Lezione 17: Autovalori & autovettori (Parte I)

Def: Sia $T: V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V (definito su un campo $\mathbb{K}$). Un **autovettore** di T è un vettore $v \neq 0$ tale che

$$\boxed{T(v) = \lambda \cdot v}$$

per qualche $\lambda \in \mathbb{K}$. Questo numero λ è l'**autovalore** associato all'autovettore v.

Esempio: Consideriamo $L_A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

- Poiché $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

  allora $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è autovettore con autovalore $\lambda = 3$.

- $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ per qualsiasi λ.

  Allora $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ non è un autovettore.

- $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \end{pmatrix} \neq \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ per qualsiasi λ.

  Allora $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ non è un autovettore.

- $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ allora

  $v = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un autovettore con autovalore $\lambda = 2$.

Se v è un autovettore di T con autovalore λ & $\mu \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ allora

$$T(\mu v) \underset{\substack{T \text{ è} \\ \text{lineare}}}{=} \mu \cdot T(v) \underset{\substack{v \text{ è} \\ \text{autovettore}}}{=} \mu \cdot (\lambda \cdot v) = \lambda \cdot (\mu v)$$

$\Rightarrow \mu v$ è autovettore con lo stesso autovalore λ.

Esempio: Sappiamo che e_1 è autovettore di $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ con autovalore $\lambda = 3$. (sopra)

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ anche $\sqrt{3} \cdot e_1$ è autovettore con $\lambda = 3$.

Osservazione: Sia $T : V \to V$ è un endomorfismo & $\mathcal{B}$ è una base di V & sia $A = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ & $x = [v]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{K}^n$.

$$\boxed{T(v) = \lambda \cdot v} \iff \boxed{A \cdot x = \lambda \cdot x}$$

(Chiamiamo x un autovettore di A con autovalore λ)

Endomorfismi (o matrici) diagonalizzabili

Def 5.1.9: Un endomorfismo $T : V \to V$ è diagonalizzabile se V ha una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ formata da autovettori di T.

Prop 5.1.10: La matrice $A = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ è una matrice diagonale se e solo se $\mathcal{B}$ è formato da autovettori di T.

Dim: Il vettore v_i è autovettore di $T \iff T(v_i) = \lambda_i v_i$ per qualche autovalore $\lambda_i \iff [T(v_i)]_{\mathcal{B}} = \lambda_i e_i$
$\iff$ la i-esima colonna di $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ è $\lambda_i e_i$.

Questo vale per ogni i se e solo se

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{è diagonale.}$$

$\lambda_1 e_1$ $\lambda_2 e_2$ $\lambda_n e_n$

□

Def: Una matrice $A \in M(n, \mathbb{K})$ è diagonalizzabile se è simile ad una matrice diagonale Λ ($\Leftrightarrow$ esiste una matrice V invertibile tale che $\Lambda = V^{-1} A V$ è diagonale)

Prop 5.1.16: Sia B è una base di V. Un endomorfismo $T: V \to V$ è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ $A = [T]_B^B$ è diagonalizzabile.

Dim: T è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ esiste una base $\mathcal{C}$ formata da autovettori di T. Sia $V = [id]_B^{\mathcal{C}}$ e sia $A = [T]_B^B$. Allora

$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = V^{-1} \cdot A \cdot V$$

Per la Prop 5.1.10 sopra, $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ è diagonale $\Leftrightarrow$ A è diagonalizzabile. □

La matrice Λ ha sulla diagonale gli autovalori λ_i & V ha come colonne gli autovettori v_i.

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Sappiamo che $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono autovettori (con autovalori $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$).

Nella base $B = \{v_1, v_2\}$ otteniamo

$$[L_A]_B^B = \left([L_A(v_1)]_B \mid [L_A(v_2)]_B \right)$$
$$= \left([3v_1]_B \mid [2v_2]_B \right)$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Se scriviamo $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ per la base canonica $[L_A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = A$

$$[id]_{\mathcal{E}}^{B} = \left([v_1]_{\mathcal{E}} \mid [v_2]_{\mathcal{E}} \right) = (v_1 \mid v_2)$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = V$$

$$V^{-1} = \frac{1}{\det V} \, {}^t(\operatorname{cof} V) \underset{\det V = 1}{=} {}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda = V^{-1} A V = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrici diagonali sono utile, per esempio

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Se $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ allora $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k \text{ volte}} = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Vogliamo calcolare A^{22}

$\rightarrow$ Metodo 1 : $A \cdot A \cdot A \cdot \ldots$

$$A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 20 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 20 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 76 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

ecc.

...

$\rightarrow$ Metodo 2 : $\Lambda = V^{-1} A V$ è diagonale $\Leftrightarrow A = V \Lambda V^{-1}$

$$\Rightarrow A^{22} = (V \Lambda \underbrace{V^{-1}) \cdot (V}_{= I_2} \Lambda \underbrace{V^{-1})(V}_{= I_2} \Lambda V^{-1}) \ldots (V \Lambda V^{-1})$$

$$= V \Lambda^{22} V^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{22} & 0 \\ 0 & 2^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \ldots$$

Polinomi caratteristico

Def: Sia $A \in M(n, \mathbb{K})$. Il polinomi caratteristico di A è definito da

$$p_A(\lambda) := \det(A - \lambda \cdot I_n) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

Questo è veramente un polinomio di grado n

$$p_A(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0$$

con $a_n = (-1)^n$.

[Mardelli : $a_{n-1} = (-1)^{n-1} \operatorname{tr} A$, $a_0 = \det A$]

Prop 5.1.28: Gli autovalori di T sono precisamente le radici del polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$ dove $A = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ in qualsiasi base $\mathcal{B}$.

Dim: Scegliamo una base $\mathcal{B}$ e scriviamo $A = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

$T(v) = \lambda v \iff Ax = \lambda x$ dove $x = [v]_{\mathcal{B}}$ $(x \neq 0)$

Allora: λ è un autovalore di T

$\iff \exists x \neq 0$ con $Ax = \lambda x$

$\iff \exists x \neq 0$ con $(A - \lambda \cdot I_n)x = 0$

$\iff \exists x \neq 0$ con $x \in \ker(A - \lambda \cdot I_n)$

$\iff \ker(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$

$\iff \det(A - \lambda I_n) = 0 \iff p_A(\lambda) = 0$. $\square$

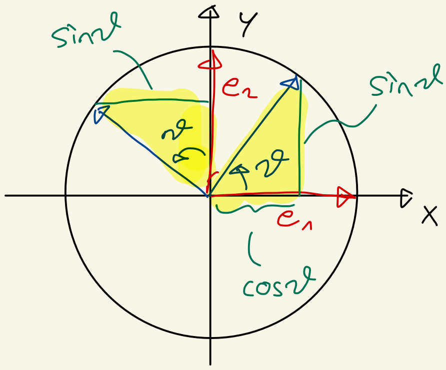
Esempio: $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Troviamo
$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda \cdot I_2) \\ &= \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (3-\lambda)(2-\lambda) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ gli autovalori sono le radici di $p_A(\lambda)$ allora sono $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$.

Esempio: Sia $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una rotazione di angolo ϑ intorno a O. $(\vartheta \neq 0, \vartheta \neq \pi)$

Sia $\mathcal{A} = \{e_1, e_2\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^2$.



$$T(e_1) = T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\vartheta\\ \sin\vartheta\end{pmatrix}$$

$$T(e_2) = T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\vartheta\\ \cos\vartheta\end{pmatrix}$$

$$[T]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix}\cos\vartheta & -\sin\vartheta\\ \sin\vartheta & \cos\vartheta\end{pmatrix}$$

Per esempio per $\vartheta = \frac{\pi}{4}$, $\sin\vartheta = \cos\vartheta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow [T]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix}\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2\\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\end{pmatrix} = A$$

Per ogni vettore $v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$ abbiamo $A\cdot v \neq \lambda v$ (perché abbiamo rotato v)

$\Rightarrow$ A non ha autovettori & autovalori!

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda\cdot I_2) = \det\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2-\lambda & -\sqrt{2}/2\\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2-\lambda\end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\lambda\right)^2 + \frac{1}{2}$$

Questo polinomio non ha radici reali.

Per il Teorema Fondamentale dell'Algebra ogni polinomio di grado n & coeff. in $\mathbb{C}$ ha n radici complesse (contate con molteplicità).

$\Rightarrow$ Ogni matrice $A \in M(n, \mathbb{C})$ ha esattamente n autovalori in $\mathbb{C}$ (contate con molteplicità).

Esempio: Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M(3, \mathbb{C})$

Allora $p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 3 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

$$= 3 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1-\lambda & 1 \end{pmatrix} + (2-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= 3 [2-\lambda] + (2-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 2]$$

$$= (2-\lambda)[(1-\lambda)^2 + 1]$$

$$p_A(\lambda) = 0 \iff \lambda = 2 \text{ o } (1-\lambda)^2 = -1$$
$$\iff \lambda = 2 \text{ o } (1-\lambda) = \pm i$$
$$\iff \lambda = 2 \text{ o } \lambda = 1 \pm i$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 1+i,\ \lambda_3 = 1-i$ sono gli autovalori di A.