x 与 Px 不一定相等，特征向量不相等.

（D）若 A、B 不可相似对角化则不会与同一个对角矩阵相似.

4. 由于 $A \sim B$，那么存在可逆矩阵 P 使得：$A = P^{-1}BP$ ，那么有

$$\begin{cases} r(A-E) = r(P^{-1}BP-E) = r(P^{-1}(B-E)P) = r(B-E) \\ r(A-3E) = r(P^{-1}(B-3E)P) = r(B-3E) \end{cases}$$

$$B-E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} B-3E = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

所以，$r(B-E)=2$，$r(B-3E)=3$，$r(A-E)+r(A-3E)=5$.

5. 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$. 已知 $A \sim B$,

(1) 因为 $A \sim B$，所以 A 与 B 的特征值相等. ① 矩阵的迹为特征值的和，所以 $2+2+1=x+1+4 \Rightarrow x=0$. ② 行列式为特征值的积，所以 $|A|=|B| \Rightarrow 3=z$. ③ A 为实对称矩阵，特征值为 1（2 重）和 3（1 重），可相似对角化，所以 B 也可相似对角化. 当 $\lambda=1$ 时，$B-I = \begin{bmatrix} -1 & y & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$，$r(B-I)$=1$\Rightarrow y=-2$.

(2) 二者相似于同一个对角矩阵，所以 $D=M^{-1}AM=Q^{-1}BQ \Rightarrow QM^{-1}AMQ^{-1}=B \Rightarrow P=MQ^{-1}$. 对角化 A 和 B，得 $D = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$，$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，$Q = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. 所以 $P = MQ^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -2 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

6. ①因为非零向量 α 不是 A 的特征向量，有 $A\alpha \neq c\alpha$(c为常数)，即矩阵 $P=\begin{bmatrix} \alpha & A\alpha \end{bmatrix}$ 的两列线性无关，所以 P 可逆.

② 因为 $P=\begin{bmatrix} \alpha & A\alpha \end{bmatrix}$ 且有 $A^2\alpha+A\alpha-6\alpha=0$，根据矩阵乘法，可直接得到：

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= P^{-1}\begin{bmatrix} A\alpha & A^2\alpha \end{bmatrix} \text{（矩阵乘法的定义）} \\ &= P^{-1}\begin{bmatrix} A\alpha & -A\alpha+6\alpha \end{bmatrix} \text{（等式代入）} \\ &= P^{-1}\begin{bmatrix} \alpha & A\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{（矩阵与列向量的乘积是对各列的线性组合，直接写出）} \\ &= P^{-1}P\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4 附加题

1. 马尔科夫链（Markov Chain）.

(1) $M=\begin{bmatrix}0.6 & 0.2\\0.4 & 0.8\end{bmatrix}$， $u_1=Mu_0=\begin{bmatrix}0.6a+0.2b\\0.4a+0.8b\end{bmatrix}$.

(2) $u_{k+1}=Mu_k \Rightarrow u_k=M^ku_0=P\Lambda^kP^{-1}u_0$. 对角化矩阵 M, $\Lambda=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0.4\end{bmatrix}$, $P=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -1\\1 & 1\end{bmatrix}$, $P^{-1}=\frac{2}{3}\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$. 所以 $u_k=\frac{2}{3}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0.4^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}u_0=\frac{2}{3}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}+0.4^k & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot 0.4^k\\1-0.4^k & 1+\frac{1}{2}\cdot 0.4^k\end{bmatrix}u_0$.

(3) $\lim\limits_{k\to+\infty}u_k=\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{2}{3}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}+0.4^k & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot 0.4^k\\1-0.4^k & 1+\frac{1}{2}\cdot 0.4^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}300\\300\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}200\\400\end{bmatrix}$，即 A 城市最终会稳定为 200 人，B 城市最终会稳定为 400 人.

2. 差分方程（Difference Equation）.

① 设 $u_k=\begin{bmatrix}F_{k+1}\\F_k\end{bmatrix}$. 根据斐波那切数列递推式 $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$, $\begin{bmatrix}F_{k+1}\\F_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_k\\F_{k-1}\end{bmatrix}$, 且 $u_0=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$.

② 令 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$，有 $u_k=Au_{k-1}\Rightarrow u_k=A^ku_0\Rightarrow u_k=PD^kP^{-1}u_0$. 对角化 A：特征值 $\lambda_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\lambda_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. 得到 $D=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\0 & \lambda_2\end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\\1 & 1\end{bmatrix}$，$P^{-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1 & -\lambda_2\\-1 & \lambda_1\end{bmatrix}$. 所以，$u_k=PD^kP^{-1}u_0=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1^k\\-\lambda_2^k\end{bmatrix}$.

③ 因为 $u_k=\begin{bmatrix}F_{k+1}\\F_k\end{bmatrix}$，要取得 F_k，我们只关心最后一行. 所以通项公式为:

$$F_k=\frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^k-\lambda_2^k)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right]$$

3. 计算 e 的矩阵次方 e^{At}.

① $A=S\Lambda S^{-1}$，$e^{At}=1+At+\frac{(At)^2}{2!}+\frac{(At)^3}{3!}+...=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(At)^i}{i!}=S\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\Lambda t)^i}{i!}S^{-1}=Se^{\Lambda t}S^{-1}$

② $A=\begin{bmatrix}7 & 2\\-4 & 1\end{bmatrix}$，$\lambda=3,\ 5$. $\Lambda=\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 5\end{bmatrix}$，$S=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -1\\1 & 1\end{bmatrix}$，$S^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 2\\-2 & -1\end{bmatrix}$. 所以,

$$e^{At}=S\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\Lambda t)^i}{i!}S^{-1}=S\begin{bmatrix}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(3t)^i}{i!} & 0\\0 & \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(5t)^i}{i!}\end{bmatrix}S^{-1}=S\begin{bmatrix}e^{3t} & 0\\0 & e^{5t}\end{bmatrix}S^{-1}$$