Foglio Esercizi 2 (MDAG 2023)

Esercizi proposti da R. Buzano e M. Radeschi

27 ottobre 2023

Esercizio 1. Sia V lo $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di matrici 3×3 ad entrate nel campo $\mathbb{K}$, i.e. $V = M(3, \mathbb{K})$. Si provi che l'insieme $W = \{A \in M(3, \mathbb{K}) \mid {}^tA = A\}$ è un sottospazio vettoriale di V.

Esercizio 2. Risolvere i seguenti sistemi di equazioni:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 3 \\ 2x + y + z = 4 \\ 4x + 7y + 3z = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 3y + z = 3 \\ 2x + y + z = 4 \\ 4x + 7y + 3z = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 3y + z = 3 \\ 2x + y + z = 4 \\ 4x + 7y + 4z = 9 \end{cases}$$

Esercizio 3. Determinare il rango delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4. Verificare se i seguenti insiemi di vettori sono linearmente indipendenti, generatori, o una base:

1. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.
2. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.
3. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

Esercizio 5. Determinare se i vettori

$$f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 1, \quad g(x) = x^2 + x, \quad h(x) = x^3 + x - 2$$

sono linearmente indipendenti nello spazio vettoriale reale dei polinomi di grado meno o uguale a tre, $\mathbb{R}_3[x]$. L'insieme $\{f, g, h\}$ forma una base di $\mathbb{R}_3[x]$?

Esercizio 6. Trovare una base per lo spazio di matrici $M(2, \mathbb{C})$ visto

i) come spazio vettoriale sul campo $\mathbb{C}$,

ii) come spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$.

Esercizio 7. Data la base di $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calcolare il vettore delle coordinate di $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Esercizio 8. Determinare, al variare di k, il numero di soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + z &= 2 \\ x + (k+2)y + (k^2+1)z &= k+2 \\ 2x + 4y + (k+2)z &= 5 \end{cases}$$

Esercizio 9. Sia V uno $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione n e sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_\ell\}$ un insieme di ℓ vettori in V. Ci sono dati 10 implicazioni, qualche vera, qualche falsa, e qualche assurda nel senso che l'ipotesi non è mai soddisfatta[1]. Per ogni affermazione decidere di quale tipo si tratta, motivando la risposta.

(i) Se $\ell > n$, i vettori $v_1, \dots, v_\ell$ sono necessariamente linearmente dipendenti.

(ii) Se $\ell < n$, i vettori $v_1, \dots, v_\ell$ sono necessariamente linearmente indipendenti.

(iii) Se $\ell > n$, abbiamo necessariamente $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_\ell) = V$.

(iv) Se $\ell < n$, abbiamo necessariamente $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_\ell) \neq V$.

(v) Se $\ell > n$, possiamo togliere vettori di $\mathcal{B}$ per ottenere una base di V, cioè un sottoinsieme di $\mathcal{B}$ forma una base di V.

(vi) Se $\ell < n$, possiamo aggiungere vettori a $\mathcal{B}$ per ottenere una base di V.

(vii) Se $\ell > n$ e $v_1, \dots, v_\ell$ sono linearmente indipendenti, possiamo togliere vettori di $\mathcal{B}$ per ottenere una base di V, cioè un sottoinsieme di $\mathcal{B}$ forma una base di V.

(viii) Se $\ell < n$ e $v_1, \dots, v_\ell$ sono linearmente indipendenti, possiamo aggiungere vettori a $\mathcal{B}$ per ottenere una base di V.

(ix) Se $\ell > n$ e $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_\ell) = V$, possiamo togliere vettori di $\mathcal{B}$ per ottenere una base di V, cioè un sottoinsieme di $\mathcal{B}$ forma una base di V.

(x) Se $\ell < n$ e $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_\ell) = V$, possiamo aggiungere vettori a $\mathcal{B}$ per ottenere una base di V.

[1] Anche le implicazioni che noi chiamiamo "assurde" sono vere nel senso di logica, ma noi vogliamo fare una differenza in questo esercizio a chiamiamo "vera" solo un'implicazioni per quale l'ipotesi può essere soddisfata.