Orthogonality & Quadratic Form

1 Orthogonality

1. 回答下列问题，并说明原因：

（1）向量 $u = (3, 2, -5, 0)^T$ 和 $v = (-4, 1, -2, 6)^T$ 是否正交？向量方向的单位向量是？

（2）矩阵 A 的列空间 $C(A)$ 和左零空间 $N(A^T)$ 是否正交？行空间 $C(A^T)$ 和零空间 $N(A)$ 是否正交？

（3）$e_1 = (\cos\theta, \sin\theta)^T$ 和 $e_2 = (-\sin\theta, \cos\theta)^T$ 是否是一组标准正交基？

（4）矩阵 $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ 是否是正交矩阵？它的逆矩阵是什么？矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 呢？

2. 证明：

（1）置换矩阵是正交矩阵.

（2）若方阵 Q 有单位正交列，则 Q 是正交矩阵，且具有单位正交行.

3. 计算投影：

（1）如图 1 所示，求出向量 b 在向量 a 上的投影 p，并写出投影矩阵 P 的（$p = Pb$）.

（2）如图 2 所示，平面由向量 a_1，a_2 张成（$A = [a_1\ a_2]$，平面即列空间 $C(A)$）. 求出向量 b 在平面 A 上的投影 p，并写出投影矩阵 P（$p = Pb$）.

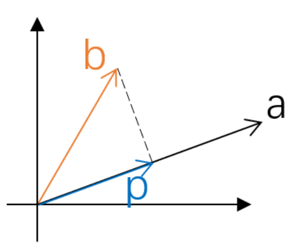

图 1: 向量 b 在向量上的投影

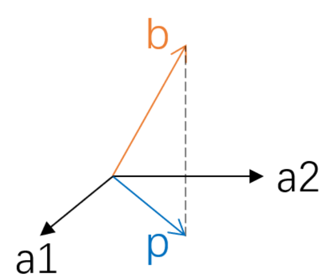

图 2: 向量 b 在平面上的投影

4. 用 Gram-Schmidt 方法将下列线性无关的向量组正交化（结果用 q_i 表示）：

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},\ a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

5. QR 分解：如果 $m \times n$ 矩阵 A 列线性无关，那么 A 可以分解为 $A = QR$，其中 Q 是一个 $m\times n$ 的矩阵，其列形成 Col$A$ 的一个标准正交基，R 是一个 $n\times n$ 的上三角可逆矩阵且对角线上元素为正数. 在实际计算 QR 分解时，矩阵 Q 的各列 q_i 通过对 A 的各列 a_i 使用 Gram-Schmidt 方法得到. 同时我们还知道，Gram-Schmidt 方法实际上是在各个方向不断做投影（矢量的合成和分解）并单位化，进而得到的一组单位正交向量，矩阵 R 体现了各个方向上的投影长度.

（1）基于第 4 题的数据，写出 $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$ 的 QR 分解.

（2）若 $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}$，$Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{bmatrix}$，矩阵 R 是?

2 Quadratic Form

1. 正交对角化下列实对称矩阵：

（1）$\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}$ （2）$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

2. 请 1、将下列二次型用矩阵表示；2、转化为标准形并写出所用的坐标变换：

（1）$f = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2$

（2）$f = x^2 + 4xy + 4y^2 + 2xz + z^2 + 4yz$

3. 判断矩阵的正定性，并写出正、负惯性指数：

（1）$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 20 \end{bmatrix}$ （2）$\begin{bmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

4. 已知二次型 $f(x) = 2x_1^2 + ax_3^2 + 2x_2x_3$ 经正交变换 $x = Py$ 可化为标准形 $y_1^2 + by_2^2 - y_3^2$，则 $a =$______. （写过程）

5. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$，则在实数域上与 A 合同的矩阵为（　　）：

（A）$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ （B）$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ （C）$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ （D）$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

6. 假设矩阵 A 是 n 阶正定对称矩阵，证明：

（1）A 是可逆的

（2）A^{-1} 是对称的

（3）A^{-1} 是正定的

3 附加题

1. 最小二乘法（Least Squares）/ 线性回归（Linear Regression）. 方程 $Ax = b$ 并非在任何情况下都有解，但我们可以通过 $A^T Ax = A^T b$ 求出近似解，阅读投影矩阵和最小二乘. 现有 3 个点 $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,2)$，请问这几个点的最佳拟合直线 $y = C + Dx$ 是?

2. 奇异值分解（Singular Value Decomposition, SVD）. 在信息检索、自然语言处理、数字图像处理等人工智能相关领域，SVD 具有广泛的应用. 与此前学过的 LU 分解、QR 分解、谱分解等一样，SVD 也是一种矩阵的分解，即 $A = U\Sigma V^T$，其中 U 和 V 是正交矩阵，Σ 是对角矩阵（不一定是方阵）.

（1）基于下列材料了解 SVD 及其应用，重点了解三个矩阵 U、V、Σ 分别是如何求出来的:

1. 刘建平-奇异值分解 (SVD) 原理与在降维中的应用
2. 视频：MIT 线性代数公开课-SVD
3. 这次终于彻底理解了奇异值分解 (SVD) 原理及应用

（2）基于上述内容，对矩阵 A 进行奇异值分解:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$