Lezione 8: Matrici (Parte I)

Ci ricordiamo che, per un campo $\mathbb{K}$ fissato, $M(m,n,\mathbb{K})$ è l'insieme di matrici $m \times n$ (m righe & n colonne) con coefficienti in $\mathbb{K}$.

Per $A, B \in M(m,n,\mathbb{K})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

e uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$, definiamo

•) $$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

•) $$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Con queste due operazioni, $M(m,n,\mathbb{K})$ è uno spazio vettoriale.

Trasposta di una matrice

Def: La trasposta di una matrice $A \in M(m,n,\mathbb{K})$ è la matrice ${}^tA \in M(n,m,\mathbb{K})$ definita scambiando righe & colonne di A, cioè

$$({}^tA)_{ij} = A_{ji}$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ \sqrt{3} & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \sqrt{3} \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Vale le seguenti proprietà:

$$^t(A+B) = {^tA} + {^tB}$$
$$^t(\lambda A) = \lambda \cdot (^tA)$$

Se A è una matrice quadrata $(m=n)$:

$$A \text{ è simmetrica} \iff {^tA} = A$$
$$A \text{ è antisimmetrica} \iff {^tA} = -A$$

Rango di una matrice

Sia A una matrice $m \times n$ con coeff. in $\mathbb{K}$. Ricordiamo che indichiamo con $A^1, \dots, A^n$ le colonne di A.

Ogni colonna A^i è un vettore in $\mathbb{K}^m$.

Def: Il rango di A è la dimensione dello spazio

$$\mathrm{Span}(A^1, \dots, A^n) \subset \mathbb{K}^m$$

$$0 \leq \text{rango di } A \leq \min\{m,n\}$$

Il rango diventa indicato con $rk(A)$ ("rank")

Prop 3.2.8: Il rango di A è il massimo numero di colonne lin. indipendenti di A.

"Dim:" È un fatto generale che la dimensione di un sottospazio $W = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$ è il massimo

numero di vettori lin. indipendenti in $\{v_1, \dots, v_k\}$.
(Segue direttamente dalla def. di base & di dimensione). $\square$

Definiamo il rango per righe di A come la dimensione dello spazio generato dalle righe

$$\text{Span}(A_1, \dots, A_m) \subset K^n$$

Prop: 3.2.20 Per ogni matrice A il rango per righe è uguale al rango (per colonne) della definizione sopra.

Cor: 3.2.21 Per ogni matrice A vale $rk({}^tA) = rk(A)$.

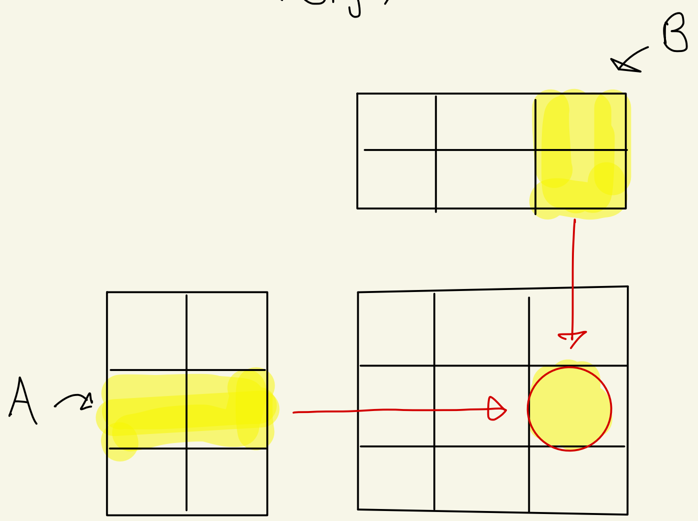
Prodotto fra matrici

Se A è una matrice $m \times n$ e B è una matrice $n \times p$ [il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B], il prodotto $A \cdot B$ (o semplicemente AB) è una nuova matrice $m \times p$ definita nel modo seguente: l'elemento $(AB)_{ij}$ del prodotto AB è

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \dots + A_{in}B_{nj}$$

Ogni tanto chiamiamo questo prodotto il prodotto riga per colonna perché usiamo gli elementi della i-esima riga di A $(A_i = (A_{i1}\ A_{i2} \cdots A_{in}))$ e gli elementi della j-esima colonna di B

$\left(B^j = \begin{pmatrix} B_{1j} \\ \vdots \\ B_{nj} \end{pmatrix} \right)$



(Esempi solo in lezione!)

Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ abbiamo

⚠ $AB = B$ ma A <u>non</u> è l'elemento neutro perché <u>non</u> vale $BA = B$.

Abbiamo anche $AB \neq BA$, allora

⚠ La moltiplicazione fra matrici <u>NON</u> è commutativa!

<u>Proposizione 3.4.2:</u> Per ogni A, B, C matrici per cui i prodotti e le somme abbiano senso & per ogni $\lambda \in K$ abbiamo

1. $A(B+C) = AB + AC$ (distributività)

$(A+B)C = AC + BC$

2. $A(BC) = (AB)C$ (associatività)

3. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

Dim: 1. $(A(B+C))_{ij} = \sum_k A_{ik}(B+C)_{kj}$

$$= \sum_k A_{ik}B_{kj} + \sum_k A_{ik}C_{kj}$$

$\forall i,j$

$$= (AB)_{ij} + (AC)_{ij}$$

L'altra ugualianza di distributività è analoga.

2. $(A(BC))_{ij} = \sum_k A_{ik}(BC)_{kj}$

$$= \sum_k A_{ik} \cdot \sum_l B_{kl} C_{lj}$$

$$= \sum_{k,l} A_{ik} B_{kl} C_{lj}$$

$((AB)C)_{ij} = \sum_l (AB)_{il} C_{lj}$

$$= \sum_l \left(\sum_k A_{ik} B_{kl} \right) C_{lj}$$

$$= \sum_{k,l} A_{ik} B_{kl} C_{lj}$$

3. Esercizio. $\square$

Traccia di una matrice quadrata

Def: La **traccia** di una matrice quadrata $A \in M(n, \mathbb{K})$ è il numero

$$\operatorname{tr} A = A_{11} + A_{22} + \ldots + A_{nn}$$

(la somma dei numeri sulla diagonale di A)

Esempio:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{7} & \pi \\ 0 & 9 & -112 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{tr} A = 1 + 9 + 3 = 13$$

Prop. 4.4.11: Se $A, B \in M(n, \mathbb{K})$, vale $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Dim:
$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{k=1}^{n} (AB)_{kk} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} A_{ki} B_{ik}$$

$$\operatorname{tr}(BA) = \sum_{k=1}^{n} (BA)_{kk} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} B_{ki} A_{ik}$$

$$\overset{k \leftrightarrow i}{=} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} B_{ik} A_{ki} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} A_{ki} B_{ik}$$

$$= \operatorname{tr}(AB) \qquad \square$$

Esercizio: Dimostrare che ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

(Soluzione solo in lezione.)