ES. 1. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -3 & 5 & -3 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$

i) verificare che $\lambda = -4$ è un autovalore di A e trovare l'autospazio associato a λ.

ii) Trova tutti gli autovettori di A.

SVOLGIMENTO

Un autovettore di T è un vettore $v \neq 0$ t.c. $T(v) = \lambda \cdot v$, $\lambda \in \mathbb{K}$

$\exists\, v \in \mathbb{R}^3$ t.c. $A \cdot v = -4 \cdot v$?

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -3 & 5 & -3 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x_v + 3y_v - 3z_v = -4x_v \\ -3x_v + 5y_v - 3z_v = -4y_v \\ -6x_v + 6y_v - 4z_v = -4z_v \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_v + 3y_v - 3z_v = 0 \\ -3x_v + 9y_v - 3z_v = 0 \\ -6x_v + 6y_v = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & -3 & 0 \\ -3 & 9 & -3 & 0 \\ -6 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 2R_1]{\substack{R_1 \to R_1/3 \\ R_2 \to R_2 + R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 12 & -6 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{12} & \cancel{-6} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

$rk(A) = rk(A|b) = 2$

$\rightarrow$ il sistema ha soluzioni

$\rightarrow \exists\, v \in \mathbb{R}^3$ t.c. $Av = -4 \cdot v$

$\rightarrow -4$ è autovalore di A.

$12 y_v = 6 z_v \qquad z_v = t$

$y_v = \frac{1}{2} z_v = \frac{1}{2} t$

$x_v = -y_v + z_v = -\frac{1}{2} z_v + z_v = \frac{1}{2} z_v = \frac{1}{2} t$

Quindi $\forall v \in \mathbb{R}^3$ t.c. $v = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t \\ \frac{1}{2}t \\ t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$,

$A \cdot v = -4v$

Autospazio: Dato λ autovalore di $T: V \to V$,
$V_\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\}$
è l'autospazio di λ.

$$V_{-4} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t \\ \frac{1}{2}t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

ii) $\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & -3 \\ -3 & 5-\lambda & -3 \\ -6 & 6 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & -3 \\ 0 & 5-\lambda & -3 \\ -2+\lambda & 6 & -4-\lambda \end{vmatrix} =$

$C_1 \to C_1 - C_3$

$$= (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 6 & -4-\lambda \end{vmatrix} + (-2+\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 5-\lambda & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda) \cdot (\lambda^2 + 4\lambda - 5\lambda - 20 + 18) - (2-\lambda) \cdot (-9 + 15 - 3\lambda) =$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2 - 6 + 3\lambda) =$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda - 8) = (2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+4) = -(\lambda-2)^2(\lambda+4)$$

- $\lambda_1 = 2$ $\quad m_a(\lambda_1) = 2$
- $\lambda_2 = -4$ $\quad m_a(\lambda_2) = 1$

MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA

Trovo gli autovettori di $\lambda_1=2$.

$$\begin{pmatrix} -1-2 & 3 & -3 \\ -3 & 5-2 & -3 \\ -6 & 6 & -4-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -3x+3y-3z&=0 \\ \cancel{-3x+3y-3z=0}& \\ \cancel{-6x+6y-6z=0}& \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y&=\pi \\ z&=t \\ x&=\pi-t \end{aligned} \qquad \left\{\begin{pmatrix} \pi-t \\ \pi \\ t \end{pmatrix}, \pi, t \in \mathbb{R}\right\}$$

Quindi gli autovettori di A sono:

$$\left\{\begin{pmatrix} 1/2\,t \\ 1/2\,t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}\right\} \text{ relativi a } \lambda_2=-4$$

$$\text{e } \left\{\begin{pmatrix} \pi-t \\ \pi \\ t \end{pmatrix}, \pi, t \in \mathbb{R}\right\} \text{ relativi a } \lambda_1=2$$

ES. 2 Determinare la diagonalizzabilità di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

al variare di k.
Cioè determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice è diagonalizzabile e, per tali valori, determinare una base di autovettori.

<u>SVOLGIMENTO</u>.

Calcolo gli autovalori di A:

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & k \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\left[(1-\lambda)(2-\lambda) - 0\right]$$

$$= (1-\lambda)^2(2-\lambda)$$

$\forall k \in \mathbb{R}$

$\lambda_1 = 1 \quad m_a(\lambda_1) = 2$
$\lambda_2 = 2 \quad m_a(\lambda_2) = 1$

Devo verificare che $\forall \lambda_k \; m_g(\lambda_k) = m_a(\lambda_k)$.

- $\lambda_1 = 1$ Determino $V_{\lambda_1} = \{v \in \mathbb{R} \mid Av = 1 \cdot v\}$

cioè cerco $\ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} y + kz = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y - ky = 0 \\ y = -z \end{cases} \quad \begin{cases} (1-k)y = 0 \\ y = -z \end{cases}$

pongo $\lambda = 1$

- per $k \neq 1$ $\quad V_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} \rightarrow \dim V_{\lambda_1} = 1$

$\rightarrow m_g(\lambda_1) = 1$

Quindi A non è diagonalizzabile

• per $k=1$ $V_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ r \\ -r \end{pmatrix} \middle| t, r \in \mathbb{R} \right\}$

$\rightarrow \dim(V_\lambda) = 2 \rightarrow m_g(\lambda_1) = 2$

Sono sicura che $m_g(\lambda_2) = 1$

poiché vale sempre: $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$

e $m_a(\lambda_2) = 1$

Quindi per $k=1$, A è diagonalizzabile

pongo $\lambda=2$

$V_{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ $\quad V_{\lambda_2} = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\boxed{k=1}$

$$\begin{cases} -x+y+z=0 \\ -y=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=z \\ y=0 \end{cases} \quad V_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

$V_{\lambda_2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Quindi una base di autovettori è $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

SVOLGIMENTO ALTERNATIVO:

$p(x) = a + bx + cx^2$

devo cercare i $p(x)$ t.c. $T(p(x)) = \lambda \cdot p(x)$

cioè $p(0) + p(1)x + p(-1)x^2 = \lambda \cdot p(x)$

cioè $a + (a+b+c)x + (a-b+c)x^2 = \lambda a + \lambda bx + \lambda cx^2$

$$\begin{cases} a = \lambda a \\ a+b+c = \lambda b \\ a-b+c = \lambda c \end{cases} \quad \begin{cases} 1 = \lambda \\ a+c = 0 \\ a-b = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{ES 8}}$ Calcolare gli autovalori dell'endomorfismo

$T: \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ definito da:

$$T(p(x)) = p(0) + p(1)x + p(-1)x^2$$

<u>SVOLGIMENTO</u>: base canonica di $\mathbb{R}_2[x]$: $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$

$$T(1) = \underbrace{1}_{p(0)} + \underbrace{1}_{p(1)} \cdot x + \underbrace{1}_{p(-1)} \cdot x^2 = 1 + x + x^2$$

$$T(x) = 0 + 1 \cdot x + (-1) \cdot x^2 = x - x^2$$

$$T(x^2) = 0 + 1 \cdot x + (-1)^2 x^2 = x + x^2$$

$$A = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\downarrow \; T(1) \quad \downarrow \; T(x) \quad \downarrow \; T(x^2)$

rispetto alla base $\mathcal{B}$

Calcolo gli autovalori di A

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 2\lambda + 2)$$

$$\hookrightarrow \lambda_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{\overset{<0}{1-2}}}{1}$$ no soluzioni in $\mathbb{R}$

Quindi l'unico autovalore è $\lambda = 1$.