

Corso di Studi in Informatica
Matematica Discreta
Prova scritta 18 Gennaio 2024 – Quiz, versione 1

NOME:

COGNOME:

MATRICOLA:

Riportare le risposte ritenute corrette nella tabella seguente

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Domanda 1. Sia $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Allora

1. $\{1, 3, 7\} \subset A$; **(E)**
2. $4 \subset A$;
3. $(5, 9) \in A$;
4. $\emptyset \in A$;
5. $\{2, 6, 8\} \in A$.

Domanda 2. Consideriamo gli insiemi \mathbb{N} e \mathbb{Z} dei numeri naturali ed interi rispettivamente. Allora

1. $(2, 3) \notin \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$; **(E)**
2. $(2, 1, -1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$;
3. $\{1, 4, 3\} \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$;
4. $(-1, -2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;
5. $(-3, 4, 0) \notin \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$.

Domanda 3. Sia $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definita come $f(n) = \begin{cases} -3n & \text{se } n \text{ è dispari,} \\ 2n + 5 & \text{se } n \text{ è pari.} \end{cases}$

Allora:

1. f è suriettiva;
2. $f^{-1}(7) = \emptyset$ **(E)** ;
3. f è invertibile;
4. $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$;
5. $f^{-1}(100) \neq \emptyset$.

Domanda 4. Quanti sono i possibili modi di tinteggiare 5 oggetti se si hanno a disposizione vernici di 4 colori diversi?

1. $5!/4 = 30$;
2. $5^4 = 625$;
3. $4^5 = 1024$; **(E)**
4. $\binom{5+3}{3} = 56$;
5. $5! - 4! = 96$.

Domanda 5. Di una certa permutazione $\pi \in S_{10}$, $\pi \neq \text{id}$, sappiamo che $\pi^3 = \pi^{-2}$. Allora

- | | |
|-------------------------------------|--|
| 1. π è un ciclo di lunghezza 5; | 4. π è una permutazione dispari ; |
| 2. $\pi(k) \neq k$ per ogni k ; | 5. π è una permutazione pari. (E) |
| 3. π ha tipo $(3, 2)$; | |

Domanda 6. Quale delle seguenti è la scrittura di 101 in base 2?

- | | |
|-------------|-------------------------|
| 1. 1101011 | 4. 1100101 ; (E) |
| 2. 1001101; | 5. 1010011. |
| 3. 1000111; | |

Domanda 7. Quale delle seguenti classi **non** genera $(\mathbb{Z}_{70}, +)$?

- | | |
|---------------------------------|----------------------|
| 1. $\overline{11}$; | 4. $\overline{13}$; |
| 2. $\overline{21}$; (E) | 5. $\overline{27}$. |
| 3. $\overline{51}$; | |

Domanda 8. Quale delle seguenti coppie in (\mathbb{Z}_{54}, \cdot) è costituita da coppie di elementi uno inverso dell'altro?

- | | |
|--|---------------------------------------|
| 1. $(\overline{13}, \overline{25})$; (E) | 4. $(\overline{11}, \overline{18})$; |
| 2. $(\overline{5}, \overline{41})$; | 5. $(\overline{7}, \overline{29})$. |
| 3. $(\overline{17}, \overline{43})$; | |

Domanda 9. Quale delle seguenti congruenze ha esattamente 3 soluzioni mod 30?

- | | |
|--|-------------------------------|
| 1. $7X \equiv 20 \pmod{30}$; | 4. $3X \equiv 26 \pmod{30}$; |
| 2. $12X \equiv 18 \pmod{30}$; | 5. $4X \equiv 14 \pmod{30}$ |
| 3. $9X \equiv 21 \pmod{30}$; (E) | |

Domanda 10. Sia G un gruppo con elemento neutro e e sia $g \in G$ tale che $g^{36} = e$. Quale dei seguenti **non** può essere $|\langle g \rangle|$?

- | | |
|--------|-------------------|
| 1. 6 ; | 4. 20; (E) |
| 2. 36; | 5. 1. |
| 3. 12; | |

Corso di Studi in Informatica
Matematica Discreta
Prova scritta 18 Gennaio 2024 – Quiz, versione 2

NOME:

COGNOME:

MATRICOLA:

Riportare le risposte ritenute corrette nella tabella seguente

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Domanda 1. Sia $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Allora

1. $\{c, f, h\} \in B$;
2. $d \in B$; **(E)**
3. $(b, e) \in B$;
4. $\emptyset \in B$;
5. $g \subset B$.

Domanda 2. Consideriamo gli insiemi \mathbb{N} e \mathbb{Z} dei numeri naturali ed interi rispettivamente. Allora

1. $(-2, 5) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$;
2. $\{1, 2, 3\} \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$;
3. $(0, 0, 0) \notin \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$;
4. $(-1, -1, 1) \notin \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$; **(E)**
5. $(-2, 2, -3) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Domanda 3. Sia $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definita come $f(n) = \begin{cases} 4 - n & \text{se } n \text{ è dispari,} \\ 4n & \text{se } n \text{ è pari.} \end{cases}$

Allora:

1. f è iniettiva; **(E)**
2. f è suriettiva;
3. $f^{-1}(-11) = \emptyset$;
4. $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$;
5. $f(n+3) = 1 - n$ se n è dispari.

Domanda 4. Quanti elenchi di 4 nominativi si possono fare avendo a disposizione 7 persone?

1. $7^4 = 2401$;
2. $4! = 24$;
3. $\binom{7}{4} = 35$;
4. $7! - 3! = 5034$;
5. $7!/3! = 840$. **(E)**

Domanda 5. Di una certa permutazione $\pi \in S_9$, $\pi \neq \text{id}$, sappiamo che $\pi^4 = \pi^{-1}$. Allora

- | | |
|--|--------------------------------------|
| 1. π ha tipo $(3, 2)$; | 4. π è una permutazione dispari; |
| 2. $\pi(k) \neq k$ per ogni k ; | 5. π^2 ha periodo 3. |
| 3. π è un ciclo di lunghezza 5; (E) | |

Domanda 6. Quale delle seguenti è la scrittura di 71 in base 2?

- | | |
|------------------------|--------------|
| 1. 1101011 | 4. 1100111 ; |
| 2. 1001101; | 5. 1010011. |
| 3. 1000111; (E) | |

Domanda 7. Quale delle seguenti classi **non** genera $(\mathbb{Z}_{65}, +)$?

- | | |
|---------------------------------|----------------------|
| 1. $\overline{35}$; (E) | 4. $\overline{16}$; |
| 2. $\overline{21}$; | 5. $\overline{34}$. |
| 3. $\overline{38}$; | |

Domanda 8. Quale delle seguenti coppie in (\mathbb{Z}_{56}, \cdot) è costituita da coppie di elementi uno inverso dell'altro?

- | | |
|---------------------------------------|---|
| 1. $(\overline{15}, \overline{17})$; | 4. $(\overline{9}, \overline{25})$; (E) |
| 2. $(\overline{19}, \overline{31})$; | 5. $(\overline{22}, \overline{29})$. |
| 3. $(\overline{3}, \overline{23})$; | |

Domanda 9. Quale delle seguenti congruenze ha esattamente 3 soluzioni mod 24?

- | | |
|---|--------------------------------|
| 1. $21X \equiv 7 \pmod{24}$; | 4. $20X \equiv 16 \pmod{24}$; |
| 2. $15X \equiv 21 \pmod{24}$; (E) | 5. $5X \equiv 11 \pmod{24}$ |
| 3. $16X \equiv 14 \pmod{24}$; | |

Domanda 10. Sia G un gruppo con elemento neutro e e sia $g \in G$ tale che $g^{30} = e$. Quale dei seguenti **non** può essere $|\langle g \rangle|$?

- | | |
|--------|------------------|
| 1. 1 ; | 4. 5; |
| 2. 6; | 5. 9. (E) |
| 3. 15; | |

Corso di Studi in Informatica
Matematica Discreta
Prova scritta 18 Gennaio 2024 – Quiz, versione 3

NOME:

COGNOME:

MATRICOLA:

Riportare le risposte ritenute corrette nella tabella seguente

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Domanda 1. Sia $C = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta\}$. Allora

1. $\{\gamma\} \in C$;
2. $\{\alpha, \zeta\} \in C$;
3. $\emptyset \subset C$; **(E)**
4. $(\beta, \theta) \subset C$;
5. $\delta \subset C$.

Domanda 2. Consideriamo gli insiemi \mathbb{N} e \mathbb{Z} dei numeri naturali ed interi rispettivamente. Allora

1. $\{-1, 2, 7\} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$;
2. $(1, -1, 0) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$; **(E)**
3. $(2, -1, -3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$;
4. $(1, 1, -1) \notin \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$;
5. $(-2, -1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

Domanda 3. Sia $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definita come $f(n) = \begin{cases} 2n - 1 & \text{se } n \text{ è dispari,} \\ 4n + 2 & \text{se } n \text{ è pari.} \end{cases}$

Allora:

1. f è suriettiva;
2. f è invertibile;
3. $f(2n) = 8n + 4$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$;
4. $f^{-1}(22) = \emptyset$;
5. $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$. **(E)**

Domanda 4. Quanti sono gli anagrammi della parola SCACCO?

1. $6!/3 = 240$;
2. $6!/3! = 120$; **(E)**
3. $\binom{6}{3} = 20$;
4. $(6-3)! = 3! = 6$;
5. $6! - 3! = 714$.

Domanda 5. Di una certa permutazione $\pi \in S_7$, $\pi \neq \text{id}$, sappiamo che $\pi^2 = \pi^{-2}$. Allora

- | | |
|--|-----------------------|
| 1. π^2 è una permutazione pari; (E) | 4. $\pi = \pi^{-1}$; |
| 2. π ha periodo 4; | 5. π è un ciclo. |
| 3. $\pi(k) \neq k$ per ogni k ; | |

Domanda 6. Quale delle seguenti è la scrittura di 83 in base 2?

- | | |
|-------------|------------------------|
| 1. 1101011 | 4. 1100111 ; |
| 2. 1001101; | 5. 1010011. (E) |
| 3. 1000111; | |

Domanda 7. Quale delle seguenti classi **non** genera $(\mathbb{Z}_{54}, +)$?

- | | |
|----------------------|---------------------------------|
| 1. $\overline{25}$; | 4. $\overline{35}$; |
| 2. $\overline{49}$; | 5. $\overline{33}$. (E) |
| 3. $\overline{23}$; | |

Domanda 8. Quale delle seguenti coppie in (\mathbb{Z}_{45}, \cdot) è costituita da coppie di elementi uno inverso dell'altro?

- | | |
|---|---------------------------------------|
| 1. $(\overline{18}, \overline{41})$; | 4. $(\overline{11}, \overline{13})$; |
| 2. $(\overline{4}, \overline{12})$; | 5. $(\overline{19}, \overline{31})$. |
| 3. $(\overline{8}, \overline{17})$; (E) | |

Domanda 9. Quale delle seguenti congruenze ha esattamente 4 soluzioni mod 32?

- | | |
|--------------------------------|---|
| 1. $9X \equiv 11 \pmod{32}$; | 4. $20X \equiv 12 \pmod{32}$; (E) |
| 2. $10X \equiv 14 \pmod{32}$; | 5. $24X \equiv 16 \pmod{32}$ |
| 3. $12X \equiv 10 \pmod{32}$; | |

Domanda 10. Sia G un gruppo con elemento neutro e e sia $g \in G$ tale che $g^{28} = e$. Quale dei seguenti **non** può essere $|\langle g \rangle|$?

- | | |
|-------------------|--------|
| 1. 8 ; (E) | 4. 2; |
| 2. 7; | 5. 14. |
| 3. 1; | |

Corso di Studi in Informatica
Matematica Discreta
Prova scritta 18 Gennaio 2024 – Quiz, versione 4

NOME:

COGNOME:

MATRICOLA:

Riportare le risposte ritenute corrette nella tabella seguente

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Domanda 1. Sia $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Allora

- | | |
|--------------------------|-----------------------------------|
| 1. $\emptyset \in D$; | 4. $\{5\} \subset D$; (E) |
| 2. $(2, 4) \subset D$; | 5. $1 \notin D$. |
| 3. $\{7, 8, 9\} \in D$; | |

Domanda 2. Consideriamo gli insiemi \mathbb{N} e \mathbb{Z} dei numeri naturali ed interi rispettivamente. Allora

- | | |
|--|--|
| 1. $\{-2, 1, 2\} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$; | 4. $(2, -3, -1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$; |
| 2. $(1, -1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$; | 5. $(2, 1, -1) \notin \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. (E) |
| 3. $(-1, -1, 4) \notin \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$; | |

Domanda 3. Sia $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definita come $f(n) = \begin{cases} 2 - n & \text{se } n \text{ è dispari,} \\ 3n + 1 & \text{se } n \text{ è pari.} \end{cases}$

Allora:

- | | |
|---|---|
| 1. $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$; | 4. $f^{-1}(4) = \emptyset$; (E) |
| 2. f è iniettiva; | 5. $f(2n) = 6n + 2$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$. |
| 3. f è suriettiva; | |

Domanda 4. Quanti sono i cicli di lunghezza 3 in S_8 ?

- | | |
|--------------------------|---|
| 1. $\binom{8}{3} = 56$; | 4. $\frac{1}{3} \frac{8!}{5!} = 112$; (E) |
| 2. $8^3 = 512$; | 5. $\frac{1}{3} \frac{8!}{3!} = 2240$. |
| 3. $3^8 = 6561$; | |

Domanda 5. Di una certa permutazione $\pi \in S_{11}$, $\pi \neq \text{id}$, sappiamo che $\pi^6 = \pi^{-1}$. Allora

1. $\pi(k) \neq k$ per ogni k ;
2. π è un ciclo di lunghezza 7; **(E)**
3. π non è un ciclo;
4. π è una permutazione dispari;
5. π ha periodo 5.

Domanda 6. Quale delle seguenti è la scrittura di 107 in base 2?

1. 1101011; **(E)**
2. 1001101;
3. 1000111;
4. 1100111 ;
5. 1010011.

Domanda 7. Quale delle seguenti classi **non** genera $(\mathbb{Z}_{56}, +)$?

1. $\overline{31}$;
2. $\overline{27}$;
3. $\overline{21}$; **(E)**
4. $\overline{33}$;
5. $\overline{25}$.

Domanda 8. Quale delle seguenti coppie in (\mathbb{Z}_{70}, \cdot) è costituita da coppie di elementi uno inverso dell'altro?

1. $(\overline{3}, \overline{41})$;
2. $(\overline{11}, \overline{25})$;
3. $(\overline{23}, \overline{57})$;
4. $(\overline{17}, \overline{33})$; **(E)**
5. $(\overline{19}, \overline{27})$.

Domanda 9. Quale delle seguenti congruenze ha esattamente 2 soluzioni mod 28?

1. $12X \equiv 20 \pmod{28}$;
2. $21X \equiv 7 \pmod{28}$;
3. $6X \equiv 9 \pmod{28}$;
4. $11X \equiv 3 \pmod{28}$;
5. $10X \equiv 18 \pmod{28}$. **(E)**

Domanda 10. Sia G un gruppo con elemento neutro e e sia $g \in G$ tale che $g^{24} = e$. Quale dei seguenti **non** può essere $|\langle g \rangle|$?

1. 4 ;
2. 10; **(E)**
3. 24;
4. 6;
5. 12.

Corso di Studi in Informatica
Matematica Discreta
Prova scritta 18 Gennaio 2024 – Quiz, versione 5

NOME:

COGNOME:

MATRICOLA:

Riportare le risposte ritenute corrette nella tabella seguente

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Domanda 1. Sia $E = \{s, t, u, v, w, x, y, z\}$. Allora

1. $y \notin E$;
2. $(s, u) \subset E$;
3. $z \subset E$;
4. $\{t, v, x\} \in E$;
5. $w \in E$. **(E)**

Domanda 2. Consideriamo gli insiemi \mathbb{N} e \mathbb{Z} dei numeri naturali ed interi rispettivamente. Allora

1. $(2, 3, -3) \notin \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;
2. $(4, 2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$;
3. $(1, 0, -1) \notin \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$; **(E)**
4. $(-1, -1, 3) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$;
5. $\{3, 1, 2\} \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Domanda 3. Sia $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definita come $f(n) = \begin{cases} 3n + 2 & \text{se } n \text{ è dispari,} \\ 2n - 4 & \text{se } n \text{ è pari.} \end{cases}$

Allora:

1. f è suriettiva;
 2. $f^{-1}(m) = \emptyset$ se m è dispari;
 3. $f(2n) = 4n - 4$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$;
 4. f è invertibile;
 5. $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$.
- (E)**

Domanda 4. Quanti sono i modi per selezionare 4 oggetti su 9?

1. $\binom{9}{4} = 126$; **(E)**
2. $(9 - 4)! = 5! = 120$;
3. $9^4 = 6561$;
4. $9!/4! = 14820$;
5. $4^9 = 262144$.

Domanda 5. Di una certa permutazione $\pi \in S_{15}$, $\pi \neq \text{id}$, sappiamo che $\pi^4 = \pi^{-3}$. Allora

- | | |
|-----------------------------------|--------------------------------------|
| 1. π ha tipo $(4, 3)$; | 4. π ha periodo 7; (E) |
| 2. π è un ciclo; | 5. π è una permutazione dispari. |
| 3. $\pi(k) \neq k$ per ogni k ; | |

Domanda 6. Quale delle seguenti è la scrittura di 77 in base 2?

- | | |
|------------------------|--------------|
| 1. 1101011 | 4. 1100111 ; |
| 2. 1001101; (E) | 5. 1010011. |
| 3. 1000111; | |

Domanda 7. Quale delle seguenti classi **non** genera $(\mathbb{Z}_{45}, +)$?

- | | |
|----------------------|---------------------------------|
| 1. $\overline{22}$; | 4. $\overline{33}$; (E) |
| 2. $\overline{32}$; | 5. $\overline{28}$. |
| 3. $\overline{38}$; | |

Domanda 8. Quale delle seguenti coppie in (\mathbb{Z}_{65}, \cdot) è costituita da coppie di elementi uno inverso dell'altro?

- | | |
|---|---------------------------------------|
| 1. $(\overline{7}, \overline{28})$; (E) | 4. $(\overline{25}, \overline{33})$; |
| 2. $(\overline{11}, \overline{8})$; | 5. $(\overline{19}, \overline{32})$. |
| 3. $(\overline{23}, \overline{41})$; | |

Domanda 9. Quale delle seguenti congruenze ha esattamente 4 soluzioni mod 36?

- | | |
|--|--------------------------------|
| 1. $20X \equiv 8 \pmod{36}$; (E) | 4. $14X \equiv 22 \pmod{36}$; |
| 2. $25X \equiv 15 \pmod{36}$; | 5. $15X \equiv 21 \pmod{36}$ |
| 3. $27X \equiv 15 \pmod{36}$; | |

Domanda 10. Sia G un gruppo con elemento neutro e e sia $g \in G$ tale che $g^{32} = e$. Quale dei seguenti **non** può essere $|\langle g \rangle|$?

- | | |
|-------------------|-------|
| 1. 2 ; | 4. 8; |
| 2. 32; | 5. 1. |
| 3. 12; (E) | |

Corso di Studi in Informatica
Matematica Discreta
18 Gennaio 2024

COGNOMENOME

MATRICOLA

VERSIONE A

Rispondere a ciascuna domanda, motivando adeguatamente le risposte.

Problema 1: In S_{10} , si consideri la permutazione

$$\sigma = (1\ 3\ 5\ 7\ 9)(1\ 2\ 3\ 4)$$

- a) (Punti 4) Scrivere σ come prodotto di cicli disgiunti, determinarne il tipo, il periodo e la parità.
- b) (Punti 4) Determinare una permutazione π in S_{10} tale che

$$\sigma^{5272} \circ \pi = (1\ 2).$$

Scrivere π come prodotto di cicli disgiunti.

- c) (Punti 3) Si consideri l'insieme

$$G = \{\tau \in S_{10} \mid \tau\sigma = \sigma\tau\}.$$

Dimostrare che G è un sottogruppo di S_{10} e determinare tre elementi distinti appartenenti a G .

SOLUZIONE:

- a) $\sigma = (1\ 2\ 5\ 7\ 9)(3\ 4)$, ha tipo $(5, 2)$, periodo 10, è una permutazione dispari.
- b) Poiché $\text{per}(\sigma) = 10$ e $5272 \equiv 2 \pmod{10}$, si ha $\sigma^{5272} = \sigma^2 = (1\ 5\ 9\ 2\ 7)$. Quindi $\pi = (1\ 5\ 9\ 2\ 7)^{-1}(1\ 2) = (7\ 2\ 9\ 5\ 1)(1\ 2) = (1\ 9\ 5)(7\ 2)$.
- c) G è un sottogruppo per il criterio dei sottogruppi: infatti $\sigma \in G$, quindi $G \neq \emptyset$; inoltre se $\tau_1, \tau_2 \in G$ si ha $\tau_2\sigma = \sigma\tau_2$ e quindi moltiplicando a destra e a sinistra per τ_2^{-1} vediamo che $\tau_2^{-1} \in G$; da cui $\tau_1\tau_2^{-1}\sigma = \tau_1\sigma\tau_2^{-1} = \sigma\tau_1\tau_2^{-1}$; quindi $\tau_1\tau_2^{-1} \in G$. Tre elementi distinti di G sono, per esempio, $(1), \sigma, \sigma^2$.

Corso di Studi in Informatica

Matematica Discreta

18 Gennaio 2024

COGNOMENOME

MATRICOLA

VERSIONE A

Rispondere a ciascuna domanda, motivando adeguatamente le risposte.

Problema 2: Siano

$$N = 1147, \quad M = 5$$

- a) (Punti 4) Calcolare il massimo comune divisore di N e 1000 e esprimerlo mediante l'identità di Bézout.
- b) (Punti 4) Calcolare i rappresentanti canonici delle seguenti classi di resto

$$[N - 1]_M, \quad [1000]_N^{-1}, \quad [M^{10} - 7]_M$$

- c) (Punti 3) Si dia per noto che M è il periodo di $[1000]_N$ in \mathbb{Z}_N^\times .
E' vero che $1000^{N-1} \equiv 1 \pmod{N}$?
Dedurre (senza fattorizzare N) che N non è primo.

SOLUZIONE:

- a) Si ha $(N, 1000) = 1$; l'identità di Bézout è

$$483 \cdot N - 554 \cdot 1000 = 1.$$

- b) I rappresentanti canonici sono rispettivamente 1, 593, 3.

- c) Dal punto b) vediamo che M non divide $N - 1$. Quindi $1000^{N-1} \not\equiv 1 \pmod{N}$. Per il Piccolo Teorema di Fermat, N non può essere primo.

Corso di Studi in Informatica
Matematica Discreta

Prova scritta 5 Febbraio 2024 – Quiz, versione 1

NOME:

COGNOME:

MATRICOLA:

Riportare le risposte ritenute corrette nella tabella seguente

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Domanda 1. Sia $A = \{a, b, c, d, e\}$. Allora:

1. $d \notin A$
2. $\{b, e\} \subset A$; **(E)**
3. $h \in A$;
4. $\{a, b, d\} \in A$;
5. $(a, c) \subset A$.

Domanda 2. Siano $S = \{a, e, i, o, u\}$ e $T = \{0, 1, 8, 9\}$. Allora

1. $(o, 7) \in S \times T$
2. $(\{a\}, \{9\}) \subset S \times T$;
3. $\{i, 1\} \subset S \times T$;
4. $(8, u) \in S \times T$;
5. $\{(e, 8)\} \subset S \times T$. **(E)**

Domanda 3. Sia $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ la funzione $f(n) = \begin{cases} n^2 + 1 & \text{se } n < 0, \\ n^2 + 2 & \text{se } n \geq 0. \end{cases}$ Allora

1. f è iniettiva
2. $f \circ f(-2) = 26$;
3. $f^{-1}(12) = \emptyset$; **(E)**
4. f è suriettiva;
5. $f(2n) = 4n^2 + 2$ per ogni n .

Domanda 4. In una trattoria il menu comprende 6 primi, 4 secondi e 3 dolci. Quante sono teoricamente le ordinazioni possibili per un pranzo completo?

1. $6 \cdot 4 \cdot 3$; **(E)**
2. $6 + 4 + 3$;
3. $6! + 4! + 3!$;
4. $(6 + 4 + 3)!$;
5. $6!4!3!$.

Domanda 5. Una permutazione π ha tipo $(2, 3, 5)$. Allora π^3

- | | |
|-------------------------------|----------------------------------|
| 1. è un ciclo di lunghezza 5; | 4. ha tipo $(2, 5)$; (E) |
| 2. ha tipo $(2, 3, 5)$; | 5. è un ciclo di lunghezza 3; |
| 3. ha tipo $(3, 5)$; | |

Domanda 6. La scrittura in base 2 di 78 è

- | | |
|------------------------|-------------|
| 1. 1010100; | 4. 1101000; |
| 2. 1011010; | 5. 1100010. |
| 3. 1001110; (E) | |

Domanda 7. Solo in una delle seguenti coppie entrambi i numeri generano $(\mathbb{Z}_{105}, +)$. Quale?

- | | |
|-----------------|----------------------------|
| 1. $(15, 32)$; | 4. $(26, 64)$; (E) |
| 2. $(16, 77)$ | 5. $(25, 49)$. |
| 3. $(33, 52)$; | |

Domanda 8. Il numero delle classi invertibili in (\mathbb{Z}_{90}, \cdot) è

- | | |
|-------------------|--------|
| 1. 20 ; | 4. 28 |
| 2. 24; (E) | 5. 30. |
| 3. 32; | |

Domanda 9. La congruenza $20X \equiv 12 \pmod{44}$ ha esattamente

- | | |
|--------------------------------------|---------------------------|
| 1. 4 soluzioni modulo 44; (E) | 4. 4 soluzioni modulo 11; |
| 2. 2 soluzioni modulo 44; | 5. 1 soluzione modulo 22; |
| 3. nessuna soluzione; | |

Domanda 10. Sia G un gruppo con 39 elementi e sia $g \in G$. Allora il periodo di g **non** può essere

- | | |
|------------------|--------|
| 1. 3 ; | 4. 1; |
| 2. 13 ; | 5. 39. |
| 3. 9; (E) | |

Corso di Studi in Informatica
Matematica Discreta

Prova scritta 5 Febbraio 2024 – Quiz, versione 2

NOME:

COGNOME:

MATRICOLA:

Riportare le risposte ritenute corrette nella tabella seguente

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Domanda 1. Sia $A = \{t, u, v, w, x, y, z\}$. Allora:

1. $(u, y) \subset A$
2. $w \subset A$;
3. $s \notin A$; **(E)**
4. $\{w, x, z\} \in A$;
5. $\emptyset \in A$.

Domanda 2. Siano $S = \{g, h, i, j, k\}$ e $T = \{1, 3, 5, 7\}$. Allora

1. $(j, k) \in S \times T$
2. $(g, 5) \notin T \times S$; **(E)**
3. $(\emptyset, 7) \in S \times T$;
4. $\{h, 3\} \subset S \times T$;
5. $(i, 1) \in T \times S$.

Domanda 3. Sia $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ la funzione $f(n) = \begin{cases} n^2 & \text{se } n < 0, \\ n^2 - 4 & \text{se } n \geq 0. \end{cases}$ Allora

1. $f \circ f(1) = 5$
2. f è suriettiva;
3. $f^{-1}(12) = \emptyset$;
4. $f(n^2) = n^4 - 4$ per ogni n ; **(E)**
5. $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$.

Domanda 4. Quanti sono gli anagrammi della parola SOCCORSO?

1. $8!/7!$
2. $8!$;
3. $8! - 2!2!3!$;
4. $8!/2 \cdot 2 \cdot 3$;
5. $8!/2!2!3!$; **(E)**

Domanda 5. Una permutazione π ha tipo $(3, 3, 4)$. Allora π^4

- | | |
|----------------------------------|-------------------------------|
| 1. ha tipo $(3, 3)$; (E) | 4. ha tipo $(3, 3, 4)$; |
| 2. ha tipo $(2, 2)$; | 5. è un ciclo di lunghezza 4; |
| 3. è l'identità; | |

Domanda 6. La scrittura in base 2 di 90 è

- | | |
|------------------------|-------------|
| 1. 1010100; | 4. 1101000; |
| 2. 1011010; (E) | 5. 1100010. |
| 3. 1001110; | |

Domanda 7. Solo in una delle seguenti coppie entrambi i numeri generano $(\mathbb{Z}_{105}, +)$. Quale?

- | | |
|---------------------------|-----------------|
| 1. $(15, 32)$; | 4. $(26, 72)$; |
| 2. $(16, 77)$ | 5. $(25, 49)$. |
| 3. $(2, 58)$ (E) ; | |

Domanda 8. Il numero delle classi invertibili in (\mathbb{Z}_{84}, \cdot) è

- | | |
|--------------------|--------|
| 1. 24 (E) ; | 4. 28 |
| 2. 18; | 5. 30. |
| 3. 32; | |

Domanda 9. La congruenza $18X \equiv 7 \pmod{54}$ ha esattamente

- | | |
|----------------------------------|--------------------------|
| 1. 1 soluzioni modulo 54; | 4. 1 soluzioni modulo 3; |
| 2. nessuna soluzione; (E) | 5. 9 soluzione modulo 6; |
| 3. 2 soluzioni modulo 27; | |

Domanda 10. Sia G un gruppo con 27 elementi e sia $g \in G$. Allora il periodo di g **non** può essere

- | | |
|--------|------------------|
| 1. 3 ; | 4. 27; |
| 2. 1 ; | 5. 6. (E) |
| 3. 9; | |

Corso di Studi in Informatica
Matematica Discreta
Prova scritta 5 Febbraio 2024 – Quiz, versione 3

NOME:

COGNOME:

MATRICOLA:

Riportare le risposte ritenute corrette nella tabella seguente

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Domanda 1. Sia $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Allora:

1. $(1, 2) \subset A$
2. $6 \in A$;
3. $\{2, 4\} \in A$;
4. $3 \in A$; **(E)**
5. $5 \subset A$.

Domanda 2. Siano $S = \{w, x, y, z\}$ e $T = \{2, 4, 6, 8\}$. Allora

1. $\{w\} \times \{8\} \in S \times T$
2. $(4, 6) \in S \times T$;
3. $(x, 7) \notin S \times T$; **(E)**
4. $\{y, 4\} \in S \times T$;
5. $(z, \emptyset) \in S \times T$.

Domanda 3. Sia $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ la funzione $f(n) = \begin{cases} n^2 + 1 & \text{se } n < 0, \\ n^2 - 3 & \text{se } n \geq 0. \end{cases}$. Allora

1. f è iniettiva; **(E)**
2. $f \circ f(-1) = 5$;
3. $f^{-1}(10) = \emptyset$;
4. f è suriettiva;
5. $f(2n) = 4n^2 - 3$ per ogni n .

Domanda 4. Il capo di una ditta con 12 dipendenti ne sceglie 4 per un certo lavoro. Quante sono le scelte possibili?

1. $12!/8!$
2. $\binom{12}{4}$; **(E)**
3. $12!/4!$;
4. $12! - 8!$;
5. $\binom{15}{3}$.

Domanda 5. Una permutazione π ha tipo $(2, 2, 6)$. Allora π^2

- | | |
|-------------------------------|----------------------------------|
| 1. è un ciclo di lunghezza 6; | 4. ha tipo $(2, 2)$; |
| 2. ha tipo $(2, 2, 6)$; | 5. ha tipo $(3, 3)$; (E) |
| 3. è un ciclo di lunghezza 2; | |

Domanda 6. La scrittura in base 2 di 84 è

- | | |
|------------------------|-------------|
| 1. 1010100; (E) | 4. 1101000; |
| 2. 1011010; | 5. 1100010. |
| 3. 1001110; | |

Domanda 7. Solo in una delle seguenti coppie entrambi i numeri generano $(\mathbb{Z}_{105}, +)$. Quale?

- | | |
|-----------------|----------------------------|
| 1. $(15, 32)$; | 4. $(24, 64)$; |
| 2. $(16, 77)$ | 5. $(11, 52)$ (E) . |
| 3. $(33, 83)$; | |

Domanda 8. Il numero delle classi invertibili in (\mathbb{Z}_{72}, \cdot) è

- | | |
|---------|-------------------|
| 1. 20 ; | 4. 24; (E) |
| 2. 18; | 5. 30. |
| 3. 28; | |

Domanda 9. La congruenza $12X \equiv 21 \pmod{63}$ ha esattamente

- | | |
|---------------------------|--------------------------------------|
| 1. 1 soluzione modulo 63; | 4. 1 soluzione modulo 21; (E) |
| 2. 1 soluzione modulo 7; | 5. 1 soluzione modulo 9; |
| 3. nessuna soluzione; | |

Domanda 10. Sia G un gruppo con 44 elementi e sia $g \in G$. Allora il periodo di g **non** può essere

- | | |
|-------------------|--------|
| 1. 4 ; | 4. 1; |
| 2. 8 ; (E) | 5. 11. |
| 3. 2; | |

Corso di Studi in Informatica
Matematica Discreta

Prova scritta 5 Febbraio 2024 – Quiz, versione 4

NOME:

COGNOME:

MATRICOLA:

Riportare le risposte ritenute corrette nella tabella seguente

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Domanda 1. Sia $A = \{6, 7, 8, 9\}$. Allora:

1. $\emptyset \in A$
2. $(6, 8) \in A$;
3. $9 \subset A$;
4. $(7, 8) \subset A$;
5. $\{7\} \notin A$. **(E)**

Domanda 2. Siano $S = \{p, q, r, s, t\}$ e $T = \{5, 6, 7, 8\}$. Allora

1. $(7, p) \notin S \times T$; **(E)**
2. $\{q, 8\} \in S \times T$;
3. $(t, 5) \in T \times S$;
4. $(5, 6) \in S \times T$;
5. $(p, r, 6) \in S \times T$.

Domanda 3. Sia $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ la funzione $f(n) = \begin{cases} n^2 - 1 & \text{se } n < 0, \\ n^2 + 4 & \text{se } n \geq 0. \end{cases}$ Allora

1. f è iniettiva
2. $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$; **(E)**
3. f è suriettiva;
4. $f \circ f(-2) = 8$
5. $f(2n) = 4n^2 + 4$ per ogni n .

Domanda 4. Quanti sono i PIN costituiti da 4 cifre diverse se non sono ammesse ripetizioni?

1. $10!/4!$
2. $\binom{10}{6}$;
3. $4!$;
4. $10!/6!$; **(E)**
5. $10! - 6!$.

Domanda 5. Una permutazione π ha tipo $(3, 3, 4)$. Allora π^3

- | | |
|--|-------------------------------|
| 1. è l'identità; | 4. ha tipo $(3, 3)$; |
| 2. ha tipo $(3, 3, 4)$; | 5. è un ciclo di lunghezza 3; |
| 3. è un ciclo di lunghezza 4; (E) | |

Domanda 6. La scrittura in base 2 di 98 è

- | | |
|-------------|------------------------|
| 1. 1010100; | 4. 1101000; |
| 2. 1011010; | 5. 1100010. (E) |
| 3. 1001110; | |

Domanda 7. Solo in una delle seguenti coppie entrambi i numeri generano $(\mathbb{Z}_{105}, +)$. Quale?

- | | |
|---------------------------|-----------------|
| 1. $(8, 76)$; (E) | 4. $(26, 66)$; |
| 2. $(16, 77)$; | 5. $(25, 49)$. |
| 3. $(33, 52)$; | |

Domanda 8. Il numero delle classi invertibili in (\mathbb{Z}_{70}, \cdot) è

- | | |
|---------|-------------------|
| 1. 20 ; | 4. 28 |
| 2. 18; | 5. 24. (E) |
| 3. 32; | |

Domanda 9. La congruenza $15X \equiv 35 \pmod{55}$ ha esattamente

- | | |
|--------------------------------------|---------------------------|
| 1. nessuna soluzione; | 4. 5 soluzioni modulo 11; |
| 2. 1 soluzione modulo 55; | 5. 1 soluzione modulo 5; |
| 3. 5 soluzioni modulo 55; (E) | |

Domanda 10. Sia G un gruppo con 52 elementi e sia $g \in G$. Allora il periodo di g **non** può essere

- | | |
|---------|------------------|
| 1. 1 ; | 4. 8; (E) |
| 2. 13 ; | 5. 26. |
| 3. 4; | |

Corso di Studi in Informatica
Matematica Discreta

Prova scritta 5 Febbraio 2024 – Quiz, versione 5

NOME:

COGNOME:

MATRICOLA:

Riportare le risposte ritenute corrette nella tabella seguente

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Domanda 1. Sia $A = \{l, m, n, o, p, q\}$. Allora:

1. $\{p, q\} \subset A$; **(E)**
2. $\{m\} \in A$;
3. $(n, p) \subset A$;
4. $r \in A$;
5. $(l, o) \in A$.

Domanda 2. Siano $S = \{a, b, c, d\}$ e $T = \{0, 1, 2\}$. Allora

1. $(a, d) \in S \times T$
2. $(d, 1, 2) \in S \times T$;
3. $\{b, 1\} \subset S \times T$;
4. $(b, 2) \in S \times T$; **(E)**
5. $(c, 0) \in T \times S$.

Domanda 3. Sia $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ la funzione $f(n) = \begin{cases} n^2 - 4 & \text{se } n < 0, \\ n^2 - 3 & \text{se } n \geq 0. \end{cases}$. Allora

1. f è iniettiva
2. $f^{-1}(21) = \emptyset$;
3. f è suriettiva;
4. $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$;
5. $f \circ f(1) = 0$. **(E)**

Domanda 4. Quanti sono i modi possibili di assegnare un numero intero da 0 a 4 inclusi a 6 oggetti, se le ripetizioni sono ammesse?

1. $6! - 5!$
2. 6^5 ;
3. 5^6 ; **(E)**
4. $\binom{6}{5}$;
5. $6 \cdot 5$.

Domanda 5. Una permutazione π ha tipo $(3, 4, 5)$. Allora π^4

- | | |
|----------------------------------|-------------------------------|
| 1. è un ciclo di lunghezza 4; | 4. ha tipo $(3, 4, 5)$; |
| 2. ha tipo $(3, 5)$; (E) | 5. è un ciclo di lunghezza 5; |
| 3. è l'identità; | |

Domanda 6. La scrittura in base 2 di 104 è

- | | |
|-------------|------------------------|
| 1. 1010100; | 4. 1101000; (E) |
| 2. 1011010; | 5. 1100010. |
| 3. 1001110; | |

Domanda 7. Solo in una delle seguenti coppie entrambi i numeri generano $(\mathbb{Z}_{105}, +)$. Quale?

- | | |
|----------------------------|-----------------|
| 1. $(15, 32)$; | 4. $(27, 64)$; |
| 2. $(16, 46)$; (E) | 5. $(25, 49)$. |
| 3. $(33, 52)$; | |

Domanda 8. Il numero delle classi invertibili in (\mathbb{Z}_{80}, \cdot) è

- | | |
|-------------------|--------|
| 1. 20 ; | 4. 28 |
| 2. 24; | 5. 30. |
| 3. 32; (E) | |

Domanda 9. La congruenza $24X \equiv 28 \pmod{58}$ ha esattamente

- | | |
|---------------------------|--------------------------------------|
| 1. 4 soluzioni modulo 58; | 4. 2 soluzioni modulo 29; |
| 2. 1 soluzioni modulo 58; | 5. 2 soluzioni modulo 58; (E) |
| 3. nessuna soluzione; | |

Domanda 10. Sia G un gruppo con 40 elementi e sia $g \in G$. Allora il periodo di g **non** può essere

- | | |
|-------------------|--------|
| 1. 12; (E) | 4. 1; |
| 2. 8 ; | 5. 20. |
| 3. 10; | |

Corso di Studi in Informatica

Matematica Discreta

5 Febbraio 2024

COGNOMENOME

MATRICOLA

PROBLEMA 1

Versione A

Rispondere a ciascuna domanda, motivando adeguatamente le risposte.

Lasciare indicati (senza calcolarli esplicitamente) i coefficienti binomiali e le potenze.

Sia X l'insieme dei numeri da 0 a 9 (compresi), e

$$A = \{0, 1, 3, 5, 6, 8\}$$

- a) (Punti 4) Contare le stringhe di 10 cifre in X aventi 4 come prima cifra e non contenenti cifre in A .
- b) (Punti 4) Contare le stringhe di 10 cifre in X tali che la prima cifra è in A e l'ultima cifra è congrua modulo 5 alla somma delle prime cinque cifre.
- c) (Punti 3) Contare le stringhe di 10 cifre in X contenenti esattamente 4 cifre in A .

SOLUZIONE:

- a) Sono in biezione con le stringhe di 9 cifre nell'insieme $X \setminus A = \{2, 4, 7, 9\}$, quindi il loro numero è 4^9 .
- b) Ci sono $6 \cdot 10^8$ stringhe di 9 cifre tali che la prima cifra è in A . Per ognuna di queste, detta x la somma delle prime cinque cifre, ci sono due possibilità per la decima cifra: il rappresentante di $[x]_5$ appartenente all'insieme $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ e quello appartenente all'insieme $\{5, 6, 7, 8, 9\}$. Quindi il numero richiesto è $2 \cdot 6 \cdot 10^8$.
- c) Ci sono $\binom{10}{4}$ scelte per i posti in cui situare elementi di A . Nei rimanenti sei posti occorre collocare elementi in $X \setminus A = \{2, 4, 7, 9\}$. Quindi il numero totale è

$$\binom{10}{4} \cdot 6^4 \cdot 4^6 = 1114767360$$

Corso di Studi in Informatica

Matematica Discreta

5 Febbraio 2024

COGNOMENOME

MATRICOLA

PROBLEMA 2

Versione A

Rispondere a ciascuna domanda, motivando adeguatamente le risposte.

- a) (Punti 4) Dire se la congruenza

$$34x \equiv 6 \pmod{38}$$

ammette soluzioni e in questo caso risolverla

- b) (Punti 4) dire se $\bar{7}$ sta in \mathbb{Z}_{32}^\times ; in caso affermativo determinarne il periodo.

- c) (Punti 3) Sia $N = 7919$ e si dia per noto che N è primo. Calcolare

$$2^{15839} + N^{11} \pmod{3N}$$

SOLUZIONE:

- a) La congruenza ammette soluzione in quanto $(34, 38) = 2$ divide 6. Sono soluzioni tutti e soli gli $x \equiv 8 \pmod{19}$.

- b) $\bar{7} \in \mathbb{Z}_{32}^\times$, in quanto $(7, 32) = 1$. Il periodo di $\bar{7}$ in \mathbb{Z}_{32}^\times è 4.

- c) Si ha $(2, 3N) = 1$ e $\varphi(3N) = 2 \cdot 7918 = 15836$. Ne segue, per il teorema di Eulero

$$2^{15839} = 2^{15836} \cdot 2^3 \equiv 2^3 \equiv 8 \pmod{3N}. \quad (1)$$

Passiamo ora a studiare il secondo addendo. Poiché $(N, 3) = 1$ e $\varphi(3) = 2$, si ha per il teorema di Eulero

$$N^{11} = (N^2)^5 \cdot N \equiv N \pmod{3}.$$

e inoltre ovviamente $N^{11} \equiv N \pmod{N}$ (sono entrambi $\equiv 0 \pmod{N}$). Quindi

$$N^{11} \equiv N \pmod{3N}. \quad (2)$$

Da (1) e (2) vediamo che la soluzione è $8 + N = 7927$ modulo $3N$.