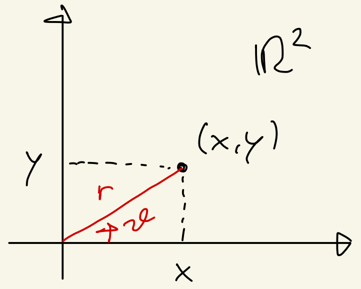
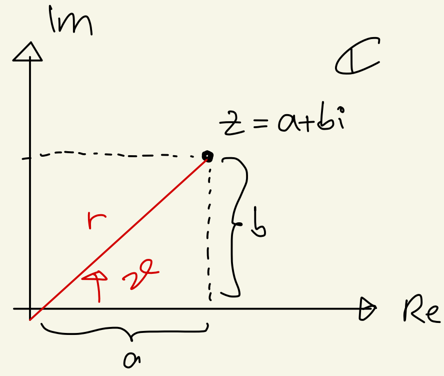
Lezione 3 : Numeri complessi (Parte II)

Coordinate polari:





$$\boxed{\begin{array}{ll} a = r\cos\vartheta, & b = r\sin\vartheta \\ r = \sqrt{a^2+b^2}, & \vartheta = \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{array}}$$

Normalmente $\vartheta \in [0, 2\pi)$

Modulo $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = r$. // ϑ è l'argomento di z.

Coniugio: $\bar{z}$, Se $z = r\cos\vartheta + ri\sin\vartheta$

allora $\bar{z} = r\cos\vartheta - r\cdot i\sin\vartheta$

$= r\cos(-\vartheta) + r\cdot i\sin(-\vartheta)$

La funzione $z \mapsto \bar{z}$ cambia il segno del argomento ϑ e lascia invariante r.

Notazione: $\cos\vartheta + i\sin\vartheta \; (= \operatorname{cis}\vartheta) = e^{i\vartheta}$

$$z = r\cos\vartheta + ri\sin\vartheta = re^{i\vartheta}$$

Prop 1.4.2: $e^{i\vartheta+i\varphi} = e^{i(\vartheta+\varphi)} = e^{i\vartheta}\cdot e^{i\varphi}$

Dim: $$e^{i(\vartheta+\varphi)} = \cos(\vartheta+\varphi) + i\sin(\vartheta+\varphi)$$
$$= \cos\vartheta\cos\varphi - \sin\vartheta\sin\varphi$$
$$+ i(\sin\vartheta\cos\varphi + \cos\vartheta\sin\varphi)$$
$$= (\cos\vartheta + i\sin\vartheta)\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
$$= e^{i\vartheta}\cdot e^{i\varphi} \qquad \square$$

Corollario: $z_1 = r_1 e^{i\vartheta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\vartheta_2}$

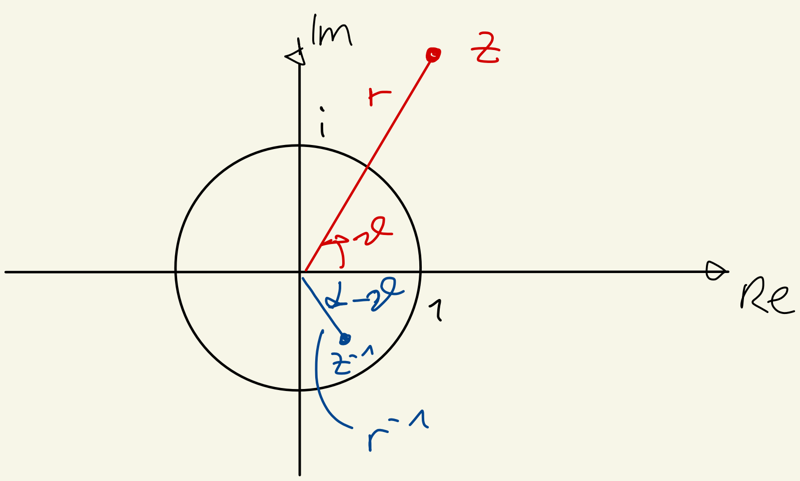
Allora $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\vartheta_1+\vartheta_2)}$.

Allora quando si fa il prodotto di due numeri complessi si moltiplicano i moduli mentre gli argomenti si sommano. (Esempi espliciti in lezione.)

L'inverso z^{-1}: Se $z = re^{i\vartheta}$ allora

$z^{-1} = r^{-1}e^{-i\vartheta}$ ha argomento opposto e raggio / modulo inverso.

$$\left[\ z z^{-1} = r r^{-1} e^{i\vartheta + (-i\vartheta)} = 1\cdot e^0 = 1\ \right]$$



$$\left[\begin{array}{l} e^{0} = e^{2\pi i} = 1 \quad , \quad e^{\frac{\pi}{2} i} = i \quad , \quad e^{\pi i} = -1 \\ e^{\frac{3\pi}{2} i} = -i \quad , \text{ ecc.} \end{array}\right]$$

Due numeri complessi $z_1 = r_1 e^{i\vartheta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\vartheta_2}$ sono uguali se e solo se

- $r_1 = r_2$
- $\vartheta_1 = \vartheta_2 + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$

Potenza n-esima di un numero complesso

$$z_0 = r_0 e^{i\vartheta_0} \Rightarrow z_0^n = r_0^n e^{in\vartheta_0}$$

Esempio: Calcolo di $(1+i)^5$ in coordinate cartesiane & coordinate polari (solo in lezione)

Radici n-esime di un numero complesso

$z_0 = r_0 e^{i\vartheta_0}$. Vogliamo trovare le radici n-esime di z_0. Se z è una radice n-esima di z_0, allora $z^n = z_0$.

$$z = re^{i\vartheta} \Rightarrow z^n = r^n e^{in\vartheta} = z_0 = r_0 e^{i\vartheta_0}$$

- $r^n = r_0 \Rightarrow r = \sqrt[n]{r_0}$
- $n\vartheta = \vartheta_0 + 2\pi k \Rightarrow \vartheta = \frac{\vartheta_0}{n} + \frac{2\pi k}{n}$

Otteniamo n argomenti diversi

$$\vartheta = \frac{\vartheta_0}{n}, \ \frac{\vartheta_0}{n} + \frac{2\pi}{n}, \ \frac{\vartheta_0}{n} + \frac{4\pi}{n}, \ \dots, \ \frac{\vartheta_0}{n} + \frac{2\pi(n-1)}{n}$$

$\Rightarrow$ Le soluzioni di $z^n = z_0$ sono

$$z = \sqrt[n]{r_0}\, e^{i\frac{\vartheta_0}{n}}, \ \sqrt[n]{r_0}\, e^{i\left(\frac{\vartheta_0}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)}, \ \dots, \ \sqrt[n]{r_0}\, e^{i\left(\frac{\vartheta_0}{n} + \frac{2\pi(n-1)}{n}\right)}$$

$\Rightarrow$ Ogni numero complesso z_0 ha $\underline{n}$ radici n-esime.

Esempi 1.4.4 & 1.4.5 di Martelli
& soluzioni di $z^4 = i$.
(solo in lezione)

Esercizio: Disegnare nel piano complesso:

1) $A = \{ z \in \mathbb{C}$ tali che $\mathrm{Re}(z) > \mathrm{Im}(z) \}$
2) $B = \{ z \in \mathbb{C}$ tali che $z + \bar{z} = i \}$
3) $C = \{ z \in \mathbb{C}$ tali che $|z-2| \geq 2 \}$
4) $D = \{ z \in \mathbb{C}$ tali che $z - \bar{z} \in \mathbb{R} \}$
5) $E = \{ z = re^{i\vartheta} \in \mathbb{C}$ tali che $\vartheta = \frac{\pi}{2} \}$
6) $F = \{ z = re^{i\vartheta} \in \mathbb{C}$ tali che $\vartheta = (2k+1)\pi, \ k \in \mathbb{Z} \}$
7) $G = \{ z = re^{i\vartheta} \in \mathbb{C}$ tali che $r = 1, \ 0 \leq \vartheta \leq \pi \}$

(Soluzioni solo in lezione !)