Lezione 24: Lo Spazio Euclideo (Parte III)

Ci ricordiamo che due sottospazi affini $S, S' \subset \mathbb{R}^n$ sono incidenti se $S \cap S' \neq \emptyset$.

Prop 9.2.7 Se $\operatorname{giac}(S) + \operatorname{giac}(S') = \mathbb{R}^n$ allora S e S' sono incidenti.

Dim: Abbiamo
$$S = \{P + t_1 v_1 + \dots + t_k v_k\}$$
$$S' = \{Q + s_1 w_1 + \dots + s_e w_e\}$$

I due spazi affini sono incidenti, se e solo se il sistema $P + t_1 v_1 + \dots + t_k v_k = Q + s_1 w_1 + \dots + s_e w_e$ (in variabili $t_1, \dots, t_k, s_1, \dots, s_e$) ha soluzioni.

Se $v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_e$ generano tutto $\mathbb{R}^n$ ($\Leftrightarrow \operatorname{giac}(S) + \operatorname{giac}(S') = \mathbb{R}^n$) possiamo scrivere $P - Q$ come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_e$ e allora

$$P - Q = -t_1 v_1 - \dots - t_k v_k + s_1 w_1 + \dots + s_e w_e$$
$$\Leftrightarrow P + t_1 v_1 + \dots + t_k v_k = Q + s_1 w_1 + \dots + s_e w_e$$

$\square$

Esempio: Se $\pi = \{P + t_1 v_1 + t_2 v_2\}$ (piano)
& $r = \{Q + s v_3\}$ (retta)

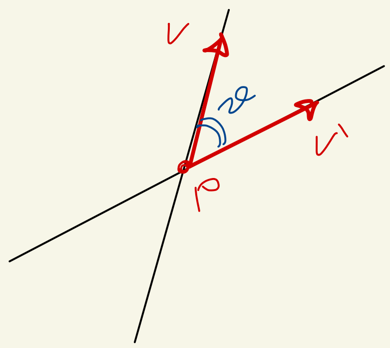
Allora se v_1, v_2, v_3 sono generatori di $\mathbb{R}^3$
($\Leftrightarrow v_1, v_2, v_3$ sono una base di $\mathbb{R}^3$
$\Leftrightarrow v_1, v_2, v_3$ sono lin. indipendenti
$\Leftrightarrow \det(v_1 | v_2 | v_3) \neq 0$)

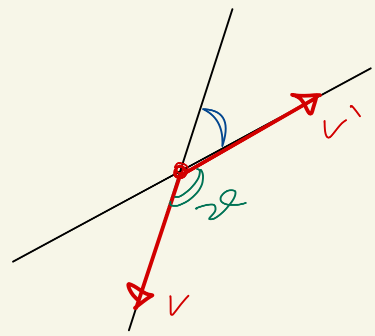
allora $\Pi \cap r$ è punto.

Angoli fra sottospazi incidenti (in $\mathbb{R}^3$)

1) Angolo tra rette: Siano r & r' due rette in $\mathbb{R}^3$ che sono incidenti in un punto P.

$r = P + \mathrm{Span}(v)$, $r' = P + \mathrm{Span}(v')$





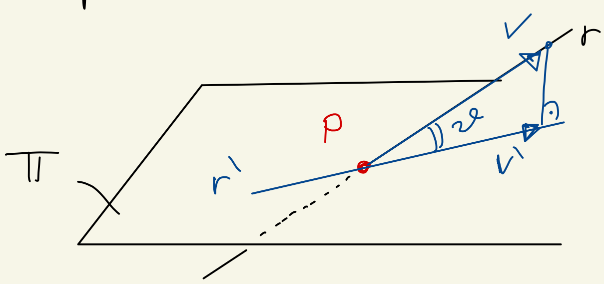
L'angolo tra r & r' è $\leq \frac{\pi}{2}$ & è uguale a

- ϑ (= l'angolo tra v & v')
- $\pi - \vartheta$ (dove ϑ è l'angolo tra v, v')

Ci ricordiamo che l'angolo ϑ tra v & v' è dato da

$$\cos \vartheta = \frac{\langle v, v' \rangle}{\|v\| \cdot \|v'\|}$$

2) Angolo tra retta e piano: Sia r una retta e Π un piano che sono incidenti in un punto.



Dopo una traslazione possiamo assumere che $P = 0$ ($\Rightarrow r, \Pi$ son sottospazi)

A questo punto possiamo considerare la proiezione ortogonale $p_\pi : \mathbb{R}^3 \to \pi \subset \mathbb{R}^3$.

Se $r = P + \text{Span}(v) = \text{Span}(v)$, denotiamo con $v' = p_\pi(v)$ e definiamo l'angolo fra π & r come l'angolo fra v & v'.

[Questo è l'angolo fra r & r' dove r' è la proiezione di r sul piano π.]

Abbiamo visto: se v_1, v_2 formano una base ortogonale per π (questo possiamo ottenere con l'algoritmo di Gram-Schmidt), allora

$$p_\pi(v) = p_{v_1}(v) + p_{v_2}(v) = \frac{\langle v, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} \cdot v_1 + \frac{\langle v, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} \cdot v_2$$

Esempio: Sia $\pi = \{x + y - z = 0\}$ & $r = \text{Span}(e_3)$

Prima cerchiamo una base ortogonale per π, troviamo per esempio

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A questo punto troviamo la proiezione ortogonale su π nel seguente modo:

$$p_\pi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{x + y + 2z}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{x - y}{6} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4x - 2y + 2z \\ -2x + 4y + 2z \\ 2x + 2y + 4z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ -x + 2y + z \\ x + y + 2z \end{pmatrix}$$

Allora la proiezione ortogonale è $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

dove $\quad A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

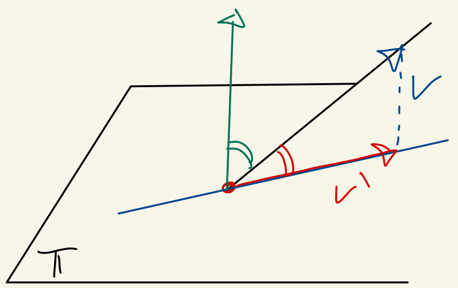
In particolare $p_\Pi(e_3) = A \cdot e_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = v'$

L'angolo fra Π & e_3 è

$$\vartheta = \arccos \frac{\langle 3v', e_3 \rangle}{\|3v'\| \cdot \|e_3\|} = \arccos \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{1}}$$

$$= \arccos \frac{2}{\sqrt{6}} = \arccos \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0.615 \mathrel{\hat{=}} 35.3°$$

<u>Prop:</u> L'angolo fra v & Π e l'angolo fra v è il vettore ortogonale[1] al piano si sommano a $\frac{\pi}{2}$.



1) dobbiamo scegliere il vettore ortogonale che ha angolo acuto con v. ($\Leftrightarrow$ pr. scalare con v positivo)

Esempio: Nel esempio di prima $\Pi = \{x+y-z=0\}$ ottieniamo il vettore ortogonale

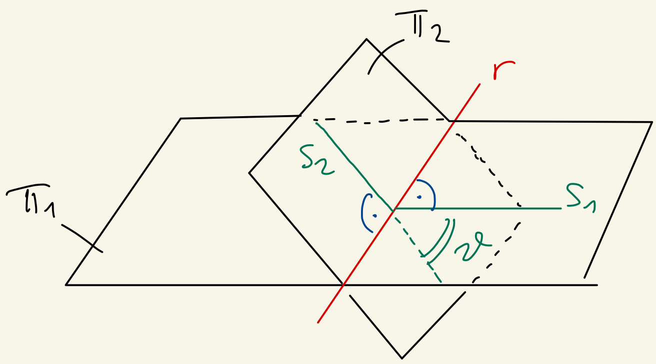
$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ +1 \end{pmatrix} \qquad [\langle v_1, e_3 \rangle = 1 \ \checkmark]$$

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{\langle v_1, e_3 \rangle}{\|v_1\| \cdot \|e_3\|} = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\approx 1.57 - 0.955 = 0.615 \quad (\text{come prima})$$

3) Angolo fra piani

Siano Π_1 & Π_2 due piani che sono incidenti in una retta $r = \Pi_1 \cap \Pi_2$. L'angolo diedrale fra Π_1 & Π_2 è definito così: si prendono due rette $s_1 \subset \Pi_1$, $s_2 \subset \Pi_2$ incidenti con r & ortogonali a r. L'angolo diedrale fra Π_1 & Π_2 è l'angolo fra s_1 & s_2.



Prop: Siano v_1 & v_2 due vettori ortogonali a Π_1 & Π_2, rispett. Allora l'angolo fra Π_1 & Π_2 è uguale o all'angolo fra v_1 & v_2 o π − questo angolo.

Esempio: $\Pi_1 = \{x+y-z=3\}$

$\Pi_2 = \{x-y-z=9\}$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sono vettori ortogonali a Π_1 & Π_2, rispettivamente.

$$\vartheta = \arccos \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\underbrace{\|v_1\|}_{\sqrt{\langle v_1, v_1 \rangle} = \sqrt{3}} \cdot \|v_2\|} = \arccos \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \arccos \frac{1}{3}$$

$$\approx 1.230 \mathrel{\hat{=}} 70.5° .$$

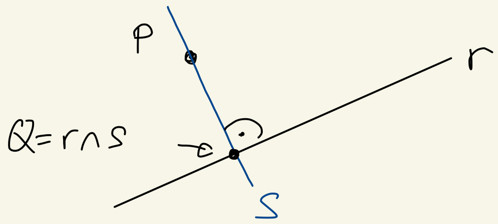
Distanze fra sottospazi affini disgiunti ($d(S,S')$)

1) Distanza fra punti

$$d(P,Q) = \| \overrightarrow{PQ} \| = \| Q-P \|$$

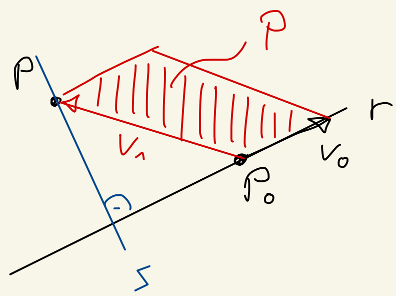
2) Distanza fra punto e retta

Se P è un punto e r è una retta con $P \notin r$ definiamo la retta s come retta ortogonale a r contenente P e con intersezione con r non vuota.



Poniamo $Q = r \cap s$ e definiamo

$$d(P,r) = d(P,Q).$$



$$\text{Area}(\mathcal{P}) = \|v_0\| \cdot d(P,r)$$
$$= \| v_0 \times v_1 \|$$

Prop 9.2.36

Se $r = \{P_0 + t v_0\}$ e $v_1 = \overrightarrow{P_0 P} = P - P_0$ allora

$$d(P,r) = \frac{\|v_0 \times v_1\|}{\|v_0\|}.$$

Esempio: $P = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $r = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Allora

$$d(P,r) = \frac{\|v_0 \times v_1\|}{\|v_0\|} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|}$$

$P - P_0$ con $P_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= \frac{\left\| \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -10 \end{pmatrix} \right\|}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{\cancel{2}\cdot 2\cdot 2\cdot 19}}{\sqrt{\cancel{2}\cdot 7}} = \frac{2}{7}\sqrt{7\cdot 19}$$

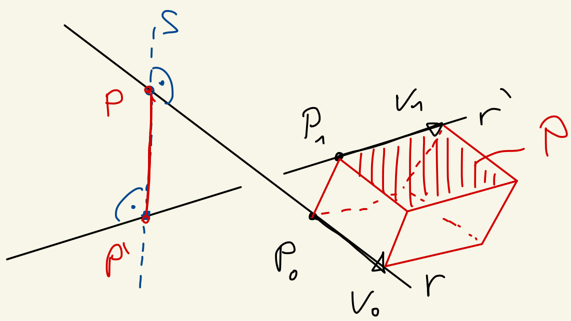
$$= \frac{2}{7}\sqrt{133}$$

3) Distanza fra rette

Siano r & r' due rette disgiunti $\left(\begin{matrix} r = P_0 + \text{Span}(v_0) \\ r' = P_1 + \text{Span}(v_1) \end{matrix}\right)$
allora ci sono due possibilità

- r & r' sono paralleli ($\Leftrightarrow$ v_0 & v_1 sono dipendenti)
  $\Rightarrow d(r, r') = d(P, r')$ dove $P \in r$ è un punto qualsiasi.
- r & r' sono sghembre ($\Leftrightarrow$ v_0 & v_1 sono indip.)

$\Rightarrow$ esiste una retta s che interseca r & r' in modo ortogonale in punti P, P'. Poniamo $d(r, r') = d(P, P')$. Poniamo $v_2 = P_1 - P_0$



$$\text{Vol}(\text{▱}) = |\det(v_0 | v_1 | v_2)|$$
$$= \|v_0 \times v_1\| \cdot d(r, r')$$

Prop 9.3.39: Se r & r' sono sghembre, allora

$$d(r, r') = \frac{|\det(v_0 | v_1 | v_2)|}{\|v_0 \times v_1\|}$$

dove $r = P_0 + tv_0$, $r' = P_1 + tv_1$, $v_2 = P_1 - P_0$.

Esempio:

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \{ P_0 + t v_0 \}$$

$$r' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} = \{ P_1 + s v_1 \}$$

$$\Rightarrow d(r,r') = \frac{\left| \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 6 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \right|}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\left| 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \right|}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix} \right\|}$$

$$= \frac{|(-32) + (-8)|}{\sqrt{2^2 + 7^2 + 4^2}} = \frac{40}{\sqrt{69}} = \frac{40\sqrt{69}}{69}.$$

4) Distanza fra punto e piano

[copre anche distanza fra retta & piano e distanz fra due piani.]

$$\Pi = \{ ax + by + cz = d \}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

Prop: $$d(P_0, \Pi) = \frac{|a x_0 + b y_0 + c z_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Esempio: $\Pi = \{ 2x - y + z = 4 \}$, $P_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow d(P_0, \Pi) = \frac{|2 \cdot 2 - 1 + (-2) - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$