Lezione 23: Lo Spazio Euclideo (Parte II)

Ci ricordiamo che per $v, w \in \mathbb{R}^3$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ abbiamo

$$v \times w = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo visto che $v \times w = 0 \iff v$ & w sono lin. dip. e $v \times w$ è ortogonale a v & a w.

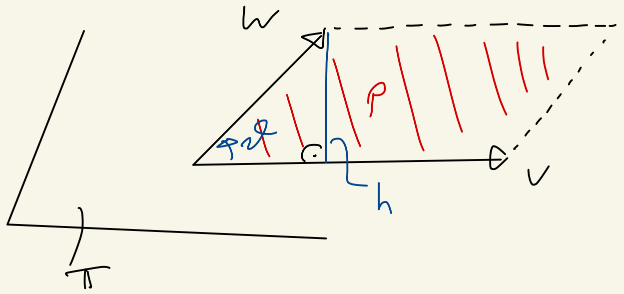
Prop 9.1.4 Vale l'equazione

$$\|v \times w\|^2 + \langle v, w \rangle^2 = \|v\|^2 \cdot \|w\|^2$$

Dim: Troviamo

$$\begin{aligned} \|v \times w\|^2 &= (v_2 w_3 - v_3 w_2)^2 + (v_3 w_1 - v_1 w_3)^2 \\ &\quad + (v_1 w_2 - v_2 w_1)^2 \\ &= (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) \\ &\quad - (v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3)^2 \\ &= \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2. \end{aligned}$$ $\square$

Supponiamo che v & w sono lin. indipendenti, allora $\mathrm{Span}(v, w) = \Pi$ è un piano in $\mathbb{R}^3$. Indichiamo con P il parallelogramma avente lati v & w



$h = \|w\| \cdot \sin\vartheta$

$\Rightarrow$ Area di P è

$$\text{Area}(P) = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \sin\vartheta$$

dove ϑ è l'angolo fra v & w.

Cor 9.1.6 La norma di $v \times w$ è

$$\|v \times w\| = \text{Area}(P).$$

Dim: $\langle v, w \rangle = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos\vartheta$, dove ϑ è l'angolo fra v & w. Troviamo

$$\|v \times w\|^2 \overset{\text{Prop 9.1.4}}{=} \|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2$$

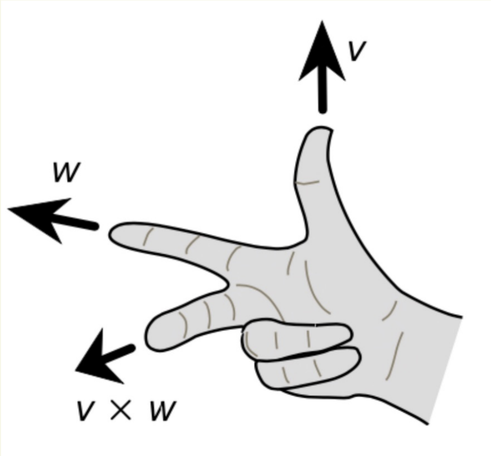
$$= \|v\|^2 \|w\|^2 (1 - \cos^2\vartheta)$$

$$= \|v\|^2 \|w\|^2 \sin^2\vartheta$$

$$= \text{Area}(P)^2. \qquad \square$$

Se v & w sono lin. indipendenti, sappiamo che $v \times w$ è ortogonale a v, w, allora ortogonale al piano $\pi = \text{Span}(v, w)$ & $v \times w$ ha norma $\text{Area}(P)$. Queste due condizioni determinano il prodotto vettoriale a meno di segno.

Il "segno giusto" è tale che $v, w, v \times w$ forma una base positiva.



La regola della mano destra.

Def: v_1, v_2, v_3 è una base positiva se $\det(v_1|v_2|v_3) > 0$

Prop 9.1.7: Se v & w sono indipendenti, $v, w, v\times w$ è una base positiva di $\mathbb{R}^3$

$$\Leftrightarrow \det(v|w|v\times w) > 0.$$

Dim: $$\det(v|w|v\times w) = \det\begin{pmatrix} v_1 & w_1 & d_1 \\ v_2 & w_2 & -d_2 \\ v_3 & w_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

dove $d_1 = \det\begin{pmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix}$, $d_2 = \det\begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix}$,

$$d_3 = \det\begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}.$$

Sviluppando lungo l'ultima colonna

$$\det(v|w|v\times w) = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 > 0.$$

$\square$

Allora si può definire $v\times w$ come l'unico vettore ortogonale a v & w, $\|v\times w\| = \text{Area}(P)$, $v, w, v\times w$ orientato in modo positivo.

◦) In particolare per la base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$

abbiamo $e_1 \times e_2 = e_3$

$e_2 \times e_3 = e_1$

$e_3 \times e_1 = e_2$

- Notiamo anche che $v \times w = - w \times v$, $\forall v, w \in \mathbb{R}^3$.
- Il prodotto vettoriale è bilineare, cioè

$$(v+v') \times w = v \times w + v' \times w$$
$$(\lambda v) \times w = \lambda (v \times w)$$
$$v \times (w + w') = v \times w + v \times w'$$
$$v \times (\lambda w) = \lambda (v \times w)$$

⚠ Il prodotto vettoriale non è un prodotto associativo !

$$(e_1 \times e_2) \times e_2 = e_3 \times e_2 = - e_2 \times e_3 = - e_1$$
$$e_1 \times (e_2 \times e_2) = e_1 \times 0 = 0$$

Forma cartesiana & forma parametrica di sottospazi affini

La forma cartesiana usa equazioni lineari e descrive il sottospazio (affine) come sol. di un sistema di eq. lineari, per esempio $\{z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ è un piano in forma cartesiana.

La forma parametrica invece descrive il sottospazio (affine) come spazio generato da alcuni vettori, per esempio

$$\{z=0\} = \mathrm{Span}(e_1, e_2)$$
$$= \left\{ t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} ; t,s \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix}t\\s\\0\end{pmatrix} ; \underbrace{t,s}_{\text{parametri}} \in \mathbb{R} \right\}$$

Ci ricordiamo che un sottospazio affine è della forma

$S = \{x+v \,/\, v \in W\}$ dove $x \in V$ è fisso e $W \subseteq V$ è un sottospazio.

Abbiamo visto che le soluzioni di un sistema di equazioni lineari S è sempre o $S = \emptyset$ o

$$S = \{x+v \,/\, v \in S_0\}$$

dove S_0 è il sottospazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato & x è una soluzione particolare del sistema inomogeneo.

Def: Scriviamo per $S = \{x+v \,/\, v \in \underset{\text{sottospazio}}{W}\}$ anche $S = x+W$ e chiamiamo W la giacitura di S, $W = \mathrm{giac}(S)$.

Prop 3.2.4: Gli spazi affini $x+W$ & $x'+W'$ coincidono se e solo se $W=W'$ & $x-x' \in W$.

Dim: Se $W=W'$ e $x-x' \in W$ allora ogni vettore $x+v$ in $x+W$ può essere scritto come $x' + (\underbrace{x-x'}_{\in W} + \underbrace{v}_{\in W})$ & questo è in $x'+W = x'+W'$

$$\Rightarrow \quad x+W \subseteq x'+W'$$

Analogamente anche $x'+W' \subseteq x+W$, allora i spazi affini sono uguali.

D'altro canto, se $x+W = x'+W'$, allora

$$W = (x'-x) + W'.$$

W contiene 0, allora $x'-x \in W'$

Analogamente anche $x'-x \in W$ e

$$W' = (x'-x) + W$$

$$\Rightarrow W = W'. \qquad \square$$

Esempio 3.2.5: Sia $W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ in $\mathbb{R}^2$ una retta e definiamo due rette affini

$$r_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + W = \left\{ \begin{pmatrix}1+t\\t\end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$r_2 = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} + W = \left\{ \begin{pmatrix}s\\s-1\end{pmatrix} ; s \in \mathbb{R} \right\}$$

In verità $r_1 = r_2$ (cambiamento del parametro $s = 1 + t$)

La retta possiamo anche scrivere in forma cartesiano come $y = x - 1$.

Dimensione di un sottospazio affine

Ci ricordiamo:

Def 3.2.6: La dimensione di $S = x + W$ è la dimensione di W.

Se S è dato in forma parametrica

$$S = x + \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k) = \{x + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_k v_k \, ; \, t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

con $v_1, \dots, v_k$ base di $W = \mathrm{giac}(S)$, allora ovviamente $\dim W = k = \dim S = \#\text{parametri}$.

Se S è dato in forma cartesiana, cioè S è lo spazio affine delle soluzioni di un sistema lineare $Ax = b$, allora

$$S \neq \emptyset \iff \mathrm{rk}(A|b) = \mathrm{rk}(A)$$

in questo caso Rouché-Capelli implica che

$$\dim S = n - \mathrm{rk}(A).$$

In particolare consideriamo adesso $\mathbb{R}^3$.

I sottospazi affini di $\mathbb{R}^3$ sono punti, rette, piani, e $\mathbb{R}^3$ stesso.

dim 0   dim 1   dim 2

•) Un piano è descritto da un'equazione lineare

$$\pi = \{ax + by + cz = d\}$$

dove a, b, c non sono tutti zero, o alternativamente da un punto $P_0 \in \pi$ & due vettori v_1, v_2

$$\pi = \{P_0 + t_1 v_1 + t_2 v_2\}$$

•) Una retta è descritta da due equazioni lineari

o da un punto P_0 & un vettore.

Come passare da una forma all'altra?

In generale per passare dalla forma cartesiana alla forma parametrica risolviamo semplicemente il sistema lineare con l'algoritmo di Gauss(-Jordan).

L'altra direzione è leggermente più complicata. Per un piano in $\mathbb{R}^3$ dato in forma parametrica

$$\pi = \{P_0 + t_1 v_1 + t_2 v_2\}$$

possiamo calcolare $v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Questo vettore è ortogonale a π

$\Rightarrow$ Il piano ha equazione $ax + by + cz = d$ per qualche $d \in \mathbb{R}$. Questo d troviamo con il punto P_0.

Esempio: Sia $\Pi = \{ P_0 + t_1 v_1 + t_2 v_2 \}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Quindi $\Pi = \{ x + 2y - z = d \}$

$P_0 \in \Pi \Rightarrow 1 + 2 \cdot 2 + (-1)(-3) = 8 = d$

$\Rightarrow \Pi = \{ x + 2y - z = 8 \}$

Intersezioni

Due sottospazi hanno sempre un'intersezione non vuota (perché tutti e due contengono l'origine O).

Invece due sottospazi affini possono avere intersezione vuota.

Def: S & S' due sottospazi affini sono incidenti se $S \cap S' \neq \emptyset$.

Se sono incidenti, possiamo prendere $P \in S \cap S'$ e scrivere $S = P + W$, $S' = P + W'$

$\Rightarrow S \cap S' = P + (W \cap W')$ è anche un sottospazio affine.

__Esempio 9.2.6__ Se $\Pi_1 = \{x+y=1\}$
e $\Pi_2 = \{x-y+z=3\}$

sono due piani in $\mathbb{R}^3$, allora l'intersezione è

$$S = \Pi_1 \cap \Pi_2 = \left\{ \text{soluzioni di } \begin{cases} x+y=1 \\ x-y+z=3 \end{cases} \right\}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R}^3 \,/\, Ax = b \} \quad \text{con } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{A_2 \to A_2 - A_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow rk(A|b) = rk(A) = 2 \Rightarrow \dim S = 3-2 = 1.$$

allora l'intersezione è una retta.

__Esempio:__ $S = \{x+y-z = 2\}$ (piano)

$$r = \{P_0 + tv_1\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1+t \\ -1+2t \\ 1-3t \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{(retta)}$$

$S \cap r$ possiamo sostituire $x = 1+t$, $y = -1+2t$, $z = 1-3t$

$$\Rightarrow 1+t-1+2t-1+3t = 2$$

$$\Rightarrow 6t = 3 \Leftrightarrow t = 1/2$$

$$S \cap r = \left\{ \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{2} \\ -1+1 \\ 1-3/2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{(punto)}$$