Calcolo Matriciale e Ricerca Operativa
Esercitazioni
A.A. 22/23

Alessandro Druetto

Roberto Aringhieri — Andrea Grosso

di.unito.it

DIPARTIMENTO DI INFORMATICA
Università degli Studi di Torino

Programmi Lineari

Risolvere il seguente modello di Programmazione Lineare, in due variabili $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$, col metodo grafico; poi rispondere alle domande.

$$
\begin{array}{rrcrcr}
\max z = & 2x_1 & + & x_2 & & \\
\text{soggetto a:} & & & & & \\
 & & - & x_2 & \leq & 1 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & \geq & 1 \\
 & \frac{3}{2}x_1 & & & \leq & 4
\end{array}
$$

Se esiste una soluzione ottima, a quale dei seguenti punti corrisponde? In caso contrario, dire se il problema risulta illimitato o non ammette soluzione.

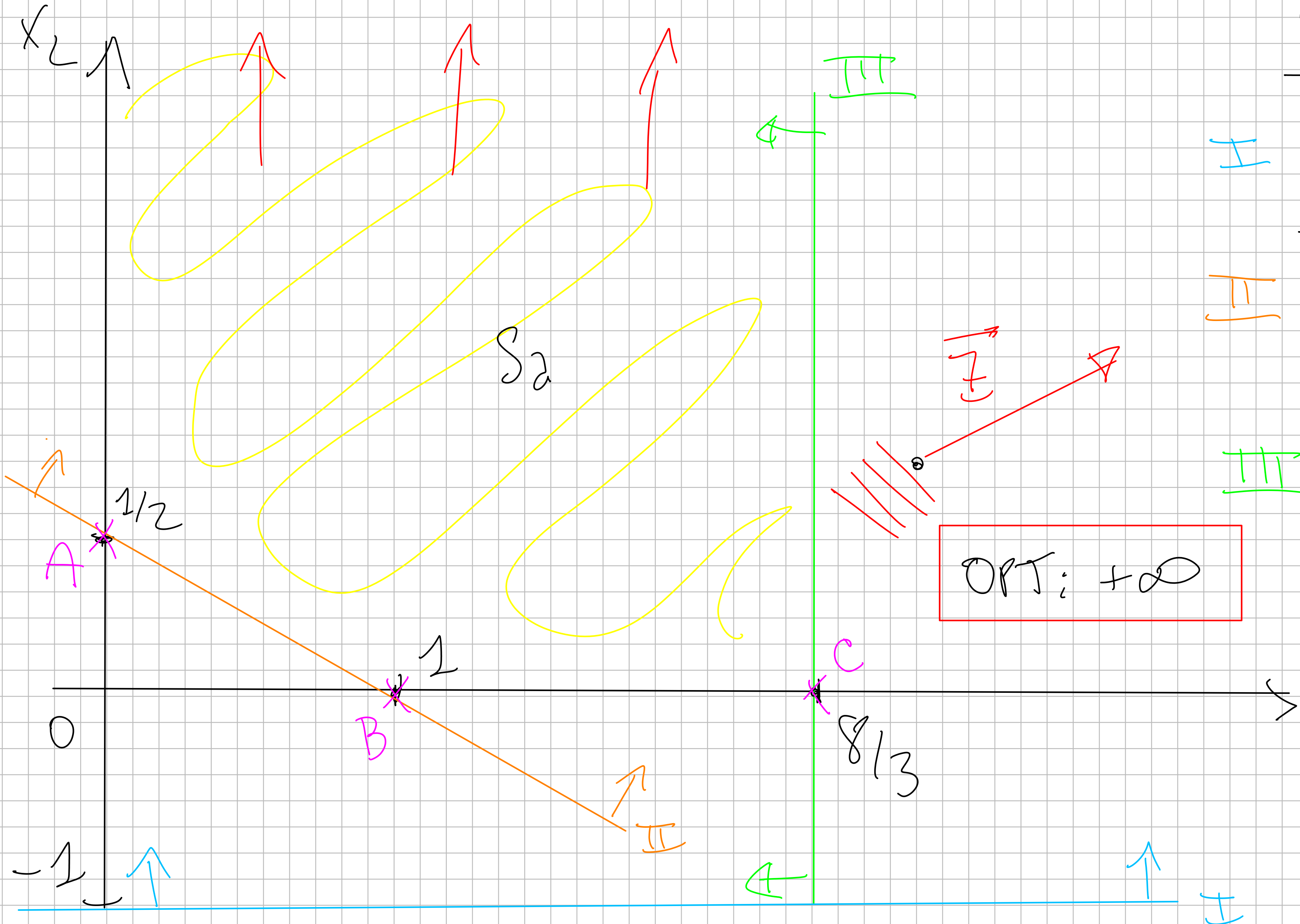
- ○ $x_1 = \frac{8}{3}, x_2 = 0$
- ○ $x_1 = \frac{8}{9}, x_2 = 0$
- ○ $x_1 = \frac{1}{7}, x_2 = 2$
- ○ problema illimitato
- ○ nessuna tra quelle indicate / non ammette soluzione

Risolvere il seguente modello di Programmazione Lineare, in due variabili $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$, col metodo grafico; poi rispondere alle domande.

$$\begin{array}{rrcrcr} \max z = & 2x_1 & + & x_2 & & \\ \text{soggetto a:} & & & & & \\ & & - & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & + & 2x_2 & \geq & 1 \\ & \frac{3}{2}x_1 & & & \leq & 4 \end{array}$$

Se esiste una soluzione ottima, a quale dei seguenti punti corrisponde? In caso contrario, dire se il problema risulta illimitato o non ammette soluzione.

- ○ $x_1 = \frac{8}{3}, x_2 = 0$
- ○ $x_1 = \frac{8}{9}, x_2 = 0$
- ○ $x_1 = \frac{1}{7}, x_2 = 2$
- ◉ problema illimitato
- ○ nessuna tra quelle indicate / non ammette soluzione



	x_1	x_2
I	/	-1
	/	-1
II	0	$1/2$
	1	0
III	$8/3$	/
	$8/3$	/

Considerando tutte le variabili $x_i \geq 0$, quale delle seguenti rappresenta la trasformazione in forma standard del problema?

- [a]

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrr}
\max z = & 2x_1 & - & x_2 & & & & & & & & & \\
\text{soggetto a:} & & & & & & & & & & & & \\
 & & - & x_2 & - & x_3 & & & & & = & 1 \\
 & -x_1 & + & 2x_2 & & & - & x_4 & & & = & 1 \\
 & \frac{3}{2}x_1 & & & & & & & - & x_5 & = & 4
\end{array}$$

- [b]

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrr}
\max z = & -2x_1 & + & x_2 & & & & & & & & & \\
\text{soggetto a:} & & & & & & & & & & & & \\
 & & - & x_2 & - & x_3 & & & & & = & 1 \\
 & x_1 & - & 2x_2 & & & - & x_4 & & & = & 1 \\
 & -\frac{3}{2}x_1 & & & & & & & - & x_5 & = & 4
\end{array}$$

- [c]

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrr}
\max z = & 2x_1 & - & x_2 & & & & & & & & & \\
\text{soggetto a:} & & & & & & & & & & & & \\
 & & + & x_2 & - & x_3 & & & & & = & 1 \\
 & -x_1 & - & 2x_2 & & & - & x_4 & & & = & 1 \\
 & -\frac{3}{2}x_1 & & & & & & & - & x_5 & = & 4
\end{array}$$

- [d]

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrr}
\max z = & 2x_1 & + & x_2 & & & & & & & & & \\
\text{soggetto a:} & & & & & & & & & & & & \\
 & & - & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 1 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & & & - & x_4 & & & = & 1 \\
 & \frac{3}{2}x_1 & & & & & & & + & x_5 & = & 4
\end{array}$$

○ a ○ b ○ c ○ d ○ nessuna tra quelle indicate

Considerando tutte le variabili $x_i \geq 0$, quale delle seguenti rappresenta la trasformazione in forma standard del problema?

- [a]

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrr} \max z = & 2x_1 & - & x_2 \\ \text{soggetto a:} \\ & & - & x_2 & - & x_3 & & & & & = & 1 \\ & -x_1 & + & 2x_2 & & & - & x_4 & & & = & 1 \\ & \frac{3}{2}x_1 & & & & & & & - & x_5 & = & 4 \end{array}$$

- [b]

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrr} \max z = & -2x_1 & + & x_2 \\ \text{soggetto a:} \\ & & - & x_2 & - & x_3 & & & & & = & 1 \\ & x_1 & - & 2x_2 & & & - & x_4 & & & = & 1 \\ & -\frac{3}{2}x_1 & & & & & & & - & x_5 & = & 4 \end{array}$$

- [c]

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrr} \max z = & 2x_1 & - & x_2 \\ \text{soggetto a:} \\ & & + & x_2 & - & x_3 & & & & & = & 1 \\ & -x_1 & - & 2x_2 & & & - & x_4 & & & = & 1 \\ & -\frac{3}{2}x_1 & & & & & & & - & x_5 & = & 4 \end{array}$$

- [d]

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrr} \max z = & 2x_1 & + & x_2 \\ \text{soggetto a:} \\ & & - & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 1 \\ & x_1 & + & 2x_2 & & & - & x_4 & & & = & 1 \\ & \frac{3}{2}x_1 & & & & & & & + & x_5 & = & 4 \end{array}$$

○ a ○ b ○ c ◉ d ○ nessuna tra quelle indicate

Associare a ciascuno dei seguenti punti la corrispondente base del problema in forma standard.

$(x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2})$

$(x_1 = 1, x_2 = 0)$

$(x_1 = \frac{1}{7}, x_2 = \frac{9}{2})$

$(x_1 = \frac{8}{3}, x_2 = 0)$

$(x_1 = \frac{3}{4}, x_2 = \frac{6}{5})$

Associare a ciascuno dei seguenti punti la corrispondente base del problema in forma standard.

$(x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2})$ x2 = 1/2, x3 = 3/2, x5 = 4

$(x_1 = 1, x_2 = 0)$ x1 = 1, x3 = 1, x5 = 5/2

$(x_1 = \frac{1}{7}, x_2 = \frac{9}{2})$ nessuna

$(x_1 = \frac{8}{3}, x_2 = 0)$ x1 = 8/3, x3 = 1, x4 = 5/3

$(x_1 = \frac{3}{4}, x_2 = \frac{6}{5})$ nessuna

$$\max z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{aligned} -x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 &= 1 \\ \tfrac{3}{2}x_1 + x_5 &= 4 \end{aligned}$$

$$x_1 \ldots x_5 \geq 0$$

$A(0, 1/2)$ $\quad x_1 = 0, \ \boxed{x_2 = 1/2}$ $\quad B : \{x_2, x_3, x_5\}$

$$\begin{cases} 0 - 1/2 + x_3 = 1 \\ 0 + 1 - x_4 = 1 \\ 0 + 0 + x_5 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} \boxed{x_3 = 3/2} \\ x_4 = 0 \\ \boxed{x_5 = 4} \end{cases}$$

$B(1,0)$ $\quad \boxed{x_1 = 1}, \quad x_2 = 0 \qquad B: \{x_1, x_3, x_5\}$

$$\begin{cases} 0 + 0 + x_3 = 1 \\ 1 + 0 - x_4 = 1 \\ 3/2 + 0 + x_5 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} \boxed{x_3 = 1} \\ x_4 = 0 \\ \boxed{x_5 = 5/2} \end{cases}$$

$C(8/3, 0)$ $\quad \boxed{x_1 = 8/3}, \quad x_2 = 0 \qquad B: \{x_1, x_3, x_4\}$

$$\begin{cases} 0 + 0 + x_3 = 1 \\ 8/3 + 0 - x_4 = 1 \\ 4 + x_5 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} \boxed{x_3 = 1} \\ \boxed{x_4 = 5/3} \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

Programmi Lineari

Considerare il seguente modello di Programmazione Lineare, con variabili $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$, in forma standard.

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\max z = & -\frac{3}{2}x_1 & + & x_2 & & & & & & & & \\
\text{soggetto a:} & & & & & & & & & & & \\
& -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 3 \\
& -2x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & & & - & x_4 & & & = & 4 \\
& -2x_1 & + & 3x_2 & & & & & - & x_5 & = & 2
\end{array}
$$

$B = \{x_2, x_3, x_5\}$

Quale delle seguenti rappresenta la riformulazione del problema nella base (x_2, x_3, x_5)?

- [a]

$$\begin{array}{rrcrcr}
\max z = & -\frac{7}{5} & - & \frac{3}{2}x_1 & - & \frac{1}{2}x_4 \\
\text{soggetto a:} & & & & & \\
x_2 = & 1 & - & 3x_1 & + & \frac{1}{3}x_4 \\
x_3 = & \frac{7}{4} & & & + & \frac{1}{9}x_4 \\
x_5 = & 7 & + & \frac{3}{7}x_1 & &
\end{array}$$

- [b]

$$\begin{array}{rrcrcr}
\max z = & 0 & + & \frac{4}{3}x_1 & - & \frac{5}{6}x_4 \\
\text{soggetto a:} & & & & & \\
x_2 = & 3 & + & 3x_1 & - & \frac{5}{4}x_4 \\
x_3 = & \frac{7}{6} & + & \frac{6}{7}x_1 & - & 7x_4 \\
x_5 = & \frac{4}{7} & - & \frac{7}{6}x_1 & + & \frac{5}{3}x_4
\end{array}$$

- [c]

$$\begin{array}{rrcrcr}
\max z = & 8 & + & \frac{5}{2}x_1 & + & 2x_4 \\
\text{soggetto a:} & & & & & \\
x_2 = & 8 & + & 4x_1 & + & 2x_4 \\
x_3 = & 11 & + & 5x_1 & + & 2x_4 \\
x_5 = & 22 & + & 10x_1 & + & 6x_4
\end{array}$$

- [d]

$$\begin{array}{rrcrcr}
\max z = & -1 & + & \frac{7}{9}x_1 & - & \frac{5}{6}x_4 \\
\text{soggetto a:} & & & & & \\
x_2 = & \frac{3}{8} & - & x_1 & - & x_4 \\
x_3 = & \frac{2}{3} & - & 6x_1 & + & \frac{2}{3}x_4 \\
x_5 = & \frac{6}{5} & - & 7x_1 & + & x_4
\end{array}$$

○ a ○ b ○ c ○ d ○ nessuna tra quelle indicate

Quale delle seguenti rappresenta la riformulazione del problema nella base (x_2, x_3, x_5)?

- [a]

$$\begin{array}{rrcrcr}
\max z = & -\frac{7}{5} & - & \frac{3}{2}x_1 & - & \frac{1}{2}x_4 \\
\text{soggetto a:} & & & & & \\
x_2 = & 1 & - & 3x_1 & + & \frac{1}{3}x_4 \\
x_3 = & \frac{7}{4} & & & + & \frac{1}{9}x_4 \\
x_5 = & 7 & + & \frac{3}{7}x_1 & &
\end{array}$$

- [b]

$$\begin{array}{rrcrcr}
\max z = & 0 & + & \frac{4}{3}x_1 & - & \frac{5}{6}x_4 \\
\text{soggetto a:} & & & & & \\
x_2 = & 3 & + & 3x_1 & - & \frac{5}{4}x_4 \\
x_3 = & \frac{7}{6} & + & \frac{6}{7}x_1 & - & 7x_4 \\
x_5 = & \frac{4}{7} & - & \frac{7}{6}x_1 & + & \frac{5}{3}x_4
\end{array}$$

- [c]

$$\begin{array}{rrcrcr}
\max z = & 8 & + & \frac{5}{2}x_1 & + & 2x_4 \\
\text{soggetto a:} & & & & & \\
x_2 = & 8 & + & 4x_1 & + & 2x_4 \\
x_3 = & 11 & + & 5x_1 & + & 2x_4 \\
x_5 = & 22 & + & 10x_1 & + & 6x_4
\end{array}$$

- [d]

$$\begin{array}{rrcrcr}
\max z = & -1 & + & \frac{7}{9}x_1 & - & \frac{5}{6}x_4 \\
\text{soggetto a:} & & & & & \\
x_2 = & \frac{3}{8} & - & x_1 & - & x_4 \\
x_3 = & \frac{2}{3} & - & 6x_1 & + & \frac{2}{3}x_4 \\
x_5 = & \frac{6}{5} & - & 7x_1 & + & x_4
\end{array}$$

○ a ○ b ◉ c ○ d ○ nessuna tra quelle indicate

$$\max z = -\tfrac{3}{2}x_1 + x_2 \qquad x_1 \dots x_5 \geq 0$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{aligned} -x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ -2x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 - x_4 &= 4 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_5 &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & \tfrac{1}{2} & 0 & -1 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccc} & & x_3 & & \end{array} \end{array} \qquad \begin{aligned} R_1 &\leftarrow R_1 + 2R_2 \\ R_2 &\leftarrow 2R_2 \\ R_3 &\leftarrow R_3 - 6R_2 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -5 & 0 & 1 & -2 & 0 & 11 \\ -4 & 1 & 0 & -2 & 0 & 8 \\ 10 & 0 & 0 & -6 & -1 & -22 \end{array}\right) \qquad R_3 \leftarrow -R_3$$

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc|c} -5 & 0 & 1 & -2 & 0 & 11 \\ -4 & 1 & 0 & -2 & 0 & 8 \\ -10 & 0 & 0 & 6 & 1 & 22 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccc} & x_2 & x_3 & & x_5 \end{array} \end{array} \qquad \begin{cases} x_3 = 11 + 5x_1 + 2x_4 \\ x_2 = 8 + 4x_1 + 2x_4 \\ x_5 = 22 + 10x_1 - 6x_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = 11 + 5x_1 + 2x_4 \\ x_2 = 8 + 4x_1 + 2x_3 \\ x_5 = 22 + 10x_1 - 6x_4 \end{cases}$$

$$z = -\tfrac{3}{2}x_1 + x_2$$

$$\overset{!}{=} -\tfrac{3}{2}x_1 + 8 + 4x_1 + 2x_3$$

$$\max\ z = 8 + \tfrac{5}{2}x_1 + 2x_4$$

$$\text{s.t.}\quad x_3 = 11 + 5x_1 + 2x_4$$

$$x_2 = 8 + 4x_1 + 2x_3$$

$$x_5 = 22 + 10x_1 - 6x_4$$

$$\mathcal{B} : \{x_2, x_3, x_5\}$$

Considerando la riformulazione richiesta al punto precedente, si risponda alle seguenti domande dopo aver eseguito una singola iterazione dell'algoritmo del simplesso come visto a lezione.

Quale valore assume la funzione obiettivo?

- ○ $z = \frac{1}{7}$
- ○ $z = 0$
- ○ $z = \frac{5}{8}$
- ○ $z = \frac{9}{8}$
- ○ $z = +\infty$
- ○ nessuna tra quelle indicate

Quale valore assumono invece le variabili in base?

- ○ $(x_2 = \frac{3}{2}, x_4 = \frac{4}{5}, x_5 = \frac{3}{2})$
- ○ $(x_3 = \frac{5}{7}, x_4 = \frac{8}{3}, x_5 = 0)$
- ○ $(x_1 = \frac{7}{9}, x_2 = 0, x_5 = \frac{7}{5})$
- ○ $(x_1 = \frac{8}{9}, x_2 = \frac{5}{4}, x_3 = \frac{9}{2})$
- ○ problema illimitato
- ○ nessuna tra quelle indicate

Al termine dell'iterazione del simplesso, l'algoritmo...

- ○ ...ha eseguito un cambio di base, facendo uscire di base x_5 e facendo entrare x_4.
- ○ ...ha eseguito un cambio di base, facendo uscire di base x_3 e facendo entrare x_1.
- ○ ...ha eseguito un cambio di base, facendo uscire di base x_2 e facendo entrare x_1.
- ○ ...termina, verificando la condizione di base ottima.
- ○ ...termina, verificando la condizione di base illimitata.

Considerando la riformulazione richiesta al punto precedente, si risponda alle seguenti domande dopo aver eseguito una singola iterazione dell'algoritmo del simplesso come visto a lezione.

Quale valore assume la funzione obiettivo?

- ○ $z = \frac{1}{7}$
- ○ $z = 0$
- ○ $z = \frac{5}{8}$
- ○ $z = \frac{9}{8}$
- ◉ $z = +\infty$
- ○ nessuna tra quelle indicate

Quale valore assumono invece le variabili in base?

- ○ $(x_2 = \frac{3}{2}, x_4 = \frac{4}{5}, x_5 = \frac{3}{2})$
- ○ $(x_3 = \frac{5}{7}, x_4 = \frac{8}{3}, x_5 = 0)$
- ○ $(x_1 = \frac{7}{9}, x_2 = 0, x_5 = \frac{7}{5})$
- ○ $(x_1 = \frac{8}{9}, x_2 = \frac{5}{4}, x_3 = \frac{9}{2})$
- ◉ problema illimitato
- ○ nessuna tra quelle indicate

Al termine dell'iterazione del simplesso, l'algoritmo...

- ○ ...ha eseguito un cambio di base, facendo uscire di base x_5 e facendo entrare x_4.
- ○ ...ha eseguito un cambio di base, facendo uscire di base x_3 e facendo entrare x_1.
- ○ ...ha eseguito un cambio di base, facendo uscire di base x_2 e facendo entrare x_1.
- ○ ...termina, verificando la condizione di base ottima.
- ◉ ...termina, verificando la condizione di base illimitata.

$$
\begin{array}{c|c}
 & \\
x_3 & \\
x_2 & \\
x_5 & \\
\end{array}
\left(\begin{array}{ccccc|c|c}
-5 & 0 & 1 & -2 & 0 & 11 & -11/5 \\
-4 & 1 & 0 & -2 & 0 & 8 & -8/4 \\
-10 & 0 & 0 & 6 & 1 & 22 & -22/10
\end{array}\right)
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & & & & & b &
\end{array}
$$

ILLIMITATO

OPT: $+\infty$

$$z = 8 + \frac{5}{2}x_1 + 2x_4$$

Algebra Lineare

Risolvere il seguente sistema di equazioni lineari con il metodo di Gauss-Jordan.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 & + & \frac{3}{2}x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ \frac{1}{2}x_1 & + & \frac{3}{2}x_2 & + & 3x_3 & = & 5 \\ & & & & x_3 & = & 2 \end{cases}$$

Indicare la risposta corretta. Il sistema:

○ ammette infinite soluzioni ○ ammette una soluzione unica ○ non ammette soluzione

Considerando la soluzione del sistema di equazioni lineari, indicare quale delle opzioni riportate è quella **corretta**.

○ $x_3 = 3$ ○ $x_3 = -\frac{2}{3}$ ○ $x_3 = \frac{8}{7}$ ○ nessuna tra quelle indicate / non ammette soluzione

Considerando la soluzione del sistema di equazioni lineari, indicare quale delle opzioni riportate è quella **corretta**.

○ $x_1 = -8 - 3x_2$ ○ $x_1 = \frac{9}{4} - x_2$ ○ $x_1 = -2 + 7x_2$ ○ nessuna tra quelle indicate / non ammette soluzione

Risolvere il seguente sistema di equazioni lineari con il metodo di Gauss-Jordan.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 & + & \frac{3}{2}x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ \frac{1}{2}x_1 & + & \frac{3}{2}x_2 & + & 3x_3 & = & 5 \\ & & & & x_3 & = & 2 \end{cases}$$

Indicare la risposta corretta. Il sistema:

○ ammette infinite soluzioni ○ ammette una soluzione unica ◉ non ammette soluzione

Considerando la soluzione del sistema di equazioni lineari, indicare quale delle opzioni riportate è quella **corretta**.

○ $x_3 = 3$ ○ $x_3 = -\frac{2}{3}$ ○ $x_3 = \frac{8}{7}$ ◉ nessuna tra quelle indicate / non ammette soluzione

Considerando la soluzione del sistema di equazioni lineari, indicare quale delle opzioni riportate è quella **corretta**.

○ $x_1 = -8 - 3x_2$ ○ $x_1 = \frac{9}{4} - x_2$ ○ $x_1 = -2 + 7x_2$ ◉ nessuna tra quelle indicate / non ammette soluzione

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1/2} & 3/2 & 2 & 2 \\ 1/2 & 3/2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \mathcal{E}_1 \leftarrow 2\mathcal{E}_1 \\ \mathcal{E}_2 \leftarrow \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{E}_3 \leftarrow \mathcal{E}_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \mathcal{E}_1 \leftarrow \mathcal{E}_1 - 4\mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_2 \leftarrow \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_3 \leftarrow \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 = -8 \\ x_3 = 3 \\ \boxed{0 = -1} \end{cases}$$

NESSUNA SOLUZIONE

Mix (Condimento Piccante)

La caffetteria ristorante "Dal Vecio" deve produrre almeno 30 kg del famoso condimento superpiccante. Per produrlo, il Vecio mischia tipicamente diverse varietà di peperoncini: (1) Habanero, (2) Naga Morich, (3) Cayenna, (4) Malese. La ricetta del Vecio prevede un mix con le seguenti caratteristiche, definite in percentuale di peso:

- almeno il 25% di Cayenna;
- almeno in 25% di Habanero;
- non più del 40% di Naga Morich;
- non più del 50% di Malese;
- Cayenna e Naga Morich insieme non possono superare il 50%.

Essendo passata la stagione dei peperoncini, anziché usare quelli autoprodotti il Vecio sfrutta un mix di condimenti piccanti confezionati che reperisce sul mercato.

Mix (Condimento Piccante)

Sono reperibili quattro tipi di confezioni A, B, C, D con le seguenti caratteristiche; il peso è misurato in kg per confezione ed il costo in € per confezione.

TIPO	PESO	COSTO	HAB. %	N.M. %	CAY. %	MAL. %
A	2	20	30	30	20	20
B	3	15	25	30	45	-
C	2.5	18	-	40	40	20
D	3	25	25	25	25	25

Il Vecio vuole acquistare ed usare completamente numeri (interi) di confezioni, e per farlo è anche disposto a produrre più di 30 kg di salsa, ma comunque non più di 40.

a. Scrivere il programma lineare che permette al Vecio di produrre la salsa a costo minimo, nelle quantità specificate.
b. Modificare il modello in modo che il Vecio utilizzi solo tre tipi di confezioni sulle quattro disponibili.

Mix (Condimento Piccante)

La decisione da rappresentare è quella di scegliere il numero di confezioni da utilizzare (e dunque acquistare) per ogni tipologia $i = (A, B, C, D)$. A tale scopo introduciamo le seguenti variabili decisionali intere.

$$x_i = \text{numero di confezioni di tipo } i \text{ utilizzate}$$

La funzione obiettivo, dovendo minimizzare il costo delle confezioni acquistate, si presenta dunque come segue.

$$\min z \equiv 20x_A + 15x_B + 18x_C + 25x_D$$

Mix (Condimento Piccante)

I seguenti vincoli modellano le cinque condizioni di composizione in percentuale della salsa secondo la ricetta del Vecio. Definiamo, per comodità, la somma $Q = 2x_A + 3x_B + 2.5x_C + 3x_D$ dei kg di prodotto acquistato in totale.

$$
\begin{aligned}
0.2 \cdot 2x_A + 0.45 \cdot 3x_B + 0.4 \cdot 2.5x_C + 0.25 \cdot 3x_D &\geq 0.25Q \\
0.3 \cdot 2x_A + 0.25 \cdot 3x_B + 0.25 \cdot 3x_D &\geq 0.25Q \\
0.3 \cdot 2x_A + 0.3 \cdot 3x_B + 0.4 \cdot 2.5x_C + 0.25 \cdot 3x_D &\leq 0.4Q \\
0.2 \cdot 2x_A + 0.2 \cdot 2.5x_C + 0.25 \cdot 3x_D &\leq 0.5Q \\
0.5 \cdot 2x_A + 0.75 \cdot 3x_B + 0.8 \cdot 2.5x_C + 0.5 \cdot 3x_D &\leq 0.5Q
\end{aligned}
$$

Inoltre, sappiamo che il Vecio vuole produrre non meno di 30 kg e non più di 40 kg di salsa.

$$
\begin{aligned}
Q &\geq 30 \\
Q &\leq 40
\end{aligned}
$$

Mix (Condimento Piccante)

Modello Finale

$$\min z \equiv 20x_A + 15x_B + 18x_C + 25x_D$$

soggetto a

$$Q = 2x_A + 3x_B + 2.5x_C + 3x_D$$

$$Q \geq 30$$

$$Q \leq 40$$

$$0.2 \cdot 2x_A + 0.45 \cdot 3x_B + 0.4 \cdot 2.5x_C + 0.25 \cdot 3x_D \geq 0.25Q$$

$$0.3 \cdot 2x_A + 0.25 \cdot 3x_B + 0.25 \cdot 3x_D \geq 0.25Q$$

$$0.3 \cdot 2x_A + 0.3 \cdot 3x_B + 0.4 \cdot 2.5x_C + 0.25 \cdot 3x_D \leq 0.4Q$$

$$0.2 \cdot 2x_A + 0.2 \cdot 2.5x_C + 0.25 \cdot 3x_D \leq 0.5Q$$

$$0.5 \cdot 2x_A + 0.75 \cdot 3x_B + 0.8 \cdot 2.5x_C + 0.5 \cdot 3x_D \leq 0.5Q$$

$$x_A, x_B, x_C, x_D \in \mathbb{Z}_+$$

Mix (Condimento Piccante)

Per la modifica al modello, è necessario introdurre delle nuovi variabili binarie y_i che assumono valore 1 se si utilizza la confezione i, e 0 altrimenti. Il vincolo che richiede di adoperare al più tre tipi di confezioni sui quattro disponibili si scrive come segue.

$$y_A + y_B + y_C + y_D \leq 3$$

Per impedire alle variabili x ed y di assumere valori incoerenti, prendiamo un valore $M \in \mathbb{Z}_+$ grande a piacere e aggiungiamo al modello i seguenti vincoli (detti "vincoli di Big-M" per l'appunto).

$$x_A \leq M y_A$$
$$x_B \leq M y_B$$
$$x_C \leq M y_C$$
$$x_D \leq M y_D$$