Lezione 25: Teorema Spettrale (Parte I)

Prodotti hermitiani

Def 11.1.1: Sia V uno spazio vettoriale complesso. ($\mathbb{K}=\mathbb{C}$)
Un prodotto hermitiano su V è un'applicazione
$$V \times V \to \mathbb{C}$$
$$(v,w) \mapsto \langle v,w \rangle$$
che soddisfa i seguenti assiomi:

(1) $\langle v+v', w\rangle = \langle v,w\rangle + \langle v',w\rangle$

(2) $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda \langle v,w\rangle$

(3) $\langle v,w\rangle = \overline{\langle w,v\rangle}$

per ogni $v,v',w \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

[Charles Hermite]

Da (1),(2),(3) otteniamo anche

(4) $\langle v, w+w'\rangle \overset{(3)}{=} \overline{\langle w+w', v\rangle} \overset{(1)}{=} \overline{\langle w,v\rangle} + \overline{\langle w',v\rangle} \overset{(3)}{=} \langle v,w\rangle + \langle v,w'\rangle$

$\left(\begin{array}{l} \overline{z+z'} = \overline{z}+\overline{z'} \\ \overline{z\cdot z'} = \overline{z}\cdot\overline{z'} \end{array}\right)$

(5) $\langle v, \lambda w\rangle \overset{(3)}{=} \overline{\langle \lambda w, v\rangle} \overset{(2)}{=} \overline{\lambda \langle w,v\rangle} = \overline{\lambda}\cdot\overline{\langle w,v\rangle} \overset{(3)}{=} \overline{\lambda}\langle v,w\rangle$

$\Rightarrow$ Abbiamo linearità nel primo fattore ma non nel secondo fattore. (4)&(5) diventa anche chiamato antilinearità nel secondo fattore.

$\Rightarrow$ Il prodotto non è bilineare ma è **sesquilineare**

Otteniamo anche

(6) $\langle 0, w\rangle = \langle v, 0\rangle = 0 \quad \forall v, w \in V$.

Notiamo che (3) implica

$$\langle v, v\rangle = \overline{\langle v, v\rangle}$$

allora $\langle v, v\rangle$ è sempre un numero reale.

Prodotto hermitiano definito positivo

Def 11.1.3: Un prodotto hermitiano è definito positivo se $\langle v, v\rangle > 0$ per ogni $v \neq 0$.

Per un prodotto hermitiano def. positivo possiamo definire una norma $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ e una distanta $d(v, w) = \|v - w\|$ come l'abbiamo fatto per prodotti scalari.

Esempio: Prodotto hermitiano euclideo

Def: Se $x \in \mathbb{C}^n$ è un vettore e $A \in M(m, n, \mathbb{C})$ è una matrice con entrate in $\mathbb{C}$, indichiamo con $\overline{x}$ e $\overline{A}$ il vettore o la matrice ottenuto da x o da A facendo il coniugio di ogni singola entrata. Il prodotto hermitiano euclideo su $\mathbb{C}^n$ è $\langle x, y\rangle = {}^t x \cdot \overline{y}$.

Verifichiamo che questo è un prodotto hermitiano:

(1) $\langle x+x', y\rangle = {}^t(x+x')\cdot\overline{y} = ({}^tx + {}^tx')\cdot\overline{y}$

$= {}^tx\cdot\overline{y} + {}^tx'\cdot\overline{y} = \langle x,y\rangle + \langle x',y\rangle$

(2) $\langle \lambda x, y\rangle = {}^t(\lambda x)\cdot\overline{y} = \lambda\,{}^tx\cdot\overline{y} = \lambda\langle x,y\rangle$

(3) $\langle y, x\rangle = {}^ty\cdot\overline{x} = {}^t\overline{x}\cdot y = \overline{{}^tx\cdot\overline{y}}$

$= \overline{\langle x,y\rangle}$

Verifichiamo anche che questo prodotto è definito positivo: Sia $x\in\mathbb{C}^n$ con $x\neq 0$. Allora

$$\langle x,x\rangle = {}^tx\cdot\overline{x} = x_1\overline{x_1} + x_2\overline{x_2} + \dots + x_n\cdot\overline{x_n}$$
$$= |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 > 0$$

Matrici hermitiane

Def: Una **matrice hermitiana** è una matrice quadrata complessa H per cui

$${}^tH = \overline{H}$$

In altre parole $H_{ij} = \overline{H_{ji}}$, $\forall i,j$.

Notiamo che gli elementi sulla diagonale devono essere reali perché $H_{ii} = \overline{H_{ii}}$, $\forall i$.

Esempio: $\begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \sqrt{7} & 0 & i \\ 0 & \frac{1}{11} & 2+3i \\ -i & 2-3i & e^2 \end{pmatrix}$

sono hermitiane

Una matrice quadrata a coefficienti <u>reali</u>
è hermitiana se e solo se è simmetrica.

Analogo come abbiamo fatto per prodotti scalari (g_S con matrice simmetrica S) possiamo definire un prodotto hermitiano g_H con matrice hermitiana H nel modo seguente:

$$g_H(x,y) := {}^t x \cdot H \cdot \overline{y}$$

[Per $H = I_n$, otteniamo il prodotto hermitiano euclideo.]

Verifichiamo che questo è un prodotto hermitiano:

(1) $g_H(x+x', y) = {}^t(x+x') \cdot H \cdot \overline{y} = ({}^t x + {}^t x') \cdot H \cdot \overline{y}$
$= {}^t x \cdot H \cdot \overline{y} + {}^t x' \cdot H \cdot \overline{y} = g_H(x,y) + g_H(x',y)$

(2) $g_H(\lambda x, y) = {}^t(\lambda x) \cdot H \cdot \overline{y} = \lambda\, {}^t x \cdot H \cdot \overline{y} = \lambda\, g_H(x,y)$

(3) $g_H(x,y) = \underbrace{{}^t x \cdot H \cdot \overline{y}}_{\in \mathbb{C}} = {}^t({}^t x \cdot H \cdot \overline{y})$

${}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$ $\quad = {}^t\overline{y} \cdot {}^t H \cdot \underbrace{{}^t({}^t x)}_{= x} = {}^t\overline{y} \cdot \overline{H} \cdot x$ $\quad {}^t H = \overline{H}$

$$= \overline{{}^t y \cdot H \cdot \overline{x}} = \overline{g_H(y,x)}$$

Se $e_1, \dots, e_n$ è la base canonica di $\mathbb{C}^n$, allora

$$g_H(e_i, e_j) = {}^t e_i \cdot H \cdot \overline{e_j} = {}^t e_i \cdot H \cdot e_j = H_{ij}$$

Matrice associata

Se V è uno spazio vettoriale complesso & $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto hermitiano & $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V, allora possiamo definire la matrice associata H nel modo seguente:

$$H_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$$

Per la proprietà (3) del prodotto hermitiano, abbiamo

$$H_{ji} = \langle v_j, v_i \rangle \overset{(3)}{=} \overline{\langle v_i, v_j \rangle} = \overline{H_{ij}}$$

$\Rightarrow$ la matrice H è hermitiana.

Come per i prodotti scalari possiamo sempre scrivere

$$\langle v, w \rangle = {}^t[v]_B \cdot H \cdot \overline{[w]_B}$$

dove H è la matrice associata al prodotto.

In particolare, ogni prodotto hermitiano su $\mathbb{C}^n$ è della forma g_H per una matrice hermitiana H.

Endomorfismi autoaggiunti

Def 11.2.1: Sia V o uno spazio vettoriale reale con prodotto scalare o uno spazio vettoriale complesso con prodotto hermitiano. Un endomorfismo $T: V \to V$ è autoaggiunto se

$$(*) \quad \langle T(v), w \rangle = \langle v, T(w) \rangle, \ \forall v, w.$$

⚠ Ci ricordiamo che T è una isometria se
$\langle v, w \rangle = \langle T(v), T(w) \rangle$, $\forall v, w \in V$
Non scambiare questi due concetti!

Scegliamo una base ortonormale $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V.
$[\langle v_i, v_j \rangle = 0$, $i \neq j$, $\langle v_i, v_i \rangle = 1]$.
Sia $T: V \to V$ un endomorfismo e $A = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ la sua matrice associata.

Prop 11.2.1: L'endomorfismo T è autoaggiunto se e solo se la matrice A è hermitiana.

Dim: Per la bilinearità o sesquilinearità di $\langle \cdot, \cdot \rangle$ per verificare che T è autoaggiunto basta verificare la condizione (*) per i vettori della base. Otteniamo (nel caso complesso)

$$\langle T(v_i), v_j \rangle = {}^t[T(v_i)]_{\mathcal{B}} \cdot I_n \cdot \overline{[v_j]_{\mathcal{B}}}$$
$$= {}^tA^i \cdot \overline{e_j} = {}^tA^i \cdot e_j = A_{ji}$$

$$\langle v_i, T(v_j) \rangle = {}^t[v_i]_{\mathcal{B}} \cdot I_n \cdot \overline{[T(v_j)]_{\mathcal{B}}}$$
$$= {}^te_i \cdot \overline{A^j} = \overline{A_{ij}}$$

$\Rightarrow T$ è autoaggiunto se e solo se $A_{ji} = \overline{A_{ij}}$
cioè se e solo se A è hermitiana. $\square$

Cor 11.2.2: Sia A una matrice $n \times n$. L'endomorfismo $L_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ è autoaggiunto rispetto al prodotto hermitiano euclideo se e solo se A è hermitiana. Analogamente, l'endomorfismo $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è autoaggiunto rispetto al prodotto scalare euclideo se e solo se A è simmetrica

Osservazione: Le matrici hermitiane (o simmetriche) hanno un doppio ruolo: descrivono sia un prodotto hermitiano (o scalare) sia un endomorfismo autoaggiunto.

Osservazione: Prop 11.2.1. vale <u>solo</u> se la base B è ortonormale:

Esempio 11.2.3: Consideriamo $\mathbb{R}^2$ con prodotto scalare euclideo. L'endomorfismo L_A con $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ è autoaggiunto perché A è simmetrica (Cor 11.2.2).

Se scriviamo L_A rispetto alla base $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ [questa base è ortonormale!] otteniamo

$$A' = [L_A]_{B_1}^{B_1} = [id]_{B_1}^{\mathcal{C}} \cdot A \cdot [id]_{\mathcal{C}}^{B_1} \leftarrow \text{base canonica}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= {}^t\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} . \quad A' \text{ è simmetrica!}$$

Se scriviamo invece L_A in base $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

[questa base <u>non</u> è ortonormale – neanche ortogonale!] otteniamo

$$A'' = [L_A]^{B_2}_{B_2} = [\mathrm{id}]^{\mathcal{A}}_{B_2} \cdot A \cdot [\mathrm{id}]^{B_2}_{\mathcal{A}}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\,{}^t\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} . \quad A'' \text{ \underline{non} è simmetrica!}$$