SVOLGIMENTO ESERCIZI 24/10/23

lunedì 30 ottobre 2023 15:09

Es. 1 $z_1 = 2+i$ $\qquad$ $z_2 = 4+3i$

- $z_1 + z_2 = 2+i+4+3i = 6+4i$
- $|z_2 - z_1| = |4+3i-(2+i)| = |4-2+3i-i| = |2+2i| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
- $\dfrac{z_1^2}{z_2 - z_1} = \dfrac{(2+i)^2}{2+2i} = \dfrac{4+4i-1}{2+2i} = \dfrac{3+4i}{2+2i} = \dfrac{3+4i}{2+2i} \cdot \underbrace{\boxed{\dfrac{2-2i}{2-2i}}}_{=1} =$

$$= \frac{6-6i+8i+8}{4+4} = \frac{14+2i}{8} = \frac{7}{4} + \frac{1}{4}i$$

- $z_1^2 + \bar{z}_1^2 = (2+i)^2 + (2-i)^2 = 4 + \cancel{4i} - 1 + 4 - \cancel{4i} - 1 = 6$
- $|1+z_1| = |1+2+i| = |3+i| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$
- $|z_2 + z_2 z_1| = |4+3i+(4+3i)(2+i)| = |4+3i+8+4i+6i-3| = |9+13i| =$

$$= \sqrt{9^2+13^2} = \sqrt{81+169} = \sqrt{250} = \sqrt{5^2 \cdot 10} = 5\sqrt{10}$$

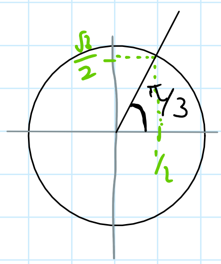
Es. 2 $z = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)$ $\qquad$ z in coordinate polari ? $\quad z^{2023} = ?$

$z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ $\qquad\qquad$ $|z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$

$z = 1 \cdot (\cos\vartheta + i \,\text{sen}\,\vartheta)$

$= \cos\vartheta + \text{sen}\,\vartheta \cdot i$

$$\begin{cases} \cos\vartheta = \frac{1}{2} \\ \text{sen}\,\vartheta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$



$\vartheta = \frac{\pi}{3}$ $\quad (= 60^\circ)$

$z = 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)$ $\quad \rightarrow$ z in coordinate polari

$$z^{2023} = 1^{2023} \cdot \left(\cos \underbrace{\left(2023 \cdot \frac{\pi}{3}\right)}_{?} + i \cdot \text{sen} \left(2023 \cdot \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

Gli angoli hanno periodicità $2k\pi$.
Cioè $\theta = \theta + 2k\pi$

$$2023 \cdot \frac{\pi}{3} = (2022+1) \cdot \frac{\pi}{3} = 674\pi + \frac{\pi}{3} = 0 + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

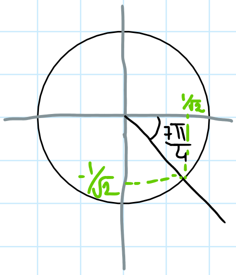
$$z^{2023} = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \,\text{sen}\, \frac{\pi}{3}\right)$$

Es. 3a) Radici 7-ime di $z_0 = 1 - i$

$$|z_0| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$z_0 = \sqrt{2} \cdot (\cos\theta + i \,\text{sen}\,\theta) = \underline{\sqrt{2}\cos\theta} + \underline{\sqrt{2}\,\text{sen}\,\theta \cdot i}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos\theta = 1 \\ \sqrt{2}\,\text{sen}\,\theta = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \text{sen}\,\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$



$$\theta = \frac{7}{4}\pi$$

z radici 7-ime di z_0

$$z = \sqrt[7]{\sqrt{2}} \left(\cos\left(\frac{\frac{7}{4}\pi}{7} + \frac{2k\pi}{7}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\frac{7}{4}\pi}{7} + \frac{2k\pi}{7}\right)\right) \qquad k = 0, 1, \dots, 6$$

$$= \sqrt[14]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{7}\right) + i \,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{7}\right)\right)$$

- $k=0$ $\quad z_1 = \sqrt[14]{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \,\text{sen}\, \frac{\pi}{4}\right)$
- $k=1$ $\quad z_2 = \sqrt[14]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{7}\pi\right) + i \,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{7}\pi\right)\right)$

  $= \sqrt[14]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{15}{28}\pi\right) + i \,\text{sen}\left(\frac{15}{28}\pi\right)\right)$
- $k=2$ $\quad z_3 = \sqrt[14]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4}{7}\pi\right) + i \,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4}{7}\pi\right)\right)$

  $= \sqrt[14]{2} \cdot \left(\cos \frac{23}{28}\pi + i \cdot \text{sen}\, \frac{23}{28}\pi\right)$
- $k=3$ $\quad z_4 = \sqrt[14]{2} \cdot \left(\cos \frac{31}{28}\pi + i \,\text{sen}\, \frac{31}{28}\pi\right)$

• $k=4$ $\qquad z_5 = \sqrt[14]{2} \cdot \left(\cos \frac{39}{28}\pi + i \operatorname{sen} \frac{39}{28}\pi\right)$

• $k=5$ $\qquad z_6 = \sqrt[14]{2} \cdot \left(\cos \frac{47}{28}\pi + i \operatorname{sen} \frac{47}{28}\pi\right)$

• $k=6$ $\qquad z_7 = \sqrt[14]{2} \cdot \left(\cos \frac{55}{28}\pi + i \operatorname{sen} \frac{55}{28}\pi\right)$

NOTA: I sette angoli che sono usciti si ottengono ciascuno sommando $\frac{8}{28}\pi$ al precedente.
Osserva bene che anche z_1 lo otteniamo sommando $\frac{8}{28}\pi$ a z_7.

In effetti se prendiamo 7 volte $\frac{8}{28}\pi$ otteniamo $\frac{56}{28}\pi = 2\pi$ che è proprio un giro completo.

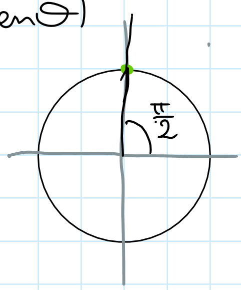
Questa "ciclicità" si osserva ogni volta che calcoliamo le radici n-esime di un numero complesso.

b) Radici terze di $z_0 = i$

$$|z_0| = \sqrt{0+1} = 1$$

$$z_0 = 1 \cdot (\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)$$

$$\begin{cases} \cos\vartheta = 0 \\ \operatorname{sen}\vartheta = 1 \end{cases}$$



$$\vartheta = \frac{\pi}{2}$$

$$z_0 = 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$$

Radici 3e di z_0:

$$z = \sqrt[3]{1} \cdot \left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right), \quad k = 0, 1, 2$$

• $k=0$ $\qquad z_1 = 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$

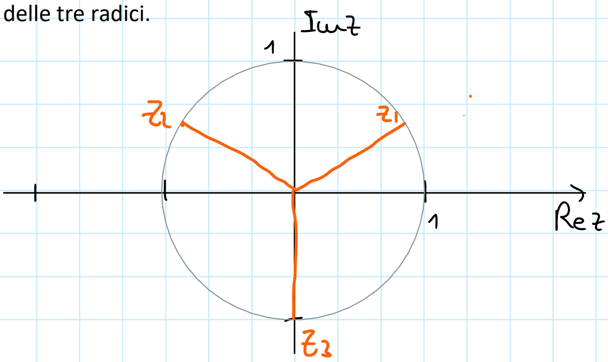
• $k=1$ $\qquad z_2 = 1 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi\right)\right)$

$$= 1 \cdot \left(\cos\frac{5}{6}\pi + i \operatorname{sen}\frac{5}{6}\pi\right)$$

• $k=2$ $\qquad z_3 = 1 \cdot \left(\cos\frac{9}{6}\pi + i \operatorname{sen}\frac{9}{6}\pi\right)$

$$= 1 \cdot \left(\cos\frac{3}{2}\pi + i \operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi\right)$$

In questo caso la ciclicità è ben evidente anche dalla rappresentazione cartesiana delle tre radici.



c) Verrà svolto nell'esercitazione del 2 Novembre. Troverete lo svolgimento nel file che verrà caricato in seguito a quella sessione di tutorato.

ES. 4 IDEM

ES. 5 $p(z) = z^2 - 2iz - 5$

- $-1+i$
- i
- $1+i$
- $2+i$

Posso procedere in 2 modi.
1. Sostituisco ogni valore alla z nel polinomio. Se l'espressione così ottenuta risulta uguale a 0, allora il valore è una radice di p(z).
2. Trovo le radici del polinomio p(z) risolvendo l'equazione $z^2-2iz-5=0$ e vedo a quali dei 4 numeri complessi dati corrispondono.

Vediamo qui entrambi i modi:

① $(-1+i)^2 - 2i(-1+i) - 5 =$
$= \cancel{1} - \cancel{2i} \cancel{-1} + \cancel{2i} + 2 - 5$
$= -3 \neq 0$ $\quad -1+i$ NON È RADICE

$i^2 - 2i(i) - 5 =$
$= -1 + 2 - 5$
$= -4 \neq 0$ $\quad i$ NON È RADICE

$(1+i)^2 - 2i(1+i) - 5 =$
$= \cancel{1} + \cancel{2i} \cancel{-1} \cancel{-2i} + 2 - 5$
$= -3 \neq 0$ $\quad 1+i$ NON È RADICE

$(2+i)^2 - 2i(2+i) - 5 =$
$= 4 + \cancel{4i} - 1 - \cancel{4i} + 2 - 5$
$= 0$ $\quad 2+i$ È RADICE

② $z^2 - 2iz - 5 = 0$

$+i+2$

(2) $z^2 - 2iz - 5 = 0$

$$z_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - a \cdot c}}{a} = \frac{+i \pm \sqrt{(-i)^2 - 1 \cdot (-5)}}{1} = +i \pm \sqrt{-1+5} = \begin{cases} +i+2 \\ +i-2 \end{cases}$$

ES.6

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & 1+i & 0 \\ 2-i & -1 & -2+3i \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1+i & -1 \\ 2-3i & 0 \end{pmatrix}$$

3×2 $\qquad$ 2×3 $\qquad$ 2×2

$AB =$ $\qquad (3 \times 2) \cdot (2 \times 3)$ $\qquad$ OK

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 1+i & 0 \\ 2-i & -1 & -2+3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2i & -1+i & -4+6i \\ 10-3i & -4-i & -6+9i \\ -12+2i & 4+2i & 4-6i \end{pmatrix}$$

$BA =$ $\qquad (2 \times 3) \times (3 \times 2)$ $\qquad$ OK

$$\begin{pmatrix} -4 & 1+i & 0 \\ 2-i & -1 & -2+3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5-i & -5+3i \\ -1+5i & 5-8i \end{pmatrix}$$

$2-i+1-4+6i$

$4-2i-3+4-6i$

$AC =$ $\qquad (3 \times 2) \cdot (2 \times 2)$ $\qquad$ OK

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i & -1 \\ 2-3i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-5i & -1 \\ 5-10i & 1 \\ -2+8i & -2 \end{pmatrix}$$

$CA =$ $\qquad (2 \times 2)(3 \times 2)$ $\qquad$ NON POSSIBILE

$BC =$ $\qquad (2 \times 3)(2 \times 2)$ $\qquad$ NON POSSIBILE

$CB =$ $\qquad (2 \times 2)(2 \times 3)$ $\qquad$ OK

$$\begin{pmatrix} 1+i & -1 \\ 2-3i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 1+i & 0 \\ 2-i & -1 & -2+3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6-3i & 1+2i & 2-3i \\ -8+12i & 5-i & 0 \end{pmatrix}$$