Lezione 11: Sistemi Lineari (Parte I)

Def: Un sistema lineare è un insieme di k equazioni lineari in n variabili:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}$$

I numeri a_{ij} sono i coefficienti & b_i sono i termini noti.

Sia i coefficienti, che i termini noti, che le variabili sono in un certo campo fissato $\mathbb{K}$.

Possiamo raggruppare i coefficienti e i termini noti in una matrice $k \times n$ & in un vettore colonna

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

Chiamiamo A la matrice dei coefficienti & b il vettore dei termini noti.

Introduciamo anche la matrice completa

$$C = (A \mid b)$$

[questa è una matrice $k \times (n+1)$]

Il vettore $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ è una soluzione del sistema lineare se $A \cdot x = b$.

L'insieme di tutte le soluzioni chiamiamo $S \subset K^n$.

Mosse di Gauss

Cambiamenti della matrice completa C che non cambiano S si chiamano **mosse di Gauss** e sono le seguenti:

i) Scambiare due righe di C.

ii) Moltiplicare una riga per un numero $\lambda \neq 0$.

iii) Aggiungere ad una riga un'altra riga moltiplicata per un $\lambda \in K$.

Notazione: i) $C_i \leftrightarrow C_j$ // ii) $C_i \to \lambda C_i$ // iii) $C_i \to C_i + \lambda C_j$

Esempio:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_3} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \to \frac{1}{2} C_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_2 \to C_2 + C_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

⚠ Diverso dal calcolo del determinante, possiamo fare le mosse di Gauss solo con le righe e NON con le colonne!

Teorema: Le mosse di Gauss applicate ad una matrice completa $C = (A|b)$ non cambiano l'insieme S delle soluzioni di $A \cdot x = b$.

Algoritmo di Gauss

Sia C una matrice qualsiasi. Per ogni riga C_i di C chiamiamo **pivot** il primo elemento non nullo della riga. Una **matrice a scalini** è una matrice con la proprietà che il pivot di ogni riga è sempre <u>strettamente</u> più a destra del pivot della riga precedente.

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

sono matrici a scalini

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>non</u> sono a scalini.

L'algoritmo di Gauss trasforma qualsiasi matrice C in una matrice a scalini usando le tre tipi di mosse di Gauss. Funziona così:

(1) Se $C_{11} = 0$, scambiamo (se si può) la prima riga con un'altra riga C_i con $C_{i1} \neq 0$. Se invece $C_{i1} = 0$ per ogni riga, passiamo al punto (3).

(2) Per ogni riga C_i con $i \geq 2$ e con $C_{i1} \neq 0$, sostituiamo la riga con $C_i - \frac{C_{i1}}{C_{11}} \cdot C_1$

(3) Abbiamo ottenuta adesso una matrice con $C_{i1} = 0$ per ogni $i \geq 2$. Continiamo con punto (1) applicato alla sottomatrice ottenuta togliendo la prima riga e la prima colonna.

Esempio:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \to C_3 + C_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_3 \to C_3 - 3C_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$ matrice a scalini

Algoritmo di Gauss-Jordan

(1) Applichiamo l'algoritmo di Gauss per ottenere una matrice a scalini.

Poi applichiamo le seguenti due punti in qualsiasi ordine:

(2) Con ulteriori mosse di Gauss otteniamo una matrice dove tutti i coefficienti <u>sopra i pivot</u> sono nulli. Questo è sempre possibile usando mosse di Gauss del terzo tipo, aggiungendo un multiplo della riga che contiene il pivot alle altre righe.

Esempio:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_1 \to C_1 - C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_1 \to C_1 - \frac{3}{2} C_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(3) Cambiamo tutti i pivot a 1 moltiplicando le righe con un scalare.

Esempio: $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{C_3 \leftarrow -\frac{1}{2} C_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Risoluzione del sistema lineare

Sia $C = (A|b)$ la matrice completa di un sistema lineare. Applichiamo l'algoritmo di Gauss-Jordan per semplificare C (senza cambiare S).

Poi ci sono due possibilità:

I) Nella ultima colonna abbiamo un pivot, per esempio

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & ? & ? & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

L'equazione nella riga di questo pivot è $0 = 1$
$\Rightarrow$ Il sistema NON ha soluzioni.

II) Nella ultima colonna non c'è un pivot, per esempio

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & a_{13} & 0 & 0 & a_{16} & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & a_{26} & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_{36} & b_3 \end{array}\right)$$

Assegniamo ad ogni variabile x_k che corrisponde ad una colonna senza pivot (tranne l'ultima) un parametro $t_1, t_2, \dots$ Nel caso sopra

$x_1 = t_1$, $x_3 = t_2$, $x_6 = t_3$

Così il sistema diventa

$$\begin{cases} x_2 + a_{13}t_2 + a_{16}t_3 = b_1 \\ x_4 + a_{26}t_3 = b_2 \\ x_5 + a_{36}t_3 = b_3 \end{cases}$$

Otteniamo

$$\begin{cases} x_1 = t_1 \\ x_2 = b_1 - a_{13}t_2 - a_{16}t_3 \\ x_3 = t_2 \\ x_4 = b_2 - a_{26}t_3 \\ x_5 = b_3 - a_{36}t_3 \\ x_6 = t_3 \end{cases}$$

I parametri t_1, t_2, t_3 possono assumere qualsiasi valore in $\mathbb{K}$.

Esercizio 1:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$$

Esercizio 2:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 8 \\ 2x - y + 2z = 7 \\ 3x + y - z = 6 \\ x + z = 5 \end{cases}$$

(Soluzione solo in lezione!)