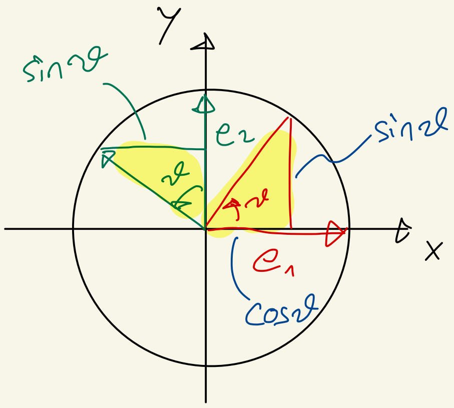
Lezione 22: Lo Spazio Euclideo (Parte I)

Isometrie del piano

Def 4.4.14: Una rotazione di angolo ϑ del piano $\mathbb{R}^2$ è una trasformazione lineare $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dove

$$A = Rot_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$



Prop 4.4.15: Questa trasformazione è veramente una rotazione intorno a O con angolo ϑ in senso anti-orario.

Dim: Il punto $\binom{x}{y}$ in coordinate polari

$$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi$$

ha immagine

$$L_A \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r(\cos\vartheta\cos\phi - \sin\vartheta\sin\phi) \\ r(\sin\vartheta\cos\phi + \cos\vartheta\sin\phi) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r\cos(\vartheta+\phi) \\ r\sin(\vartheta+\phi) \end{pmatrix}$$

Allora la trasformazione manda (r,ϕ) in $(r, \phi+\vartheta)$.

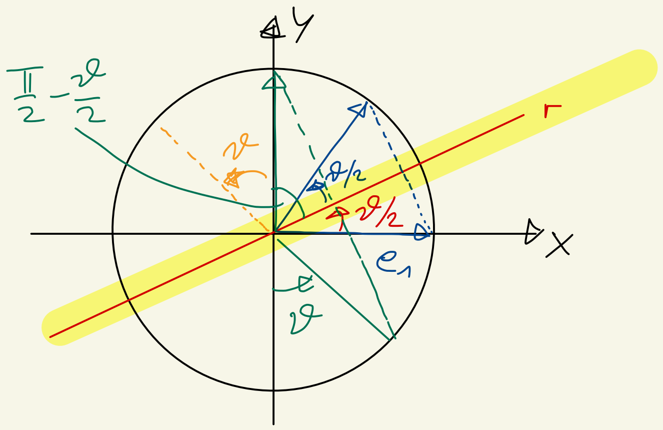
$\square$

Notiamo che $\det(Rot_\vartheta) = \cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta = 1$ per ogni angolo ϑ.

Def 4.4.16: Una riflessione (ortogonale) del piano $\mathbb{R}^2$ rispetto ad una retta r è la tr. lineare $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dove

$$A = Rif_{\vartheta} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

& $\frac{\vartheta}{2}$ è l'angolo fra la retta r e l'asse x.



Prop 4.4.17: Questa tr. lin. è veramente una riflessione all'asse r.

Dim: In coordinate polari, troviamo

$$L_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \end{pmatrix}$$

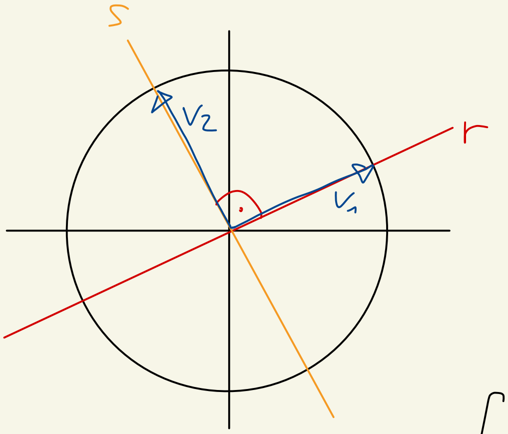
$$= \begin{pmatrix} r(\cos\vartheta\cos\phi + \sin\vartheta\sin\phi) \\ r(\sin\vartheta\cos\phi - \cos\vartheta\sin\phi) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r\cos(\vartheta-\phi) \\ r\sin(\vartheta-\phi) \end{pmatrix}$$

Allora il punto (r,ϕ) diventa mandato a $(r, \vartheta-\phi)$. $\square$

Notiamo che la matrice Rif_{ϑ} ha sempre determinante -1.

Osservazione: Sia s la retta ortogonale a r, cioè la retta con angolo $\frac{\vartheta}{2}+\frac{\pi}{2}$ con l'asse x e sia $\mathcal{B}=\{v_1,v_2\}$ la base dove v_1 punta in direzione r & v_2 punta in direzione s



$$\mathrm{Rif}_{2\vartheta}(v_1)=v_1$$
$$\mathrm{Rif}_{2\vartheta}(v_2)=-v_2$$

Allora in base $\mathcal{B}$ la matrice della tr. lineare è

$$[L_{\mathrm{Rif}_{2\vartheta}}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

Def 7.5.1: Siano V & W due spazi vettoriali dotati ciascuno di un prodotto scalare. Una isometria $T: V\to W$ è un appl. lineare tale che

(1) $\quad \langle v,w\rangle=\langle T(v),T(w)\rangle \quad \forall v,w\in V.$

Lemma 7.5.5: Sia $\mathcal{B}=\{v_1,\dots,v_n\}$ una base di V. $T: V\to W$ è una isometria se e solo se

(2) $\quad \langle v_i,v_j\rangle=\langle T(v_i),T(v_j)\rangle \quad \forall i,j$

Dim: (1) $\Rightarrow$ (2) ovvio.
(2) $\Rightarrow$ (1): scriviamo $v=\lambda_1v_1+\dots+\lambda_nv_n$
$w=\mu_1v_1+\dots+\mu_nv_n$

$\langle v,w\rangle=\sum_{i,j=1}^{n}\lambda_i\mu_j\langle v_i,v_j\rangle$ (bilinearità del pr. scalare)

$$T(v) = T(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 T(v_1) + \dots + \lambda_n T(v_n)$$
$$T(w) = T(\mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n) = \mu_1 T(v_1) + \dots + \mu_n T(v_n)$$

(linearità di T)

$$\langle T(v), T(w)\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \mu_j \underbrace{\langle T(v_i), T(v_j)\rangle}_{\overset{(2)}{=} \langle v_i, v_j\rangle} = \langle v, w\rangle$$

$\square$

Prop 8.2.1: Sia $T: V \to W$ una tr. lineare fra spazi vettoriali dotati di un pr. scalare def. pos. Allora i seguenti fatti sono equivalenti:

(i) T è una isometria (preserva il pr. scalare)

(ii) T preserva la norma, cioè $\|T(v)\| = \|v\|$, $\forall v \in V$

(iii) T preserva la distanza, cioè $d(v,w) = d(T(v), T(w))$ $\forall v, w \in V$.

Siano V & V' due spazi vettoriali muniti di prodotti scalari g & g' e basi $\mathcal{B}$ & $\mathcal{B}'$, rispettivamente. $T: V \to V'$ un applicazione lineare. Siano

$$S = [g]_{\mathcal{B}}, \quad S' = [g']_{\mathcal{B}'}, \quad A = [T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}.$$

Prop 7.5.8: T è una isometria se e solo se
$$S = {}^tA\, S' A$$

Dim: T è una isometria se e solo se
$$S_{ij} = g(v_i, v_j) = g'(T(v_i), T(v_j)) \text{ per ogni } i,j.$$

La colonna i-esima di A è
$$A^i = [T(v_i)]_{\mathcal{B}'}$$

Allora $({}^tA\, S'A)_{ij} = {}^t(A^i)\, S' A^j$

$$= {}^t[T(v_i)]_{B'} \cdot S' \cdot [T(v_j)]_{B'}$$

$$= g'(T(v_i), T(v_j)) = S_{ij} \qquad \square$$

Consideriamo adesso il caso $V = V' = \mathbb{R}^n$ & $B = B'$ = base canonica, $g = g'$ = pr. scalare euclideo.

$(\Leftrightarrow S = S' = I_n)$

Cor 7.5.11: L'endomorfismo $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una isometria se e solo se

$$ {}^tA \cdot A = I_n $$

Def: Una matrice $A \in M(n, \mathbb{R})$ è ortogonale se ${}^tA \cdot A = I_n$.

Vogliamo classificare tutte le isometrie del piano $\mathbb{R}^2$.

Prop 8.2.7: Le matrici ortogonali in $M(2,\mathbb{R})$ sono

$$\mathrm{Rot}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Rif}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

al variare di $\vartheta \in [0, 2\pi)$.

Cor 8.2.8: Le isometrie di $\mathbb{R}^2$ sono rotazioni & riflessioni.

Dim (di Prop 8.2.7): ${}^tA A = I_n \Leftrightarrow \langle A^1, A^1 \rangle = {}^t(A^1) \cdot A^1 = 1$

& $\langle A^1, A^2 \rangle = 0 = \langle A^2, A^1 \rangle$

& $\langle A^2, A^2 \rangle = 1$

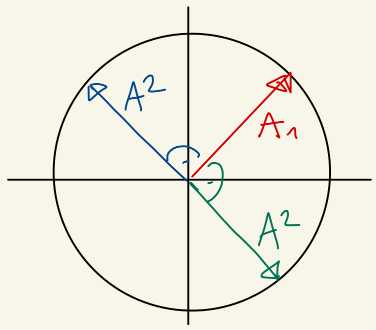
Le colonne di una matrice ortogonale sono <u>ortonormali</u> (cioè ortogonali & con norma 1)

Allora A^1 è un generico vettore in $\mathbb{R}^2$ con norma 1

allora $A^1 = \begin{pmatrix}\cos\vartheta \\ \sin\vartheta\end{pmatrix}$ per qualche $\vartheta \in [0, 2\pi)$.

A^2 deve essere ortogonale a A^1 & di norma 1

Ci sono due possibilità, $A^2 = \begin{pmatrix}-\sin\vartheta \\ \cos\vartheta\end{pmatrix}$



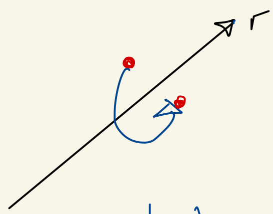
o $A^2 = \begin{pmatrix}\sin\vartheta \\ -\cos\vartheta\end{pmatrix}$

Allora la matrice A è Rot_ϑ o Rif_ϑ. $\square$

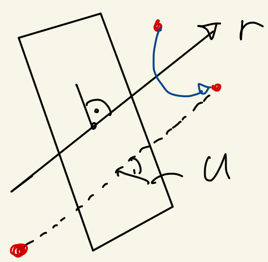
Isometrie dello spazio tridimensionale

Teorema 8.2.13: Ogni isometria di $\mathbb{R}^3$ ($L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$) è una rotazione o un'antirotazione.

Un'antirotazione $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è la composizione di una rotazione ad un asse r e di una riflessione al piano $U = r^\perp$.



rotazione



Prodotto vettoriale

Def 9.1.1: Consideriamo due vettori $v, w \in \mathbb{R}^3$,

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}.$$

Il **prodotto vettoriale** fra v & w è il vettore

$$v \times w = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$$

Notiamo che $v \times w = \begin{pmatrix} d_1 \\ -d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$ dove d_k è il determinante della matrice 2×2 ottenuto da $A = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix}$ dopo aver cancellato la k-esima riga.

Questo non è matematica!

Allora formalmente

vettori della base canonica

$$v \times w = \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 & e_1 \\ v_2 & w_2 & e_2 \\ v_3 & w_3 & e_3 \end{pmatrix}$$

$$= e_1 \det \begin{pmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} - e_2 \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} + e_3 \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}$$

Prop 9.1.2: Il vettore $v \times w$ è ortogonale sia a v che a w.

Dim: $\langle v \times w, v \rangle = \det \begin{pmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} \cdot v_1 - \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} \cdot v_2$

$$+ \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} \cdot v_3 = \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 & v_1 \\ v_2 & w_2 & v_2 \\ v_3 & w_3 & v_3 \end{pmatrix}$$

$= 0$ perché la 1ª & 3ª colonna sono

uguali. Allora $v \times w$ è ortogonale a v.
Un calcolo analogo dimostra che è anche ortogonale a w. $\square$

Prop 9.13: Il vettore $v \times w$ è nullo
$\Leftrightarrow$ v & w sono lin. dipendenti.

Dim: $v \times w = \begin{pmatrix} d_1 \\ -d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$ dove d_1, d_2, d_3 sono determinanti dei sottomatrici di $A = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix}$ dopo aver cancellato una riga.

$$v \times w = 0 \Leftrightarrow d_1 = d_2 = d_3 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rk} A \leq 1$$
$$\Leftrightarrow v \,\&\, w \text{ sono dip.} \quad \square$$

Cor: Se v & w sono lin. indip. allora $v, w, v \times w$ è una base di $\mathbb{R}^3$.