Lezione 18: Autovalori & autovettori (Parte II)

Ci ricordiamo: (Lezione 17)

- $T: V \to V$ endomorfismo, v è autovettore con autovalore $\lambda \iff v \neq 0$ & $T(v) = \lambda v$
- $A \in M(n, \mathbb{K})$, v è un autovettore di A con autovalore $\lambda \iff v \neq 0$ & $A \cdot v = \lambda v$
- $A \in M(n, \mathbb{K})$ definiamo il polinomio caratteristico $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_n)$
- λ è un autovalore di $A \iff p_A(\lambda) = 0$
- Un endomorfismo / una matrice è diagonalizzabile se e solo se esiste una base (di V) formata da autovettori.

Prop 5.1.24: Se A & B sono matrici simili, allora $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$.

Dim: A è simile a $B \Rightarrow A = M^{-1} B M$ per qualche M.

Notiamo anche $\lambda \cdot I_n = \lambda \cdot M^{-1} \cdot I_n \cdot M = M^{-1}(\lambda I_n) M$

Allora
$$\begin{aligned}
p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_n) \\
&= \det(M^{-1} B M - M^{-1}(\lambda \cdot I_n) M) \\
&= \det(M^{-1}(B - \lambda I_n) M) \\
&= \det(M)^{-1} \cdot \det(B - \lambda I_n) \cdot \det(M) \\
&= \cancel{\det(M)^{-1} \cdot \det(M)} \det(B - \lambda I_n) \\
&= p_B(\lambda).
\end{aligned}$$

Teorema di Binet

$\square$

Def: Se $T: V \to V$ è un endomorfismo. Definiamo il polinomio caratteristico di T come $p_T(\lambda) = p_A(\lambda)$ dove $A = [T]_B^B$ per qualche base B di V. [Per la proposizione sopra, $p_T(\lambda)$ non dipende dalla base B !]

Autovettori con autovalori distinti

Prop 5.2.1: Se $v_1, \dots, v_k \in V$ sono autovettori di T con autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ distinti. Allora $v_1, \dots, v_k$ sono lin. indipendenti.

Dim: Induzione su k: Se $k=1$ il vettore v_1 è lin. indipendente perché $v_1 \neq 0$ (def. di autovettore).

Diamo per buono il caso di $k-1$ vettori e dimostriamo la proposizione per k vettori:
Supponiamo per assurdo di avere una combinazione lineare $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$ $(*)$ dove non tutti α_i sono zero, supponiamo per esempio che $\alpha_1 \neq 0$.

- $\overset{(*)\cdot\lambda_1}{\Longrightarrow}$ $\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_1 v_2 + \dots + \alpha_k \lambda_1 v_k = 0$
- $\overset{\text{applichiamo } T}{\Longrightarrow}$ $T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k) \overset{T \text{ lin.}}{=} \alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_k T(v_k)$

$$= \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \dots + \alpha_k \lambda_k v_k = T(0) = 0$$

$\overset{\text{Differenza}}{\Longrightarrow}$ $\alpha_2 \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} v_2 + \dots + \alpha_k \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_k)}_{\neq 0} v_k = 0$

$\Rightarrow v_2, \dots, v_k$ non sono lin. indipendenti ↯ $\square$

Cor 5.2.2: Se il polinomio caratteristico $p_T(\lambda)$ ha n radici distinte in $\mathbb{K}$, allora l'endomorfismo T è diagonalizzabile.

Autospazio

Def: Sia $T: V \to V$ un endomorfismo. Per ogni autovalore λ di T definiam l'<u>autospazio</u>

$$V_\lambda = \{v \in V / v \text{ autovettore con autovalore } \lambda\} \cup \{0\}$$
$$= \{v \in V / T(v) = \lambda v\}$$
$$= \ker(T - \lambda \cdot id)$$

$T(v) = \lambda v \Leftrightarrow (T - \lambda \cdot id)(v) = 0$

Questo è un <u>sottospazio</u> di V.

Def: Se V è uno spazio vettoriale, V_1 & V_2 sottospazi, si dice che V_1 e V_2 <u>sono in somma diretta</u> se $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. In questo caso, la <u>somma diretta</u> $V_1 \oplus V_2$ è il sottospazio di elementi $v = v_1 + v_2$ con $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$.

Prop: Sia $T: V \to V$ un endomorfismo e $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ i suoi autovalori. I corrispettivi autospazi $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_k}$ sono sempre in somma diretta.

Dim: Dobbiamo mostrare che

$$V_{\lambda_i} \cap (V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_{i-1}} + V_{\lambda_{i+1}} + \dots + V_{\lambda_k}) = \{0\}$$

Supponiamo per assurdo che $v_i \neq 0$ è nell'intersezione: $V_{\lambda_i} \ni v_i = v_1 + \ldots + v_{i-1} + v_{i+1} + \ldots + v_k$ con $v_j \in V_{\lambda_j}$.

$\Rightarrow v_1 + \ldots + v_{i-1} - v_i + v_{i+1} + \ldots + v_k = 0$

$\Rightarrow v_1, \ldots, v_k$ sono lin. dipendenti.

Però hanno tutti autovalori distinti e con la proposizione di prima devono allora essere indipendenti.

$\lightning$ $\square$

Cor 5.2.8: T è diagonalizzabile se e solo se $V = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}$.

Dim: Sappiamo già che gli autospazi sono in somma diretta. Dobbiamo dimostrare che esiste una base di autovettori ($\Leftrightarrow T$ è diag.)

$\Leftrightarrow V = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k} = V_{\lambda_1} + \ldots + V_{\lambda_k}$

"$\Rightarrow$" Se esiste una base di autovettori, allora ogni vettore v è comb. lineare di questa base

$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \in V_{\lambda_1} + \ldots + V_{\lambda_k}$

"$\Leftarrow$" Unendo le basi di V_{λ_j} otteniamo una base di V formata da autovettori. $\square$

Molteplicità algebrica & geometrica

Def: Sia $T: V \to V$ un endomorfismo e sia λ un autovalore di T. La molteplicità algebrica $m_a(\lambda)$ è la molteplicità di λ come radice di $p_T(\lambda)$.
La molteplicità geometrica $m_g(\lambda)$ è la dimensione dell'autospazio V_λ.

Esempio 1: $L_A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2$$

$\lambda = 1$ è l'unica radice, allora $\lambda = 1$ è l'unico autovalore di A con $m_a(1) = 2$.

La molteplicità geometrica è

$$m_g(1) = \dim V_1 = \dim(\ker(A - I_2))$$
$$= \dim\{\text{soluzioni di } (A - I_2)x = 0\}$$
$$= \underbrace{2}_{\dim \mathbb{R}^2} - \operatorname{rk}(A - I_2)$$

Rouché-Capelli

$$= 2 - \operatorname{rk}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1.$$

In generale vale

Prop 5.2.10: Sia $T: V \to V$ un endomorfismo e λ un autovalore di T allora

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$$

Teorema di diagonalizzabilità

Teorema 5.2.12: Un endomorfismo $T: V \to V$ ← dim $V = n$ è diagonalizzabile se valgono entrambi i seguenti fatti:

(1) $p_T(\lambda)$ ha n radici in $\mathbb{K}$ (contante con molt.)

(2) $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$ per ogni autovalore λ.

Dim: Sappiamo che gli autospazi sono in somma diretta e definiamo $W = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k} \subseteq V$.

Sappiamo che T è diagonalizzabile $\Leftrightarrow W = V$
$\Leftrightarrow \dim W = \dim V \Leftrightarrow \dim W = n$.

Abbiamo usa che $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_k}$ sono in somma diretta

$$\dim W = \dim V_{\lambda_1} + \dots + \dim V_{\lambda_k}$$

$$= m_g(\lambda_1) + \dots + m_g(\lambda_k)$$

$$\overset{\text{Prop}}{\leq} m_a(\lambda_1) + \dots + m_a(\lambda_k)$$

$$\leq \text{grado di } p_A(\lambda) = n$$

$\dim W = n$ se e solo se abbiamo "=" invece di "≤" sopra (2 volte).
$\Leftrightarrow$ (1) & (2) del teorema. □

Esempio 2: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Abbiamo visto che
$m_g(1) = 1 \neq 2 = m_a(1)$
$\Rightarrow A$ <u>non</u> è diagonalizzabile.

Esempio 3: $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M(3, \mathbb{R})$.

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ -4 & -1-\lambda & -8 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda) \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -8 \\ 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (3-\lambda)^2(-1-\lambda)$$

$\lambda_1 = 3$ con $m_a(\lambda_1) = 2$

$\lambda_2 = -1$ con $m_a(\lambda_2) = 1$

Abbiamo tre autovalori (contate con molt.) reali allora A è diagonalizzabile se e solo se $m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$, $i = 1, 2$.

•) Per λ_2 sappiamo $1 \leq m_g(\lambda_2) \leq m_a(\lambda_2) = 1$

$\Rightarrow m_g(\lambda_2) = m_a(\lambda_2)$

•) Per λ_1 calcoliamo

$$m_g(\lambda_1) = \underset{\dim V}{3} - rk(A - 3I_3) = 3 - rk \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 3 - 1 = 2 = m_a(\lambda_1)$$

$\Rightarrow A$ è diagonalizzabile.

Esercizio: $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & t+4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M(3, \mathbb{R})$

dove $t \in \mathbb{R}$ è un parametro. Per quali t A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$?

Sol: $\quad p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & t+4 & 1 \\ -1 & -3-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda) \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & t+4 \\ -1 & -3-\lambda \end{pmatrix}$

$$= (2-\lambda)[\lambda^2 - 9 + t + 4] = (2-\lambda)[\lambda^2 - 5 + t]$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 2$ & $\lambda_2 = \sqrt{5-t}$, $\lambda_3 = -\sqrt{5-t}$

Questi valori sono tutti reali se $t \leq 5$

Se tutti tre autovalori sono distinti allora A è diagonalizzabile. Dobbiamo studiare allora solo le altri casi:

$\boxed{t=1} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2 \quad (\lambda_3 = -2)$

$\boxed{t=5} \Leftrightarrow \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \quad (\lambda_1 = 2)$

•) Per $t=1$ abbiamo

$$m_g(2) = 3 - rk(A - 2I_3) = 3 - rk\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -1 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3-1 = 2 = m_a(2)$$

$\Rightarrow$ A è diagonalizzabile!

•) Per $t=5$ abbiamo

$$m_g(0) = 3 - rk(A) = 3 - rk\begin{pmatrix} 3 & 9 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3-2 = 1 \neq m_a(0)$$

$\Rightarrow$ A <u>non</u> è diagonalizzabile.

Combinando tutto: A è diagonalizzabile se e solo se $t < 5$.