TUTORATO 16/11/2023

Esercizio 1: Dati i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$:

$A = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1+3x_2-x_3=0\}$, $B = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1+3x_2-x_3 = x_2+x_3 = 0\}$,

$C = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1+3x_2-x_3 = 5\}$, $D = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1^2+3x_2-x_3=0\}$

dire quali sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ giustificando la risposta.

SVOLGIMENTO: Notiamo subito che C non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ poiché non contiene il vettore nullo $(0,0,0)$ (l'equazione lineare che definisce C non è omogenea).

I sottoinsiemi A e B sono descritti da equazioni lineari omogenee, sono dunque entrambi sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$, verifichiamolo ad esempio per A. Prendiamo $(x_1,x_2,x_3), (y_1,y_2,y_3) \in A$, cioè $2x_1+3x_2-x_3=0$ e $2y_1+3y_2-y_3=0$. Allora abbiamo subito che $2(x_1+y_1)+3(x_2+y_2)-(x_3+y_3)=0$, cioè $(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) \in A$ e che $2\lambda x_1+3\lambda x_2-\lambda x_3 = \lambda(2x_1+3x_2-x_3)=0$, cioè $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) \in A$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

Infine D non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ perché non è chiuso rispetto alle operazioni di somma e prodotto per scalare. Ad esempio, presi $(1,0,2)$, e $(2,0,8) \in D$ $(1,0,2)+(2,0,8) = (3,0,10) \notin D$, infatti $2\cdot 3^2-10 = 8 \neq 0$ e $2\cdot(1,0,2) = (2,0,4) \notin D$, infatti $2\cdot 4-4 = 4 \neq 0$.

Esercizio 2: Risolvere i seguenti sistemi di equazioni:

1) $\begin{cases} x+y+2z=9 \\ 2x+4y-3z=1 \\ 3x+6y-5z=0 \end{cases}$, 2) $\begin{cases} x_1+x_2=-1 \\ -2x_1+x_2+3x_3=2 \\ -x_1+2x_2+3x_3=-1 \end{cases}$, 3) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ 2x_1+2x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+2x_3=-1 \end{cases}$

SVOLGIMENTO: La matrice completa per il sistema 1) è $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right)$.

Procediamo con la riduzione

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_2 \to 2R_1 - R_2 \\ R_3 \to 3R_1 - R_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & -2 & 7 & 17 \\ 0 & -3 & 11 & 27 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to 3R_2 - 2R_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & -2 & 7 & 17 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

da cui si arriva al sistema ridotto $\begin{cases} x+y+2z=9 \\ -2y+7z=17 \\ -z=-3 \end{cases}$ che ammette una sola soluzione $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$.

$\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A|B)=3$

La matrice completa per 2) è data da $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right)$, procediamo con la riduzione

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 + 2R_1 \\ R_3 \to R_3 + R_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_2 \to \frac{1}{3}R_2 \\ R_3 \to R_3 - R_2}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

che non ha soluzioni siccome $\overset{2}{\overset{\shortparallel}{\operatorname{rank}(A)}} \neq \operatorname{rank}(A|B)=3$. Infine, la matrice completa per il sistema 3) è data da $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$ e procedendo alla riduzione si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_2 \to 2R_1 - R_2 \\ R_3 \to R_1 - R_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_2 - R_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

che ammette infinite soluzioni che dipendono da 1 parametro. Infatti $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A|B)=2$ e lo spazio delle soluzioni ha dimensione $n-\operatorname{rank}(A)=3-2=1$. $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ -3x_3=2 \end{cases}$ ha soluzioni $\begin{cases} x_1=\frac{1}{3}-t \\ x_2=t \\ x_3=-\frac{2}{3} \end{cases}$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3: Determinare il rango delle seguenti matrici

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\2&4&-1&1\\0&0&1&1\\1&2&4&5\\1&-1&0&5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&-3&0&4\\0&0&1&1\\1&1&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}$$

SVOLGIMENTO:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\2&4&-1&1\\0&0&1&1\\1&2&4&5\\1&-1&0&5\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{R_2\to 2R_1-R_2\\R_4\to R_4-R_1\\R_5\to R_5-R_1}]{}\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&0&1&1\\0&0&1&1\\0&0&4&4\\0&-3&0&4\end{pmatrix}\xrightarrow[R_2\leftrightarrow R_5]{}\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&-3&0&4\\0&0&1&1\\0&0&4&4\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{R_4\to 4R_3-R_4\\R_5\to R_3-R_5}]{}\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&-3&0&4\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi che $\text{rank}(A)=3$

$$B=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&-3&0&4\\0&0&1&1\\1&1&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4\to R_4-R_1]{}\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&-3&0&4\\0&0&1&1\\0&-1&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4\to 3R_4-R_2]{}\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&-3&0&4\\0&0&1&1\\0&0&3&-7\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$\text{rank}\, B=4$

$$C=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[R_2\leftrightarrow R_3]{}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$\text{rank}\, C=3$

Esercizio 4: Verificare se i seguenti insiemi di vettori sono linearmente ind., generatori o base:

1) $a=(1,3,-1),\ b=(4,1,0),\ c=(2,-5,2)\in\mathbb{R}^3$, 2) $u=(1,-1,3),\ v=(2,1,-1),\ w=(1,2,1)\in\mathbb{R}^3$

Stabilire inoltre per quali $h\in\mathbb{R}$ $u_1=(1,0,-h),\ u_2=(2,-1,1),\ u_3=(4,1,-1)$ sono base di $\mathbb{R}^3$.

SVOLGIMENTO: 1) Consideriamo la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ e calcoliamone il rango.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 2R_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rango $= 2$, non sono linearmente indipendenti, dunque non sono né generatori né base di $\mathbb{R}^3$. Troviamo i coefficienti $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ taliche $\lambda a + \mu b = c$

$$\begin{cases} \lambda + 4\mu = 2 \\ 3\lambda + \mu = -5 \\ -\lambda = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -2 \\ \mu = 1 \end{cases}$$

, cioè $c = -2a + b$.

2) Consideriamo la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e calcoliamone il rango.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 + R_1 \\ R_3 \to R_3 + 2R_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

rango $= 3$, dunque i tre vettori sono linearmente indipendenti e dunque costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$.

Infine consideriamo $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -h \\ 2 & -1 & 1 \\ h & 1 & -1 \end{pmatrix}$ e riduciamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -h \\ 2 & -1 & 1 \\ h & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - hR_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -h \\ 0 & -1 & 1+2h \\ 0 & 1 & -1+h^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -h \\ 0 & -1 & 1+2h \\ 0 & 0 & 2h+h^2 \end{pmatrix}$$

. Affinché (u_1, u_2, u_3) sia base di $\mathbb{R}^3$ serve che il rango della matrice sia 3, dunque che $2h + h^2 = h(2+h) \neq 0$.

Dunque per $h \neq 0$ e $h \neq -2$ (u_1, u_2, u_3) è base di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 5: Dati i vettori $u=(2,1,1)$, $v=(-1,2,1)$, $z=(1,-1,-2)$, $w=(-1,-2,1)$, verificare che $B=(u,v,z)$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e trovare le componenti di w rispetto a B

SVOLGIMENTO: Consideriamo la matrice $P=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e riduciamola.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2+2R_1 \\ R_3 \to R_3+R_1}]{} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3+R_2]{} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

, dunque rank $P=3$ e allora u,v,z sono linearmente indipendenti e dunque sono una base di $\mathbb{R}^3$.

Cerchiamo ora le componenti $(x'_1,x'_2,x'_3)\in\mathbb{R}^3$ tali che $w=x'_1u+x'_2v+x'_3z$.

Dobbiamo quindi risolvere il sistema $\begin{cases} 2x'_1-x'_2+x'_3=-1 \\ x'_1+2x'_2-x'_3=-2 \\ x'_1+x'_2-2x'_3=1 \end{cases}$. Dunque consideriamo la matrice completa associata e la riduciamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2+2R_1 \\ R_3 \to R_3+R_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3+R_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 1 & -4 \\ 8 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to \frac{1}{4}R_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 \to R_2-R_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{R_2 \to 2R_2-5R_3 \\ R_1 \to 2R_1-3R_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

, dunque arriviamo alla soluzione $\begin{cases} x'_1=-\frac{1}{2} \\ x'_2=-\frac{3}{2} \\ x'_3=-\frac{3}{2} \end{cases}$, $w=-\frac{1}{2}u-\frac{3}{2}v-\frac{3}{2}z$