Lezione 26: Teorema Spettrale (Parte I)

Sottospazi invarianti

Sia V uno spazio vettoriale reale con prodotto scalare definito positivo o uno spazio vettoriale complesso con un prodotto hermitiano definito positivo.

Prop 11.2.5: Sia $T: V \to V$ un endomorfismo autoaggiunto e $U \subset V$ un sottospazio. Se $T(U) \subset U$ allora anche $T(U^\perp) \subset U^\perp$.
[U è T-invariante $\Rightarrow$ $U^\perp$ è T-invariante.]

Dim: Prendiamo un vettore qualsiasi $v \in U^\perp$, dobbiamo controllare che $T(v) \in U^\perp$. Sia $u \in U$

$$\langle T(v), u \rangle = \langle \underbrace{v}_{\in U^\perp}, \underbrace{T(u)}_{\in U} \rangle = 0$$

$\Rightarrow T(v) \in U^\perp$. $\square$

Teorema Spettrale

Teorema 11.3.1: Un endomorfismo $T: V \to V$ è autoaggiunto $\Leftrightarrow$ V ha una base ortonormale di autovettori di T & tutti gli autovalori sono reali. [In particolare ogni endomorfismo autoaggiunto è diagonalizzabile.]

Dim: "$\Leftarrow$": Se V ha una base $\mathcal{B}$ ortonormale di autovettori, la matrice $A = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ è diagonale e sulla diagonale sono gli autovalori. Se tutti gli autovalori sono reali, allora A è hermitiana. Proposizione 11.2.1 (Lezione 25) $\Rightarrow$ T è autoaggiunto.

"$\Rightarrow$": Dimostriamo prima che tutti gli autovalori sono reali. Se λ è un autovalore, esiste $v \neq 0$ con $T(v) = \lambda \cdot v$ (v: autovettore).

$$\Rightarrow \lambda \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \langle T(v), v \rangle$$

$$\overset{T \text{ autoaggiunto}}{=} \langle v, T(v) \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle$$

Visto che $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è definito positivo, $\langle v, v \rangle > 0$, allora otteniamo $\lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$.

Caso complesso: Dimostriamo adesso che V ha una base ortonormale di autovettori di T per induzione sulla dimensione di V.

Se $\dim V = n = 1$: tutti gli endomorfismi $T: V \to V$ hanno una base ortonormale di autovettori formata da un elemento solo.

Supponiamo che il risultato vale per dimensione $n-1$ e lo dimostriamo per dimensione n.

Nel caso complesso, T ha sempre un autovalore λ e un autovettore associato $v \in V$, $v \neq 0$.

La retta $\mathrm{Span}(v)$ è T-invariante perché per ogni $w \in \mathrm{Span}(v)$ abbiamo $T(w) = \lambda w \in \mathrm{Span}(v)$

Prop 11.2.5 $\Rightarrow$ $U = \mathrm{Span}(v)^\perp$ è anche T-invariante cioè $T(U) \subset U$. Allora la restrizione

$$T|_U : U \to U$$

è un endomorfismo autoaggiunto di uno spazio vettoriale U in se stess con $\dim U = n-1$.

$\Rightarrow$ Per l'ipotesi induttiva, esiste una base $v_2, \dots, v_n$ ortonormale di U formata da autovettori di $T|_U$. Questi vettori sono anche autovettori di T. $\Rightarrow$ $\mathcal{B} = \{v, v_2, \dots, v_n\}$ è una base di V & se v è normalizzato questa base è ortonormale.

Conseguenza: Se $L_S : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ con S una matrice simmetrica & con entrate reali, allora S è hermitiana e L_S è un endomorfismo autoaggiunto. $\Rightarrow$ tutti gli autovalori di S (o di L_S) sono reali e esiste una base ortonormale di autovettori di $\mathbb{C}^n$.

Caso reale: Sia $L_S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorfismo auto-aggiunto, allora S è simmetrica e possiamo considerare $L_S : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ con questa matrice S.

Dalla consegnenza sopra, tutti gli autovalori di S sono reali e esiste una base ortonormale di autovettori. $\square$

Cor 11.3.2: Sia A una matrice $n \times n$ reale, $A \in M(n, \mathbb{R})$. Allora sono equivalenti:

i) A è simmetrica

ii) $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ha una base ortonormale di autovettori

iii) esiste una matrice M ortogonale tale che
$$ {}^t M A M = M^{-1} A M = \Lambda $$ è una matrice diagonale.

Dim: L'equivalenza $(i) \Leftrightarrow (ii)$ è il Teorema Spettrale. L'esistenza di una base ortonormale $\mathcal{B}$ per L_A è equivalente all'esistenza di una matrice $M = [id]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$ tale che $M^{-1} A M = \Lambda$ ($\mathcal{A}$ = base canonica). con Λ diagonale. Se $\mathcal{B}$ è ortonormale, allora M è ortogonale, quindi $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ [notando anche $M^{-1} = {}^t M$ per matrici ortogonali]. $\square$

Esercizi

Esercizio 1: Verificare che la matrice A ha una base ortonormale di autovettori mentre la matrice B no,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sol: Per A otteniamo $p_A(\lambda) = \det(\lambda \cdot I_2 - A)$

$$= \det \begin{pmatrix} \lambda-3 & -1 \\ -1 & \lambda-1 \end{pmatrix} = (\lambda-3)(\lambda-1) - 1$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 2$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ molt. alg. $(\lambda_{1,2})$ = molt. geom. $(\lambda_{1,2}) = 1$

Troviamo gli autospazi

$$(\lambda_1 \cdot I_2 - A)x = 0 \iff \begin{pmatrix} -1+\sqrt{2} & -1 \\ -1 & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff (-1+\sqrt{2})x_1 - x_2 = 0$$

$$\iff x_1 = \frac{x_2}{-1+\sqrt{2}} = \frac{(-1-\sqrt{2})x_2}{1-2} = (1+\sqrt{2})x_2$$

$$V_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} (1+\sqrt{2})t \\ t \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Span}(v_1)$$

$$(\lambda_2 \cdot I_2 - A)x = 0 \iff \begin{pmatrix} -1-\sqrt{2} & -1 \\ -1 & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} (1-\sqrt{2})t \\ t \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Span}(v_2)$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1-2+1 = 0$$

allora v_1 & v_2 sono ortogonali e

$\left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|} \right\}$ è una base ortonormale.

Per B otteniamo $p_B(\lambda) = \det(\lambda \cdot I_2 - B)$

$$= \det\begin{pmatrix} \lambda-3 & -1 \\ 0 & \lambda-1 \end{pmatrix} = (\lambda-3)(\lambda-1)$$

Allora $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$ tutti e due con molt. alg. = molt. geom. = 1. Allora anche B è diagonalizzabile!

$$(\lambda_1 \cdot I_2 - B)x = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x_2 = 0$$

$$V_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Span}(v_1)$$

$$(\lambda_2 \cdot I_2 - B)x = 0 \iff \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff 2x_1 + x_2 = 0 \iff x_1 = -\frac{x_2}{2}$$

$$V_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} -t/2 \\ t \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \operatorname{Span}(v_2)$$

Ogni autovettore con autovalore λ_1 è un multiplo di v_1 & ogni autovettore con autovalore λ_2 è un multiplo di v_2. Possiamo solo trovare autovettori ortogonali se $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$, ma

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = -1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Non esiste una base ortonormale di autovettori.

Esercizio 2: Trovare una base ortonormale di autovettori per la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sol: A è simmetrica, allora per il Teorema Spettrale esiste una base ortonormale di autovettori ($\Rightarrow A$ è diagonalizzabile)

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda \cdot I_3 - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda-2) \det \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda-2) [\underbrace{(\lambda-1)^2 - 1}_{= \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda-2)}]$$

$$= \lambda (\lambda-2)^2$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0$ con molt. alg. = molt. geom. = 1

$\lambda_2 = 2$ con molt. alg. = molt. geom. = 2

perché sappiamo che A è diagonalizzabile.

$$\Rightarrow (\lambda_1 \cdot I_3 - A)x = 0 \Leftrightarrow -Ax = 0 \Leftrightarrow Ax = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$V_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -t \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}(v_1)$$

$$(\lambda_2 \cdot I_3 - A)x = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff x_1 - x_3 = 0$$

$$V_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ s \\ t \end{pmatrix} ; t, s \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \operatorname{Span}(v_2, v_3)$$

Abbiamo scelto v_2, v_3 ortogonali!

[Se non si riesce a scegliere direttamente così, usiamo l'algoritmo di Gram-Schmidt.]

v_1 è automaticamente ortogonale a V_{λ_2} (per la teoria della lezione di oggi)

Per ottenere una base di autovettori ortonormale dobbiamo normalizzare v_1, v_2, v_3

$$\Rightarrow \quad w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{v_1}{\sqrt{\langle v_1, v_1 \rangle}} = \frac{v_1}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{v_2}{\sqrt{\langle v_2, v_2 \rangle}} = \frac{v_2}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$w_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow \{w_1, w_2, w_3\}$ è una base ortonormale di autovettori di A.

Possiamo verificare che con $M = [id]^{\{w_1, w_2, w_3\}}_{\mathcal{A}}$ $\mathcal{A}$ base canonica

$$M = (w_1 | w_2 | w_3) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}$$

otteniamo

$$^tM \cdot A \cdot M = M^{-1} \cdot A \cdot M = \Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$