Lezione 12: Sistemi Lineari (Parte II)

Il sistema omogeneo associato

Consideriamo un sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases} \qquad (1)$$

Il sistema omogeneo associato è

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

La matrice associata al sistema (1) è $C = (A \mid b)$ & la matrice associata al sistema (2) è $(A \mid 0)$ [o semplicemente A].

Sia $S \subset \mathbb{K}^n$ l'insieme delle soluzioni di (1) e $S_0 \subset \mathbb{K}^n$ l'insieme delle soluzioni di (2).

Prop 2.2.2: Le soluzioni $S_0 \subset \mathbb{K}^n$ formano un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$.

Dim: Dobbiamo verificare tre proprietà:

(i) Il vettore 0 è in S_0: Infatti, troviamo

$$a_{i1}0 + a_{i2}0 + \dots + a_{in}0 = 0 \qquad \forall i=1,\dots,k$$

allora 0 è una soluzione di (2).

(ii) Se due vettori $x, y \in S_0$ allora $x+y \in S_0$:
Infatti

$$a_{i1}(x_1+y_1) + a_{i2}(x_2+y_2) + \dots + a_{in}(x_n+y_n)$$

$$= a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$$

$$+ a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{in}y_n \qquad \forall i$$

$$= 0 + 0 = 0 \qquad \Rightarrow x+y \in S_0$$

(iii) Se $x \in S_0$, $\lambda \in \mathbb{K}$, allora $\lambda \cdot x \in S_0$:

$$a_{i1}(\lambda x_1) + a_{i2}(\lambda x_2) + \dots + a_{in}(\lambda x_n)$$

$$= \lambda [a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n] \qquad \forall i$$

$$= \lambda \cdot 0 = 0 \qquad \Rightarrow \lambda x \in S_0$$

$\square$

Invece S in generale <u>non</u> è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$. [perché in generale $0 \notin S$]

<u>Prop 3.2.1</u>: Se $S \neq \emptyset$, allora S è ottenuto prendendo <u>una</u> qualsiasi soluzione $x \in S$ e aggiungendo a questo x <u>tutti</u> i vettori di S_0.

[x viene chiamato <u>soluzione particolare</u>.]

Dim: Sia $x \in S$ soluzione di (1) e $x' \in S_0$ soluzione di (2). Per $x + x'$ troviamo

$$a_{i1}(x_1 + x_1') + \dots + a_{in}(x_n + x_n')$$
$$= a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n$$
$$+ a_{i1}x_1' + \dots + a_{in}x_n'$$
$$= b_i + 0 = b_i \quad \Rightarrow \quad x + x' \in S \text{ è una soluzione di (1).}$$

Sia x'' è soluzione di (1), allora poniamo $x' = x'' - x$ e otteniamo

$$a_{i1}x_1' + \dots a_{in}x_n' = a_{i1}(x_1'' - x_1) + \dots + a_{in}(x_n'' - x_n)$$
$$= a_{i1}x_1'' + \dots + a_{in}x_n''$$
$$- (a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n)$$
$$= b_i - b_i = 0 \quad \Rightarrow x' \in S_0$$
$$\Rightarrow x'' = x + x' \text{ è somma di } x \text{ \& un vettore in } S_0.$$

$\square$

(Esempi in lezione.)

Geometricamente, le soluzioni S di (1) formano un sottospazio affine.

Def: Un **sottospazio affine** di uno spazio vettoriale V è un sottoinsieme della forma

$$S = \{x + v \mid v \in W\}$$

con $x \in V$ & W un sottospazio di V.

[Nel nostro caso $W = S_0$.]

Esempio: Un sottospazio di dim. 2 di $\mathbb{R}^3$ è un piano che contiene l'origine O. Qualsiasi altro piano è un sottospazio affine.

Def: La dimensione di un sottospazio affine
$$S = \{x + v \mid v \in W\}$$
è la dimensione di W.

Teorema di Rouché-Capelli

Prop 3.2.12 Il sistema (1) ha soluzioni se e solo se
$$b \in \operatorname{Span}(A^1, \dots, A^n).$$
colonne di A

Dim: Il sistem (1) può essere scritto come
$$x_1 A^1 + \dots + x_n A^n = b$$
allora esiste una soluzione se e solo se b è comb. lineare di $A^1, \dots, A^n$. $\square$

Prop 3.2.10: Il rango di A è il numero di pivot in una qualsiasi riduzione a scalini di A.

Dim: Sia A una matrice $m \times n$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Il rango non si cambia con mosse di Gauss, applichiamo allora l'algo. di Gauss-Jordan

Otteniamo una matrice della forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & ? & 0 & ? & ? & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ? & ? & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & e_1 & & e_2 & & & e_3 \end{array}$$

Le k colonne che contengono un pivot

sono $e_1, \dots, e_k$ le prime k vettori della base canonica. Tutte le altre colonne sono comb. lineari di $e_1, \dots, e_k$.

$$\Rightarrow rk(A) = \dim \operatorname{Span}(A^1, \dots, A^n)$$
$$= \dim \operatorname{Span}(e_1, \dots, e_k)$$
$$= k = \#\text{ colonne con pivot.} \qquad \square$$

Teorema di Rouché-Capelli (3.2.13)

Il sistema (1) ha soluzioni se e solo se

$$rk(A \mid b) = rk(A).$$

In caso affermativo, lo spazio delle soluzioni S è un sottospazio affine di dimensione $n - rk(A)$.

Dim: Sappiamo: se (1) ha soluzioni allora
$b \in \mathrm{Span}(A^1, \dots, A^n)$ [Prop 3.2.12]

$\Leftrightarrow \quad \mathrm{Span}(A^1, \dots, A^n, b) = \mathrm{Span}(A^1, \dots, A^n)$

$\Rightarrow \quad rk(A|b) = rk(A)$.

Se (1) non ha soluzioni, allora
$b \notin \mathrm{Span}(A^1, \dots, A^n)$ [Prop. 3.2.12]

$\Leftrightarrow \quad \mathrm{Span}(A^1, \dots, A^n, b) \supsetneq \mathrm{Span}(A^1, \dots, A^n)$

$\Rightarrow \quad rk(A|b) > rk(A)$

Se ci sono soluzioni, la dimensione di S è uguale alla dimensione di S_0.
Nella Lezione 11 abbiamo visto che le

soluzioni sono generati da un numero di vettori ugule a $n -$ numero di pivot.
(colonne) $\Rightarrow \dim S_0 = n -$ numero di pivot
$= n - rk(A)$
[Prop 3.2.10] $\square$

Cor 3.2.14: Il sistema (1) ha $0, 1$, oppure ∞ soluzioni.
- Se $rk(A|b) > rk(A)$, ci sono 0 soluzioni.
- Se $rk(A|b) = rk(A) = n$, c'è 1 soluzione.
- Se $rk(A|b) = rk(A) < n$, ci sono ∞ soluzioni.

Cor 3.2.16: Un sistema omogeneo ha sempre soluzioni. Il sottospazio delle soluzioni ha dim $n - rk(A)$.

Sistemi lineari con A invertibile

A è quadrata!

Se A è una matrice invertibile il sistema $A \cdot x = b$ ha sempre una soluzione

$$x = A^{-1} \cdot A \cdot x = A^{-1} \cdot b$$

Prop 3.9.14 (Regola di Cramer)

Se A è invertibile ($\Leftrightarrow \det A \neq 0$) il sistema ha un'unica soluzione determinata nel modo seguente

$$x_i = \frac{\det B_i}{\det A} \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$

dove B_i è ottenuto da A sostituendo la i-esima colonna con b.

Dim: $x = A^{-1} \cdot b$

$$x_i = (A^{-1})_i \cdot b = \frac{{}^t(\mathrm{cof}(A))_i}{\det A} \cdot b$$

$$= \frac{{}^t(\mathrm{cof}(A)^i) \cdot b}{\det A} = \frac{\det B_i}{\det A}$$

sviluppo di Laplace lungo i-esima colonna di B_i

$\square$

Esercizio: Consideriamo per un parametro $k \in \mathbb{R}$ il sistema

$$\begin{cases} x + ky = 4 - k \\ kx + 4y = 4 \end{cases}$$

a) Al variare di k decidere se ci sono soluzioni e in caso affermativo trovare la dimensione.

b) Per $k = 1$ risolvere il sistema lineare.