Lezione 19: Prodotti scalari (Parte I)

Qui usiamo sempre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Perché?

1) Vogliamo parlare di numeri positivi & negativi (non si può fare su $\mathbb{C}$)
2) Vogliamo prendere la radice quadrata di un numero (non si può fare su $\mathbb{Q}$)

Def: Sia V uno spazio vettoriale reale. Un prodotto scalare su V è un'applicazione

$$V \times V \to \mathbb{R}$$
$$(v,w) \mapsto \langle v,w \rangle = g(v,w) \in \mathbb{R}$$

che soddisfa i seguenti assiomi:

$$\left.\begin{aligned} &(1) \quad \langle v+v', w \rangle = \langle v,w \rangle + \langle v', w \rangle \\ &(2) \quad \langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v,w \rangle \end{aligned}\right\} \text{linearità nel primo fattore.}$$

$$(3) \quad \langle v,w \rangle = \langle w,v \rangle \qquad \text{simmetria}$$

per ogni $v, v', w \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Otteniamo anche

$$(4) \; \langle v, w+w' \rangle \overset{(3)}{=} \langle w+w', v \rangle \overset{(1)}{=} \langle w,v \rangle + \langle w', v \rangle \overset{(3)}{=} \langle v,w \rangle + \langle v,w' \rangle$$

$$(5) \; \langle v, \lambda w \rangle \overset{(3)}{=} \langle \lambda w, v \rangle \overset{(2)}{=} \lambda \langle w,v \rangle \overset{(3)}{=} \lambda \langle v,w \rangle$$

Abbiamo allora anche la linearità nel secondo fattore.

Un'applicazione $g: V \times V \to \mathbb{R}$ che è lineare in tutti e due fattori si chiama bilineare.

Abbiamo $\langle v, 0 \rangle = 0$, $\forall v \in V$

Dim: $\langle v, 0 \rangle = \langle v, 0+0 \rangle = \langle v, 0 \rangle + \langle v, 0 \rangle$

$\Rightarrow \langle v, 0 \rangle = 0$. ∎

In particolare $\langle 0, 0 \rangle = 0$.

Def: Un prodotto scalare su V è

- degenere se esiste $v \neq 0$ tale che $\langle v, w \rangle = 0$ per ogni $w \in V$.
- definito positivo se $\langle v, v \rangle > 0$ per ogni $v \neq 0$.

in qualche libro, questo è parte della def. di prodotto scalare.

Prop 7.1.3: Un prodotto scalare definito positivo non è degenere.

Dim: Supponiamo per assurdo che esiste $v \neq 0$ tale che $\langle v, w \rangle = 0$ per ogni $w \in V$. Allora in particolare (per $w = v$) otteniamo $\langle v, v \rangle = 0$ ↯. □

Esempio: Il prodotto scalare euclideo su $\mathbb{R}^n$ è definito come

$$\langle x, y \rangle = g(x, y) = {}^t x \cdot y$$

molt. "riga per colonna" di matrici

Se $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

otteniamo

$$\langle x,y\rangle = (x_1 \cdots x_n)\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix} = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$$

Ad esempio su $\mathbb{R}^2$ con $x=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$, abbiamo

$$\langle x,y\rangle = 1\cdot(-2)+4\cdot 3 = 10.$$

Questo è un prodotto scalare definito positivo.

Dim: (1) $\langle x+x', y\rangle = {}^t(x+x')\cdot y = ({}^tx+{}^tx')\cdot y$

$= {}^tx\cdot y + {}^tx'\cdot y = \langle x,y\rangle + \langle x',y\rangle$

(2) $\langle \lambda x, y\rangle = {}^t(\lambda x)\cdot y = \lambda({}^tx)\cdot y = \lambda\langle x,y\rangle$

(3) $\langle x,y\rangle = x_1y_1+\ldots+x_ny_n$

$= y_1x_1+\ldots+y_nx_n = \langle y,x\rangle.$

"definito positivo": Se $x\neq 0$ allora almeno una coordinate $x_k\neq 0$. Allora

$$\langle x,x\rangle = x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 \geq x_k^2 \underset{(x_k\neq 0)}{>} 0. \qquad \square$$

Altri esempi:

Esempio 7.1.25: Sia $[a,b]\subset\mathbb{R}$ un intervallo, e sià $V=C([a,b])$ lo spazio vettoriale delle funzioni $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue.

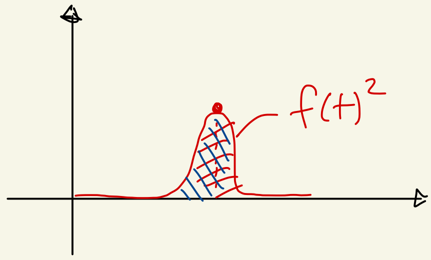
(Esercizio: controllare che V è uno spazio vettoriale)

Definiamo un prodotto scalare su V:

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,dt.$$

Bilinearità e simmetria seguono in modo ovvio dal calcolo. Si può dimostrare che per ogni $f \equiv 0$ abbiamo $\langle f, f \rangle = \int_a^b f(t)^2 dt > 0$.

$\Rightarrow$ Il prodotto scalare definito così è definito positivo.



Esempio 7.1.27: Consideriamo lo spazio di polinomi con coeff. reali & grado ≤ 2, cioè $V = \mathbb{R}_2[x]$. Definiamo per $p, q \in \mathbb{R}_2[x]$

$$(*) \quad \langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

Gli assiomi (1), (2), (3) valgono in modo ovvio e allora $(*)$ definisce un prodotto scalare.

Se $p \not\equiv 0$ allora $\langle p, p \rangle = p(0)^2 + p(1)^2 + p(2)^2 > 0$

[perché se $\langle p, p \rangle = 0 \Rightarrow p(0) = p(1) = p(2) = 0 \Rightarrow p \equiv 0$]

grado ≤ 2

$\Rightarrow$ Il prodotto scalare è definito positivo.

Consideriamo invece

$$(**) \quad \langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

Anche questo è un prodotto scalare ma per $p(x) = x(x-1) = x^2 - x$ abbiamo $p(0) = p(1) = 0$, allora $\langle p, p \rangle = 0$. In realtà $\langle p, q \rangle = 0$ per ogni q allora questo prodotto scalare è degenere!

Consideriamo

$$(***) \quad \langle p,q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) - p(2)q(2)$$

Questo è un prodotto scalare che non è degenere ma anche non è definito positivo. Per esempio per $p(x) = x-1$ abbiamo $p(0) = -1$, $p(1) = 0$, $p(2) = +1$, allora

$$\langle p,p\rangle = (-1)^2 + 0^2 - 1^2 = 0.$$

Matrici simmetriche & prodotti scalari

Ci ricordiamo che $S \in M(n,\mathbb{R})$ è simmetrica se ${}^tS = S$. [Ci ricordiamo anche che ${}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$.]

Prop 7.1.6: Una matrice simmetrica S definisce un prodotto scalare g_S su $\mathbb{R}^n$ nel modo seguente:

$$g_S(x,y) = \langle x,y\rangle_S = {}^tx \cdot S \cdot y.$$

Dim:

$$\left.\begin{array}{l} {}^tx \text{ è di grandezza } 1\times n \\ S \text{ è di grandezza } n\times n \\ y \text{ è di grandezza } n\times 1 \end{array}\right\} \Rightarrow {}^tx\cdot S\cdot y \text{ è veramente definito con risultato in } \mathbb{R}.$$

(1)
$$\begin{aligned} g_S(x+x',y) &= {}^t(x+x')\cdot S\cdot y \\ &\overset{\text{distr.}}{=} {}^tx\cdot S\cdot y + {}^tx'\cdot S\cdot y \\ &= g_S(x,y) + g_S(x',y). \end{aligned}$$

(2) simile.

(3) $g_S(x,y) = \underbrace{{}^t x \cdot S \cdot y}_{\in \mathbb{R}} = {}^t({}^t x \cdot S \cdot y)$

$$= {}^t y \cdot {}^t S \cdot {}^t({}^t x)$$

$\boxed{\begin{array}{c} {}^t({}^t x) = x \\ {}^t S = S \end{array}}$

$$= {}^t y \cdot S \cdot x = g_S(y,x). \qquad \square$$

Esempio 7.1.9: Se $S = I_n$ otteniamo

$$g_{I_n}(x,y) = {}^t x \cdot I_n \cdot y = {}^t x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

è il prodotto scalare euclideo.

Esempio 7.1.10: Sia $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R})$, allora

$$g_S(x,y) = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 2x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2$$

Prop 7.1.7: Vale $g_S(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i S_{ij} y_j$.

Dim: $g_S(x,y) = {}^t x \cdot (Sy) = \sum_{i=1}^{n} x_i (Sy)_i$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} S_{ij} y_j = \sum_{i,j=1}^{n} x_i S_{ij} y_j . \qquad \square$$

Cor 7.1.8: Vale $g_S(e_i, e_j) = S_{ij}$

dove $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$

Matrice associata ad un prodotto scalare

Def: Sia V uno spazio vettoriale e $g: V \times V \to \mathbb{R}$ un prodotto scalare. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V. La matrice associata al prodotto scalare g nella base $\mathcal{B}$ è la matrice simmetrica S il cui elemento S_{ij} è dato da

$$S_{ij} = g(v_i, v_j).$$

Scriviamo $S = [g]_{\mathcal{B}}$.

Esempio: Se $S \in M(n, \mathbb{R})$ è una matrice simmetrica e $\mathcal{B}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$, allora

$$[g_S]_{\mathcal{B}} = S \qquad \text{(Cor. 7.1.8)}$$

Esempio 7.2.3: Consideriamo il prodotto scalare euclideo g su $\mathbb{R}^2$. Abbiamo visto che in base canonica $\mathcal{B}$ abbiamo

$$[g]_{\mathcal{B}} = I_2.$$

Scegliamo invece la base $\mathcal{C} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

allora $S = [g]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} g(v_1,v_1) & g(v_1,v_2) \\ g(v_2,v_1) & g(v_2,v_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Prop 7.2.5: Siano $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$

$w = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$

due vettori in V espressi usando la base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$. Vale

$$g(v,w) = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \mu_j \, g(v_i, v_j)$$

Dim: $g(v,w) = g(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n, w)$

$$\overset{(1),(2)}{=} \lambda_1 g(v_1,w) + \dots + \lambda_n g(v_n,w)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, g(v_i, w)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, g(v_i, \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n)$$

$$\overset{(4),(5)}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left[\mu_1 g(v_i, v_1) + \dots + \mu_n g(v_i, v_n)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{j=1}^{n} \mu_j \, g(v_i, v_j)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \mu_j \, g(v_i, v_j).$$

$\square$

Cor 7.2.6: Per ogni coppia di vettori $v, w \in V$ vale

$$g(v,w) = \underbrace{{}^t[v]_B}_{(\lambda_1 \dots \lambda_n)} \cdot \underbrace{S}_{S_{ij} = g(v_i, v_j)} \cdot \underbrace{[w]}_{\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}}$$

$$= g_S([v]_B, [w]_B)$$