

Es. 1. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -3 & 5 & -3 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$

i) verificare che $\lambda = -4$ è un autovalore di A e trovare l'autospazio associato a λ .

ii) Trova tutti gli autovettori di A .

SOLGIMENTO

Un autovettore di T è un vettore $v \neq 0$ t.c.
 $T(v) = \lambda \cdot v, \lambda \in \mathbb{K}$

$$\exists v \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } A \cdot v = -4 \cdot v \quad ?$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -3 & 5 & -3 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x_v + 3y_v - 3z_v = -4x_v \\ -3x_v + 5y_v - 3z_v = -4y_v \\ -6x_v + 6y_v - 4z_v = -4z_v \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_v + 3y_v - 3z_v = 0 \\ -3x_v + 9y_v - 3z_v = 0 \\ -6x_v + 6y_v = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & -3 & 0 \\ -3 & 9 & -3 & 0 \\ -6 & 6 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_1 \rightarrow R_1/3 \\ R_2 \rightarrow R_2 + R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + 2R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 12 & -6 & 0 \\ 0 & 12 & -6 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{rk}(A) = \text{rk}(A|b) = 2$$

→ il sistema ha soluzioni

$$\rightarrow \exists v \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } A \cdot v = -4 \cdot v$$

→ -4 è autovalore di A .

$$12y_v = 6z_v \quad z_v = t$$

$$y_v = \frac{1}{2}z_v = \frac{1}{2}t$$

$$x_v = -y_v + z_v = -\frac{1}{2}z_v + z_v = \frac{1}{2}z_v = \frac{1}{2}t$$



Quindi $\forall v \in \mathbb{R}^3$ t.c. $v = \begin{pmatrix} 1/2 t \\ 1/2 t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$,

$$A \cdot v = -4v$$

Autospazio: Dato λ autovalore di $T: V \rightarrow V$,

$$V_\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\}$$

è l'autospazio di λ .

$$V_{-4} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 t \\ 1/2 t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(ii) \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & -3 \\ -3 & 5-\lambda & -3 \\ -6 & 6 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & -3 \\ 0 & 5-\lambda & -3 \\ -2+\lambda & 6 & -4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$C_1 \rightarrow C_1 - C_3$$

$$= (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 6 & -4-\lambda \end{vmatrix} + (-2+\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 5-\lambda & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda) \cdot (\lambda^2 + 4\lambda - 5\lambda - 20 + 18) - (2-\lambda) \cdot (-9 + 15 - 3\lambda) =$$

$$= (2-\lambda) (\lambda^2 - \lambda - 2 - 6 + 3\lambda) =$$

$$= (2-\lambda) (\lambda^2 + 2\lambda - 8) = (2-\lambda) (\lambda-2) (\lambda+4) = -(\lambda-2)^2 (\lambda+4)$$

$$\bullet \lambda_1 = 2 \quad m_a(\lambda_1) = 2$$

$$\bullet \lambda_2 = -4 \quad m_a(\lambda_2) = 1$$



MOLTIPLICITÀ
ALGEBRICA



Unione Matematica Italiana

Trovo gli autovettori di $\lambda_1 = 2$.

$$\begin{pmatrix} -1-2 & 3 & -3 \\ -3 & 5-2 & -3 \\ -6 & 6 & -4-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-3x + 3y - 3z = 0$$

$$-3x + 3y - 3z = 0$$

$$-6x + 6y - 6z = 0$$

$$y = \pi$$

$$z = t$$

$$x = \pi - t$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \pi - t \\ \pi \\ t \end{pmatrix}, \pi, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Quindi gli autovettori di A sono:

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t \\ \frac{1}{2}t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} \text{ relativi a } \lambda_2 = -4$$

$$\text{e } \left\{ \begin{pmatrix} \pi - t \\ \pi \\ t \end{pmatrix}, \pi, t \in \mathbb{R} \right\} \text{ relativi a } \lambda_1 = 2$$



ES. 2. Determinare la diagonalizzabilità di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

di variare di k .

Cioè determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice è diagonalizzabile e, per tali valori, determinare una base di autovettori.

SOLUZIONE

Calcolo gli autovalori di A :

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & k \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda) [(1-\lambda)(2-\lambda) - 0] \\ &= (1-\lambda)^2 (2-\lambda) \end{aligned}$$

~~per ogni~~ $\forall k \in \mathbb{R}$

$$\lambda_1 = 1 \quad m_a(\lambda_1) = 2$$

$$\lambda_2 = 2 \quad m_a(\lambda_2) = 1$$

Da verificare che $\forall \lambda_k, m_p(\lambda_k) = m_a(\lambda_k)$.

• $\lambda_1 = 1$ Determino $V_{\lambda_1} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid Av = 1 \cdot v\}$

$$\text{cioè cerco } \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} y + kz = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y - ky = 0 \\ y = -z \end{cases} \quad \begin{cases} (1-k)y = 0 \\ y = -z \end{cases}$$

pongo
 $\lambda = 1$

$$\begin{aligned} \text{• per } k \neq 1, \quad V_{\lambda_1} &= \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} \rightarrow \dim V_{\lambda_1} = 1 \\ &\rightarrow m_p(\lambda_1) = 1 \end{aligned}$$

Quindi A non è diagonalizzabile



• per $k=1$ $V_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ r \\ -r \end{pmatrix} \mid t, r \in \mathbb{R} \right\}$

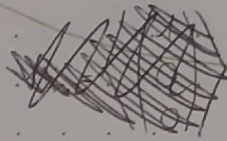
$\rightarrow \dim(V_{\lambda_1}) = 2 \rightarrow m_p(\lambda_1) = 2$

Sono sicure che $m_p(\lambda_2) = 1$

poiché vale sempre $\therefore 1 \leq m_p(\lambda) \leq m_a(\lambda)$

e $m_a(\lambda_2) = 1$

Quindi per $k=1$ A è diagonalizzabile



per $\lambda=2$

$V_{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$V_{\lambda_2} = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$[k=1]$

~~Quindi una base di autovettori è $V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$~~

$\begin{cases} -x+y+z=0 \\ -y=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=z \\ y=0 \end{cases} \quad V_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$

$V_{\lambda_2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Quindi una base di autovettori è $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$



Sviluppo Alternativo:

$$p(x) = a + bx + cx^2$$

devo cercare i $p(x)$ t.c. $T(p(x)) = \lambda \circ p(x)$

$$\text{cioè } p(0) + p(1)x + p(-1)x^2 = \lambda \cdot p(x)$$

$$\text{cioè } a + (a+b+c)x + (a-b+c)x^2 = \lambda a + \lambda b x + \lambda c x^2$$

$$\begin{cases} a = \lambda a \\ a+b+c = \lambda b \\ a-b+c = \lambda c \end{cases} \quad \begin{cases} 1 = \lambda \\ a+c = 0 \\ a-b = 0 \end{cases}$$



ES 3 Calcolare gli autovalori dell'endomorfismo

$T: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ definito da:

$$T(p(x)) = p(0) + p(1)x + p(-1)x^2$$

Svolgimento: base canonica di $\mathbb{R}_2[x]$: $B = \{1, x, x^2\}$

$$T(1) = \underbrace{1}_{p(0)} + \underbrace{1}_{p(1)}x + \underbrace{1}_{p(-1)}x^2 = 1 + x + x^2$$

$$T(x) = 0 + 1x + (-1)x^2 = x - x^2$$

$$T(x^2) = 0 + 1x + (-1)x^2 = x - x^2$$

$$A = [T]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $T(1) \quad T(x) \quad T(x^2)$
rispetto alla base B

Calcolare gli autovalori di A .

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 2\lambda + 2)$$

$$\hookrightarrow \lambda_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{1-2}}{1} \quad \text{no soluzioni in } \mathbb{R}$$

Quindi l'unico autovalore è $\lambda = 1$.

