Lezione 1: Numeri reali

Gli insiemi numerici $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$\mathbb{N}$ - numeri naturali

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

[0 non è sempre considerato numero naturale!]

$\mathbb{Z}$ - numeri interi

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

$\mathbb{Q}$ - numeri razionali

$$\mathbb{Q} = \{ a/b \; ; \; a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \}$$

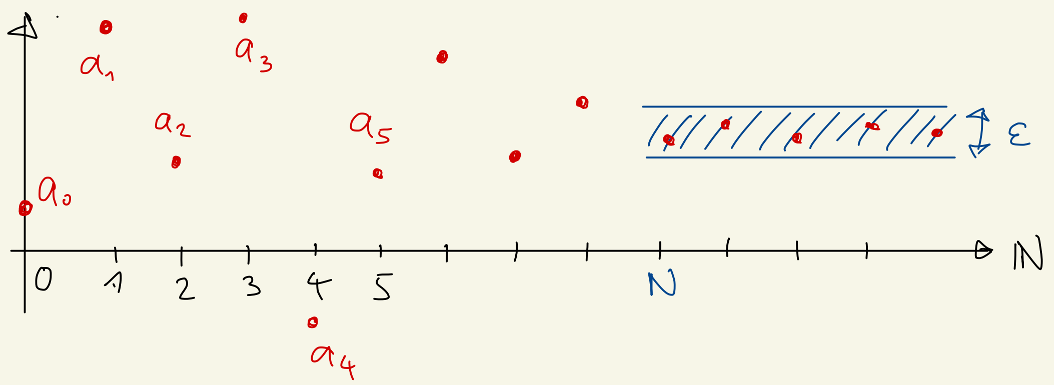
$\mathbb{R}$ - numeri reali:

Def. scuola: "un numero che può avere infinite cifre dopo la virgola" [⚠ $3.999\ldots = 3.\bar{9} = 4$, ecc.]

Costruzione dei numeri reali

Def: successione di Cauchy: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $a_k \in \mathbb{Q}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ è una successione di Cauchy se:

Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $|a_m - a_n| < \varepsilon$ per ogni $m, n > N$.



Diciamo che due successioni di Cauchy (a_n) & (b_n) sono equivalenti se la successione delle differenze $(a_n - b_n)$ tende a zero.

Relazione di equivalenza (⇝ Matematica discreta)

Def 1.5.5

L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è l'insieme delle classi di equivalenza di successioni di Cauchy.

Se (a_n) è una successione di Cauchy di numeri razionali che converge ad un numero razionale a_∞ allora la successione (a_n) rappresenta questo numero a_∞.
Se invece non converge a nussun numero razionale, rappresenta un nuovo numero reale. $(\mathbb{Q} \subset \mathbb{R})$

[Solo in lezione: Esempio 1.5.6 + un'altro esempio.]

Def 1.57: Siano a, b due numeri reali rappresentati da due successioni di Cauchy (a_n) & (b_n) di numeri razionali.
La somma $a+b$ ed il prodotto $a \cdot b$ sono le successioni $(a_n + b_n)$ e $(a_n \cdot b_n)$.

Si può verificare che questi operazioni sono ben definite (che vuol dire non dipendono dalla scelta di successioni di Cauchy).

Si può verificare è che a differenza di $\mathbb{Q}$ l'insieme $\mathbb{R}$ è completo: ogni successione di Cauchy di numeri reali converge in $\mathbb{R}$.

→ passando da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ abbiamo tappati tutti i "buchi"

Numeri irrazionali

Ovviamente abbiamo $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Teorema: $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$

(Esistono numeri in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ – numeri irrazionali)

Prop 1.1.1: $\sqrt{2}$ non è razionale.

Dim: Supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia razionale. Allora $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ dove $\frac{a}{b}$ è una frazione semplificato ai minimi termini.

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2b^2$$

$\Rightarrow a^2$ è pari $\Rightarrow a$ è pari $\Rightarrow a = 2k$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$. $\Rightarrow a^2 = 4k^2$

$$\Rightarrow a^2 = 4k^2 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = 2k^2$$

$\Rightarrow b^2$ è pari $\Rightarrow b$ è pari

$\Rightarrow \frac{a}{b}$ non è semplificato ai minimi termini. ↯

$\square$

Proprietà di $\mathbb{R}$

Abbiamo due operazioni binarie $+$ & $\cdot$ con le seguente proprietà:

$(\mathbb{R},+)$ è un gruppo

(1) esiste un elemento neutro 0 per l'addizione:
$a + 0 = 0 + a = a$, $\forall a \in \mathbb{R}$

(2) commutatività dell'addizione : $a + b = b + a$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$

(3) associatività –"– : $(a+b)+c = a+(b+c)$, $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$

(4) ogni elemento $a \in \mathbb{R}$ ha un inverso (o opposto) $-a$
$a + (-a) = (-a) + a = 0$.

(5) esiste un elemento neutro 1 per la moltiplicazione:

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a \quad , \forall a \in \mathbb{R}$$

$(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$ è un gruppo

(6) commutatività della molt. : $a \cdot b = b \cdot a$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$

(7) associatività —"— : $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$

(8) ogni elemento $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ ha un inverso a^{-1} : $a \cdot (a^{-1}) = (a^{-1}) \cdot a = 1$.

(9) vale la proprietà distributiva:

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \forall a,b,c \in \mathbb{R}.$$

Un insieme con queste proprietà è un <u>campo</u>.

Normalmente scriviamo ab per $a \cdot b$.

[Anche $\mathbb{Q}$ ha le stesse 9 proprietà come $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ & $\mathbb{Z}$ invece no.]

Un altro aspetto fondamentale di $\mathbb{R}$ (e anche $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$) è che questi insiemi sono <u>ordinati</u>: esiste una notazione di maggiore o minore fra numeri. Se $a,b \in \mathbb{R}$, allora abbiamo sempre <u>uno</u> dei casi

- $a = b$
- $a < b$
- $b < a \quad (a > b)$

$\mathbb{R}$ ha anche la <u>proprietà di Archimede</u>:
Dati due numeri reali $0 < a < b$ esiste un numero $n \in \mathbb{N}$ tale che $na > b$.

È possibile dimostrare che $\mathbb{R}$ è l'unico <u>campo</u> <u>ordinato</u>, <u>completo</u>, e <u>archimedeo</u> che contiene $\mathbb{Q}$.

Infiniti numerabili & non numerabili

Def 1.5.3: Un isieme infinito X è numerabile se esiste un biezione f fra $\mathbb{N}$ e X.

$$f : \mathbb{N} \to X$$

$$X = \{ f(0), f(1), f(2), \dots \}$$

Esempio: Numeri pari & non-neg. $P = \{0, 2, 4, 6, 8 \dots\}$

$f : \mathbb{N} \to P$, $n \mapsto 2n$ è una biezione.

P è numerabile.

Esempio: $\mathbb{Z}$ è un insieme numerabile

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$$

Esempio: $\mathbb{Q}$ è un insieme numerabile.

$$\begin{array}{cccccc}
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \dots \\
2 & \cancel{\frac{2}{2}} & \frac{2}{3} & \cancel{\frac{2}{4}} & \frac{2}{5} & \dots \\
3 & \frac{3}{2} & \cancel{\frac{3}{3}} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \dots \\
4 & \cancel{\frac{4}{2}} & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} & \frac{4}{5} & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

$$\mathbb{Q} = \{ 1, -1, 2, -2, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}, 3, -3, 4, -4, \tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}, \tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, -\tfrac{1}{5}, 5, -5, \dots \}$$

Teorema: $\mathbb{R}$ non è numerabile.

"Dim": Supponiamo che $\mathbb{R}$ è numerabile.
Allora esiste $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ biezione.
Per esempio

$$f(1) = 3.17942 \rightsquigarrow a_1 \neq 1$$
$$f(2) = 0.33\overline{347} \rightsquigarrow a_2 \neq 3$$
$$f(3) = 1.500000001 \rightsquigarrow a_3 \neq 0$$

Definiamo $a = 0.a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$ dove

- a_1 è una cifra diversa della prima cifra decimale di $f(1)$,
- a_2 è diversa della second cifra dec. di $f(2)$ ecc.

Per esempio

$$a = 0.\underset{\neq 1}{2}\,\underset{\neq 3}{4}\,\underset{\neq 0}{5}\ldots$$

Allora $a \neq f(k)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.
perche hanno cifra k-esima diversa.
a non è nell'immagine di f
$\Rightarrow f$ non è una biezione. $\lightning$

$\square$