Lezione 20: Prodotti scalari (Parte II)

$T: V \to V$ endomorfismo (lineare)	$g: V \times V \to \mathbb{R}$ prodotto scalare (bilineare & simmetrica)
Esempio: $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $x \mapsto A \cdot x$ $A \in M(n, \mathbb{R})$	Esempio: $g_S : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(x,y) \mapsto {}^t x \cdot S \cdot y$ $S \in M(n, \mathbb{R})$ simmetrica
In una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \left([T(v_1)]_{\mathcal{B}} \mid \dots \mid [T(v_n)]_{\mathcal{B}} \right)$ è la matrice associata a T.	In una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ $[g]_{\mathcal{B}} = \left(g(v_i, v_j) \right)_{i,j=1,\dots,n}$ è la matrice associata a g.
$[T(x)]_{\mathcal{B}} = [T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} \cdot [x]_{\mathcal{B}}$	(*) $g(x,y) = {}^t[x]_{\mathcal{B}} \cdot [g]_{\mathcal{B}} \cdot [y]_{\mathcal{B}}$

In particolare, per la base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^n$ $[L_A]_{\mathcal{E}} = A$	In particolare, per la base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^n$ abbiamo $[g_S]_{\mathcal{E}} = S$
Cambiamento di base: $[T]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = [id]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}} \cdot [T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} \cdot [id]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}$ $B = M^{-1} \cdot A \cdot M$ dove $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = A$, $[T]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = B$ e $M = [id]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}$ è la matrice del cambiamento di base. Le matrici A & B sono <u>simili</u>.	Cambiamento di base $[g]_{\mathcal{E}} = {}^t([id]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}) \cdot [g]_{\mathcal{B}} \cdot [id]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}$ $S' = {}^t M \cdot S \cdot M$ dove $[g]_{\mathcal{B}} = S$, $[g]_{\mathcal{E}} = S'$ e $M = [id]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}$ è la matrice del cambiamento di base. Le matrici S & S' sono <u>congruenti</u>.

Cambiamento di base per prodotti scalari

Siano $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_n\}$ due basi di V.
Sia $M = [id]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$ la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$.

Prop: Vale la relazione $[g]_{\mathcal{C}} = {}^tM \cdot [g]_{\mathcal{B}} \cdot M$.

Dim: Per la relazione $(\ast)$ abbiamo

$$([g]_{\mathcal{C}})_{ij} = S'_{ij} \overset{Def}{=} g(w_i, w_j) = {}^t[w_i]_{\mathcal{B}} \cdot \underset{[g]_{\mathcal{B}}}{S} \cdot [w_j]_{\mathcal{B}}$$

$$= {}^t(M^i) \cdot [g]_{\mathcal{B}} \cdot M^j$$

$$\underset{\text{per ogni } i,j}{\Longrightarrow} \quad S' = {}^tM \cdot S \cdot M$$

$\square$

Esempio: Sia $g(x,y) = {}^tx \cdot y$ il prodotto scalare euclideo e sia $\mathcal{B}$ la base $\mathcal{B} = \left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}} \right\}$

$$S' = [g]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} g(v_1,v_1) & g(v_1,v_2) \\ g(v_2,v_1) & g(v_2,v_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sappiamo anche che in base canonica $\mathcal{A} = \{e_1, e_2\}$ otteniamo

$$S = [g]_{\mathcal{A}} = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice del cambiamento di base è

$$M = [id]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} = \left([v_1]_{\mathcal{A}} \mid [v_2]_{\mathcal{A}} \right) = (v_1 \mid v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Controlliamo $S' = [g]_{\mathcal{B}} = {}^tM \cdot [g]_{\mathcal{A}} \cdot M$
$= {}^tM \cdot I_2 \cdot M = {}^tM \cdot M$

$$M^t \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

Matrici congruenti

Def 7.2.11: Due matrici $n \times n$ simmetriche S & S' sono **congruenti** se esiste una matrice $n \times n$ invertibile M per cui

$$S = {}^tM \cdot S' \cdot M .$$

Come per la similitudine di matrici anche la congruenza di matrici simmetriche è un relazione d'equiv.

Esempio: Le matrici $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ & $S' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sono congruenti: Prendiamo $M = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e verifichiamo $S' = {}^tM \cdot S \cdot M = {}^tM \cdot M = M^2$.

Ma $\det S = 1$ & $\det S' = 2$ e allora S & S' non sono simili.

[Se A & B sono simili, allora $\det A = \det B$]

Prop 7.2.14: Se S & S' sono congruenti, allora $\det S$ & $\det S'$ hanno lo stesso segno:

$$\det S > 0 \iff \det S' > 0$$
$$\det S = 0 \iff \det S' = 0$$
$$\det S < 0 \iff \det S' < 0$$

Dim: S & S' sono congruenti $\Rightarrow$ esiste una matrice M (invertibile) con $S' = {}^tM \cdot S \cdot M$. Visto che M è invertibile, $\det M \neq 0$. Usiamo il Teorema di Binet:

$$\begin{aligned} \det S' &= \det({}^tM \cdot S \cdot M) \\ &= \det({}^tM) \cdot \det(S) \cdot \det(M) \\ &= \underbrace{\det(M)^2}_{>0} \cdot \det(S) \end{aligned}$$

Allora $\det S'$ & $\det S$ hanno lo stesso segno. □

Forme quadratiche

Un polinomio $p(x)$ nelle variabili $x_1, \dots, x_n$ è omogeneo se tutti suoi monomi hanno lo stesso grado.

Esempio:

$x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4$ omogeneo di grado 1

$2x_1x_2 + 7x_3x_4 + x_2^2 - x_4^2$ omogeneo di grado 2

$x_1^3 + x_2x_3x_4 - x_2^2x_3$ omogeneo di grado 3

$x_1 + x_2^2 + x_2x_3x_4$ non è omogeneo

Def: Una forma quadratica è un polinomio omogeneo di grado 2 nelle variabili $x_1, \dots, x_n$.

Prop 7.1.12: Ogni forma quadratica $q(x)$ si scrive in modo unico come

$$q(x) = g_S(x, x) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i S_{ij} x_j$$

per qualche matrice S simmetrica.

Dim: Una generica forma quadratica si scrive

$$q(x) = \sum_{1 \le i \le j \le n} a_{ij} x_i x_j \quad \text{per qualche } a_{ij}$$

[La condizione $i \le j$ evita che $x_i x_j$ & $x_j x_i$ diventa contato due volte.]

Definiamo per $i<j$: $S_{ij} = S_{ji} = \frac{1}{2} a_{ij}$

e per $i=j$: $S_{ii} = a_{ii}$.

Così otteniamo

$$q(x) = \sum_{1 \le i \le j \le n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i,j=1}^{n} S_{ij} x_i x_j = g_S(x,x)$$

$$a_{ij} x_i x_j = S_{ij} x_i x_j + S_{ji} x_j x_i \quad (i<j)$$

$$a_{ii} x_i^2 = S_{ii} x_i^2 \quad (i=j)$$

$\square$

Esempio: Le matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

definiscono le forme quadratiche

$$x_1^2 - 6x_1x_2, \quad x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2, \quad 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

[Per $i \ne j$ gli elementi $S_{ij} = S_{ji}$ contribuiscono entrambi al monomio $x_i x_j$.]

Vice-versa, la forma quadratica

$$q(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2 + 5x_2x_3 + 4x_3^2$$

è descritta dalla matrice simmetrica

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5/2 \\ 0 & 5/2 & 4 \end{pmatrix}$$

[Il monomio $4x_1x_2$ diventa spezzato in due monomi $2x_1x_2 + 2x_2x_1$.]

Def: Una forma quadratica $q(x)$ è **definito positivo** se e solo se il prodotto scalare g_s con $q(x) = g_s(x,x)$ è definito positivo
$\Leftrightarrow q(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$.

Vettori ortogonali & complemento ortogonale

Def: Due vettori $v, w \in V$ in uno spazio vettoriale V munito di un prodotto scalare sono **ortogonali** se $\langle v, w \rangle = 0$.

Esempio: $V = \mathbb{R}^2$ con prodotto scalare euclideo. Sia $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vettore con $v \neq 0$.

I vettori $w = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ortogonali a v sono tutti i vettori con

$$0 = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = ax + by$$

$$\Leftrightarrow ax = -by \Leftrightarrow y = -\frac{a}{b} x$$

$$\Leftrightarrow w \in \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \right\}$$

Esempio: Rispetto al prodotto scalare euclideo due vettori e_i & e_j della base canonica (con $i \neq j$) sono ortogonali. In realtà

$$\langle e_i, e_j \rangle = {}^t e_i \cdot e_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Def 7.3.1: Sia V uno spazio vettoriale con prodotto scalare e sia W un sottospazio. Il complemento ortogonale (o sottospazio ortogonale) di W è l'insieme

$$W^\perp = \{v \in V \,/\, \langle v, w \rangle = 0 \,, \forall w \in W\}.$$

Prop 7.3.2: $W^\perp$ è un sottospazio di V.

Dim: Dobbiamo verificare tre assiomi:

(1) $0 \in W^\perp$. Infatti $\langle 0, w \rangle = 0$, $\forall w \in W$.

(2) Se $v, v' \in W^\perp$ allora $v + v' \in W^\perp$. Infatti se $v, v' \in W^\perp$ abbiamo

$$\langle v+v', w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle = 0 + 0 = 0 \,, \forall w \in W.$$

(3) Se $v \in W^\perp$, $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $\lambda v \in W^\perp$. Infatti se $v \in W^\perp$ abbiamo

$$\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle = \lambda \cdot 0 = 0 \,, \forall w \in W.$$

$\square$

Def: Sia V uno spazio vettoriale con un prodotto scalare. Il radicale di V è il sottospazio $V^\perp$. ($v \in V^\perp$ se e solo se $\langle v, w \rangle = 0$, $\forall w \in V$).

Il prodotto scalare è non degenere $\Leftrightarrow V^\perp = \{0\}$.

Studiamo il caso speciale dove g è un prodotto scalare indotto da una matrice simmetrica $S \in M(n, \mathbb{R})$

$$g(x, y) = g_S(x, y) = {}^t x \cdot S \cdot y.$$

Prop: Il radicale $V^\perp$ rispetto a g_S è il sottospazio $\ker S$. Quindi il prodotto scalare g_S è degenere $\Leftrightarrow \ker S \neq \{0\} \Leftrightarrow \det S = 0$.

Dim: Se $y \in \ker S$, allora abbiamo per ogni $x \in \mathbb{R}^n$

$$g_S(x,y) = {}^t x \cdot \underbrace{S \cdot y}_{=0} = 0 \quad \text{(perché } y \in \ker S\text{)}$$

$\Rightarrow g_S$ è degenere.

D'altra parte se g_S è degenere esiste un $y \in \mathbb{R}^n$ tale che $g_S(x,y) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow {}^t x \cdot \underbrace{S \cdot y}_{=: \tilde{y}} = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow {}^t x \cdot \tilde{y} = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$

${}^t x \cdot \tilde{y}$ è il prodotto scalare euclideo tra x e $\tilde{y}$. Il prodotto euclideo è definito positivo e allora non degenere. $\Rightarrow \tilde{y} = 0$

$\Leftrightarrow S \cdot y = 0 \Leftrightarrow y \in \ker S$. □