Lezione 4 : Polinomi

Def: Un polinomio è una funzione ottenuta combinando numeri (in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) e variabili $(x, y, z, \dots)$ ed usando solo le operazioni $+, -$ & $\cdot$

Esempi: $4x$, $-2xy$, $\sqrt{5}\,x^3 + \sqrt{7}\,x^2 + 19x - 8$, ecc.

monomi

4 monomi sommati

Def: Il grado di un monomio è la somma degli esponenti sulle parti letterali.

Def: Il grado di un polinomio è il massimo grado dei suoi monomi.

Ci interessano in particolare i polinomi con solo una variabile (che normalmente chiamiamo x).

Possiamo scrivere un polinomio di questo tipo e di grado n nella forma

$$p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

dove $a_n, \dots, a_0$ sono numeri/scalari (in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$)

Chiamiamo $a_n, \dots, a_0$ i coefficienti di $p(x)$.

Notazione:
- $\mathbb{R}[x]$ è l'insieme dei polinomi con coefficienti in $\mathbb{R}$ e variabile x.
- $\mathbb{C}[x]$ è l'insieme dei polinomi con coefficienti in $\mathbb{C}$ e variabile x.

•) $\mathbb{R}[x,y]$ è l'insieme dei polinomi con coefficienti in $\mathbb{R}$ e variabili x & y.

•) $\mathbb{R}_k[x]$ è l'insieme dei polinomi con coefficienti in $\mathbb{R}$ e variabile x e grado $\leq k$. (Simile per $\mathbb{C}_k[x]$)

Divisione con resto fra polinomi

I polinomi assomigliano i numeri interi: possono essere sommati e moltiplicati e si possono fare le divisioni con resto.

Dati due polinomi $p(x)$ (il dividendo) e $d(x)$ (il divisore), esistono sempre (e sono unici) due polinomi $q(x)$ (il quoziente) e

$r(x)$ (il resto) tale che

$$p(x) = q(x) \cdot d(x) + r(x)$$

con la proprietà che il resto $r(x)$ abbia grado strettamente minore del divisore $d(x)$.

Esempio 1:

$$\underbrace{x^3+1}_{p(x)} = \underbrace{x}_{q(x)} \underbrace{(x^2-1)}_{d(x)} + \underbrace{(x+1)}_{r(x)}$$

Esempio 2:

$$7x^4-5x^3+2x^2+9 = \underbrace{(7x^2-5x-12)}_{q(x)}(x^2+2) + \underbrace{(10x+33)}_{r(x)}$$

$$\begin{array}{rrrrr}
7x^4 & -5x^3 & +2x^2 & & +9 \\
-7x^4 & & -14x^2 & & \\
\hline
& -5x^3 & -12x^2 & & +9 \\
& +5x^3 & & +10x & \\
\hline
& & -12x^2 & +10x & +9 \\
& & +12x^2 & & +24 \\
\hline
& & & 10x & +33
\end{array}$$

Per i polinomi: $q(x)$ divide $p(x)$ se il resto $r(x) = 0$ e $q(x)$ non divide $p(x)$ se il resto $r(x)$ non è zero.

Notazione: $q(x) \mid p(x)$ vuol dire "$q(x)$ divide $p(x)$".

Radici di un polinomio

Se $p(x)$ è un polinomio e a è un numero, indichiamo con $p(a)$ il numero che otteniamo sostituendo a al posto di x. Ad esempio, se $p(x) = x^3 - 4$, $a = -2$ allora $p(a) = p(-2) = -8-4 = -12$.

Def 1.3.1: Un numero a è radice di un polinomio $p(x)$ se $p(a) = 0$.

Prop 1.3.2: Un numero a è radice del polinomio $p(x)$ se e solo se $(x-a) \mid p(x)$.

Dim: Se dividiamo $p(x)$ per $(x-a)$ otteniamo

$$p(x) = q(x)(x-a) + r(x)$$

dove $q(x)$ è il quoziente e $r(x)$ è il resto come sopra. Sappiamo che $r(x)$ ha grado strettamente minore a $(x-a)$, quindi $r(x)$ ha grado zero, allora $r(x)$ è un numero r_0.

$$\Rightarrow p(x) = q(x)(x-a) + r_0$$

$$\Rightarrow p(a) = q(a)\underbrace{(a-a)}_{=0} + r_0 = r_0$$

Quindi a è radice di $p(x)$ se e solo se $r_0 = 0 \iff (x-a) \mid p(x)$. $\square$

Def 1.3.3: La molteplicità di una radice a di un polinomio $p(x)$ è il massimo numero k tale che $(x-a)^k$ divide $p(x)$.

[La molteplicità è almeno 1 & è un numero intero.]

Esempi 1.3.4, 1.3.6, ecc. (solo in lezione)

Teorema 1.3.7: Un polinomio $p(x)$ di grado $n \geq 1$ ha al più n radici (contate con molteplicità)

Dim: (Induzione sul grado n)

Se $n=1$, il polinomio è del tipo $p(x) = a_1 x + a_0$ ha ha esattamente una radice $a = -\frac{a_0}{a_1}$.

Supponiamo che il teorema è vero per $n-1$ e dimostriamo che allora vale anche per n:

Sia $p(x)$ un polinomio di grado n. Se $p(x)$ non ha nessuna radice, il teorema vale. Se $p(x)$ ha almeno una radice a, allora $(x-a)$ divide $p(x)$: $\quad p(x) = q(x)(x-a) + 0$ & $q(x)$ ha grado $n-1$

Sappiamo (teorema per $n-1$) che $q(x)$ ha al più $n-1$ radici. $\underset{\text{Esempio sopra}}{\Rightarrow}$ $p(x)$ ha al più n radici (a & le radici di $q(x)$). $\square$

Esempio: i) $p(x) = ax+b$ ha sempre una soluzione $x = -\frac{b}{a}$

ii) $p(x) = ax^2+bx+c$, allora sappiamo che il numero di radici reali dipende da $\Delta = b^2-4ac$

- Se $\Delta > 0$, il polinomio ha 2 radici: $x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Se $\Delta = 0$, il polinomio ha una radice con molteplicità 2. $x = -\frac{b}{2a}$
- Se $\Delta < 0$, il polinomio non ha radici reali.

Teorema fondamentale dell'algebra

Teorema 1.4.7: Ogni polinomio a coefficienti complessi di grado ≥ 1, ha almeno una radice complessa.

Corollario 1.4.8 Un polinomio $p(x)$ a coefficienti complessi di grado $n \geq 1$ ha esattamende n radici complesse (contate con molteplicità)

Dim: (Induzione sul grado n): Se $n=1$ abbiamo visto che c'è sempre una radice.
Supponiamo adesso che il corollario vale per $n-1$ e lo dimostriamo per n:

Sia $p(x)$ un polinomio di grado n.
Per il teorema fondamentale dell'algebra (1.4.7) esiste almeno una radice $a \in \mathbb{C}$.

$\Rightarrow$ $(x-a)$ divide $p(x)$ $\Leftrightarrow$ $p(x) = q(x)(x-a)$

Prop 1.3.2

& $q(x)$ ha grado $n-1$.

Per ipotesi (corollario per $n-1$), $q(x)$ ha esattamente $n-1$ radici (contate con molt.)

$\Rightarrow$ $p(x)$ ha n radici (contate con molt.): a & le $n-1$ radici di $q(x)$. $\square$

[Tre esempi del tipo $p(x) = ax^2 + bx + c$ $\sim$ solo in lezione!]