Lezione 9 : Matrici (Parte II)

Permutazioni (⇒ parte di matematica discreta del corso)

S_n indica l'insieme delle $n!$ permutazioni di $\{1,\dots,n\}$.
Il termine $\mathrm{sgn}(\sigma) = \pm 1$ indica il segno di una permutazione $\sigma \in S_n$: le σ è un prodotto di k trasposizioni [permutazione che scambia due elementi e lascia tutti gli altri elementi] allora

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^k .$$

In seguito indichiamo $\sigma \in S_n$ con $[\sigma(1) \dots \sigma(n)]$

Determinante di una matrice quadrata

Def 3.3.1: Sia A una matrice quadrata $n \times n$.
Il determinante di A è il numero

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} .$$

$\boxed{n=1}$ La matrice A è un numero $A = (a_{11})$
L'insieme S_1 contiene solo una permutazione

$id = [1]$ $\qquad\qquad \sigma : \{1\} \to \{1\}$, $\quad 1 \mapsto 1$

$\mathrm{sgn}(id) = 1$

$\Rightarrow \det A = a_{11}$.

$\boxed{n=2}$ La matrice A è della forma $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

L'insieme S_2 contiene 2 permutazioni:

$id = [1\ 2]$ & $[\underset{\sigma(1)}{2}\ \underset{\sigma(2)}{1}]$

$sgn(id) = 1$

$sgn([2\ 1]) = (-1)$

$$\Rightarrow \det A = 1 \cdot a_{11}a_{22} + (-1)\, a_{12}a_{21}$$
$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$\boxed{n=3}$ La matrice A è della forma $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

L'insieme S_3 ha $3! = 6$ elementi:

$id = [1\ 2\ 3] \to sgn(id) = 1$

$[1\ 3\ 2] \to sgn([1\ 3\ 2]) = -1$

$[3\ 2\ 1] \to sgn([3\ 2\ 1]) = -1$

$[2\ 1\ 3] \to sgn([2\ 1\ 3]) = -1$

$[3\ 1\ 2] \to sgn([3\ 1\ 2]) = (-1)^2 = 1$

$[2\ 3\ 1] \to sgn([2\ 3\ 1]) = (-1)^2 = 1$

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$
$$- a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31}$$

Esempio: $A = (3)$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\det A = 3$

$\det B = 4 - (-2) = 6$

$\det C = 1 - 0 - (-1) - 4 + 0 + (-4) = -6$

Proposizione 3.3.2: Vale $\det({}^tA) = \det A$

Proposizione 3.3.3: Sia $A \in M(n, \mathbb{K})$ una matrice triangolare superiore

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Allora vale $\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$

"Dim:" L'unico prodotto non nullo nella somma

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

è quello dove $\sigma = id$ (con $\operatorname{sgn}(id) = 1$)

Per tutte le altre permutazioni esiste un $a_{k\sigma(k)}$ con $\sigma(k) > k$, allora $a_{k\sigma(k)} = 0$ nel prodotto. $\square$

Lo stesso vale per le matrici triangolari inferiori.

Def: La ==matrice identità== di taglia $n \times n$ è la matrice

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio: Per ogni matrice A di taglia $n \times n$ vale

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$$

(allora I_n è l'elemento neutro della moltiplic.)

Con la Prop. 3.3.3. otteniamo $\det(I_n) = 1$.

Sviluppo di Laplace

Sia A una matrice $n \times n$ con $n \geq 2$.
Indichiamo con C_{ij} la sottomatrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta da A cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna.

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & \cancel{7} \\ \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{\sqrt{2}} \\ 9 & 0 & \cancel{1} \end{pmatrix} \Rightarrow C_{23} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$

Teorema 3.3.5 (Sviluppo di Laplace)

Per ogni i fissato vale

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det C_{ij}$$

(sviluppo lungo la i-esima riga)

Per ogni j fissato vale

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det C_{ij}$$

(sviluppo lungo la j-esima colonna)

(Vari esempi in lezione)

Proprietà del determinante

Proprietà 1: Se gli elementi di una riga (o colonna) di A sono tutti nulli, allora $\det A = 0$.

Dim: Basta calcolare il determinante con il sviluppo di Laplace lungo questa riga (o colonna). $\square$

Proprietà 2: Se la matrice $\tilde{A}$ si ottiene dalla matrice A moltiplicando tutti gli elementi di una riga (o colonna) per il numero $\lambda \in \mathbb{K}$, allora $\det(\tilde{A}) = \lambda \cdot \det(A)$.

Dim: Basta calcolare il determinante con il sviluppo di Laplace lungo questa riga (o colonna).
Se $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$ allora per questa riga, abbiamo $\tilde{a}_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$

& $\tilde{C}_{ij} = C_{ij}$ (perché la riga/colonna modificata è stata cancellata). □

Cor: $\det(\lambda A) = \lambda^n \cdot \det(A)$
(se A è una matrice $n \times n$)

In particolare
$\det(-A) = (-1)^n \det(A)$

Esercizio 1: Calcoliamo il determinante di

$$A = \begin{pmatrix} 5i & 4\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 5i & 8\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ -5i & -4\sqrt{2} & -1 & 2\sqrt{2} \\ 10i & 4\sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(Soluzione, usando Proprietà 2 e poi il Teorema Sviluppo di Laplace, in lezione)