Lezione 16: Applicazioni lineari (Parte IV)

Matrice associata ad un'app. lineare

$f: V \to W$ un applicazione lineare fra spazi vettoriali su $\mathbb{K}$.
$\mathcal{B}$ base di V, $\mathcal{C}$ base di W
$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ $(\dim V = n)$, $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$ $(\dim W = m)$

$$\Rightarrow \quad A = [f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = (A^1 | \dots | A^n) \quad \text{con} \quad A^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = [f(v_j)]_{\mathcal{C}}$$

$$\left(f(v_j) = a_{1j} w_1 + \dots + a_{mj} w_m \right)$$

Prop 4.3.4 Per ogni $v \in V$ troviamo

$$[f(v)]_{\mathcal{C}} = [f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} \cdot [v]_{\mathcal{B}}$$

Esercizio: Consideriamo $f: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ 2x \\ y \end{pmatrix}$ è un app. lineare.
Trovare la matrice associata a f rispetto alle basi $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{C}^2$

e $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{C}^3$.

[Soluzione solo in lezione !]

Composizione di applicazioni lineari

Prop 4.2.17: Se $f: V \to W$ & $g: W \to Z$ sono lineari, allora anche la composizione $g \circ f: V \to Z$ lo è.

[$g \circ f(v) = g(f(v))$ leggiamo come "g dopo f"]

Dim: i) $v, v' \in V \Rightarrow (g \circ f)(v+v') = g(f(v+v'))$

$$\overset{f \text{ lin.}}{=} g(f(v)+f(v')) \overset{g \text{ lin.}}{=} g(f(v)) + g(f(v'))$$

$$= (g \circ f)(v) + (g \circ f)(v')$$

ii) $v \in V, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow (g \circ f)(\lambda v) = g(f(\lambda v))$

$$\overset{f \text{ lin.}}{=} g(\lambda f(v)) \overset{g \text{ lin.}}{=} \lambda\, g(f(v)) = \lambda \cdot (g \circ f)(v).$$

$\square$

Prop. 4.2.18: Siano $A \in M(k, m, \mathbb{K})$, $B = (m, n, \mathbb{K})$.
Consideriamo $L_A : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^k$, $L_B : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$.
$L_A \circ L_B = L_{AB} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k$.

Dim. Sia $x \in \mathbb{K}^n$.

$$(L_A \circ L_B)(x) = L_A(L_B(x)) = A \cdot (B \cdot x) = (AB) \cdot x = L_{AB}(x).$$

$\square$

Prop 4.3.7: Siano $f : U \to V$ & $g : V \to W$ lineari.
Siano $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ basi di U, V, W.

$$\Rightarrow [g \circ f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}} = [g]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}} \cdot [f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$$

Cor 4.3.10: La funzione $f : V \to W$ è un isomorfismo $\Leftrightarrow$ la matrice $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$ è invertibile, e in questo caso l'inversa di questa matrice è $[f^{-1}]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$.

Dim: Se f è un isomorfismo esiste $f^{-1}: W \to V$

$$\Rightarrow I_n = [id_V]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = [f^{-1} \circ f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} \overset{\text{Prop } 4.3.7}{=} [f^{-1}]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} \cdot [f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$$

$$\& \; I_n = [id_W]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}} = [f \circ f^{-1}]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}} = [f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} \cdot [f^{-1}]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$$

$$\Leftrightarrow \left([f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}\right)^{-1} = [f^{-1}]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$$

L'altra direzione è un esercizio. $\square$

Corollario: $f: V \to W$ è lineare. Siano $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ due basi di V e $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ due basi di W. Allora

$$[f]^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{C}_2} = [id_W]^{\mathcal{C}_1}_{\mathcal{C}_2} \cdot [f]^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{C}_1} \cdot [id_V]^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1}$$

$$\begin{tikzcd}
(V, \mathcal{B}_2) \arrow[r, "f", "{[f]^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{C}_2}}"'] \arrow[d, "id_V"'] & (W, \mathcal{C}_2) \\
(V, \mathcal{B}_1) \arrow[r, "f", "{[f]^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{C}_1}}"'] & (W, \mathcal{C}_1) \arrow[u, "id_W"']
\end{tikzcd}$$

Def 4.4.1: Sia V uno spazio vettoriale.
Un endomorfismo è un'applicazione lineare $f: V \to V$.

Se fissiamo una base $\mathcal{B}$ di V possiamo rappresentare ogni endomorfismo f di V con una matrice $A = [f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$.

Per due endomorfismi f, g abbiamo

$$[f \circ g]_B^B = [f]_B^B \cdot [g]_B^B$$

Se $\mathcal{C}$ è un'altra base di V & $M = [id_V]_{\mathcal{C}}^B$ è la matrice del cambiamento di base, allora

$$[f]_B^B = M^{-1} \cdot [f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} \cdot M$$

Allora se $[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = B$ otteniamo $A = M^{-1} \cdot B \cdot M$.

Esempio: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dato da $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ -y \end{pmatrix}$ in base $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ & in base canonica.
Metodo "diretto" & via cambiamento di base.
($\rightsquigarrow$ Dettagli solo in lezione)

Similitudine fra matrici

Sia $M(n) = M(n, \mathbb{K})$ l'insieme di matrici $n \times n$ (con entrate in $\mathbb{K}$). Diciamo che due matrici $A, B \in M(n)$ sono simili se esiste una matrice invertibile $M \in M(n)$ tale che

$$A = M^{-1} B M.$$

Scriviamo $A \sim B$.

Prop: La similitudine è una relazione di equivalenza.

Dim: i) $A \sim A$. Infatti per $M = I_n$ otteniamo

$$A = I_n^{-1} \cdot A \cdot I_n$$

ii) Se $A \sim B$ allora $B \sim A$. Infatti se

$$A = M^{-1} B M \Rightarrow MAM^{-1} = \underbrace{MM^{-1}}_{=I_n} B \underbrace{MM^{-1}}_{=I_n} = B$$

Per $N = M^{-1}$ abbiamo

$$B = N^{-1} A N \Rightarrow B \sim A.$$

iii) Se $A \sim B$ e $B \sim C$ allora $A \sim C$.

$$A \sim B \Rightarrow A = M^{-1} B M$$

$$B \sim C \Rightarrow B = N^{-1} C N$$

$$\Rightarrow A = M^{-1}(N^{-1} C N) M$$

$$= (M^{-1} N^{-1})\, C\, (NM)$$

$$= (NM)^{-1} C (NM) \Rightarrow A \sim C. \quad \square$$