TUTORATO 30/11/2023

Esercizio 1: Verificare che $B' = \left\{ \begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4&-1\\-1&-5\end{pmatrix} \right\}$ forma una base di $S(\mathbb{R}^{2,2})$ e trovare le componenti della matrice $A = \begin{pmatrix}4&-11\\-11&-7\end{pmatrix}$ rispetto alla base B'.

SOLUZIONE: Sia $B = \left\{ \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \right\}$ la base standard di $S(\mathbb{R}^{2,2})$. La matrice del cambiamento di base da B a B', ottenuta ponendo in colonna le componenti dei vettori di B' rispetto a B è $P = \begin{pmatrix}1&2&4\\-2&1&-1\\1&3&-5\end{pmatrix}$. Calcoliamo il determinante.

$$\det(P) = 1\begin{vmatrix}1&-1\\3&-5\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}-2&-1\\1&-5\end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix}-2&1\\1&3\end{vmatrix} = -5+3-2(10+1)+4(-6-1) = -52 \neq 0,$$

dunque i tre vettori formano effettivamente una base di $S(\mathbb{R}^{2,2})$. Le componenti richieste sono la soluzione del sistema lineare $\begin{pmatrix}4\\-11\\-7\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\x'_3\end{pmatrix}$, cioè dobbiamo risolvere

$$\begin{cases} x'_1+2x'_2+4x'_3 = 4 \\ -2x'_1+x'_2-x'_3 = -11 \\ x'_1+3x'_2-5x'_3 = -7 \end{cases}$$

Usando il solito metodo di riduzione della matrice $\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&4&4\\-2&1&-1&-11\\1&3&-5&-7\end{array}\right)$ si ottiene $x'_1 = 4$, $x'_2 = -2$, $x'_3 = 1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&4&4\\-2&1&-1&-11\\1&3&-5&-7\end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2+2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&4&4\\0&5&7&-3\\0&1&-9&-11\end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to 5R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&4&4\\0&5&7&-3\\0&0&-52&-52\end{array}\right)$$

Esercizio 2: Siano assegnate due basi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$

$B = \{(1,0),(1,1)\}$, $B' = \{(0,-1),(2,1)\}$. Si determini la matrice del cambiamento di base da B a B' e quella da B' a B e si verifichi che una è l'inversa dell'altra.

SOLUZIONE: La matrice del cambiamento di base da B a B' è $\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$, dove (a,b) sono le coordinate di $(1,0)$ rispetto a B' e (c,d) di $(1,1)$ rispetto a B'.

Dunque abbiamo che $(1,0) = a(0,-1) + b(2,1) = (2b, -a+b)$ che equivale al sistema $\begin{cases} 2b = 1 \\ -a+b = 0 \end{cases}$ la cui soluzione è $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Inoltre abbiamo che $(1,1) = c(0,-1) + d(2,1) = (2d, -c+d)$ che equivale a $\begin{cases} 2d = 1 \\ -c+d = 1 \end{cases}$ la cui soluzione è data da $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Dunque la matrice di passaggio da B a B' è $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Invece la matrice di passaggio da B' a B è data da $\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$, dove $(0,-1) = x(1,0) + y(1,1)$ e $(2,1) = z(1,0) + w(1,1)$, cioè $(0,-1) = (x+y, y)$ e $(2,1) = (z+w, w)$. Si ottiene $x=1, y=-1$ e $z=1, w=1$, quindi la matrice del cambiamento di base da B' a B è data da $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Data $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ è evidente che $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Esercizio 3: In $\mathbb{R}^3$, rispetto alla base canonica $B = (e_1, e_2, e_3)$, si consideri l'endomorfismo f definito, al variare di un parametro reale h, da $\begin{cases} f(e_1) = e_1 + 2e_2 - e_3 \\ f(e_2) = -e_1 + 2e_2 \\ f(e_3) = 3e_1 + he_2 + (h+1)e_3 \end{cases}$

Determinare:

1) la matrice A associata ad f, rispetto alla base B;
2) l'espressione dell'immagine di un generico vettore di $\mathbb{R}^3$;
3) per quali valori del parametro h, f è un automorfismo;
4) nel caso $h=-2$ una base di $\ker f$ ed una base di $\operatorname{Im} f$;
5) la matrice associata all'automorfismo f^{-1}, rispetto alla base B, nei casi in cui ciò sia possibile.

SOLUZIONE: 1) La matrice A associata ad f rispetto alla base B si ottiene scrivendo in colonna, ordinatamente, le componenti dei vettori immagine dei vettori della base $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & h \\ -1 & 0 & h+1 \end{pmatrix}$.

se $X = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ è un generico vettore di $\mathbb{R}^3$, allora la sua immagine $f(x) = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3$ si ottiene mediante $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, cioè $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & h \\ -1 & 0 & h+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$,

dunque abbiamo il seguente sistema $\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + 3x_3 \\ y_2 = 2x_1 + 2x_2 + hx_3 \\ y_3 = -x_1 + (h+1)x_3 \end{cases}$

3) L'endomorfismo f è un automorfismo, cioè una biezione da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$, se e soltanto se il rango della matrice A è massimo, o, in modo equivalente, se e solo se $\det(A) \neq 0$.

Calcoliamo allora $\det A = 1 \begin{vmatrix} 2 & h \\ 0 & h+1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & h \\ -1 & h+1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2(h+1) + 2(h+1) + h + 6 =$

$= 2h+2+2h+2+h+6 = 5h+10 = 5(h+2)$, dunque $\det(A) \neq 0 \iff h \neq -2$. L'endomorfismo f è quindi un automorfismo per ogni valore di h ad eccezione di $h=-2$.

4) Nel caso $h=-2$, l'endomorfismo f <u>non</u> è un automorfismo. Riducendo la matrice A per righe si ottiene $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to \frac{1}{2}R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2 + R_1]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\substack{R_3 \to 2R_3 + R_2 \\ R_2 \to \frac{1}{2}R_2}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\operatorname{rank}(A) = 2$, dunque $\dim(\operatorname{Im} f) = 2$. Di conseguenza $\dim(\ker f) = 1$.

Una base del nucleo di f si ottiene risolvendo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice ridotta per righe ottenuta da A, ossia $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$ da cui

$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -2t \\ x_3 = -t \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$, quindi $\ker f = \mathcal{L}((1,-2,-1))$. Una base di $\operatorname{Im} f$ è formata da due colonne linearmente indipendenti della matrice A, per esempio $\operatorname{Im} f = \mathcal{L}((1,2,-1),(-1,2,0))$.

5) f^{-1} esiste se e soltanto se f è un automorfismo, dunque se e solo se $h \neq -2$.

In questi casi la matrice associata a f^{-1} rispetto alla base B è A^{-1}! Calcoliamola.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & h & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & h+1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3+R_1]{R_2 \to R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & h-6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & h+4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to 4R_3+R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & h-6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5h+10 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to \frac{1}{5h+10}R_3]{h \neq -2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & h-6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5(h+2)} & \frac{1}{5(h+2)} & \frac{4}{5(h+2)} \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 \to R_1-3R_3]{R_2 \to (h-6)R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & \frac{5h+4}{5(h+2)} & -\frac{3}{5(h+2)} & -\frac{12}{5(h+2)} \\ 0 & -4 & 0 & \frac{4(3h+2)}{5(h+2)} & -\frac{4(h+4)}{5(h+2)} & \frac{4(h-6)}{5(h+2)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5(h+2)} & \frac{1}{5(h+2)} & \frac{4}{5(h+2)} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_1 \to 4R_1-R_2]{R_2 \to -\frac{1}{4}R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & \frac{8(h+1)}{5(h+2)} & \frac{4(h+1)}{5(h+2)} & -\frac{4(h+6)}{5(h+2)} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3h+2}{5(h+2)} & \frac{h+4}{5(h+2)} & \frac{6-h}{5(h+2)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5(h+2)} & \frac{1}{5(h+2)} & \frac{4}{5(h+2)} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{4}R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2(h+1)}{5(h+2)} & \frac{h+1}{5(h+2)} & -\frac{h+6}{5(h+2)} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3h+2}{5(h+2)} & \frac{h+4}{5(h+2)} & \frac{6-h}{5(h+2)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5(h+2)} & \frac{1}{5(h+2)} & \frac{4}{5(h+2)} \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{2(h+1)}{5(h+2)} & \frac{h+1}{5(h+2)} & -\frac{h+6}{5(h+2)} \\ -\frac{3h+2}{5(h+2)} & \frac{h+4}{5(h+2)} & \frac{6-h}{5(h+2)} \\ \frac{2}{5(h+2)} & \frac{1}{5(h+2)} & \frac{4}{5(h+2)} \end{pmatrix}}_{= A^{-1}}$$

Esercizio 4: Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da $\begin{cases} f(e_1) = 2e_1 \\ f(e_2) = e_1 + e_2 + e_3 \\ f(e_3) = -e_1 + e_2 - e_3 \end{cases}$

con $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Calcolare $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.

SOLUZIONE: La matrice associata ad f rispetto alla base canonica B di $\mathbb{R}^3$ è

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ e $\det(A) = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, dunque $\operatorname{rank}(A) = 3$, dunque $\dim(\operatorname{Im} f) = 3$, cioè $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$ e $\dim(\operatorname{Ker} f) = 0$, da cui $\operatorname{Ker} f = \{0\}$. Dunque f è sia iniettiva sia suriettiva, dunque un automorfismo di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 5: Sia data la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Determinare gli autovalori e gli autospazi.

...ZIONE: Come prima cosa si calcola l'equazione caratteristica

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ cioè } -2-\lambda \begin{vmatrix} -2-\lambda & 6 & 6 \\ 0 & 3-\lambda & 3 \\ 0 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ dunque}$$

$$0 = (-2-\lambda)(-2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)^2\left[(3-\lambda)(-2-\lambda)+6\right] = (\lambda+2)^2(\cancel{-6}-3\lambda+2\lambda+\lambda^2+\cancel{6}) = (\lambda+2)^2\lambda(\lambda-1)$$

da cui si ottengono gli autovalori $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -2$. Si avranno quindi 3 autospazi associati. V_{λ_1} coincide con $\ker f$. Riducendo per righe A si ottiene subito $\operatorname{rank}(A) = 3$, quindi $\dim(\ker f) = \dim(V_{\lambda_1}) = 1 \rightsquigarrow x_3 + x_4 = 0 \rightsquigarrow x_3 = -x_4$ $\rightsquigarrow V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((0,0,-1,1))$. Prendiamo ora $\lambda_2 = 1 \rightsquigarrow A - I = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, da cui

si ottiene $\operatorname{rank}(A-I) = 3 \rightsquigarrow (A-I)X = 0 \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = -\frac{3}{2}x_4 \\ x_2 = 2x_3 + 2x_4 = -x_4 \end{cases} \rightsquigarrow V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((0,-1,-\tfrac{3}{2},1)) = \mathcal{L}((0,2,3,-2))$

$\downarrow$

$\dim V_{\lambda_2} = 1$

Infine con $\lambda_3 = -2 \rightsquigarrow A + 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $\operatorname{rank}(A+2I) = 2 \rightsquigarrow \dim V_{\lambda_2} = 2$

$(A+2I)X = 0 \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = s \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((1,0,0,0),(0,1,0,0))$.