Lezione 21: Prodotti scalari (Parte II)

In questa lezione V denota sempre uno spazio vettoriale reale munito di un prodotto scalare definito positivo.

Norma

Def 8.1.1. La **norma** di un vettore $v \in V$ è il numero reale
$$\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$$

Questo va interpretata come la lunghezza del vettore v.

Prop 8.1.2
(1) $\|v\| \geq 0$; se $v \neq 0$ allora $\|v\| > 0$.
(2) $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$
(3) $|\langle v,w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$ Cauchy-Schwarz
(4) $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$ disuguaglianza $\triangle$

Dim: (1) $\|v\| \geq 0$ dalla definizione.
Se $v \neq 0$ allora $\langle v,v\rangle > 0$ perché $\langle \cdot,\cdot\rangle$ è definito positivo. Allora $\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle} > 0$.

(2) $\|\lambda v\| = \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle v,v\rangle} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{\langle v,v\rangle}$
$= |\lambda| \cdot \|v\|$.

(3) Consideriamo $a,b \in \mathbb{R}$ e notiamo
$$0 \leq \|av+bw\|^2 = \langle av+bw, av+bw\rangle$$
$$= a^2\langle v,v\rangle + b^2\langle w,w\rangle + 2ab\langle v,w\rangle$$
$$= a^2\|v\|^2 + b^2\|w\|^2 + 2ab\langle v,w\rangle.$$

In particolare per $a = \|w\|^2$, $b = -\langle v,w\rangle$
$$0 \leq \|w\|^4\|v\|^2 + \langle v,w\rangle^2\|w\|^2 - 2\|w\|^2\langle v,w\rangle^2$$
$$= \|w\|^4\|v\|^2 - \|w\|^2\langle v,w\rangle^2$$

$\iff \|w\|^2 \langle v,w\rangle^2 \leq \|w\|^4 \|v\|^2$

se $w \neq 0$

$\iff \langle v,w\rangle^2 \leq \|w\|^2 \|v\|^2$

[Invece se $w = 0$, (3) vale in modo ovvio.]

(4) $\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle v,w\rangle$

$\overset{(3)}{\leq} \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\|\cdot\|w\|$

$= (\|v\| + \|w\|)^2$.

[Esempi: Solo in lezione!]

Angoli

$\square$

Def: L'angolo fra due vettori $v, w \in V$ non nulli è il numero $\vartheta \in [0, \pi]$ per cui

$$\cos\vartheta = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|}$$

Cauchy-Schwarz implica che il numero a destra è $\in [-1, 1]$, allora esiste un unico $\vartheta \in [0, \pi]$ per cui $\cos\vartheta = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|}$.

Chiamiamo ϑ acuto, retto o ottuso se è $< \frac{\pi}{2}$, $= \frac{\pi}{2}$, $> \frac{\pi}{2}$. Questo è equivalente a $\langle v,w\rangle$ positivo, zero, negativo (rispettivamente).

Due vettori sono ortogonali $\iff \langle v,w\rangle = 0 \iff \vartheta$ retto.

Distanze

Siano P, Q due punti in V $(= \mathbb{R}^n)$. Denotiamo

$\overrightarrow{PQ} = Q - P$. $[\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}]$

La distanza fra due punti $P, Q \in V$ è il numero

$$d(P,Q) = \|\vec{PQ}\| = \|Q-P\|$$

[d diventa anche chiamato metrica.]

Prop 8.1.13: Per $P, Q, R \in V$ valgono

(1). $d(P,Q) \geq 0$; se $P \neq Q$ allora $d(P,Q) > 0$.

(2) $d(P,Q) = d(Q,P)$

(3) $d(P,R) \leq d(P,Q) + d(Q,R)$. dis. $\triangle$

Dim: (1) & (2) seguono dalle proprietà della norma.

(3) $d(P,R) = \|\vec{PR}\| = \|\vec{PQ} + \vec{QR}\|$
$\leq \|\vec{PQ}\| + \|\vec{QR}\| + d(P,Q) + d(Q,R)$.

$\square$

Proiezione ortogonale

Sia $w \in V$ un vettore non nullo. $U = \mathrm{Span}(w)$.
la retta / il sottospazio generata/o da w.

V si decompone in una somma diretta

$$V = U \oplus U^\perp$$

(Ogni vettore v è somma di $u \in U$ & $v' \in U^\perp$, $v = u + v'$.) Questa somma diretta induce allora una proiezione $p_u : V \to U$ (o $p_w : V \to U$) chiamata proiezione ortogonale.

Prop 8.1.14: $p_w(v) = \dfrac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} \cdot w$

Dim: Il vettore v si scrive in modo unico come

$$v = p_w(v) + v' \quad \text{con } v' \in U^\perp .$$

Visto che $p_w(v) \in U = \mathrm{Span}(w)$ dobbiamo avere $p_w(v) = k \cdot w$ per qualche $k \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow v' = v - kw \in U^\perp$$

$$\Leftrightarrow \langle v - kw, w \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle v, w \rangle - k \langle w, w \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle} = \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} . \qquad \square$$

Il coefficiente $k = \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle}$ chiamiamo coeff. di Fourier.

Prop 8.1.16: Sia (come sempre) V uno spazio vettoriale con pr. scalare definito positivo e sia $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base formata da vettori ortogonali. Per qualsiasi $v \in V$ vale

$$v = p_{v_1}(v) + \dots + p_{v_n}(v)$$

$$= \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \dots + \frac{\langle v, v_n \rangle}{\|v_n\|^2} v_n .$$

Dim: Sappiamo che

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

Dobbiamo dimostrare che λ_i ($i = 1, \dots, n$) sono i coeff. di Fourier.

Prendendo il prodotto scalare con v_i otteniamo

otteniamo

$$\langle v, v_i \rangle = \langle \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n, v_i \rangle$$
$$= \lambda_1 \langle v_1, v_i \rangle + \dots + \lambda_n \langle v_n, v_i \rangle$$

base ortogonale
$\langle v_i, v_j \rangle = 0$
se $i \neq j$

$$= \lambda_i \langle v_i, v_i \rangle$$

$$\Leftrightarrow \lambda_i = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} . \square$$

Come possiamo ottenere una base ortogonale di uno spazio vettoriale ?

Algoritmo di Gram-Schmidt

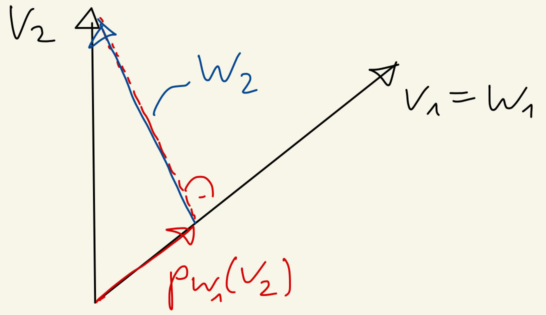
Sia V uno spazio vettoriale con pr. scalare def. positivo.

Siano $v_1, \dots, v_k \in V$ vettori lin. indipendenti.
Vogliamo restituire questi vettori con $w_1, \dots, w_k \in V$
tale che
- $w_1, \dots, w_k$ sono lin. indipendenti.
- $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k) = \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_k)$.
- $w_1, \dots, w_k$ sono ortogonali.

L'algoritmo funziona così :

$$\begin{cases} w_1 = v_1 \\ w_2 = v_2 - p_{w_1}(v_2) \\ w_3 = v_3 - p_{w_1}(v_3) - p_{w_2}(v_3) \\ \vdots \\ w_k = v_k - p_{w_1}(v_k) - \dots - p_{w_{k-1}}(v_k) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} w_1 = v_1 \\ w_2 = v_2 - \dfrac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2}\cdot w_1 \\ w_3 = v_3 - \dfrac{\langle v_3, w_1\rangle}{\|w_1\|^2}\cdot w_1 - \dfrac{\langle v_3, w_2\rangle}{\|w_2\|^2}\cdot w_2 \\ \vdots \\ w_k = v_k - \dfrac{\langle v_k, w_1\rangle}{\|w_1\|^2}\cdot w_1 - \dots - \dfrac{\langle v_k, w_{k-1}\rangle}{\|w_{k-1}\|^2}\cdot w_{k-1} \end{cases}$$



[Esempio: solo in lezione?]