ESERCITAZIONE 7/11/23

lunedì 6 novembre 2023 23:05

**Esercizio 1.** Sia $V$ lo $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di matrici $3\times 3$ ad entrate nel campo $\mathbb{K}$, i.e. $V = M(3,\mathbb{K})$. Si provi che l'insieme $W = \{A \in M(3,\mathbb{K}) \mid {}^tA = A\}$ è un sottospazio vettoriale di $V$.

W è sottospazio vettoriale di V se
- $0_v \in W$
- se $v_1, v_2 \in W \Rightarrow v_1+v_2 \in W$
- se $v \in W$, $\lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda \cdot v \in W$

- $0_v \in W$?

$$0_v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Quindi } \boxed{0_v \in W}$$

- siano $P, Q \in W$, ovvero ${}^tP = P$ e ${}^tQ = Q$

$P+Q \in W$?

$${}^t(P+Q) = {}^tP + {}^tQ = P+Q$$

per proprietà della trasposta

poiché $P, Q \in W$

Quindi $\boxed{P+Q \in W}$

- Siano $P \in W$, $\lambda \in \mathbb{K}$

$\lambda P \in W$?

$${}^t(\lambda P) = \lambda \cdot {}^tP = \lambda \cdot P$$

Quindi $\boxed{\lambda P \in W}$

**Esercizio 2.** Risolvere i seguenti sistemi di equazioni:

$$① \begin{cases} x+3y+z=3 \\ 2x+y+z=4 \\ 4x+7y+3z=9 \end{cases} \quad ② \begin{cases} x+3y+z=3 \\ 2x+y+z=4 \\ 4x+7y+3z=10 \end{cases}, \quad ③ \begin{cases} x+3y+z=3 \\ 2x+y+z=4 \\ 4x+7y+4z=9 \end{cases}$$

①
$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 3 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[C_3 \to C_3 - 2C_2]{C_2 \to C_2 - 2C_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_3 \to C_3 + C_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$rk(A) = 2$

$rk(A|B) = 3$ $\qquad rk(A) \neq rk(A|B)$

Il sistema non ha soluzioni

(2)
$$C=\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&1&3\\2&1&1&4\\4&7&3&10\end{array}\right)\xrightarrow[C_3\to C_3-2C_2]{C_2\to C_2-2C_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&1&3\\0&-5&-1&-2\\0&5&1&2\end{array}\right)\xrightarrow{C_3\to C_3+C_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&1&3\\0&-5&-1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$rk(A)=rk(A|b)=2$

Il sistema ha soluzioni
lo spazio delle soluzioni $S\subset K^n$ ha dimensione $n-rk(A)=3-2=1$

$$\begin{cases}x_1+3x_2+t_1=3\\-5x_2-t_1=-2\\x_3=t_1\end{cases}\quad\begin{cases}x_1=\frac{3t_1-6}{5}-t_1+3\\x_2=\frac{-t_1+2}{5}\\x_3=t_1\end{cases}\quad\begin{cases}x_1=\frac{-2t_1+9}{5}\\x_2=\frac{-t_1+2}{5}\\x_3=t_1\end{cases}$$

(3)
$$C=\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&1&3\\2&1&1&4\\4&7&4&9\end{array}\right)\xrightarrow[C_3\to C_3-2C_2]{C_2\to C_2-2C_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&1&3\\0&-5&-1&-2\\0&5&2&1\end{array}\right)\xrightarrow{C_3\to C_3+C_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&1&3\\0&-5&-1&-2\\0&0&1&-1\end{array}\right)$$

$rk(A)=rk(A|B)=\underline{3=m}$

Il sistema ha un'unica soluzione

$$\begin{cases}x_1+3x_2+x_3=3\\-5x_2-x_3=-2\\x_3=-1\end{cases}\quad\begin{cases}x_1+\frac{9}{5}-1=3\\x_2=\frac{1+2}{5}=\frac{3}{5}\\x_3=-1\end{cases}\quad\begin{cases}x_1=\frac{11}{5}\\x_2=\frac{3}{5}\\x_3=-1\end{cases}$$

**Esercizio 3**. Determinare il rango delle seguenti matrici:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\end{pmatrix}\quad B\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&2&3&0\\1&1&0&1\\2&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$rk(A)=2$

$$B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[B_3\to B_3-3B_1]{B_2\to B_2-2B_1}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&-6&-8\end{pmatrix}\xrightarrow{B_3\to B_3-2B_2}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&6\\0&0&4\end{pmatrix}$$

$rk(B)=3$

$$C=\begin{pmatrix}1&2&3&0\\1&1&0&1\\2&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[C_3\to C_3-2C_2]{C_2\to C_2-C_1}\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&-1&-3&1\\0&-2&1&-2\\0&1&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[C_4\to C_2+C_4]{C_3\to C_3+2C_4}\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&-1&-3&1\\0&0&1&-2\\0&0&-3&1\end{pmatrix}\text{—} \ldots$$

$$\xrightarrow[C_4 \to C_4 + 3C_3]{\dots} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$rk(C) = 4$

**Esercizio 4.** Verificare se i seguenti insiemi di vettori sono linearmente indipendenti, generatori, o una base:

1. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.
2. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.
3. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

① $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = -\lambda_3 \end{cases}$$

$\exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0,0,0)$ t.c. $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$

Quindi $v_1, v_2, v_3$ sono linearmente dipendenti

$\forall v \in \mathbb{R}^2, \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ t.c. $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$ ?

$$\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = x_v \\ \lambda_1 + \lambda_3 = y_v \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x_v \\ 1 & 0 & 1 & y_v \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to R_2 - R_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x_v \\ 0 & -2 & -2 & y_v - x_v \end{array}\right)$$

$rk(A) = rk(A|B) = 2$

Quindi il sistema ha soluzioni $\forall x_v, y_v$

Quindi ogni $v \in \mathbb{R}^2$ può essere scritto come combinazione lineare di $v_1, v_2, v_3$.

Quindi $v_1, v_2, v_3$ sono generatori di $\mathbb{R}^2$

Ma non sono linearmente indipendenti

Quindi non sono una base

(2) $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}3\\1\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\lambda_1 + \lambda_3 = 0\\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0\\ \lambda_1 + \lambda_2 + 6\lambda_3 = 0\end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&3&0\\1&-1&1&0\\2&1&6&0\end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&3&0\\0&-1&-2&0\\0&1&0&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&3&0\\0&-1&-2&0\\0&0&-2&0\end{array}\right) \quad \begin{cases}\ldots\\ \ldots\\ -2\lambda_3 = 0\end{cases} \quad \begin{cases}\lambda_1 + 3\cdot 0 = 0\\ \lambda_2 \cdot 2 \cdot 0 = 0\\ \lambda_3 = 0\end{cases} \quad \begin{cases}\lambda_1 = 0\\ \lambda_2 = 0\\ \lambda_3 = 0\end{cases}$$

solo per $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$, $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$.

Quindi $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sono linearmente indipendenti

Sono generatori?

$\forall v \in \mathbb{R}^3$, $\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ t.c. $v = \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix}3\\1\\6\end{pmatrix}$ ?

$$\begin{cases}\lambda_1 + 3\lambda_3 = x_v\\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = y_v\\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 6\lambda_3 = z_v\end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&3&x_v\\1&-1&1&y_v\\2&1&6&z_v\end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&3&x_v\\0&-1&-2&y_v - x_v\\0&1&-3&z_v - 3x_v\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&3&x_v\\0&-1&-2&y_v - x_v\\0&0&-5&-4x_v + y_v + z_v\end{array}\right)$$

$rk(A) = rk(A|b) = 3$

Quindi il sistema ha una soluzione

Quindi $v_1, v_2, v_3$ generano $\mathbb{R}^3$

Senza svolgere i calcoli, si poteva anche direttamente notare che avendo 3 vettori linearmente indipendenti in uno spazio di dimensione 3, essi sicuramente sono generatori di $\mathbb{R}^3$.

$v_1, v_2, v_3$ sono linearmente indipendenti,
generano $\mathbb{R}^3$,

quindi $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$

**Esercizio 5.** Determinare se i vettori

$$f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 1, \quad g(x) = x^2 + x, \quad h(x) = x^3 + x - 2$$

sono linearmente indipendenti nello spazio vettoriale reale dei polinomi di grado meno o uguale a tre, $\mathbb{R}_3[x]$. L'insieme $\{f, g, h\}$ forma una base di $\mathbb{R}_3[x]$?

$f(x) = \begin{pmatrix}2\\ \ldots\end{pmatrix} \to$ coefficiente di $x^3$ $\quad g(x) = \begin{pmatrix}0\\ \ldots\end{pmatrix} \quad h(x) = \begin{pmatrix}1\\ \ldots\end{pmatrix}$

$\mathbb{R}_3[x]$. L'insieme $\{f, g, h\}$ forma una base di $\mathbb{R}_3[x]$?

Suggerimento: mi scrivo $f(x)$ come $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} \rightarrow \text{coefficiente di } x^3 \\ \rightarrow \quad " \quad " \quad x^2 \\ \rightarrow \quad " \quad " \quad x^1 \\ \rightarrow \text{termine noto} \end{matrix}$, $g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $h(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

e poi svolgo l'esercizio come il precedente.

**Esercizio 7**. Data la base di $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calcolare il vettore delle coordinate di $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$

$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$ è il vettore delle coordinate di $v$ rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = -2 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = -1 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1 - 3R_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -9 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3/3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2 \to R_2 + \frac{1}{3}R_3]{R_1 \to R_1 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5/3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -\frac{5}{3} \\ \lambda_3 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

posso verificare inserendo i valori trovati di $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ qui

**Esercizio 8**. Determinare, al variare di $k$, il numero di soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + z & = 2 \\ x + (k+2)y + (k^2+1)z & = k+2 \\ 2x + 4y + (k+2)z & = 5 \end{cases}$$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & k+2 & k^2+1 & k+2 \\ 2 & 4 & k+2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[C_3 \to C_3 - 2C_1]{C_2 \to C_2 - C_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & k & k^2 & k \\ 0 & 0 & k & 1 \end{array}\right)$$

- Se $k \neq 0$ $\quad rk(A) = rk(A|b) = 3 = n$

Ho una soluzione

$$\begin{cases} \dots \\ \dots \\ kz = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dots \\ ky + k^2 \cdot \frac{1}{k} = k \\ z = \frac{1}{k} \end{cases} \quad \begin{cases} \dots \\ ky + \cancel{k} = \cancel{k} \\ \dots \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2 \cdot \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = 2 \\ y = \frac{1}{k} \\ \dots \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 - \frac{3}{k} = \frac{2k-3}{k} \\ y = \frac{1}{k} \\ z = \frac{1}{k} \end{cases}$$

- Se $k = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_2 \leftrightarrow C_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$rk(A) = 1$
$rk(A|b) = 2$

Quindi il sistema non ha soluzioni