Corso di Studi in Informatica
Matematica Discreta

Prova scritta del 18 gennaio 2023

COGNOME .... **NOME** ....

MATRICOLA .... **Compito n. 1**

Rispondere a ciascuna domanda, motivando adeguatamente le risposte.

Problema 1: In S_8 si consideri la permutazione

$$\sigma = (1\,3\,5\,6)(1\,2)(3\,6\,8).$$

1. (Punti 4) Calcolare la decomposizione di σ, σ^{-1} e di σ^2 in cicli disgiunti.
2. (Punti 3) Calcolare quante sono le permutazioni di S_8 che hanno lo stesso tipo di σ.
3. (Punti 4) Si consideri $H = \{\mathrm{id}, \sigma\}$. H è un sottogruppo di S_8? Qual è il più piccolo sottogruppo di S_8 che contiene H?

RISOLUZIONE:

1. La decomposizione in cicli disgiunti di σ è $\sigma = (3\,1\,2)(6\,8\,5)$. Quindi $\sigma^{-1} = (3\,2\,1)(6\,5\,8) = \sigma^2$, poichè σ ha tipo $(3,3)$ e periodo 3.
2. Le permutazioni di S_8 che hanno tipo $(3,3)$ sono esattamente
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}D_{8,3}\right)\left(\frac{1}{3}D_{5,3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{8!}{5!}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{5!}{2!} = \frac{8!}{2^2\cdot 3^2}.$$
Questo risultato si ottiene calcolando quanti cicli di lunghezza 3 posso costruire con 8 elementi, e poi quanti altri cicli di lunghezza 3 con i 5 elementi rimasti (metodo delle scelte successive), e dividendo poi per 2 il risultato ottenuto, altrimenti conteremmo due volte ogni permutazione di tipo $(3,3)$.
3. H non è sottogruppo di S_8 perchè, ad esempio, contiene σ ma non contiene $\sigma^{-1} = \sigma^2$. Il più piccolo sottogruppo di S_8 che contiene H è il sottogruppo ciclico generato da σ:
$$\langle\sigma\rangle = \{\sigma^m | m \in \mathbb{Z}\} = \{\mathrm{id}, \sigma, \sigma^2\}.$$

Corso di Studi in Informatica
Matematica Discreta

Prova scritta del 18 gennaio 2023

COGNOME .... **NOME** ....

MATRICOLA .... **Compito n. 1**

Rispondere a ciascuna domanda, motivando adeguatamente le risposte.

Problema 2:

1. (Punti 4) La sede di Torino della ACME Corporation vuole assumere 50 nuovi dipendenti. Si presentano 150 persone alla selezione, che consiste in un esame scritto da cui viene fatta una graduatoria. Vengono assunti i primi 50 classificati. Quanti sono i possibili insiemi distinti di nuovi dipendenti?

2. (Punti 4) Tra i 50 nuovi dipendenti assunti ci sono 27 donne e 23 uomini. In quanti modi si possono selezionare 4 dipendenti come rappresentanti dei nuovi lavoratori nel consiglio di amministrazione? E in quanti modi se vogliamo che tra i 4 rappresentanti ci sia almeno una donna?

3. (Punti 3) I 50 nuovi assunti sono tutti laureati, in particolare 22 sono laureati in Informatica e 35 sono laureati in ingegneria gestionale. Quanti sono i nuovi assunti con due lauree?

RISOLUZIONE:

1. Poiché i primi 50 in graduatoria vengono assunti indipendentemente dalla loro posizione nella graduatoria stessa, il numero di possibili insiemi di nuovi dipendenti è dato dalle combinazioni semplici

$$C_{150,100} = \binom{150}{100} = \frac{150!}{100! \cdot 50!} = \frac{150 \cdot 149 \cdot \dots \cdot 101}{50!}.$$

2. Se non si pongono condizioni sul genere si tratta di scegliere 4 persone tra 50 e quindi il numero delle possibilità è dato dalle combinazioni semplici

$$C_{50,4} = \binom{50}{4} = \frac{50!}{46! \cdot 4!} = \frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47}{24}.$$

Chiedere che almeno uno dei rappresentanti sia donna equivale ad escludere che i 4 rappresentanti siano tutti uomini e pertanto il numero delle possibilità è ottenibile sottraendo dal numero totale di combinazioni appena trovato quelle che corrispondono alla scelta di 4 uomini, ovvero

$$C_{50,4} - C_{23,4} = \binom{50}{4} - \binom{23}{4} = \frac{50!}{46! \cdot 4!} - \frac{23!}{19! \cdot 4!}.$$

Si osservi che scegliere preliminarmente 1 donna tra le 27 possibili e poi moltiplicare per le $\binom{49}{3}$ scelte possibili di 3 persone tra le rimanenti 49 non funziona perché in questo modo alcune scelte di 4 rappresentanti verrebbero contate più volte anziché una sola. Ad esempio la scelta come rappresentanti di

Anna, Paola, Mario, Sergio

verrebbe contata una volta abbinando la scelta di Anna con quella di {Paola, Mario, Sergio} ed una seconda volta abbinando la scelta di Paola con quella di {Anna, Mario, Sergio}.

3. Chiamando I l'insieme degli assunti laureati in Informatica e G l'insieme degli assunti laureati in Ingegneria Gestionale, possiamo applicare il principio di Inclusione-Esclusione:

$$|I \cap |G = |I| + |G| - |I \cup G| = 22 + 35 - 50 = 7.$$

Tra i nuovi assunti ci sono quindi 7 persone con due lauree.

Corso di Studi in Informatica
Matematica Discreta

Prova scritta del 6 febbraio 2023 - Versione n. 1

COGNOME ....**NOME** ....

MATRICOLA ....

Problema 1

Rispondere a ciascuna domanda, motivando adeguatamente le risposte.

Si consideri il gruppo prodotto $(\mathbb{Q}^\times \times \mathbb{Z}_6, *)$ (si ricordi che su $\mathbb{Q}^\times$ l'operazione è la *moltiplicazione*, e su $\mathbb{Z}_N$ l'operazione è l'*addizione*).
Si consideri la funzione

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Q}^\times \times \mathbb{Z}_6 \\ n &\longmapsto ((-1)^n, \overline{n}) \end{aligned}$$

1. (Punti 4) Dimostrare che f è un omomorfismo.
2. (Punti 4) Calcolare $\ker(f)$ e dire se f è iniettiva.
3. (Punti 3) Calcolare $\mathrm{im}(f)$, dire se è un gruppo ciclico e in caso affermativo calcolarne un generatore.

SOLUZIONE:

1. Si ha per ogni $n, m \in \mathbb{Z}$,

   $$f(n+m) = ((-1)^{n+m}, \overline{n+m}) = ((-1)^n(-1)^m, \overline{n}+\overline{m}) = ((-1)^n, \overline{n})*((-1)^m, \overline{m}) = f(n)*f(m)$$

2. Si ha

   $$\begin{aligned} \ker(f) &= \{n \in \mathbb{Z} \mid f(n) = (1, \overline{0})\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z} \mid (-1)^n = 1, \overline{n} = \overline{0}\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z} \mid n \equiv 0 \mod 6\} = 6\mathbb{Z} \end{aligned}$$

   Poiché $\ker(f) \neq \{0\}$, f non è iniettiva.

3. Si ha

   $$\begin{aligned} \mathrm{im}(f) &= \{((-1)^n, \overline{n}) \mid n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{(-1, \overline{1})^n \mid n \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

   Vediamo quindi che $\mathrm{im}(f)$ è ciclico e un suo generatore è $(-1, \overline{1})$.

Corso di Studi in Informatica
Matematica Discreta

Prova scritta del 6 febbraio 2023 - Versione n.1

COGNOME ....**NOME** ....

MATRICOLA ....

Problema 2

Rispondere a ciascuna domanda, motivando adeguatamente le risposte.

1. (Punti 4) Calcolare il massimo comune divisore di 231 e 143 e scrivere l'identità di Bézout.
2. (Punti 4) Dire se le seguenti congruenze hanno soluzione e in caso affermativo risolverle.

$$a)\ 143X \equiv 55 \mod 231, \qquad b)\ 143X \equiv 8 \mod 231.$$

3. (Punti 3) Determinare l'inverso di $\overline{5}^{29999}$ in $\mathbb{Z}_{231}$

SOLUZIONE:

1. L'algoritmo di Euclide fornisce $MCD(231, 143) = 11$ e l'identità di Bézout è

$$11 = 5 \cdot 231 - 8 \cdot 143.$$

2. La congruenza $a)$ ha soluzione, perché $MCD(231, 143) = 11$ e 11 divide 55. Dividendo entrambi i membri e il modulo per 11 vediamo che essa è equivalente alla congruenza $13X \equiv 5 \mod 21$. Dall'identità di Bézout sappiamo che $143 \cdot (-8) \equiv 11 \mod 231$ da cui vediamo che una soluzione di $a)$ è data da $(-8) \cdot 5 = -40 \equiv 2 \mod 21$. Poiché le soluzioni sono univocamente determinate modulo 21, troviamo che l'insieme delle soluzioni è dato da $2 + 21\mathbb{Z}$.
La congruenza $b)$ non ha soluzioni, perché 11 non divide 8.

3. $MCD(5, 231) = 1$ e $\varphi(231) = 120$. Per il teorema di Eulero si ha $\overline{5}^{120} = \overline{1}$. Poiché $29999 \equiv -1 \mod 120$ si ha $\overline{5}^{29999} = \overline{5}^{-1}$. Quindi l'inversa di $\overline{5}^{29999}$ è $\overline{5}$.

Corso di Studi in Informatica
Matematica Discreta

9 Giugno 2023

COGNOME .... **NOME** ....

MATRICOLA ....

VERSIONE A

Rispondere a ciascuna domanda, motivando adeguatamente le risposte.

Problema 1: Sia $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $T = \{0, 1, 3, 4\}$.

1. (Punti 3) Quanti sono i sottoinsiemi di S non contenenti il sottoinsieme T?
2. (Punti 4) Quanti sono i sottoinsiemi di S di cardinalità 8 non contenenti il sottoinsieme T?
3. (Punti 4) Quanti sono i sottoinsiemi di S di cardinalità 3 non contenenti due numeri consecutivi?

SOLUZIONE:

1. I sottoinsiemi di S sono 2^{10}; quelli contenenti T si ottengono aggiungendo a T un sottoinsieme di $S \setminus T$, e quindi sono in numero di 2^6. Dunque quelli non contenenti T sono $2^{10} - 2^6$.
2. I sottoinsiemi di S di cardinalità 8 sono $\binom{10}{8} = 45$. Quelli contenenti T si ottengono aggiungendo a T un sottoinsieme di cardinalità 4 di $S \setminus T$ e quindi sono $\binom{6}{4} = 15$. Dunque quelli non contenenti T sono $45 - 15 = 30$.
3. I sottoinsiemi di S di cardinalità 3 sono $\binom{10}{3} = 120$. Di questi, quelli contenenti 3 numeri consecutivi sono 8:

$$\{0, 1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \ldots, \{7, 8, 9\}.$$

Contiamo ora i sottoinsiemi di cardinalità 3 contenenti esattamente due numeri consecutivi.
I sottoinsiemi di cardinalità due contenenti due numeri consecutivi sono 9:

$$\{0, 1\}.\{1, 2\}, \{2, 3\}, \ldots, \{7, 8\}, \{8, 9\}$$

$\{0, 1\}$ e $\{8, 9\}$ si possono completare ad un insieme di 3 elementi non tutti consecutivi in 7 modi diversi ciascuno (per il primo basta evitare di aggiungere il 2 e per il secondo il 7). Ciascuno degli altri insiemi può essere completato in 6 diversi modi (per esempio per $\{1, 2\}$ occorre evitare 0 e 3). Quindi il numero di sottoinsiemi di cardinalità 3 contenente esattamente due numeri consecutivi è

$$2 \cdot 7 + 7 \cdot 6$$

Il numero cercato è quindi

$$120 - (8 + 2 \cdot 7 + 7 \cdot 6) = 56.$$

Corso di Studi in Informatica
Matematica Discreta
9 giugno 2023

COGNOME .... **NOME** ....

MATRICOLA ....

VERSIONE A

Rispondere a ciascuna domanda, motivando adeguatamente le risposte.

Problema 2: Si consideri la permutazione

$$\sigma = (4\ 3\ 5)(6\ 1\ 3)(1\ 2\ 5\ 7\ 9)(8\ 4) \in S_9.$$

1. (Punti 4) Determinare tipo, periodo e parità di σ.
2. (Punti 3) Dire se esiste un intero $k \geq 0$ tale che $\sigma^k(1) = 8$ e se esiste un intero $h \geq 0$ tale che $\sigma^h(1) = 7$.
3. (Punti 4) Dimostrare che la funzione

$$\begin{aligned} f : \langle\sigma\rangle &\longrightarrow \mathbb{Z}_{15} \\ f(\sigma^t) &\longmapsto \overline{5t} \end{aligned}$$

   è ben definita ed è un omomorfismo. Determinare im(f) e $\ker(f)$.

RISOLUZIONE:

1. La decomposizione in cicli disgiunti di σ è $\sigma = (1\,2\,4\,8\,3\,6)(5\,7\,9)$. Quindi σ ha tipo $(6,3)$ e periodo 6. Essendo un prodotto di una pemutazione dispari per una pari, è una permutazione dispari.
2. Dalla scrittura di σ come prodotto di cicli disgiunti vediamo che $\sigma^3(1) = 8$. Ogni potenza di σ manda 1 in un elemento dell'insieme $\{1, 2, 4, 8, 3, 6\}$, quindi non esiste alcun h tale che $\sigma^h = 7$.
3. f è ben definita: infatti σ ha periodo 6 e quindi se $\sigma^t = \sigma^u$ allora $t \equiv u \pmod 6$, da cui $5t \equiv 5u \pmod{15}$. f è un omomorfismo:

$$f(\sigma^t \circ \sigma^u) = f(\sigma^{t+u}) = \overline{5(t+u)} = \overline{5t} + \overline{5u} = f(\sigma^t) + f(\sigma^u).$$

   Si ha $\mathrm{im}(f) = \{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}\}$, $\ker(f) = \{(1), \sigma^3\}$.

Corso di Studi in Informatica
Matematica Discreta

10 Luglio 2023

COGNOME .... **NOME** ....

MATRICOLA ....

VERSIONE A

Rispondere a ciascuna domanda, motivando adeguatamente le risposte.

Problema 1: Si consideri la funzione

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{Z}_{30} &\longrightarrow \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{15} \\ [a]_{30} &\longmapsto ([a]_6, [a]_{15})\end{aligned}$$

1. (Punti 3) Dimostrare che φ è ben definita e che è un omomorfismo.
2. (Punti 4) Dire se φ è iniettiva, suriettiva, biiettiva.
3. (Punti 4) Dire se i due gruppi $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{15}$ e $\varphi(\mathbb{Z}_{30})$ sono gruppi ciclici. In caso affermativo, determinarne un generatore.

SOLUZIONE:

1. φ è ben definita, infatti poiché 6 e 15 sono entrambi divisori di 30 si ha

   $$a \equiv a' \pmod{30} \Rightarrow a \equiv a' \pmod{6} \text{ e } a \equiv a' \pmod{15}$$

   Inoltre φ è un omomorfismo in quanto

   $$\begin{aligned}\varphi([a+a']_{30}) &= ([a+a']_6, [a+a']_{15}) = ([a]_6 + [a']_6, [a]_{15} + [a']_{15}) = \\ &= ([a]_6, [a]_{15}) + ([a']_6, [a']_{15}) = \\ &= \varphi([a]_{30}) + \varphi([a']_{30}).\end{aligned}$$

2. φ è iniettiva, perché $\ker(\varphi) = \{[0]_{30}\}$. Infatti

   $$\varphi([a]) = ([0]_6, [0]_{15}) \Leftrightarrow 6 \mid a \text{ e } 15 \mid a \Leftrightarrow 30 \mid a \Leftrightarrow [a]_{30} = [0]_{30}.$$

   Non è suriettiva (e quindi nemmeno biiettiva) in quanto

   $$|\mathbb{Z}_{30}| = 30 < |\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{15}| = 90.$$

3. $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{15}$ non è ciclico, perché 6 e 15 non sono coprimi.
   Invece il suo sottogruppo

   $$\varphi(\mathbb{Z}_{30}) = \{([a]_6, [a]_{15}) \mid a \in \mathbb{Z}\}$$

   è ciclico. Un suo generatore è $([1]_6, [1]_{15})$.

Corso di Studi in Informatica
Matematica Discreta

9 giugno 2023

COGNOME .... **NOME** ....

MATRICOLA ....

VERSIONE A

Rispondere a ciascuna domanda, motivando adeguatamente le risposte.

Problema 2:

1. (Punti 3) Calcolare il massimo comun divisore di 3522 e 321 e esprimerlo con l'identità di Bézout.
2. (Punti 4) Dire se le equazioni
$$3522x + 321y = 10$$
$$3522x + 321y = 12$$
ammettono soluzioni intere, e in caso affermativo determinarne una.
3. (Punti 4) Determinare gli interi x tali che $150 \leq x \leq 300$ soddisfacenti la congruenza
$$44x \equiv 11^{46} \pmod{49}$$

SOLUZIONE:

1. Si ha $MCD(3522, 321) = 3$. L'identità di Bézout dà
$$3 = 3522 \cdot (-36) + 321 \cdot 395$$
2. La prima equazione non ammette soluzioni intere in quanto $3 = MCD(3522, 321) \nmid 10$.
La seconda invece ha soluzioni, perché $12 = 3 \cdot 4$. Una soluzione si ottiene dall'identità di Bézout moltiplicando i due membri per 4:
$$12 = 3522 \cdot (-144) + 321 \cdot 1580$$
da cui si ottiene la soluzione $x = -144$, $y = 1580$.
3. Poiché 11 e 49 sono coprimi, moltiplicando entrambi i membri della congruenza per l'inverso di 11 modulo 49 si ottiene
$$4x \equiv 11^{45} \pmod{49}.$$
Si ha $\varphi(49) = 42$ e quindi $11^{45} \equiv 11^3 \equiv 8 \pmod{49}$; moltiplicando per l'inversa di 4 modulo 49 otteniamo $x \equiv 2 \pmod{49}$. Le soluzioni comprese tra 150 e 300 sono
$$2 + 4 \cdot 49 = 198, \quad 2 + 5 \cdot 49 = 247, \quad 2 + 6 \cdot 49 = 298.$$

Corso di Studi in Informatica
Matematica Discreta

Prova scritta del 4 settembre 2023

COGNOME ....**NOME** ....

MATRICOLA ....

VERSIONE A

Rispondere a ciascuna domanda, motivando adeguatamente le risposte.

Problema 1: Si consideri la seguente permutazione di S_8

$$\sigma = (1\,3)(2\,6)(3\,5\,8)(6\,2).$$

1. (Punti 4) Stabilire tipo e parità di σ e di σ^2.
2. (Punti 3) Stabilire se esiste $h \geq 0$ tale che $\sigma^h(1) = 6$.
3. (Punti 4) Stabilire quali tra le seguenti permutazioni appartengono al sottogruppo ciclico generato da σ:

$$\tau_1 = (3\,5\,8), \tau_2 = (2\,6), \tau_3 = (1\,8\,5\,3)$$

RISOLUZIONE:

1. Scrivendo σ come composizione di cicli disgiunti si ottiene $\sigma = (1\,3\,5\,8)$. Quindi tipo (4) e la permutazione è dispari. Si ottiene che $\sigma^2 = (1\,5)(3\,8)$, quindi tipo $(2, 2)$ e σ^2 è pari.
2. Dalla scrittura in cicli disgiunti di σ, vediamo che per ogni $h \geq 0$, $\sigma^h(1) \in \{1, 3, 5, 8\}$, quindi non esiste $h \geq 0$ per cui $\sigma^h(1) = 6$.
3. Possiamo scrivere esplicitamente il gruppo ciclico generato da σ, che ha solo 4 elementi:
$$\langle\sigma\rangle = \{\mathrm{Id}, \sigma, \sigma^2, \sigma^3 = \sigma^{-1} = (1\,8\,5\,3)\}.$$
Vediamo quindi che $\tau_3 = \sigma^3 = \sigma^{-1}$ appartiene a $\langle\sigma\rangle$ mentre τ_1 e τ_2 non appartengono a $\langle\sigma\rangle$.

Corso di Studi in Informatica
Matematica Discreta

Prova scritta del 4 settembre 2023

COGNOME .... **NOME** ....

MATRICOLA ....

VERSIONE A

Rispondere a ciascuna domanda, motivando adeguatamente le risposte.

Problema 2: Un bagnino ha predisposto una fila di 8 pioli sui quali collocare gli ombrelloni.

1. (Punti 3) In quanti modi diversi può collocare 3 ombrelloni sulla fila di pioli che ha predisposto?
2. (Punti 4) In quanti modi diversi può collocare 3 ombrelloni in modo che almeno due tra essi non siano su due pioli adiacenti nella fila?
3. (Punti 4) Nello stabilimento balneare ci sono 57 bambini e ognuno ha portato almeno un giocattolo per giocare in spiaggia tra paletta e secchiello. 10 di loro hanno portato in spiaggia sia un secchiello sia una paletta, e 22 hanno portato solamente una paletta. Quanti bambini hanno portato solo un secchiello?

RISOLUZIONE: Possiamo per praticità pensare di numerare i pioli della fila con i numeri da 1 a 8.

1. Il bagnino deve scegliere 3 pioli tra gli 8 a disposizione per collocare gli ombrelloni. Questo è equivalente a estrarre un sottoinsieme di 3 elementi dall'insieme $\{1, \dots, 8\}$. I modi per fare questo sono
$$C_{8,3} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56.$$
2. I modi totali di collocare i 3 ombrelloni sugli 8 pioli (senza restrizioni) sono 56. Andiamo a scrivere esplicitamente i casi che non vogliamo conteggiare, ovvero le collocazioni in cui i 3 ombrelloni sono tutti consecutivi (che è esattamente il contrario di almeno due non su due pioli adiacenti). Usando la numerazione dei pioli da 1 a 8, le terne di ombrelloni consecutivi si possono scrivere come
$$\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}, \{5, 6, 7\}, \{6, 7, 8\}$$
Allora le diverse collocazioni di 3 ombrelloni in modo che almeno due tra essi non siano su due pioli adiacenti sono $56 - 6 = 50$.
3. Chiamiamo A l'insieme dei bambini che hanno portato in spiaggia un secchiello, e B l'insieme dei bambini che hanno portato una paletta. I dati a disposizione ci dicono che
$$|A \cup B| = 57, |A \cap B| = 10, |B \setminus A| = 22.$$

Per calcolare la cardinalità di B, è sufficiente ricordare che $B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$, notando che $A \cap B$ e $B \setminus A$ sono disgiunti. Quindi

$$|B| = |A \cap B| + |B \setminus A| = 10 + 22 = 32.$$

Con il principio di inclusione-esclusione possiamo ora calcolare la cardinalità di A:

$$|A| = |A \cup B| - |B| + |A \cap B| = 57 - 32 + 10 = 35.$$

Alternativamente, per calcolare la cardinalità di A si può osservare che $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$, e ottenere quindi immediatamente che

$$|A| = |A \cup B| - |B \setminus A| = 57 - 22 = 35.$$

Per ottenere il numero di bambini che hanno portato solo un secchiello, ovvero la cardinalità di $|A \setminus B|$, procediamo in modo simile a quanto fatto per la cardinalità di B:

$$|A \setminus B| = |A| - |A \cap B| = 25.$$