Foglio Esercizi 4 (MDAG 2023)

Esercizi proposti da R. Buzano e M. Radeschi

6 dicembre 2023

Esercizio 1. Data la matrice simmetrica

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix},$$

calcolare:

1. La matrice $[g_S]_{\mathcal{B}}$ rispetto alla base $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
2. Il radicale di $(\mathbb{R}^3, g_S)$.
3. La forma quadratica q_S.

Esercizio 2. Data la matrice simmetrica

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

sia g_S il prodotto scalare corrispondente (in questo caso, definito positivo).

1. Usare Gram-Schmidt per ortogonalizzare la base canonica di $\mathbb{R}^3$ rispetto a g_S.
2. Calcolare la proiezione ortogonale di e_3 sul piano generato da e_1 e e_2, rispetto a g_S.

Esercizio 3. Per ogni forma quadratica, calcolare la matrice associata.

1. $q(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2$
2. $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2$
3. $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$
4. $q(x_1, x_2, x_3) = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$.

Esercizio 4. Per ogni matrice, calcolare la forma quadratica corrispondente.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 5. Calcolare gli angoli interni del triangolo in $\mathbb{R}^3$ avente vertici in e_1, e_2, e_3, rispetto al prodotto scalare Euclideo.

Esercizio 6. Verificare che la trasformazione $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

é una isometria rispetto al prodotto scalare Euclideo.

Esercizio 7. Dati i vettori

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

calcolare:

1. Un vettore ortogonale a $\mathrm{Span}(v, w)$ (rispetto al prodotto scalare Euclideo).
2. L'area del parallelogramma generato da v e w.

Esercizio 8. Date le seguenti coppie di spazi affini, determinare se l'intersezione è vuota oppure no. Nel primo caso, calcolare la distanza tra i sottospazi. Nel secondo caso, descrivere l'intersezione in forma parametrica o cartesiana, e calcolare l'angolo di intersezione.

1. $r = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $r' = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$
2. $V' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $W' = \{x + 3y - z = 2\}$.
3. $V' = \{x - y - 3z = 2\}$, $r = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Esercizio 9. Siano $\pi_1 = \{x + 2y - z = 1\}$ e $\pi_2 = \{2x - y + z = 3\}$ due piano.

1. Trovare la retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.
2. Trovare il piano π_3 ortogonale a r che continene l'origine.
3. Trovare le rette $s_1 = \pi_1 \cap \pi_3$ e $s_2 = \pi_2 \cap \pi_3$ e verificare che queste rette sono ortogonali a r.
4. Calcolare l'angolo fra s_1 e s_2, cioè l'angolo diedrale fra π_1 e π_2
5. Trovare due vettori ortogonali a π_1 e π_2, rispettivamente, e calcolare l'angolo tra questi vettori. Paragonare con l'angolo trovato nel punto 4.