Lezione 10 : Matrici (Parte II)

Altre proprietà

Proprietà 3: Se la matrice $\tilde{A}$ si ottiene dalla matrice A scambiando tra loro due righe (o due colonne) allora $\det(\tilde{A}) = -\det(A)$.

Dim: (Basta controllare per le righe perché per le colonne possiamo usare $\det({}^tA) = \det(A)$)

$\boxed{n=2}$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$

$$\det(\tilde{A}) = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} = -\det A$$

$\boxed{n=3}$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$

(Abbiamo scambiato la seconda e la terza riga.)

sviluppo di Laplace lungo 1ª riga

$$\det(\tilde{A}) = a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} - a_{12}\det\begin{pmatrix} a_{31} & a_{33} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix} + a_{13}\det\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\overset{\boxed{n=2}}{=} -\left[a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \right]$$

sviluppo di Laplace lungo 1ª riga

$$= -\det(A).$$

Se otteniamo invece $\tilde{A}$ scambiando due altre righe, sviluppiamo lungo la riga che non è stata scambiata.

$\boxed{n \geq 4}$ Induzione & procedimento come per $n=3$ (sviluppando lungo una riga che non è stata scambiata). $\square$

Proprietà 4: Se A ha due righe (o colonne) uguali, allora $\det A = 0$.

Dim: Chiamiamo $\tilde{A}$ la matrice ottenuta da A scambiando queste due righe (o colonne). Visto che le righe sono uguali, $\tilde{A} = A$. $\Rightarrow \det(A) = \det(\tilde{A}) = -\det(A)$. $\square$

Proprietà 5: Se la matrice $\tilde{A}$ si ottiene dalla matrice A sostituendo la i-esima riga A_i con la i-esima riga più un multiplo della k-esima riga $(k \neq i)$

$[\ \tilde{A}_i = A_i + \lambda \cdot A_k\ ]$,

allora $\det(\tilde{A}) = \det(A)$.

(Uguale per le colonne.)

Dim: Basta dimostrare la proprietà per le righe. Se $\tilde{A}$ ha entrate $(\tilde{a}_{ij})$, allora gli elementi della i-esima riga diventano

$$\tilde{a}_{ij} = a_{ij} + \lambda a_{kj} \qquad \forall j = \{1, \dots, n\}$$

Inoltre $\tilde{C}_{ij} = C_{ij}$ (in quanto $\tilde{A}$ e A sono uguali tranne nella i-esima riga che non è presente nella sotto-matrice C_{ij})

$$\det(\tilde{A}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \tilde{a}_{ij} \det \tilde{C}_{ij}$$

sviluppo di L. lungo i-esima riga

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} (a_{ij} + \lambda a_{kj}) \det C_{ij}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det C_{ij} + \lambda \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{kj} \det C_{ij}$$

La prima somma è $\det(A)$ [sviluppo di Laplace lungo la i-esima riga].

La seconda somma è 0 perché è il sviluppo di Laplace di una matrice per quale abbiamo copiato la k-esima riga nella i-esima, allora una matrice con due righe uguali! [Prop. 4].

$\square$

Abbiamo dimostrato

Proposizione 3.3.7.

Sia A una matrice $n \times n$ e $\hat{A}$ sia ottenuta da A tramite uno delle seguente mosse di Gauss.

Il determinante si cambia nel seguente modo:

i) Se $\hat{A}$ è ottenuta da A scambiando due righe:

$$\det(\hat{A}) = -\det(A),$$

ii) Se $\hat{A}$ è ottenuta da A moltiplicando una riga di A con uno scalare λ: $\det(\hat{A}) = \lambda \det(A)$,

iii) Se $\hat{A}$ è ottenuta da A aggiungendo ad una riga il multiplo di un'altra riga: $\det(\hat{A}) = \det(A)$.

Esercizio 1: Calcoliamo il determinante di

$$A = \begin{pmatrix} 5i & 4\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 5i & 8\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ -5i & -4\sqrt{2} & -1 & 2\sqrt{2} \\ 10i & 4\sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(Soluzione usando Prop. 3.3.7 in lezione)

Teorema: $\det(A) = 0 \iff$ una riga (o colonna) è combinazione lineare delle altre.

Teorema: (Teorema di Binet): Se A, B sono matrici $n \times n$, allora $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.
$= \det(BA)$

Def: Una matrice A è invertibile se esiste una matrice B tale che $AB = BA = I_n$.
In questo caso, denotiamo B con A^{-1} e la chiamiamo matrice inversa.

Cor (del T.d.B): Se A è una matrice invertibile, allora $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Dim: Teorema di Binet

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I_n) = 1$$

Possiamo concludere che $\det(A) \neq 0$ e allora possiamo dividere con $\det(A)$. $\square$

Cofattori di una matrice

Def: Consideriamo una matrice A quadrata. I suoi cofattori $\mathrm{cof}_{ij} := (-1)^{i+j} \det(C_{ij})$ formano la matrice dei cofattori

sottomatrice di A dopo cancellazione della i-esima riga & j-esima colonna.

$$\mathrm{cof}(A) = (\mathrm{cof}_{ij})$$

Possiamo scrivere il sviluppo di Laplace come

$$(1) \begin{cases} \det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \,\mathrm{cof}_{ij} & \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ \det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \,\mathrm{cof}_{ij} & \forall j \in \{1, \dots, n\} \end{cases}$$

Nella dimostrazione di Proprietà 5 abbiamo visto

$$(2) \begin{cases} 0 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \,\mathrm{cof}_{kj} & \forall i,k \in \{1, \dots, n\},\ i \neq k \\ 0 = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \,\mathrm{cof}_{ik} & \forall j,k \in \{1, \dots, n\},\ j \neq k \end{cases}$$

Proposizione: $A \cdot {}^t(\mathrm{cof}(A)) = {}^t(\mathrm{cof}(A)) \cdot A$

$$= \det(A) \cdot I_n$$

Dim: Scriviamo ${}^t(\mathrm{cof}(A)) = B = (b_{ij})$

$$b_{ij} = \mathrm{cof}_{ji}$$

Scriviamo $A \cdot B = A \cdot {}^t(\mathrm{cof}(A)) = K = (k_{ij})$

$$k_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} b_{\ell j} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} \, cof_{j\ell}$$

$\boxed{se \ \ i=j}$ $$k_{ii} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} \, cof_{i\ell} \overset{(1)}{=} \det A$$

$\boxed{se \ \ i\neq j}$ $$k_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} \, cof_{j\ell} \overset{(2)}{=} 0$$

$$\Rightarrow K = (k_{ij}) = \det A \cdot I_n$$ □

Teorema (Inversa di una matrice)

(Prop 3.4.12) Sia A una matrice quadrata di ordine $n \geq 2$. La matrice A è invertibile se e solo se $\det(A) \neq 0$. Se A è invertibile, allora

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot {}^t(cof(A))$$

Dim: Se A è invertibile, esiste B tale che $AB = BA = I_n$. Per il Teorema di Binet

$$\det(A) \cdot \det(B) = \det(AB) = \det(I_n) = 1$$

$\Rightarrow \det(A) \neq 0$.

Vice-versa, se A è tale che $\det(A) \neq 0$, definiamo $B := \frac{1}{\det(A)} \cdot {}^t(cof(A))$

Per la proposizione sopra

$$A \cdot {}^t(cof(A)) = \det(A) \cdot I_n = {}^t(cof(A)) \cdot A$$

Visto che $\det(A) \neq 0$ possiamo moltiplicare tutto con $\frac{1}{\det(A)}$ per ottenere $AB = I_n = BA$.

Allora $B = A^{-1}$. □

Esercizio 2: Dimostrare che

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$ è invertibile

e trovare la matrice inversa.

(Soluzione solo in lezione!)