Lezione 5: Spazi Vettoriali (Parte I)

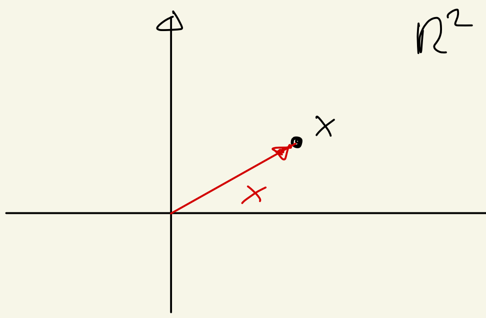
Lo spazio euclideo

Def: Lo spazio euclideo n-dimensionale è l'insieme $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}}$. Un elemento $x \in \mathbb{R}^n$ è una successione $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ di n numeri reali.

$\mathbb{R}^2$: piano ; un punto in $\mathbb{R}^2$ è una copia (x, y).
$\mathbb{R}^3$: spazi tridimensionale ; un punto in $\mathbb{R}^3$ è una terna (x, y, z).

L'elemento $(0, 0, \ldots, 0)$ è l'origine dello spazio e viene indicato con 0.

Un elemento $x \in \mathbb{R}^n$ possiamo interpretare come un punto oppure come un vettore (dall'origine a questo punto)
– noi spesso cambiamo punto di vista in questo corso.



Spesso, se pensiamo di $x = (x_1, \ldots, x_n)$ come un vettore scriviamo

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \leftarrow \text{vettore colonna}$$

Per vettori usiamo spesso nomi come v, w ecc.
per punti invece P, Q, ecc.

Somma fra vettori:

Se $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y \in \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, poniamo

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Prodotto per scalare:

Se $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, poniamo

$$\lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

(Esempi: solo in lezione)

Definizione di uno spazio vettoriale

Def (1.5.1) Un **gruppo** è un insieme G dotato di un'operazione binaria

$$* : G \times G \to G, \quad (a,b) \mapsto a * b$$

con le seguenti proprietà:

(1) L'operazione è **associativa**:

$$(a*b)*c = a*(b*c) \quad \forall a,b,c \in G$$

(2) Esistenza di un **elemento neutro**:

$$\exists e \in G : e*a = a*e = a, \quad \forall a \in G$$

(3) Esistenza di **elementi inversi**:

$$\forall a \in G \ \exists b \in G : a*b = b*a = e$$

l'inverso di a, scriviamo $b = a^{-1}$

Il gruppo G è commutativo (o abeliano) se l'operazione è commutativa:

$$a * b = b * a \quad , \forall a,b \in G .$$

Def (1.5.3) Un campo è un insieme $\mathbb{K}$ con due operazioni $+, \cdot$ binarie con le seguenti proprietà:

(1) $(\mathbb{K}, +)$ è un gruppo commutativo con elemento neutro $0 = 0_{\mathbb{K}}$.

(2) $(\mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}, \cdot)$ è un gruppo commutativo con elemento neutro $1 = 1_{\mathbb{K}}$.

(3) Distributività:

$$a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \quad \forall a,b,c \in \mathbb{K}$$

Esempi: $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sono campi.
Invece $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ non è un campo.
[Più dettagli in lezione.]

Def: (2.2.1) Fissiamo un campo $\mathbb{K}$.
[Per noi, questo $\mathbb{K}$ è quasi sempre o $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.]
Uno spazio vettoriale (su $\mathbb{K}$) è un insieme V con due operazioni:

- una addizione binaria: $V \times V \to V$, $(v,w) \mapsto v+w$
- un prodotto per scalare: $\mathbb{K} \times V \to V$, $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$

con le seguenti proprietà:

(1) $(V,+)$ è un gruppo commutativo.

(2) $\lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w$

(3) $(\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v$

(4) $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$

(5) $1v = 1_{\mathbb{K}} \cdot v = v$

$\forall v,w \in V$, $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{K}$

Visto che $(V,+)$ è un gruppo, esiste un elemento neutro $0 = 0_V$ (tale che $0+v = v+0 = v$). NON va confuso con lo zero $0 = 0_{\mathbb{K}}$ del campo $\mathbb{K}$!

[Quale zero intendiamo è chiaro dal contesto.]

Prop 2.2.1: $0v = 0$, $\forall v \in V$ $(0_{\mathbb{K}} \cdot v = 0_V)$

Dim: $0v = (0+0)v \overset{(3)}{=} 0v + 0v$

$\overset{-0v}{\Rightarrow} 0 = 0v$ $\square$

Esempio 0: Se $\mathbb{K}$ è un campo, allora $\mathbb{K}$ è uno spazio vettoriale su se stesso (con le stesse operazioni).

Esempio 1: Lo spazio $\mathbb{K}^n$.

Sia $\mathbb{K}$ un campo & $\mathbb{K}^n = \underbrace{\mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K}}_{n \text{ volte}}$.

Un elemento x di $\mathbb{K}^n$ è

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{con } x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$$

[Per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ otteniamo lo spazio euclideo dell'inizio della lezione.]

Per $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$, definiamo

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n.$$ Per $\lambda \in \mathbb{K}$, definiamo

$$\lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n.$$

Con queste operazioni, $\mathbb{K}^n$ diventa uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. [Controllo delle 5 proprietà solo in lezione.]

Esempio 2: Lo spazio $\mathbb{K}[x]$ dei polinomi

$\mathbb{K}[x] = \{$polinomi in variabile x con coeff. in $\mathbb{K}\}$

$\mathbb{K}[x]$ ha in modo naturale due operazioni:

•) somma di due polinomi (addizione binaria)

•) il prodotto di un scalare con un polinomio.

Con queste due operazioni, $\mathbb{K}[x]$ diventa uno spazio vettoriale. [Controllo delle 5 proprietà della definizione solo in lezione.]