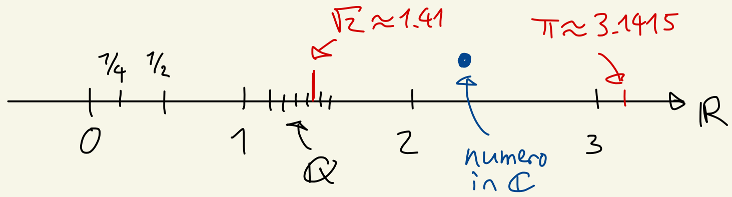
Lezione 2: Numeri complessi (Parte I)



Numeri complessi

Def: Un numero complesso è un oggetto algebrico che si scrive nel modo $a+bi$, dove a & b sono numeri reali.

i = unità immaginaria con $i^2 = -1$.

Esempio: $\sqrt{7}$, $3+2i$, $\pi+\sqrt{7}i$, $-123i$ sono numeri complessi.

Somma: $(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$

Molt.: $(a+bi)\cdot(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2$

$$\overset{i^2=-1}{=} (ac-bd)+(ad+bc)i$$

[Solo in lezione: esempi espliciti.]

Def: Se $z = a+bi$ è un numero complesso, chiamiamo $a = \mathrm{Re}(z)$ la parte reale, $b = \mathrm{Im}(z)$ la parte immaginaria.

(Se $b=0$ & $d=0$, allora
$(a+bi)\cdot(c+di) = a\cdot c$
la molt. complessa diventa la molt. di due numeri reali. $\Rightarrow$ Possiamo dire $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ con le stesse operazioni)

Abbiamo allora esteso la sequenza di insiemi:

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$$ = insieme dei numeri complessi

Proprietà di $\mathbb{C}$

(1) esiste un el. neutro per l'addizione $0\ (=0+0i)$

$$0+z = z+0 = z \quad , \quad z=a+bi \in \mathbb{C}$$

(2) l'addizione è commutativa: $z+w = w+z, \ \forall z,w \in \mathbb{C}$

(3) l'addizione è associativa:

$$(z+w)+v = z+(w+v), \quad \forall z,w,v \in \mathbb{C}$$

(4) ogni elemento $z=a+bi$ ha un inverso (o opposto) per l'addizione $(-z) = -a-bi$:

$$z+(-z) = (-z)+z = 0$$

(5) esiste un el. neutro per la molt. 1:

$$z \cdot 1 = 1 \cdot z = z \quad \text{per ogni } z \in \mathbb{C}.$$

(6) molt. è commutativa: $z \cdot w = w \cdot z$
$\forall z,w \in \mathbb{C}$

[$z = a+bi, \ w = c+di$

$$z \cdot w = ac-bd+(ad+bc)i$$
$$= ca-db+(bc+ad)i = w \cdot z$$]

(7) la molt. è associativa: $(z \cdot w) \cdot v = z \cdot (w \cdot v)$
$\forall z,w,v \in \mathbb{C}$.

[Verificazione con calcolo esplicito usando
$z=a+bi, \ w=c+di, \ v=e+fi$
$\Rightarrow$ solo in lezione.]

(8) ogni elemento $z \in \mathbb{C}$ con $z \neq 0$ ha un inverso z^{-1} per cui $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$.

[$z = a+bi \neq 0$ $(\Leftrightarrow a^2+b^2 \neq 0)$

Definisco $w = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$ (posso fare perché il denominatore non è zero)

$$z \cdot w = (a+bi) \cdot \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

$$= (a^2+b^2) + (\underbrace{a(-b)+ba}_{=0})i \; / a^2+b^2 = 1$$

$\Rightarrow$ w è l'inverso di z.]

(9) Vale la proprietà distributiva:

$$z \cdot (w+v) = z \cdot w + z \cdot v, \quad \forall z, w, v \in \mathbb{C}.$$

Allora, come $\mathbb{R}$, anche $\mathbb{C}$ è un campo.

Una differenza fondamentale tra $\mathbb{C}$ e tutti gli insiemi numerici visti prima $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})$ è che $\mathbb{C}$ NON è ordinato: non esiste una nozione di maggiore e minore fra numeri complessi!

[Si può dimostrare che in un campo ordinato un quadrato è sempre positivo, ma qui $i^2 = -1$ è negativo.]

Coniugio, norma – e inverso (di nuovo)

Se $z = a+bi \in \mathbb{C}$, il coniugio (o coniugato) di z è

$$\bar{z} = a - bi \in \mathbb{C}.$$

Allora $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$

Il modulo di z è il numero reale

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

$|z| = 0 \iff z = 0$ & $|z| > 0$ se $z \neq 0$.

Otteniamo $z \cdot \bar{z} = (a+bi)\cdot(a-bi) = a^2+b^2 = |z|^2$.

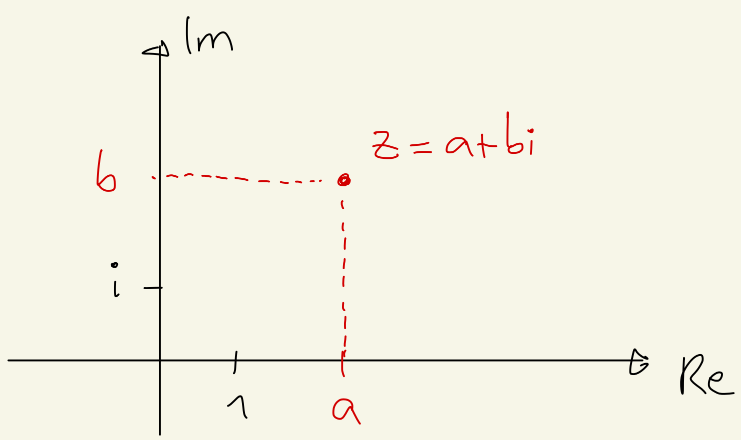
Allora l'inverso di z è $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

perché $z \cdot z^{-1} = \dfrac{z\cdot\bar{z}}{|z|^2} \overset{\text{sopra}}{=} \dfrac{|z|^2}{|z|^2} = 1$

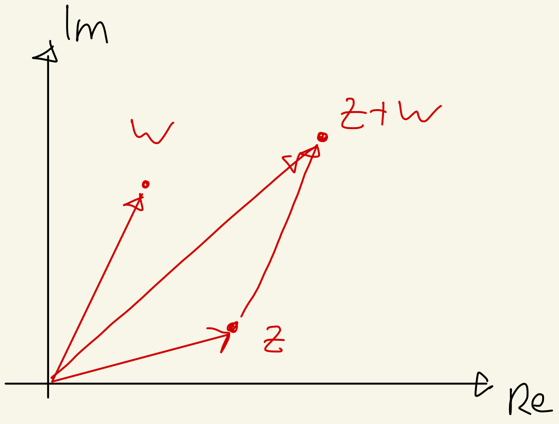
(Esempi solo in lezione.)

Il piano complesso

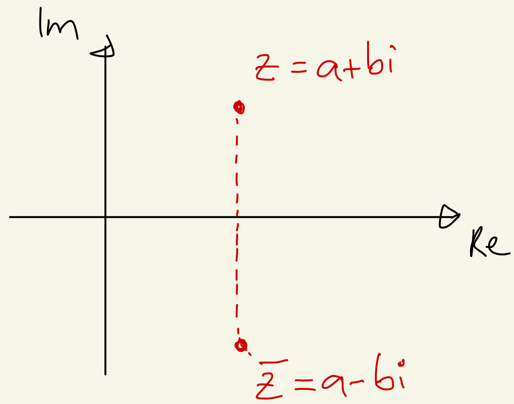
Mentre i numeri reali $\mathbb{R}$ formano una retta, i numeri complessi formano un piano. Possiamo identificare $a+bi$ con il punto (a,b) nel piano



La somma di due numeri complessi è una somma di vettori:



Il coniugo $z \mapsto \bar{z}$ è una riflessione alla retta dei numeri reali:



Per capire la moltiplicazione in modo "geometrico"
⇝ Lezione 3.

<u>Esercizio 1:</u> Dimostrare

1) $|z+w| \leq |z| + |w|$
2) $|zw| = |z| \cdot |w|$
3) $|z^{-1}| = |z|^{-1}$
4) $|z| = |\bar{z}|$
5) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$
6) $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

(Soluzioni solo in lezione!)

<u>Esercizio 2:</u> Semplificare

1) $(3+i)(3-i)\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10} i\right)$
2) $\dfrac{5}{(1-i)(2-i)(3-i)}$