容斥 | 反演

ZCX

March 28, 2019

可能要讲的东东

- 容斥原理
- 二项式反演
- 斯特林反演
- Min-Max 容斥

前置芝士

基本的组合数恒等式

1. $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$
2. $\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m} * \binom{n-m}{k-m}$
3. $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = 2^n$
4. $\sum(-1)^i * \binom{n}{i} = 0$
5. $\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m-1} + \binom{n}{m}$
6. $\binom{n}{k} + \binom{n+1}{k} + \cdots + \binom{n+m}{k} = \binom{n+m+1}{k+1}$
7. $\binom{n}{0}\binom{m}{p} + \binom{n}{1}\binom{m}{p-1} + \binom{n}{2}\binom{m}{p-2} + \cdots + \binom{n}{p-1}\binom{m}{1} + \binom{n}{p}\binom{m}{0} = \binom{m+n}{p}$

容斥原理

容斥原理适用于对集合的计数问题，其实，对于两个关于集合的函数 $f(S)$ 和 $g(S)$，若

$$f(S) = \sum_{T \subseteq S} g(T)$$

那么有

$$g(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S|-|T|} f(T)$$

容斥原理

对于上一页式子的变形：
若

$$f(S) = \sum_{S \subseteq T} g(T)$$

那么有

$$g(S) = \sum_{S \subseteq T} (-1)^{|S|-|T|} f(T)$$

小广告

不定方程

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = m$$

的非负整数解的数目为

$$\binom{m-1}{m+n-1}$$

小广告

如果对于每一个变量 i，都对应一个限制条件 P_i，而 P_i 代表的性质是 $x_i \le b_i$，求不定方程带限制解的个数

欢迎巨佬上来秒题 (except ~~上校~~ **rushcheyo**)

小广告

设满足 P_i 的所有解的集合为 S_i，那么我们需要求解的值就是:$|\bigcap_{i=1}^{n} S_i|$
我们考虑转换为它的补集：$|\bigcap_{i=1}^{n} S_i| = |U| - \bigcup_{i=1}^{n} \bar{S}_i$
转化为部分变量有下界限制，我们可以在方程的两边同时减去 $\sum_{i=1}^{n}(b_i+1)$ 然后按无限制算即可

HAOI2008 硬币购物

Description

有四种面值的硬币，第 i 种硬币的面值是 c_i，有 n 次询问，每个询问中第 i 种硬币的数量是 d_i，给定购物所需的付款 s，回答付款方法的数目。

数据范围：$n \leq 10^3$ $q \leq 10^5$

HAOI2008 硬币购物

Description

有四种面值的硬币，第 i 种硬币的面值是 c_i，有 n 次询问，每个询问中第 i 种硬币的数量是 d_i，给定购物所需的付款 s，回答付款方法的数目。

数据范围：$n \leq 10^3$ $q \leq 10^5$

~~多重背包???~~

我们考虑一个新的问题，假如没有硬币数量限制怎么办

HAOI2008 硬币购物

Solution

我们考虑一个新的问题，假如没有硬币数量限制怎么办
显然，一开始完全背包预处理，每次询问 $O(1)$ 即可
而原问题可以转化为 $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 = m$ 只是一个带系数的不定方程，且每一个变量都有范围限制

HAOI2008 硬币购物

Solution

与之前解不定方程一样，容斥一下
方程两边同时相减同一个数
将有限制问题转化为无限制问题，直接用完全背包预处理出的结果算即可
最后乘上容斥系数相加

JSOI2015 染色问题

Description

棋盘是一个 $n \times m$ 的矩形，分成 n 行 m 列共 $n \times m$ 个小方格。现在萌萌和南南有 C 种不同颜色的颜料，他们希望把棋盘用这些颜料染色，并满足以下规定：

1. 棋盘的每一个小方格既可以染色 (染成 C 种颜色中的一种)，也可以不染色
2. 棋盘的每一行至少有一个小方格被染色
3. 棋盘的每一列至少有一个小方格被染色
4. 种颜色都在棋盘上出现至少一次

枚举至多有 i 行 j 列 k 种颜色的方案数

$$ans = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{c}(-1)^{n+m+c-i-j-k}(k+1)^{i\times j}\binom{n}{i}\binom{m}{j}\binom{c}{k}$$

$k+1$ —> 格子可以不填颜色

二项式反演

$$f(n)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}g(i)\Leftrightarrow g(n)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}f(i)$$

或

$$f(n)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}g(i)\Leftrightarrow g(n)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}f(i)$$

证明嘛... 那个带入一下吧，请~~上校~~ **rushcheyo**上来讲一下

二项式反演

$$f(n)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}g(i)\Leftrightarrow g(n)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}f(i)$$

或

$$f(n)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}g(i)\Leftrightarrow g(n)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}f(i)$$

证明嘛... 那个带入一下吧，请~~上校~~ **rushcheyo**上来讲一下
~~算了鸽了鸽了~~

HAOI2018 染色

Description

给一个长度为 n 的序列染色，每个位置上可以染 m 种颜色。如果染色后出现了 S 次的颜色有 k 种，那么这次染色就可以获得 w_k 的收益。求所有染色方案的收益之和膜 1004535809.

HAOI2018 染色

Solution

至少选了 k 个颜色恰好出现 S 次方案数是

$$F[k]=\binom{M}{k}\frac{N!}{(S!)^k(N-i*S)!}(M-k)^{N-i*S}$$

然后恰好 k 个颜色恰好出现 k 次就是

$$g[k]=\sum_{j=k}^{M}(-1)^{k-j}\binom{j}{k}F[j]$$

化简后 NTT 优化即可

斯特林数

定义：自行百度
递推式：

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \cdot \left\{ {n-1 \atop k} \right\}$$

$$\left[{n \atop k} \right] = \left[{n-1 \atop k-1} \right] + (n-1) \cdot \left[{n-1 \atop k} \right]$$

第二类斯特林数

一个组合数意义清晰的式子：

$$n^m = \sum_{k=0}^{m} \left\{ {m \atop k} \right\} \binom{n}{k}$$

考虑它的组合意义

n^m 表示 m 个元素放进 n 个集合中的方案数，允许存在空集合，$\binom{n}{k}$ 表示在 n 个集合中选出 k 个不为空，其余为空，$\left\{ {m \atop k} \right\}$ 表示将 m 个元素划分成 k 个集合且不许为空，显然上式成立

如何求斯特林数

容斥

$$\left\{ {n \atop m} \right\} = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n$$

理解：枚举盒子的个数，其他的随便乱放，由于盒子视作相同，所以除以 $m!$。

如何求斯特林数

整理该式得：

$$\left\{ {n \atop m} \right\} = \sum_{k=0}^{m} \times \frac{1}{k!} \times \frac{(m-k)^n}{(m-k)!}$$

即

$$\begin{aligned} \left\{ {m \atop k} \right\} &= \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \frac{k!}{i!(k-i)!} i^m && (1) \\ &= \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^{k-i}}{(k-i)!} \frac{i^m}{i!} && (2) \end{aligned}$$

发现是卷积的形式，可以用 NTT 在 $O(n \log_2 n)$ 的时间内求解

性质

$$n^k = \sum_{k=0}^{m} \left\{ {k \atop i} \right\} \binom{n}{i} i!$$

理解：左边是将 k 个球放在 n 个盒子里；右边枚举非空盒子的个数，从 n 个盒子中选出 i 个盒子，将 k 个球放在这 i 个盒子里，由于盒子是不同的，所以乘上 $i!$。

CF 932E
Description

求

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \cdot i^k$$

数据范围：

$1 \le n \le 1e9, 1 \le k \le 5e3$

CF 932E

Solution

用上面的性质推式子：

$$\sum_{i=1} \cdot i^k$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \sum_{j=1}^{k} \binom{i}{j} \left\{ {k \atop j} \right\} \times i!$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \left\{ {k \atop j} \right\} \binom{n}{i} \binom{i}{j} \times j!$$

$$= n! \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \left\{ {k \atop j} \right\} \frac{1}{(n-i)!} \frac{1}{(i-j)!}$$

CF 932E

Solution

$$= n!\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\left\{{k \atop j}\right\}\binom{n-j}{n-i}\frac{1}{(n-j)!}$$

$$= n!\sum_{j=1}^{k}\left\{{k \atop j}\right\}\sum_{i=1}^{n}\binom{n-j}{n-i}\frac{1}{(n-j)!}$$

$$= n!\sum_{j=1}^{k}\left\{{k \atop j}\right\}2^{n-j}\frac{1}{(n-j)!}$$

$$= \sum_{j=1}^{k}\left\{{k \atop j}\right\}2^{n-j}n^{\underline{j}}$$

$n^{\underline{j}}$ 表示 n 的 j 次下降幂

BZOJ2059 Crash 的文明世界

Description

Crash 小朋友最近迷上了一款游戏——文明 5(Civilization V)。在这个游戏中，玩家可以建立和发展自己的国家，通过外交和别的国家交流，或是通过战争征服别的国家。
现在 *Crash* 已经拥有了一个 N 个城市的国家，这些城市之间通过道路相连。由于建设道路是有花费的，因此 *Crash* 只修建了 $N-1$ 条道路连接这些城市，不过可以保证任意两个城市都有路径相通。
在游戏中，*Crash* 需要选择一个城市作为他的国家的首都，选择首都需要考虑很多指标，有一个指标是这样的：

$$S(i) = \sum_{i=1}^{n} dist(i,j)^k$$

其中 $S(i)$ 表示第 i 个城市的指标值，$dist(i,j)$ 表示第 i 个城市到第 j 个城市需要经过的道路条数的最小值，k 为一个常数且为正整数。
因此 *Crash* 交给你一个简单的任务：给出城市之间的道路，对于每个城市，输出这个城市的指标值，由于指标值可能会很大，所以你只需要输出这个数 mod 10007 的值。
数据范围：100% 的数据满足 $N \le 50000$, $k \le 150$

根据套路 $n^k = \sum_{i=0}^{k} C_n^i S_2(k,i) \cdot i!$ S_2 表示第二类斯特林数。然后我们拿 i 当下标，记录相同的 i 下，$\sum C_n^i$ 的值就行了

然后我们做树形 DP，$f_{i,j}$ 表示以 i 为根的子树中，$\sum_{v\ is\ in\ Tree_i} C_{dis(i,v)}^j$。然后我们转移的时候，根据 $C_i^j = C_{i-1}^{j-1} + C_{i-1}^j$ 得到 $f_{i,j} = \sum_{u \in son_i} f_{u,j-1} + f_{u,j}$

Min-Max 容斥 | 最值反演

最值反演是针对一个集合中最大/最小值的反演。

$$\max\{S\} = \sum_{T \subset S} (-1)^{|T|+1} \min\{T\}$$

$$\min\{S\} = \sum_{T \subset S} (-1)^{|T|+1} \max\{T\}$$

如 1,2,3,4 的最大值 =1+2+3+4-1-1-1-2-2-3+1+1+1+2-1=4。

求 LCM

将每个数 a_i 分解为 $\prod_{p_j=prime[i][]} p_j^{k_j}$，则 LCM 就是求每个质因数中指数

$$\mathrm{lcm}\{\mathrm{S}\} = \prod_{\mathrm{T}\subset\mathrm{S}} (\gcd\{\mathrm{T}\})^{(-1)^{|\mathrm{T}|+1}}$$

求期望

对原式套一个期望，就有该式子的期望形式：

$$\mathbb{E}[\max\{S\}] = \sum_{T \subset S} (-1)^{|T|+1} \mathbb{E}[\min\{T\}]$$

HDU 4336

Description

给定集合 S 中每个元素出现的概率 p_i，其和为 1，每次会按概率出现一个元素。求每个元素都至少出现一次的期望次数。

HDU 4336

Solution

可用状压 DP 解决复杂度 $O(2^n * n)$

HDU 4336

Solution

考虑定义集合 T 中元素的比较运算为最早出现时间更早。则 $\mathbb{E}[\min\{T\}]$ 的意义为 T 中出现任意一个元素的期望次数。因为每次只能出现一个数，出现任意一个数的概率显然就是集合中所有概率的和。因此这个期望等于 $\frac{1}{\sum_{i\in T} p_i}$ 最后答案即为 $\mathbb{E}[\max\{S\}]$ 用上面的反演即可，时间复杂度为 $O(2^n)$

随机游走

Description

给你一颗树和根，每次询问从根出发，随机走到有连边的结点，经过集合 S 中所有结点的步数期望

$1 \le n \le 18, 1 \le Q \le 5000$

随机游走

Solution

首先我们要求出所有集合 S 经过至少一个 S 中的点的步数期望（为最值反演铺垫）

令 dpS,i 表示以 i 为起点，要经过集合 S 中至少一个点的步数期望

那么 $dp_{S,i} = \frac{1}{deg_i}(dp_{S,fa_i} + 1 + \sum_{v \in son} dp_{S,v} + 1)$, deg 表示 i 的度数

根据套路，我们假设 $dp_{S,i} = A_i dp_{S,fa_i} + B_i$

$$
\begin{aligned}
dp_{S,i} &= \frac{1}{deg_i}(dp_{S,fa_i} + 1 + \sum_{v \in son} dp_{S,v} + 1) && (3)\\
&= \frac{1}{deg_i}(dp_{S,fa_i} + 1 + \sum_{v \in son} A_v dp_{S,i} + B_v + 1) && (4)\\
&= \frac{1}{deg_i}(dp_{S,fa_i} + dp_{S,i} \sum_{v \in son} A_v + \sum_{v \in son} B_v) + 1 && (5)
\end{aligned}
$$

随机游走

Solution

于是我们得到了

$$A_i = \frac{1}{deg_i - sigA}$$

$$B_i = \frac{sigB + 1}{deg_i - sigA}$$

显然如果 i S 那么 Ai=Bi=0 然后 A,B 是可以在树上 dp 的（因为式子只和它的孩子有关）
那么我们要求的

$$\begin{aligned} dp_{S,root} &= A_{root} dp_{S,fa_{root}} + B_{root} && (11) \\ &= B_{root} && (12) \\ & && (13) \end{aligned}$$