Lezione 7: Spazi Vettoriali (Parte II)

(In)dipendenza lineare

Sia V uno spazio vettoriale (su $\mathbb{K}$) e siano $v_1, \dots, v_k \in V$ alcuni vettori. Diciamo che questi vettori sono **linearmente dipendenti** se esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ non tutti nulli, tale che

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0 \qquad (*)$$

Osservazione: Se $v_1, \dots, v_k$ sono lin. dipendenti, allora è possibile esprimere uno di loro in funzione degli altri. Perché? Visto che esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ non tutti nulli con $(*)$

esiste almeno un $\lambda_i \neq 0$. Dopo aver diviso tutto per $\lambda_i \neq 0$ otteniamo

$$v_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} v_1 - \dots \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} v_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} v_{i+1} - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_i} v_k$$

Def: I vettori $v_1, \dots, v_k$ sono **linearmente indipendenti** se non sono lin. dipendenti, cioè se $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ è l'unica soluzione di $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0$

$[\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0]$

$\Leftrightarrow$ $v_1, \dots, v_k$ sono lin. indipendenti.

(Esempi solo in lezione.)

I casi $k=1$ & $k=2$:

i) Se $k=1$, abbiamo solo un vettore v_1. Questo vettore è lin. indipendente se $v_1 \neq 0$ $\left[\lambda_1 v_1 = 0 \underset{v_1 \neq 0}{\Rightarrow} \lambda_1 = 0 \right]$

ii) Se $k=2$, abbiamo due vettori v_1, v_2. Questi sono lin. dipendenti se e solo se $v_1 = k v_2$ oppure $v_2 = k v_1$ (per qualche $k \in \mathbb{K}$).

iii) Se $k \geq 3$, diventa più complicato:

Esempio: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Nessun vettore è multiplo di un altro ma tutti tre vettori insieme sono lin. dipendenti.

(Altri esempi in lezione.)

Prop: Se $v_1, \dots, v_k$ sono lin. indipendenti, allora qualsiasi sottoinsieme di $\{v_1, \dots, v_k\}$ è anche formato da vettori lin. indipendenti.

Dim: Supponiamo per assurdo che esiste un sottoinsieme che è lin. dipendente. (Dopo riordinare i vettori) possiamo assumere che $v_1, \dots, v_\ell$ sono lin. dipendenti, $\ell < k$.
Allora esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ non tutti nulli tale che $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_\ell v_\ell = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_\ell v_\ell}_{=0} + 0 v_{\ell+1} + \dots + 0 v_k = 0$$

$\Rightarrow v_1, \dots, v_k$ sono lin. dip. ↯ □

In particolare se $v_1, \dots, v_k$ son lin. indipendenti, allora

- $\circ$) tutti i vettori v_i sono diversi da zero
- $\circ$) i vettori v_i sono a coppie non multipli

Abbiamo però visto sopra che queste due condizioni non bastano per concludere che tutti i vettori sono indipendenti.

Basi & dimensione

Def: Un insieme $\{v_1, \dots, v_n\}$ di n vettori in uno spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$ è <u>una base</u> di V se

(1) i vettori $v_1, \dots, v_n$ sono lin. indipendenti

(2) i vettori $v_1, \dots, v_n$ generano V ($\Leftrightarrow \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n) = V$)

Teorema: Due basi dello stesso spazio V contengono lo stesso numero n di elementi.

Def: Se uno spazio vettoriale V ha una base $\{v_1, \dots, v_n\}$, diciamo che V ha <u>dimensione</u> n. Se V non ha una base, allora diciamo che V ha dimensione ∞.

Prop: Se $V = \mathbb{K}^n$, gli elementi

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

formano una base di $\mathbb{K}^n$ detta <u>base canonica</u>.

Dim: Mostriamo che $\{e_1, \dots, e_n\}$ ha le due proprietà della definizione.

(1) Sia $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

$\Rightarrow e_1, \dots, e_n$ sono lin. indipendenti.

(2) Se $x \in \mathbb{K}^n$, allora

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \in \mathrm{Span}(e_1, \dots, e_n)$$

Visto che x era arbitrario, $V = \mathrm{Span}(e_1, \dots, e_n)$. $\square$

Prop: Se $V = \mathbb{K}_n[x] = \{\text{polinomi con grado} \leq n\}$, allora gli elementi

$$1, x, x^2, \dots, x^n$$

formano una base di V detto <u>base canonica</u>.

Dim: (1) Sia $\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot x + \lambda_3 x^2 + \dots + \lambda_n \cdot x^n = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$

$\Rightarrow 1, x, x^2, \dots, x^n$ sono lin. indipendenti.

(2) Sia $p(x) \in \mathbb{K}_n[x]$, allora

$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \in \mathrm{Span}(1, x, \dots, x^n)$

allora $\mathbb{K}_n[x] = \mathrm{Span}(1, x, \dots, x^n)$. $\square$

Prop: Se $V = M(m,n,\mathbb{K})$, definiamo gli elementi E_{ij} tale che l'entrata (i,j) di E_{ij} è 1 e tutte le altre entrate sono 0.
$\{E_{ij}\}_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$ è una base di V, detto base canonica.

Dim: (1) Sia $\sum_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} \lambda_{ij} E_{ij} = 0$

$$\sum_{\substack{1\leq j\leq m \\ 1\leq i\leq n}} \lambda_{ij} E_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \vdots & & & \\ \lambda_{m1} & \cdots & \cdots & \lambda_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_{ij} = 0 \quad \forall i \, \forall j$$

(2) Sia $A \in M(m,n,\mathbb{K})$, allora

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = a_{11}E_{11} + \dots + a_{mn}E_{mn}$$
$$\in \mathrm{Span}(E_{ij} \,;\, 1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n). \square$$

Cor: $\dim(\mathbb{K}^n) = n$, $\dim(\mathbb{K}[x]) = n+1$,
$\dim(M(m,n,\mathbb{K})) = m\cdot n$

Teorema: Se $\dim(V) = n$ & $\{v_1, \dots, v_n\}$ è un insieme di n vettori, allora $\{v_1,\dots,v_n\}$ è una base se vale uno dei punti della definizione (mentre l'altro vale poi automaticamente).

(Esempi solo in lezione.)

Esercizio: Siano

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

i) Dimostrare che $\{v_1, \dots, v_4\}$ non è una base di $\mathbb{R}^3$.

ii) Trovare un sottoinsieme di $\{v_1, \dots, v_4\}$ che è una base di $\mathbb{R}^3$.

(Soluzione solo in lezione.)