ESERCIZIO 1

Siano $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

- Dimostrare che $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ forma una base di $M(2,\mathbb{R})$.
- Trovare il vettore di coordinate della matrice $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ nella base $\mathcal{A}$.

SVOLGIMENTO

Scrivo A_1, A_2, A_3, A_4 tramite le loro coordinate rispetto alla base canonica

→ cosa significa:

la base canonica di $M(2,\mathbb{R})$ è $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$

con $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Quindi, ad esempio, A_1 lo scrivo come:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi il vettore delle coordinate di A_1 rispetto alla base canonica di $M(2,\mathbb{R})$ è: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

In pratica "svolgo" la matrice mettendone i valori in colonna

Quindi $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $A_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Se $\mathcal{A}$ è base, allora ogni $v \in M(2,\mathbb{R})$ si scrive in modo unico come c.l. di A_1, A_2, A_3, A_4
cioè esiste un'unica n-upla $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ per cui

$$v = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4$$

Considero il generico vettore $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_4 = x_1 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_3 + \lambda_4 = x_2 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 - 2\lambda_4 = x_3 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 + 3\lambda_4 = x_4 \end{cases}$$

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 & x_1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & x_2 \\ -1 & 2 & -2 & -2 & x_3 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & x_4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 & x_1 \\ 0 & -2 & 2 & -7 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & x_3 + x_1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & x_4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 \to 2R_4 - R_2]{R_3 \to R_3 + 3R_4} \boxed{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 & x_1 \\ 0 & -2 & 2 & -7 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & x_1 + x_3 + 3x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 2x_4 - x_2 + 2x_1 \end{array}\right)}$$

*

$Rk(B) = Rk(B|C) = 4$

Quindi il sistema ha un'unica soluzione.
Quindi ogni $v \in M(2,\mathbb{R})$ si scrive in maniera univoca come c.l. di A_1, A_2, A_3, A_4

Quindi $\mathcal{A}$ è base di $M(2,\mathbb{R})$.

- Devo svolgere lo stesso sistema di prima, ma con

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

* $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 4 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} \text{- - - -} \\ -2\lambda_2 = -2\cdot\frac{8}{13} + 7\cdot\frac{4}{13} - 2 \\ \lambda_3 = 4 - 11\cdot\frac{4}{13} = \frac{52-44}{13} = \frac{8}{13} \\ \lambda_4 = \frac{4}{13} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{7}{13} - 4\cdot\frac{4}{13} + 1 \\ \lambda_2 = \frac{8-14+13}{13} = \frac{7}{13} \\ \dots \\ \dots \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = \frac{-7-16+13}{13} = \frac{-10}{13} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10/13 \\ 7/13 \\ 8/13 \\ 4/13 \end{pmatrix}$$

sono le coordinate di I_2 rispetto alla base $\mathcal{A}$.

VERIFICO:

$$-\frac{10}{13}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{7}{13}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{8}{13}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{4}{13}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{13}\cdot\left[\begin{pmatrix} -10+7+16 \\ -20+16+4 \\ +10+14-16-8 \\ -7+8+12 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\text{OK}}$$

ESERCIZIO 2

In $\mathbb{R}_3[x]$ calcolare la matrice del cambio di base da $\{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3\}$ a $\{1, x, x^2, x^3\}$ e viceversa

SVOLGIMENTO

siano $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ e $\mathcal{C} = \{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3\}$

base canonica di $\mathbb{R}_3[x]$ $\to$ spazio dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$, di grado ≤ 3

posso scrivere le coordinate dei vettori delle due basi rispetto alla base canonica (VEDI ES. 1).

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\} \quad e \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\\-3\\1\end{pmatrix} \right\}$$

$(x-1)^2 = x^2-2x+1$

$(x-1)^3 = x^3-3x^2+3x-1$

matrice del cambio di base da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$:

$$[Id]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

coord. di v_k rispetto a $\mathcal{B}$

vettori di $\mathcal{C}$

$$[Id]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = \left([Id]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}\right)^{-1}$$

$$\det\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$

$$\mathrm{Cof}\left([Id]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}\right) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

$${}^{T}\left(\mathrm{Cof}\left([Id]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}\right)\right) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{\underbrace{\det\left([Id]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}\right)}_{1}}\cdot {}^{T}\left(\mathrm{Cof}\left([Id]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}\right)\right) = [Id]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$$

ALTRO MODO: come prima $[Id]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} & & & \end{pmatrix}$

coordinate di e_k rispetto a $\mathcal{C}$

vettori di $\mathcal{B}$

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = v_1 \qquad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = v_2 + v_1 \qquad e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \overset{v_3}{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}} + 2\overset{v_2}{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}} + \overset{v_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}}$$

$$e_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \overset{v_4}{\begin{pmatrix}1\\3\\-3\\1\end{pmatrix}} + 3\overset{v_3}{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}} + 3\overset{v_2}{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}} + \overset{v_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}}$$

$$[Id]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

ESERCIZIO 3

Data la mappa $T: \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, $T(p(x)) = p(0) + p(1)x + p(2)x^2$,

calcolare: 1. $A = [T]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ dove $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono le basi canoniche

2. $\ker L_A$ e $\ker T$

Che rapporto hanno $\ker L_A$ e $\ker T$?
Come si ottiene l'uno dall'altro?

SVOLGIMENTO

$\mathcal{A} = \{1, x, x^2, x^3\}$ $\quad \mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$

Considero il generico vettore di $\mathbb{R}_3[x]$: $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = \bar{p}(x)$

$$T(\bar{v}) = \underbrace{a_0}_{\bar{p}(0)} + \cancel{a_1 \dots} + \underbrace{(a_0 + a_1 + a_2 + a_3)}_{\bar{p}(1)} x + \underbrace{(a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3)}_{p(2)} x^2$$

$$A = [T]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

immagini di (rispettivamente)

$1 \quad x \quad x^2 \quad x^3$

rispetto alla base $\mathcal{B}$.

$T(1) = 1 + x + x^2$

$T(x) = 0 + x + 2x^2$

$T(x^2) = 0 + x + 4x^2$

$T(x^3) = 0 + x + 8x^2$

• $\ker L_A = \{ \overline{x} \in \mathbb{R}^4 \text{ t.c. } A \cdot \overline{x} = \overline{0} \}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_2 + R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ \cdots \\ x_3 = -3x_4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = +3x_4 - x_4 = 2x_4 \\ x_3 = -3x_4 \end{cases} \quad \text{pongo } x_4 = t \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2t \\ -3t \\ t \end{pmatrix} = \ker L_A$$

• $\ker T = \{ p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(0) + p(1)x + p(2)x^2 = 0 \}$

$$\begin{cases} p(0) = 0 \\ p(1) = 0 \\ p(2) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = -a_2 - a_3 \\ -2a_2 - 2a_3 + 4a_2 + 8a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ \cdots \\ 2a_2 + 6a_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 2a_3 \\ a_2 = -3a_3 \end{cases}$$

Quindi $\ker T = \{ 2tx - 3tx^2 + tx^3, \; t \in \mathbb{R} \}$

ESERCIZIO 4

Sia $V = \mathbb{R}^3$. Sia $\mathcal{A} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di V

e $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3\}$ due altre basi date da

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sia $T: V \to V$ dato da $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}$

Trovare $[T]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}$ e $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$

SVOLGIMENTO: $[T]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$T(e_1) \; T(e_2) \; T(e_3)$
rispetto a $\mathcal{A}$

Per trovare $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$ ho 2 modi:

$\boxed{\text{MODO 1}}$ SCRIVO $T(v_1), T(v_2), T(v_3)$ rispetto alla base $\mathcal{C}$

$$T(v_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad T(v_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad T(v_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(v_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & +1 & -8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to 2R_3 - R_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -14 \end{array}\right)$$

$\alpha = 2$

$2\beta = -2 + 14 \quad \beta = 6$

$\gamma = [illegible] - [illegible] - 14$

$T(v_2) = 3w_1 + w_2 - 2w_3$ $\qquad$ $T(v_3) = 2w_1 + 2w_2 - 7w_3$

$$[T]^{\mathcal B}_{\mathcal E} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -6 & -2 & -7 \end{pmatrix}$$

$T(v_1) = 2w_1 + 2w_2 - 6w_3$

$\boxed{\text{MODO 2}}$ Uso le matrici di cambio base

$$[T]^{\mathcal B}_{\mathcal E} = [id]^{\mathcal A}_{\mathcal E} \cdot [T]^{\mathcal A}_{\mathcal A} \cdot [id]^{\mathcal B}_{\mathcal A}$$

$$[id]^{\mathcal B}_{\mathcal A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

vettori di $\mathcal B$
v_1 v_2 v_3
rispetto a $\mathcal A$

$$[id]^{\mathcal A}_{\mathcal E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

vettori di $\mathcal A$
e_1 e_2 e_3
rispetto a $\mathcal E$

$$e_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to 2R_3 - R_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

$\alpha = 1$

$\beta = \dfrac{-2+4}{2} = 1$

$\gamma = -4$

$e_2 = w_2 - w_3$ $\qquad$ $e_3 = 2w_3 - w_2$

$$[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 2 \\ -14 & -9 & -7 \end{pmatrix}$$