Vector Spaces

1. n 取适当值，判定给出的集合是否为 $\mathbb{P}_n$ 的子空间，给出理由.

（1）所有形如 $p(t) = at^2$ 的多项式，其中 $a \in \mathbb{R}$

① 0：$a = 0$ 时，$p(t) = 0$，0 在集合中

② 加法：$p(t) = a_1t^2, q(t) = a_2t^2$，$p(t) + q(t) = (a_1 + a_2)t^2$，封闭

③ 数乘：$cp(t) = (ca)t^2$，封闭

所以是子空间，且基为 t^2

（2）所有形如 $p(t) = a + t^2$ 的多项式，其中 $a \in \mathbb{R}$

① 0：因为总有平方项 t^2，显然 0 不在集合中

② 加法：$p(t) = a_1 + t^2, q(t) = a_2 + t^2, p(t) + q(t) = (a_1 + a_2) + 2t^2$，$t^2$ 项的系数为 2，不封闭

③ 数乘：$cp(t) = ca + ct^2$，不封闭

所以不是子空间

2. 求 A 的列空间 $C(A)$、零空间 $N(A)$、行空间 $C(A^T)$ 和左零空间 $N(A^T)$ 的基，并写出各子空间的维数、以及各子空间分别在哪个实向量空间 $\mathbb{R}^n$ 里.

（1）$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

观察发现 A 为行最简形矩阵，显然有：

列空间 $C(A)$：由 $(1,0,0)^T$ 和 $(0,1,0)^T$ 张成. $dimC(A) = 2$，是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间.

零空间 $N(A)$：由 $(-4,1,0,0)^T$ 和 $(-2,0,1,1)^T$ 张成. $dimN(A) = 4 - 2 = 2$，是 $\mathbb{R}^4$ 的子空间.

行空间 $C(A^T)$：由 $(1,4,0,2)^T$ 和 $(0,0,1,-1)^T$ 张成. $dimC(A^T) = 2$，是 $\mathbb{R}^4$ 的子空间.

左零空间 $N(A^T)$：由 $(0,0,1)^T$ 张成. $dimN(A^T) = 3 - 2 = 1$，是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间. （$IA = A$，取 I 的最后一行. 具体可参考下一问的过程）

（2）$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ （理解概念，观察矩阵形式，用尽可能少的过程求解）

首先明确矩阵乘法：矩阵 * 列向量 = 向量对矩阵的列进行线性组合；行向量 * 矩阵 = 向量对矩阵的行进行线性组合；矩阵 * 矩阵可以看作上述任意一种形式。

同时，观察发现，$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = LU$. 矩阵 U 为上三角矩阵（是经过初等行变换后的行阶梯矩阵），L 是下三角矩阵（通过初等行变换所使用的矩阵 E 的乘积的逆矩阵）.

列空间 $C(A)$:列空间即矩阵各列张成的空间. 根据矩阵乘法,能看出矩阵 A 的列空间由 $(1,2,-1)^T$ 和 $(0,1,0)^T$ 张成. $dimC(A)=2$，是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间.

零空间 $N(A)$：即组合矩阵各列为零向量（$Ax=0$）的解集. 因为 U 为 A 的行简化阶梯形，所以显然 A 的零空间由 $(-\frac{3}{5},-1,1)^T$ 张成. $dimN(A)=1$，是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间.

行空间 $C(A^T)$:行空间即矩阵各行张成的空间. 根据矩阵乘法,能看出矩阵 A 的行空间由 $(5,0,3)^T$ 和 $(0,1,1)^T$ 张成. $dimC(A^T)=2$，是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间.

左零空间 $N(A^T)$：即组合矩阵各行为零向量（$A^Tx=0 \Leftrightarrow x^TA=0$）的解集. 因为 $A=LU$，所以 $L^{-1}A=U$. U 为 A 的行简化阶梯形,且最后一行为全零行;L 是初等矩阵,有 $L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. 根据矩阵乘法，可知 L^{-1} 的最后一行 $(1,0,1)^T$ 为左零空间的基. $dimN(A^T)=1$，是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间.

3. 在 $\mathbb{R}^3$ 中，$x+y+z=0$ 表示什么形状？为什么？请用空间和维数的相关知识回答.

根据题意，$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x+y+z=0\}$，即需要知道满足 $x+y+z=0$ 的所有 (x,y,z) 的集合的维数. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$，方程解集即 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 的零空间，维数为 2，为平面.

4. 若一个 3×8 的矩阵 A 的秩为 3，求 $\dim \mathrm{Nul}A$、$\dim \mathrm{Row}A$、$\mathrm{rank}A^T$.

根据题意，有 $m=3$，$n=8$，$r=3$. 显然，$\dim \mathrm{Nul}A = n-r = 5$，$\dim \mathrm{Row}A = r = 3$，$\mathrm{rank}A^T = r = 3$

5. A 的秩为 3, B 的秩为 3。

6. 因为矩阵的秩为 2，根据矩阵的初等变换可得：$\lambda=5, \mu=1$。

7.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 & -7 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 维数为 2。

(2) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -8 & -3 \\ -2 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 维数为 3。

8.

(1)$ColA$ 的维数为 3，$NulA$ 的维数为 2.

(2)$ColA$ 的维数为 3，$NulA$ 的维数为 3.

9. $Aw = \begin{bmatrix} 5 & 21 & 19 \\ 13 & 23 & 2 \\ 8 & 14 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，所以 w 在 $NulA$ 中。

10.

(1) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -8 \\ 7 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$