# Lezione 6: Spazi Vettoriali (Parte II)

## Esempio 3: Le matrici

Def: Una **matrice** con **m righe** e **n colonne** (anche chiamato **matrice $m \times n$**) con coefficienti/entrate in un $\mathbb{K}$ è una tabella rettangolare del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

con $mn$ numeri $a_{11}, \dots, a_{mn} \in \mathbb{K}$

Le $m$ righe di $A$ chiamiamo $A_1, \dots, A_m$

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \qquad (i = 1, \dots, m)$$

Le $n$ colonne indichiamo con $A^1, \dots, A^n$

$$A^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

(Esempi solo in lezione.)

Per due matrici del stesso tipo $m \times n$ possiamo definire la somma:

Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$

allora

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

e per un numero $\lambda \in \mathbb{K}$ definiamo

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

(Esempi solo in lezione)

Con questi due operazioni, l'insieme

$M(m,n,\mathbb{K}) = \{$ matrici $m \times n$ con coeff. in $\mathbb{K} \}$

diventa uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

L'elemento neutro per l'addizione è la matrice

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

[Non possiamo sommare due matrici di tipi diversi!]

## Sottospazi vettoriali

**Def:** Sia $V$ uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$.
Un **sottospazio vettoriale** di $V$ è un sottoinsieme $W \subset V$ che soddisfa i tre assiomi:

(1) $0 \in W$

(2) Se $v, v' \in W$ allora anche $v + v' \in W$.

(3) Se $v \in W$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ allora $\lambda v \in W$.

Le proprietà (1), (2), (3) garantiscono che il sottospazio $W$ è esso stesso uno spazio vettoriale.

Ogni spazio vettoriale $V$ ha due sottospazi molto particolari :

- Il sottospazio **banale** $W = \{0\} = \{0_V\}$
- Il sottospazio **totale** $W = V$.

Tutti gli altri sottospazi $W$ di $V$ hanno una posizione intermedia fra il sottospazio banale e il sottospazio totale :

$$\{0\} \subset W \subset V.$$

Esempio: Sia $\mathbb{K}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi in variabile $x$ con coeff. in $\mathbb{K}$. Allora $\mathbb{K}_n[x]$ = l'insieme dei polinomi con grado $\leq n$ è un sottospazio.
[Più dettagli solo in lezione.]

## Matrici diagonali, triangolari, simmetriche e antisimmetriche

Sia $M(m,n,\mathbb{K})$ lo spazio vettoriale di matrici $m \times n$ con coeff. in $\mathbb{K}$. I coefficienti di una matrice $A$ denotiamo con $a_{ij}$ oppure $A_{ij}$. $\begin{pmatrix} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{pmatrix}$

Def: Una matrice $n \times n$ $(m = n)$ è detta **quadrata**.
Una matrice quadrata è

- **diagonale** se $a_{ij} = 0$, $\forall i \neq j$
- **triangolare superiore** se $a_{ij} = 0$, $\forall i > j$
- **triangolare inferiore** se $a_{ij} = 0$, $\forall i < j$
- **triangolare** se è triangolare superiore o triangolare inferiore.

∘) simmetrica se $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i,j$

∘) antisimmetrica se $a_{ij} = -a_{ji}$, $\forall i,j$.

(Esempi solo in lezione!)

Notazione: $M(n, \mathbb{K}) := M(n, n, \mathbb{K})$

se è chiaro quale campo $\mathbb{K}$ usiamo, scriviamo solo $M(n)$.

$D(n) = \{$matrici diagonali in $M(n)\}$,

$T^s(n) = \{$matrici triangolari superiori in $M(n)\}$,

$T^i(n) = \{$matrici triangolari inferiori in $M(n)\}$,

$S(n) = \{$matrici simmetrici in $M(n)\}$,

$A(n) = \{$matrici antisimmetrici in $M(n)\}$.

Teorema: $D(n)$, $T^s(n)$, $T^i(n)$, $S(n)$, $A(n)$ sono sottospazi di $M(n)$.

Dim: Esercizio. □

Combinazioni lineari e sottospazio generato (Span)

Sia $V$ uno spazio vettoriale. Siano $v_1, \dots, v_k \in V$ dei vettori arbitrari. Una combinazione lineare di $v_1, \dots, v_k$ e un vettore $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k$ dove $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sono scalari in $\mathbb{K}$.

(Esempi solo in lezione.)

**Def (2.2.10)** Il ==sottospazio generato== da $v_1, \dots, v_k$ è il sottoinsieme di $V$ formato da tutte le combinazioni lineari dei vettori $v_1, \dots, v_k$. Lo indichiamo con $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$.

In simboli: $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k) = \{ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \,/\, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K} \}$

**Proposizione 2.2.4:** Il sottoinsieme $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$ è un sottospazio di $V$.

**Dim:** Dobbiamo dimostrare che $W = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$ soddisfa i tre assiomi di sottospazio:

(1) $0 \in W$, infatti usando $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ troviamo

$$0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_k = 0 + 0 + \dots + 0 = 0 \in W$$

(2) Se $v, v' \in W$ allora
$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$$
$$v' = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_k$$

$$\Rightarrow v + v' = (\lambda_1 + \mu_1) v_1 + \dots + (\lambda_k + \mu_k) v_k$$

è una combinazione lineare, allora $v + v' \in W$

(3) Se $v \in W$, $\lambda \in \mathbb{K}$, allora $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$

$$\Rightarrow \lambda v = (\lambda \lambda_1) v_1 + \dots + (\lambda \lambda_k) v_k \in W.$$

$\square$

Esempi studiati in lezione:

1) $V = \mathbb{R}^2$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2) $V = \mathbb{K}[x]$, $v_1(x) = 1 + x$, $v_2(x) = x^2$

3) $V = M(3, \mathbb{C})$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$