Foglio Esercizi 1 (MDAG 2023)

Esercizi proposti da R. Buzano e M. Radeschi

23 ottobre 2023

Esercizio 1. Dati i numeri complessi $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 4 + 3i$ calcolare i seguenti:

$$z_1 + z_2 \qquad \|z_2 - z_1\| \qquad \frac{z_1^2}{z_2 - z_1} \qquad z_1^2 + \bar{z}_1^2 \qquad \|1 + z_1\| \qquad \|z_2 + z_2 z_1\|$$

Esercizio 2. Dato $z = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)$, Scrivere z in coordinate polari e calcolare z^{2023} scrivendolo nella forma standard $a + bi$.

Esercizio 3. Calcolare le seguenti radici:

1. Le radici settime di $z_0 = 1 - i$.
2. Le radici terze di $z_0 = i$.
3. Le radici ottave di $z_0 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Esercizio 4. Dato un numero complesso z e un numero naturale n, verificare che $\overline{z^n + \bar{z}^n} = z^n + \bar{z}^n$. Dedurre che $z^n + \bar{z}^n$ è sempre un numero reale, indipendentemente da z e n.

Esercizio 5. Quale dei seguenti numeri complessi è una radice del polinomio $p(z) = z^2 - 2iz - 5$:

1. $-1 + i$
2. i
3. $1 + i$
4. $2 + i$

Esercizio 6. Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & 1+i & 0 \\ 2-i & -1 & -2+3i \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1+i & -1 \\ 2-3i & 0 \end{pmatrix},$$

calcolare, quando è possibile, i seguenti prodotti: AB, BA, AC, CA, BC, CB.

Esercizio 7. Verificare che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

soddisfa la seguente identità

$$A^3 - 3A + 2I = O,$$

dove la notazione A^k indica il prodotto di A con se stessa k volte (per ogni intero positivo k), I indica la matrice identità di $\mathrm{M}(3, \mathbb{R})$ e O indica la matrice nulla di $\mathrm{M}(3, \mathbb{R})$.

Esercizio 8. Calcolare, quando è possibile, il determinante e la traccia delle seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 2+i & 0 & 0 \\ 0 & 3+2i & 0 \\ 0 & 0 & 2-i \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 4 & \pi \\ 0 & -7 & \sqrt{2} & 11 \\ 0 & 0 & -4 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 3-i & 5 & \sqrt{2} & 3 \\ 1 & 5 & 3+i & 3 \\ 2\pi & 5 & 3+2i & 3 \\ i-3 & 5 & 7\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & -2 & 8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ 5 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 0. Dire per quali valori del parametro reale h le seguenti matrici sono invertibili

$$P = \begin{pmatrix} -4 & 1 & h+4 \\ -h-3 & h & h+4 \\ -1 & 1 & h+1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & h & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad PQ, \quad T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & h \\ 5 & 2 & -2 & \sqrt[3]{2} \\ -3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & h-2 & 0 & h-1 \end{pmatrix}.$$

Per i valori di h per cui la matrice Q è invertibile, calcolare la sua matrice inversa Q^{-1} e verificare l'uguaglianza $QQ^{-1} = I_3$.