Chapter 3

Determinant

1. 设 $A=\begin{bmatrix}0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&1\\-4&0&0&0\end{bmatrix}$，求 A 中所有的代数余子式之和。

2. 分别按第一行和第二列展开计算下列行列式：

$$(1)\begin{vmatrix}3&0&4\\2&3&2\\0&5&1\end{vmatrix}\qquad(2)\begin{vmatrix}2&3&-3\\4&0&3\\6&1&5\end{vmatrix}$$

3. 计算行列式

$$(1)D=\begin{vmatrix}1&2&2^2\\1&3&3^2\\1&4&4^2\end{vmatrix}\qquad(2)D=\begin{vmatrix}1&1&1\\a_1&a_2&a_3\\a_1^2&a_2^2&a_3^2\end{vmatrix}$$

4. 尝试计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\dots&1\\a_1&a_2&a_3&\dots&a_n\\a_1^2&a_2^2&a_3^2&\dots&a_n^2\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&a_3^{n-1}&\dots&a_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

5. 计算下列爪形行列式的值：

$$(1)D=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&3&0\\1&0&4\end{vmatrix}\qquad(2)D=\begin{vmatrix}a_1&1&1&\cdots&1\\1&a_2&0&\cdots&0\\1&0&a_3&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&0&0&\dots&a_n\end{vmatrix},(a_2a_3\dots a_n\neq0)$$

6. 计算行列式：

$$(1)\begin{vmatrix}1+a_1&a_1&\cdots&a_1\\a_2&1+a_2&\cdots&a_2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_n&a_n&\cdots&1+a_n\end{vmatrix}(2)\begin{vmatrix}x&y&y&y&y\\y&x&y&y&y\\y&y&x&y&y\\y&y&y&x&y\\y&y&y&y&x\end{vmatrix}(3)\begin{vmatrix}x&y&0&0&0\\0&x&y&0&0\\0&0&x&y&0\\0&0&0&x&y\\y&0&0&0&x\end{vmatrix}$$

7. 计算n阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

Cramer's Rule

1. 利用克拉默法则求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

2. 利用克拉默法则求 A^{-1}，$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

3. 如果齐次线性方程组$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$有非零解，求$\lambda$.