

Nome & Cognome: _____

Algebra Lineare, Esame Finale
Dicembre 4, 2023

- Tutto il lavoro deve essere unicamente vostro.
- L'utilizzo di calcolatrici è vietato.
- L'esame dura 2 ore.
- Scrivete il vostro nome su tutte le pagine, nel caso qualche foglio si staccasse.
- Controllate di avere tutte le 8 pagine dell'esame.
- Ogni domanda a risposta multipla vale 1 punto.
- Le risposte alle domande aperte valgono 11 punti l'una.
- Le domande aperte verranno corrette solo a chi totalizzi almeno 6 punti su 10 nella parte a crocette.

Buon Lavoro!

PER FAVORE MARCATE LE RISPOSTE CON UNA X, non un cerchio!

- | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1. | (a) | (b) | (c) | (d) | (e) |
| 2. | (a) | (b) | (c) | (d) | (e) |
| 3. | (a) | (b) | (c) | (d) | (e) |
| 4. | (a) | (b) | (c) | (d) | (e) |
| 5. | (a) | (b) | (c) | (d) | (e) |
| 6. | (a) | (b) | (c) | (d) | (e) |
| 7. | (a) | (b) | (c) | (d) | (e) |
| 8. | (a) | (b) | (c) | (d) | (e) |
| 9. | (a) | (b) | (c) | (d) | (e) |
| 10. | (a) | (b) | (c) | (d) | (e) |

Non scrivere qua sotto!

Risp. Multiple _____

Risp. Aperte _____

Totale _____

Nome & Cognome: _____

Risposta multipla

1.(1 pt.) Il sistema lineare con matrice completa

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

ha un numero di soluzioni pari a:

- (a) Un numero finito, maggiore di 1.
- (b) Zero.
- (c) Infinite, che dipendono da 1 parametro.
- (d) Una.
- (e) Infinite, che dipendono da 2 parametri.

2.(1 pt.) Il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_3[x]$ dato da:

$$V = \{p(x) = a(x^3 - 1) + b(x - 1) + c(x - 1) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

ha dimensione

- (a) Uno.
- (b) Due.
- (c) Tre.
- (d) Zero.
- (e) Quattro.

3.(1 pt.) L'insieme $\{p_1(x) = x^2 - 1, p_2(x) = -x + 1, p_3(x) = x^2 - x\} \subseteq \mathbb{R}_2[x]$, è:

- (a) Una base di $\mathbb{R}_2[x]$.
- (b) Un insieme di generatori di $\mathbb{R}_2[x]$, ma non linearmente indipendente.
- (c) Una base di $\mathbb{R}_2[x]$, ma non linearmente indipendente.
- (d) Né un insieme di generatori di $\mathbb{R}_2[x]$, né un insieme linearmente indipendente.
- (e) Un insieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}_2[x]$, ma non un insieme di generatori.

4.(1 pt.) Il numero complesso $z = -5 + 5i$, in coordinate polari, è:

- (a) $z = 10e^{i\pi/2}$.
- (b) $z = 5\sqrt{2}e^{i3\pi/4}$.
- (c) $z = 5\sqrt{2}e^{i\pi/4}$.
- (d) $z = -5 + 5i$.
- (e) $z = 10e^{i3\pi/4}$.

Nome & Cognome: _____

5.(1 pt.) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

calcolare $\text{tr}(AB)$:

- (a) 3. (b) Non è ben definito. (c) 12.
(d) 6. (e) -4.

6.(1 pt.) Data la matrice $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, la forma quadratica $q_S(x)$ è:

- (a) $q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_3^2$. (b) $q(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_3 + 2x_3^2$.
(c) $q(x) = x_1^2 + 2x_1x_3 + x_2^2$. (d) $q(x) = 2x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_3^2$.
(e) $q(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_3^2$.

7.(1 pt.) Le matrici seguenti

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

formano una base di $M(2, \mathbb{R})$. Il vettore delle coordinate di $2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ in questa base è:

- (a) $(2A_1, 0, 0, 2A_4)$. (b) $(1, 0, -1, 1)$. (c) $(2, -1, 3, 0)$.
 (d) $(0, 1, 3, -1)$. (e) (A_1, A_2, A_3, A_4) .

Nome & Cognome: _____

8.(1 pt.) Si consideri \mathbb{R}^3 con il prodotto scalare $g_S(x, y) = {}^t x S y$, con

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quale dei seguenti è il radicale di g_S ?

- (a) $\text{span}({}^t(1, 1, 0))$.
- (b) $\text{span}({}^t(1, 1, 0), {}^t(0, 0, 2))$.
- (c) $\{0\}$.
- (d) $\text{span}({}^t(1, 0, 0), {}^t(0, 1, 0), {}^t(0, 0, 1))$.
- (e) $\text{span}({}^t(1, -1, 0), {}^t(-1, 1, 0), {}^t(0, 0, 2))$.

9.(1 pt.) Per quali valori del parametro k , la matrice seguente non è invertibile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ k & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

- (a) $k = 3$. (b) $k = 6$. (c) $k = 0$. (d) $k = 21$. (e) $k = 1$.

10.(1 pt.) La distanza tra $P = (3, 4, 5)$ e il piano di coordinate cartesiane $2x - 2y + z = 9$ è:

- (a) 0. (b) 9. (c) 1/3. (d) 1. (e) 2.

Nome & Cognome: _____

Risposta aperta

Per ricevere punteggio parziale, dovete mostrare il vostro lavoro!

11.(11 pts.) Diagonalizzare la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcolando anche la base di autovettori corrispondente. Potrebbe essere utile sapere che $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$ sono tra gli autovalori di A .

Nome & Cognome: _____

Nome & Cognome: _____

12.(11 pts.) Siano dati i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- (1) Verificare che $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è una base di \mathbb{R}^4 .
- (2) Calcolare la matrice del cambio di base dalla base canonica a \mathcal{B} .

Nome & Cognome: _____

Nome & Cognome: _____

Algebra Lineare, Esame Finale
Dicembre 4, 2023

- Tutto il lavoro deve essere unicamente vostro.
- L'utilizzo di calcolatrici è vietato.
- L'esame dura 2 ore.
- Scrivete il vostro nome su tutte le pagine, nel caso qualche foglio si staccasse.
- Controllate di avere tutte le 8 pagine dell'esame.
- Ogni domanda a risposta multipla vale 1 punto.
- Le risposte alle domande aperte valgono 11 punti l'una.
- Le domande aperte verranno corrette solo a chi totalizzi almeno 6 punti su 10 nella parte a crocette.

Buon Lavoro!

PER FAVORE MARCATE LE RISPOSTE CON UNA X, non un cerchio!

- | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1. | (a) | (b) | (●) | (d) | (e) |
| 2. | (a) | (●) | (c) | (d) | (e) |
| 3. | (a) | (b) | (c) | (●) | (e) |
| 4. | (a) | (●) | (c) | (d) | (e) |
| 5. | (a) | (b) | (c) | (●) | (e) |
| 6. | (a) | (b) | (c) | (d) | (●) |
| 7. | (a) | (b) | (c) | (●) | (e) |
| 8. | (●) | (b) | (c) | (d) | (e) |
| 9. | (a) | (●) | (c) | (d) | (e) |
| 10. | (a) | (b) | (c) | (d) | (●) |

Non scrivere qua sotto!

Risp. Multiple _____

Risp. Aperte _____

Totale _____