Lezione 14: Applicazioni lineari (Parte II)

<u>Def:</u> Siano V & W due spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$.
Un'applicazione lineare è una funzione $f: V \to W$ tale che

i) $f(v+w) = f(v) + f(w) \quad \forall v, w \in V$

ii) $f(\lambda v) = \lambda \cdot f(v) \quad \forall v \in V, \lambda \in \mathbb{K}$

<u>Esempio 4.1.1</u> (Funzione nulla & identità)

1) $f: V \to W, \; v \mapsto 0 = 0_W$

2) $id: V \to V, \; v \mapsto v$

[i) & ii) valgono in modo banale.]

<u>Esempio 4.1.5</u>: Prendiamo una matrice $A = (a_{ij})$ di grandezza $m \times n$ e definiamo

$$L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$$
$$x \mapsto L_A(x) = A \cdot x$$

Nel dettaglio

$$L_A(x) = A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

(Prop. 4.1.6)

$$= x_1 A^1 + \ldots + x_n A^n$$

A^j: j-esima colonna di A

L_A è lineare:

i) $L_A(x+x') = A\cdot(x+x') \overset{\text{distributività}}{=} Ax + Ax' = L_A(x) + L_A(x')$

ii) $L_A(\lambda x) = A\cdot(\lambda x) = \lambda \cdot A\cdot x = \lambda \cdot L_A(x)$

Ad esempio, se $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ otteniamo

$L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$L_A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y \\ x + 2y \end{pmatrix}$$

Esempio: $Tr : M(n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ è lineare

i) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \\ & & b_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \\ & & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow Tr(A+B) = (a_{11}+b_{11}) + \dots + (a_{nn}+b_{nn})$

$= a_{11} + \dots + a_{nn} + b_{11} + \dots + b_{nn}$

$= Tr(A) + Tr(B)$

ii) $\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \\ & & \lambda a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow Tr(\lambda A) = \lambda a_{11} + \dots + \lambda a_{nn}$

$= \lambda(a_{11} + \dots + a_{nn})$

$= \lambda\, Tr(A)$

Esempio 4.1.15: La funzione

$D : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_{n-1}[x]$

$p \mapsto D(p) = p' = \frac{d}{dx}p(x)$

$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$

$\Rightarrow D(p(x)) = p'(x) = a_n \cdot n \cdot x^{n-1} + \dots + a_1$

è un'applicazione lineare:

$$(f+g)' = f' + g'$$
$$(\lambda f)' = \lambda \cdot f'$$

Nucleo & immagine

Def 4.2.1: Sia $f: V \to W$ un'applicazione lineare. Il **nucleo** di f è il sottoinsieme di V definito da

(Inglese: "kernel")

$$\operatorname{Ker} f = \{ v \in V \mid f(v) = 0 \}$$

L'**immagine** di f è il sottoinsieme di W definito da $\operatorname{Im} f = \{ w \in W \mid \exists v \in V \text{ con } f(v) = w \}$

Prop 4.2.1: Il nucleo $\operatorname{Ker} f$ è un sottospazio di V & l'immagine $\operatorname{Im} f$ è un sottospazio di W.

Dim: Dobbiamo verificare i 3 assiomi di sottospazio:

Nucleo

i) $0 \in \operatorname{Ker} f$. Infatti $f(0) = 0$. (Lezione 13)

ii) $v, w \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow v + w \in \operatorname{Ker} f$.

Infatti $f(v+w) \underset{f \text{ è lineare}}{=} f(v) + f(w) \underset{v,w \in \operatorname{Ker} f}{=} 0 + 0 = 0$

iii) $v \in \operatorname{Ker} f$, $\lambda \in \mathbb{K}$ $\Rightarrow \lambda v \in \operatorname{Ker} f$.

Infatti $f(\lambda v) \underset{f \text{ è lineare}}{=} \lambda \cdot f(v) \overset{v \in \operatorname{Ker} f}{=} \lambda \cdot 0 = 0$.

Immagine: i) $0 \in \operatorname{Im} f$. Infatti $f(0)=0$ (Lezione 13)

ii) $w=f(v),\ w'=f(v') \in \operatorname{Im} f$

$\Rightarrow w+w' \in \operatorname{Im} f$

Infatti $w+w' = f(v)+f(v') \underset{\substack{f\text{ è}\\ \text{lineare}}}{=} f(v+v')$.

iii) $w=f(v) \in \operatorname{Im} f,\ \lambda \in \mathbb{K}$

$\Rightarrow \lambda w \in \operatorname{Im} f$

Infatti $\lambda w = \lambda \cdot f(v) \underset{\substack{f\text{ è}\\ \text{lineare}}}{=} f(\lambda v)$ $\square$

Prop 4.2.2

La funzione $f: V \to W$ è iniettiva $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{0\}$

—"— suriettiva $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = W$

Dim: Prima parte:

"$\Rightarrow$": Sappiamo già che $f(0)=0$. Se $v \neq 0$ iniettività di f implica $f(v) \neq f(0)=0$ allora $v \notin \operatorname{Ker} f$. $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.

"$\Leftarrow$": Siano $v \neq v' \in V$. Siccome $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ troviamo $v-v' \neq 0 \Rightarrow f(v-v') \neq 0$

$\underset{f\text{ è lineare}}{\Rightarrow} f(v-v') = f(v)-f(v') \neq 0 \Leftrightarrow f(v) \neq f(v')$

$\Rightarrow f$ è iniettiva.

Seconda parte: def. di suriettività. $\square$

Prop 4.2.6: Se $v_1,\dots,v_n$ sono generatori di V, allora $f(v_1),\dots,f(v_n)$ sono generatori di $\operatorname{Im} f$:

$V = \operatorname{Span}(v_1,\dots,v_n) \Rightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Span}(f(v_1),\dots,f(v_n))$

Dim: Se $v_1, \dots, v_n$ sono generatori di V allora ogni vettore $v \in V$ può essere scritto come

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n .$$

$$\mathrm{Im} f = \{ w = f(v) \ / \ v \in V \}$$
$$= \{ f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) \ / \ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \}$$

f è lineare

$$= \{ \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n) \ / \ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \}$$
$$= \mathrm{Span}(f(v_1), \dots, f(v_n)) \qquad \square$$

Cor 4.2.7: $\mathrm{Im}\, L_A = \mathrm{Span}(L_A(e_1), \dots, L_A(e_n))$
$= \mathrm{Span}(A^1, \dots, A^n)$

Cor 4.2.8: $\dim(\mathrm{Im}\, L_A) = \dim \mathrm{Span}(A^1, \dots, A^n) = \mathrm{rk}(A)$

Teorema della dimensione

Teorema 4.2.9 Sia $f: V \to W$ un'applicazione lineare

Se $\dim V = n$, allora

$$n = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f$$

[Senza dim.]

Nel caso particolare di un'applicazione lineare
$$L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \qquad (A \in M(m,n,\mathbb{K}))$$

$$\mathrm{Ker}\, L_A = \{ x \in \mathbb{K}^n \ / \ L_A(x) = 0 \} = \{ x \in \mathbb{K}^n \ / \ A \cdot x = 0 \}$$
$$= S = \{ \text{soluzioni del sistema lineare } A \cdot x = 0 \}$$

Il teorema della dimensione diventa

$$n = \dim S + \dim(\mathrm{Im}\, L_A) \underset{\text{Cor 4.2.8}}{=} \dim S + rk(A)$$

$$\iff \dim S = n - rk(A)$$

Questo è il teorema di Rouché - Capelli!

<u>Cor 4.2.14:</u> Sia $f: V \to W$ un'applicazione lineare (dim. finita)
Vale $\dim \mathrm{Im} f \leq \dim V$

(1) f iniettiva $\iff \dim \mathrm{Im} f = \dim V$
(2) f suriettiva $\iff \dim \mathrm{Im} f = \dim W$

<u>Dim:</u> Il teorema della dimensione dice

$$\dim \mathrm{Im} f = \dim V - \dim \mathrm{Ker} f \leq \dim V$$

(1) f iniettiva $\underset{\text{Prop 4.2.2}}{\iff} \mathrm{Ker} f = \{0\} \iff \dim \mathrm{Ker} f = 0$
$\iff \dim \mathrm{Im} f = \dim V$

(2) f suriettiva $\underset{\text{Prop 4.2.2}}{\iff} \mathrm{Im} f = W \iff \dim \mathrm{Im} f = \dim W$ $\square$

Isomorfismi

<u>Def 4.2.19:</u> Un'applicazione lineare $f: V \to W$ è un **isomorfismo** se è biettiva (che vuol dire iniettiva & suriettiva).

Due spazi vettoriali V & W sullo stesso campo $\mathbb{K}$ sono **isomorfi** se esiste un isomorfismo $f: V \to W$.

Sappiamo che una funzione biettiva $f: V \to W$ ha un'inversa $f^{-1}: W \to V$.

$$[\, f \circ f^{-1} = id_W \,,\; f^{-1} \circ f = id_V \,]$$

Prop 4.2.20: Se una funzione $f: V \to W$ è lineare e biettiva, allora l'inversa $f^{-1}: W \to V$ è anche lineare.

Dim: Controlliamo i due assiomi di linearità:

i) $f^{-1}(w+w') = f^{-1}(w) + f^{-1}(w')$.

Infatti, scrivendo $v = f^{-1}(w)$, $v' = f^{-1}(w')$ abbiamo $f(v+v') \underset{f \text{ è lin.}}{=} f(v) + f(v') = w + w'$

$\Rightarrow f^{-1}(w+w') = v + v' = f^{-1}(w) + f^{-1}(w')$

ii) $f^{-1}(\lambda w) = \lambda \cdot f^{-1}(w)$.

Infatti, scriviamo $v = f^{-1}(w)$ e notiamo che

$f(\lambda v) \underset{f \text{ lin.}}{=} \lambda \cdot f(v) = \lambda w \Rightarrow f^{-1}(\lambda w) = \lambda v = \lambda \cdot f^{-1}(w)$

□

Prop: Sia $f: V \to W$ un'applicazione lineare

(1) Se f è iniettiva, allora $\dim V \leq \dim W$.

(2) Se f è suriettiva, allora $\dim V \geq \dim W$.

(3) Se f è biettiva, allora $\dim V = \dim W$.

Dim: (1) f iniettiva $\Rightarrow \dim V = \dim \operatorname{Im} f \leq \dim W$

(2) $\dim V \geq \dim \operatorname{Im} f \underset{f \text{ suriettiva}}{=} \dim W$

(3): (1) & (2).

□

Vale anche il vice-versa del punto (3):

<u>Prop 4.2.30</u>: Due spazi V & W di dimensione finita sono isomorfi se e solo se $\dim V = \dim W$.

<u>Cor</u>: Ogni spazio vettoriale V di dimensione n è isomorfo a $\mathbb{K}^n$.

Se $v_1, \dots, v_n$ è una base di V, la mappa $V \to \mathbb{K}^n$ che manda x al vettore colonna di coordinate rispetto a questa base è un isomorfismo.