常微分方程笔记

Quinn

2026 年 1 月 4 日

- *Notes for Ordinary Differential Equations*
- 模版来源: *https://github.com/fenglielie/latexzero*

写在前面

此笔记为张挺老师《常微分方程》课程的学习笔记，课程代码 MATH2102M.
笔记顺序为授课顺序，与教材顺序略有不同.

约定

在整个笔记中，若无特殊说明，均采用以下约定:

- I 表示一段连续的区间.
- $C(I)$ 表示在区间 I 上所有连续函数所组成的集合.
- $C^n(I)$ 表示在区间 I 上所有直到 n 阶导数均连续的函数所组成的集合.
- ODE 表示常微分方程 (Ordinary Differential Equation).
- LODE 表示线性常微分方程 (Linear Ordinary Differential Equation).
- ODEs 表示常微分方程组 (Ordinary Differential Equations System).
- $\int p(x)\,dx$ 表示 $p(x)$ 的其中一个原函数.

目录

1 基本概念

微分方程 (differential equation) 主要分为以下两类:

自变量	未知函数
一个	常微分方程
多个	偏微分方程

Definition 1.1. 微分方程中实际出现的最高阶导数，称为该微分方程的**阶数**。

方程中实际出现的最高阶导数，称为**阶数**。

实际情况下，微分方程是系统中的瞬时状态的表示，然后进行求解（一般是多个解），再通过求得的解修正微分方程。

微分方程通过加「定解条件」，得到「定解问题」。我们常说的**初值（柯西）问题**就是给定初值条件。

Example 1.1 (单摆)**.** 我们认为 θ 充分小，有 $\theta \sim \sin\theta$.
对重力进行分解:

$$F = -mg\sin\theta$$

位移:

$$x = l\theta$$

因此我们有:

$$-mg\sin\theta = ma = ml\theta''$$

$$\theta'' + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

$$\theta'' + \frac{g}{l}\theta = 0 \quad (\text{近似解})$$

微分方程的一般形式为:

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

标准形式为:

$$y^{(n)}_{(x)} = F(x, y_{(x)}, y''_{(x)}, \cdots, y^{(n-1)}_{(x)})$$

Definition 1.2. 若 $y = \varphi(x)$ 在连续区间 I 上连续，直至 n 阶导连续，且成立

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

则称 $y = \varphi(x)$ 是 $F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$ 在区间 I 的一个**解**.

- **特解:** 不含任意常数 C
- **通解:** $y = \varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$ （一族函数）包含 n 个独立的任意常数.

Definition 1.3. 当 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 满足 **Jacobi 行列式**

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial C_1} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial C_2} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi}{\partial C_n} \\ \dfrac{\partial \varphi'}{\partial C_1} & \dfrac{\partial \varphi'}{\partial C_2} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi'}{\partial C_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^n \varphi}{\partial C_1^n} & \dfrac{\partial^n \varphi}{\partial C_2^n} & \cdots & \dfrac{\partial^n \varphi}{\partial C_n^n} \end{vmatrix} \neq 0$$

则称 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是**独立**的.

Example 1.2. 求 $xy = \ln y + C, C \in \mathbb{R}$ 满足的一阶 ODE.

Solution. 求导 $(\dfrac{d}{dx})$:

$$y + xy' = \frac{y'}{y}$$

□

Example 1.3. 求 $x^2 + y^2 = 2Cx$ 满足的一阶 ODE.

Solution. 求导 $(\dfrac{d}{dx})$:

$$2x + 2yy' = 2C$$
$$x^2 + y^2 = (2x + 2yy')x$$
$$-\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2y'$$

□

2 一阶 ODE

本章是对一阶线性常微分方程 $y' = f(x, y)$ 求解的探究，我们希望能够用初等函数及其积分来表示解.

2.1 线性 ODE

Definition 2.1. 若 $p(x), q(x) \in C(I)$，则称

$$y' = p(x)\, y + q(x)$$

为区间 I 上的线性 ODE. 特别的，若 $q(x) \equiv 0$，则称

$$y' = p(x)\, y$$

为区间 I 上的线性齐次 ODE.

2.1.1 齐次 ODE

Problem 2.1. 求解齐次线性 ODE:

$$y' = p(x)\, y$$

其中 $p(x) \in C(I)$.

Solution (解法 1)**. 猜测:**

$$y = C\, e^{\int p(x)\, dx}$$

验证:

- $y = 0$ 显然是解.
- $y \neq 0$.

$$\frac{y'}{y} = p(x)$$
$$= (\ln |y|)'$$

$$\Longrightarrow \ln |y| = \int p(x)\, dx + C_1$$
$$\Longrightarrow y = \pm e^{C_1} e^{\int p(x)\, dx}$$

$\therefore y = C\, e^{\int p(x)\, dx}, C \in \mathbb{R}$ 是通解公式.

（解法 2）

$$
\begin{aligned}
& y' - p(x)\, y = 0 \\
\Longrightarrow\ & y'\, e^{-\int p(x)\, dx} - p(x)\, y\, e^{-\int p(x)\, dx} = 0 \\
\Longrightarrow\ & \left(e^{-\int p(x)\, dx} y\right)' = 0 \\
\Longrightarrow\ & e^{-\int p(x)\, dx} y = C \\
\Longrightarrow\ & y = C\, e^{\int p(x)\, dx}
\end{aligned}
$$

□

2.1.2 非齐次 ODE

Problem 2.2. 求解非齐次线性 ODE:

$$
y' = p(x)\, y + q(x)
$$

其中 $p(x), q(x) \in C(I)$.

Solution.

$$
\begin{aligned}
& \left(y\, e^{-\int p(x)\, dx}\right)' = q(x)\, e^{-\int p(x)\, dx} \\
\Longrightarrow\ & y\, e^{-\int p(x)\, dx} = \int q(x)\, e^{-\int p(x)\, dx}\, dx + C \quad \forall C \in \mathbb{R} \\
\Longrightarrow\ & y = e^{\int p(x)\, dx} \left(\int q(x)\, e^{-\int p(x)\, dx}\, dx + C \right)
\end{aligned}
$$

□

Lemma 2.1. 线性 *ODE*

$$
y' = p(x)\, y + q(x)
$$

的通解为

$$
y = e^{\int p(x)\, dx} \left(\int q(x)\, e^{-\int p(x)\, dx}\, dx + C \right)
$$

其中 $C \in \mathbb{R}$.

若有初值条件 $y(x_0) = y_0$，则有唯一解

$$
y = e^{\int_{x_0}^{x} p(t)\, dt} \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} q(t)\, e^{-\int_{x_0}^{t} p(s)\, ds}\, dt \right)
$$

Example 2.1.

$$
\begin{cases}
y'(t) = 0.005 - \dfrac{y(t)}{900} \\
y(0) = 0
\end{cases}
$$

Solution.

$$\begin{aligned} y &= e^{-\dfrac{t}{900}}\left[18+0.005\times 900\left(e^{\frac{t}{900}}-1\right)\right] \\ &= 4.5+13.5\,e^{-\dfrac{t}{900}} \end{aligned}$$

□

2.1.3 性质

线性齐次 ODE

1. 解 $\equiv 0$ 或恒不为零.
2. $p \in C(I) \implies$ 解在 I 上存在.
3. $\{$解$\}$ 构成一维线性空间.

线性非齐次 ODE

1. $\begin{cases} y' = p(x)\,y + q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 存在唯一解.
2. $p, q \in C(I) \implies$ 解在 I 上存在.
3. 非齐次 ODE 通解 = 齐次 ODE 通解 + 特解.
4. (叠加原理) $\begin{cases} y_1' = p(x)\,y_1 + q_1(x) \\ y_2' = p(x)\,y_2 + q_2(x) \end{cases} \implies c_1y_1 + c_2y_2$ 是 $y' = p(x)\,y + (c_1q_1(x) + c_2q_2(x))$ 的解.

Example 2.2. 已知 $f(x) \in C'(I)$，求解积分方程

$$2\int_0^x (x+1-t)f'(t)\,dt = x^2 - 1 + f(x)$$

Solution. 令 $x = 0 \implies f(0) = 1$，因此是 Cauchy 问题.

两边求导 $(\dfrac{d}{dx})$:

$$\begin{aligned} 2\int_0^x f'(t)\,dt + 2f'(x) &= 2x + f'(x) \\ 2f(x) - 2 + f'(x) &= 2x \\ f'(x) &= -2f(x) + 2x + 2 \\ \implies f(x) &= x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2x} \end{aligned}$$

□

2.2 非线性 ODE

2.2.1 变量分离方程

Definition 2.2. 若 ODE 可写成

$$y' = f(x)\,g(y)$$

则称其为**变量分离方程**.

Problem 2.3. 求解变量分离方程:

$$y' = f(x)\,g(y)$$

其中 $f(x) \in C(I), g(y) \in C(J)$.

Solution.

- 若 $g(y^*) \equiv 0$，则 $y = y^*$ 是解.
- 若 $g(y) \neq 0$，则

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx \\
\implies &\left(\int \frac{dy}{g(y)}\right)' = f(x) \\
\implies &\left(\int \frac{dy}{g(y)}\right) = \int f(x)\,dx + C \quad \forall C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

□

Example 2.3 (人口增长 Logistic 模型)**.**

$$\begin{cases} p' = (a - bp)\,p \\ p(0) = p_0 \end{cases}$$

Solution.

- $(a - bp)\,p = 0 \implies p = 0,\ p = \dfrac{a}{b}$
- $p \neq 0,\ \dfrac{a}{b}$

$$\begin{aligned}
&\frac{p'}{(a-bp)\,p} = 1 \\
\implies &\int \frac{dp}{(a-bp)\,p} = \int dt + C \quad \forall C \in \mathbb{R} \\
\implies &\ln\left|\frac{p}{a-bp}\right| = at + C_1 \\
\implies &\frac{p}{a-bp} = Ce^{at} \\
\implies &p = \frac{aCe^{at}}{1 + bCe^{at}}
\end{aligned}$$

由初值条件 $p(0)=p_0$ 可得:

$$\frac{1}{C}=e^{at_0}\left(\frac{a}{p_0}-b\right)$$

$$\Longrightarrow p=\frac{a}{(\frac{a}{p_0}-b)e^{-a(t-t_0)}+b}$$

□

Example 2.4.

$$\begin{cases} yy'+(1+y^2)\sin x=0 \\ y(0)=1 \end{cases}$$

Solution.

$$\begin{aligned}
&\frac{yy'}{1+y^2}=-\sin x \\
\Longrightarrow &\int\frac{y\,dy}{1+y^2}=\cos x+C_1 \\
\Longrightarrow &\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=\cos x+C_1 \\
\Longrightarrow &1+y^2=e^{2\cos x+C_2}=C\,e^{2\cos x} \\
&C=2e^{-2} \\
\Longrightarrow &1+y^2=2e^{-4\sin^2\frac{x}{2}} \\
\Longrightarrow &y=\sqrt{2e^{-4\sin^2\frac{x}{2}}-1}
\end{aligned}$$

对于解存在区间我们考虑边界点 x^*:

$$\begin{aligned}
&2e^{-4\sin^2\frac{x^*}{2}}-1=0 \\
\Longrightarrow &4\sin^2\frac{x^*}{2}=\ln 2 \\
\Longrightarrow &x^*=\pm 2\arcsin\frac{\sqrt{\ln 2}}{2}
\end{aligned}$$

注意到 $y(x^*)=0$ 有定义，但是 $y'(x^*)=\infty$. 因此解的存在区间为

$$(-2\arcsin\frac{\sqrt{\ln 2}}{2}, 2\arcsin\frac{\sqrt{\ln 2}}{2})$$

□

事实上，线性 ODE 与非线性 ODE 有如下差别

线性 ODE	非线性 ODE
Cauchy 问题 $\Longrightarrow$ 存在唯一解	不一定
系数 $\in C(I)$ $\Longrightarrow$ 解在 I 上存在	不一定
不同初值，解存在区间一样	不一定

Example 2.5. 证明 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{3}{2} y^{\frac{1}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

有无穷多解.

Solution. $y(x) \equiv 0 \quad x \in \mathbb{R}$
$y \neq 0$

$$\begin{aligned} &\frac{2}{3} \cdot \frac{dy}{y^{\frac{1}{3}}} = dx \\ \Longrightarrow\ & y^{\frac{2}{3}} = x + C \\ \Longrightarrow\ & y = \pm(x+C)^{\frac{3}{2}} \quad x \in (-C, +\infty),\ C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

□

2.2.2 齐次方程

这里的「齐次」不同于前面提到的线性齐次 ODE.

Definition 2.3. 若 $\forall \lambda \neq 0$，成立

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y)$$

则称 $f(x,y)$ 为 k 次齐次函数.

下面要求 $f(x,y)$ 为 0 次齐次函数.
取 $\lambda = \dfrac{1}{x}$，则有

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) \triangleq g\left(\frac{y}{x}\right)$$

令 $u = \dfrac{y}{x} \implies y = ux$，则

$$\begin{aligned} y' =& u + xu' = g(u) \\ \Longrightarrow u' =& \frac{g(u) - u}{x} \end{aligned}$$

转化为变量分离方程.

Example 2.6. 求解 ODE:

$$y' = \frac{x+y}{x-y}$$

Solution. 令 $u = \dfrac{y}{x} \implies y = ux$，则

$$\begin{aligned} y' =& u + xu' = \frac{1+u}{1-u} \\ \Longrightarrow u' =& \frac{1+u}{x(1-u)} - \frac{u}{x} = \frac{1+u^2}{x(1-u)} \end{aligned}$$

变量分离:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1-u}{1+u^2}\,du = \frac{dx}{x}\\
\Longrightarrow\ &\int \frac{1-u}{1+u^2}\,du = \int \frac{dx}{x} + C\\
\Longrightarrow\ &\arctan u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln|x| + C\\
\Longrightarrow\ &\sqrt{x^2+y^2} = Ce^{\arctan\frac{y}{x}}
\end{aligned}
$$

□

Example 2.7. 求解 ODE:

$$
y' = \frac{x+y+1}{x-y+2}
$$

Solution. 转换的思想，希望找到 ξ, η 使得

$$
\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\xi+\eta}{\xi-\eta}
$$

$$
\begin{cases} \xi = x+\alpha \\ \eta = y+\beta \end{cases} \quad (\text{平移})
$$

$$
\Longrightarrow\ \alpha = \frac{3}{2}, \beta = -\frac{1}{2}
$$

□

2.2.3 伯努利方程

Problem 2.4. 求解伯努利方程:

$$
y' = p(x)\,y + q(x)\,y^{\alpha}
$$

其中 $p(x), q(x) \in C(I), \alpha \neq 0, 1$.

Solution.

$$
y'\,y^{-\alpha} = p(x)\,y^{1-\alpha} + q(x)
$$

令 $z = y^{1-\alpha}$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow\ z' &= (1-\alpha)\,y^{-\alpha}\,y'\\
&= (1-\alpha)p(x)\,z + (1-\alpha)q(x)
\end{aligned}
$$

转化为线性方程.

特解: $\alpha > 0$, $y \equiv 0$.(可能舍去) □

2.2.4 Ricatti 方程

Problem 2.5.

$$y' + p(x)\,y + q(x)\,y^2 = k(x)$$

已知有解 $y = y_1(x)$，求通解.

Solution. 令 $u = y - y_1$

$$u' + [p(x) + 2q(x)\,y_1]\,u + q(x)\,u^2 = 0$$

为伯努利方程. □

Example 2.8. 求解 ODE:

$$y' + y^2 = \frac{6}{x^2}$$

Solution. 猜测有解 $y = \dfrac{c}{x}$.

$$-\frac{c}{x^2} + \frac{c^2}{x^2} = \frac{6}{x^2} \implies c^2 - c - 6 = 0$$

解得 $c = -2, 3$，取 $y_1 = \dfrac{3}{x}$. 令 $u = y - \dfrac{3}{x}$:

$$\begin{aligned} u' - \frac{3}{x^2} + u^2 + \frac{6}{x}u + \frac{9}{x^2} &= \frac{6}{x^2} \\ \implies u' + \frac{6}{x}u + u^2 &= 0 \end{aligned}$$

$u \equiv 0$ 是解. 下面 $u \neq 0$，令 $z = u^{-1}$:

$$\begin{aligned} z' &= \frac{6}{x}z - 1 \\ \implies z &= C\,x^6 + \frac{1}{5}x \\ \implies u &= \frac{1}{C\,x^6 + \frac{1}{5}x} \\ \implies y &= \frac{3C\,x^5 + \frac{8}{5}}{x(C\,x^5 + \frac{1}{5})} \end{aligned}$$

□

事实上，对于

$$y' + y^2 = b\,x^m \quad x \neq 0, y \neq 0$$

在 $m = 0, -2, \dfrac{-4k}{2k+1}, \dfrac{-4k}{2k-1} (k \in \mathbb{N})$ 时可变成变量分离方程.

2.2.5 全微分方程

又称为**恰当方程**.

Definition 2.4 (全微分)**.** 当 $f(x, y) \in C'(\Omega)$:

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy$$

Definition 2.5 (格林公式 (曲线积分)). 记闭合曲线 L 所围成的区域为 Ω，则有:

$$\oint_L M\,dx + N\,dy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Definition 2.6 (全微分方程). 若 $\exists F(x,y)$ 使得

$$dF(x,y) = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$$

则称 $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ 为**全微分方程**. 其中 $F(x,y)$ 为原函数.

注意到:

$$\begin{cases} M = F_x \implies M_y = (F_x)_y \\ N = F_y \implies N_x = (F_y)_x \end{cases}$$

Theorem 2.2. 设 $M(x,y), N(x,y) \in C'(\Omega)$，则

$$M\,dx + N\,dy = 0$$

是恰当方程的充分必要条件为

$$M_y = N_x$$

Solution.

$$\begin{aligned} & M\,dx + N\,dy = 0 \\ \implies & M_y = N_x \\ \implies & \exists F(x,y)\; s.t. \begin{cases} F_x = M \\ F_y = N \end{cases} \\ \implies & M\,dx + N\,dy = 0 \end{aligned}$$

□

Example 2.9. 求解 ODE:

$$(3x^2y + 8xy^2)\,dx + (x^3 + 8x^2y + 12y^2)\,dy = 0$$

Solution. (Solution 1) 注意到: $M_y = 3x^2 + 16xy = N_x$ 为全微分方程.

$$\begin{aligned} & F(x,y) = \int M\,dx + f(y) = x^3y + 4x^2y^2 + f(y) \\ \implies & F_y = x^3 + 8x^2y + f'(y) = N \\ \implies & f'(y) = 12y^2 \\ \implies & f(y) = 4y^3 \\ \implies & F(x,y) = x^3y + 4x^2y^2 + 4y^3 \end{aligned}$$

因此通解为:

$$x^3y+4x^2y^2+4y^3=C$$

(Solution 2) 找 $F\ s.t.$

$$\begin{cases} F_x=M=3x^2y+8xy^2 \\ F_y=N \end{cases}$$

我们固定 y，原式为关于 x 的 ODE.

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int (3x^2y+8xy^2)\,dx+C \\ &= x^3y+4x^2y^2+C \end{aligned}$$

我们固定了 y，因此 C 与 y 有关，记为 $C(y)$.

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow F_y=x^3+8x^2y+C'(y)=x^3+8x^2y+12y^2 \\ &\Longrightarrow C(y)=4y^3 \\ &\Longrightarrow F(x,y)=x^3y+4x^2y^2+4y^3 \end{aligned}$$

(Solution 3) 凑！注意到原式可写为:

$$\begin{aligned} &(3x^2y\,dx+x^3\,dy)+(8xy^2\,dx+8x^2y\,dy)+(12y^2\,dy)=0 \\ \Longrightarrow\ & d(x^3y)+d(4x^2y^2)+d(4y^3)=0 \\ \Longrightarrow\ & d(x^3y+4x^2y^2+4y^3)=0 \\ \Longrightarrow\ & x^3y+4x^2y^2+4y^3=C \end{aligned}$$

□

那如果 $M\,dx+N\,dy=0$ 但 $M_y\neq N_x$ 呢？我们希望找到**积分因子** $\mu\neq 0$ 使得

$$\mu M\,dx+\mu N\,dy=0$$

为全微分方程，即

$$(\mu M)_y=(\mu N)_x$$

我们考虑一些特殊的 μ.

- $\mu=\mu(x)$

$$\begin{aligned} &(\mu M)_y=(\mu N)_x \\ \Longleftrightarrow\ & \mu_y M+\mu M_y=\mu_x N+\mu N_x \\ & \mu_y=0 \\ \Longleftrightarrow\ & \frac{\mu'}{\mu}=\frac{M_y-N_x}{N} \quad \text{仅与}x\text{有关} \\ \Longleftrightarrow\ & \mu(x)=e^{\int \frac{M_y-N_x}{N}\,dx} \end{aligned}$$

- $\mu = \mu(y)$

$$\begin{aligned} & (\mu M)_y = (\mu N)_x \\ \Longleftrightarrow & \mu_y M + \mu M_y = \mu_x N + \mu N_x \\ & \mu_x = 0 \\ \Longleftrightarrow & \frac{\mu'}{\mu} = \frac{N_x - M_y}{M} \quad \text{仅与}y\text{有关} \\ \Longleftrightarrow & \mu(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M}\,dy} \end{aligned}$$

Example 2.10. 求解 ODE:

$$(3x^3 + y)\,dx + (2x^2 y - x)\,dy = 0$$

Solution. 注意到 $M_y = 1, N_x = 4xy - 1$，因此

$$\frac{M_y - N_x}{N} = -\frac{2}{x} \quad \text{仅与}x\text{有关}$$

因此积分因子为:

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{2}{x}\,dx} = x^{-2} \quad (x \neq 0)$$

原方程变为:

$$\begin{aligned} & (3x + \frac{y}{x^2})\,dx + (2y - \frac{1}{x})\,dy = 0 \\ \Longrightarrow & d\left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{y}{x} + y^2\right) = 0 \\ \Longrightarrow & \frac{3}{2}x^2 + \frac{y}{x} + y^2 = C \end{aligned}$$

□

我们只讨论了 $\mu = \mu(x)$ 或 $\mu = \mu(y)$ 的情况，事实上我们希望能够证明:

Theorem 2.3. *对于 $\forall M, N \in C'(\Omega)$ 都存在对应的积分因子 μ.*

Solution. 假设

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

有通解 $F(x,y) = C$，则

$$\begin{aligned} & dF = F_x\,dx + F_y\,dy = 0 \\ \Longrightarrow & \frac{F_x}{M} = \frac{F_y}{N} \triangleq \mu(x,y) \end{aligned}$$

因此积分因子存在. □

Theorem 2.4. *设 $M\,dx + N\,dy = 0$ 有积分因子 $\mu \neq 0$，则 $\varphi(F(x,y))\mu(x,y)$ 也是积分因子.*

Solution.

$$\begin{aligned} & \mu(M\,dx + N\,dy) = d(F(x,y)) \\ \Longrightarrow & \varphi(F)\mu(M\,dx + N\,dy) = \varphi(F)d(F) = d\left(\int \varphi(F)\,dF\right) \end{aligned}$$

$\square$

Example 2.11. 求解 ODE:

$$\left(\frac{y}{x}+3x^2\right)dx+\left(1+\frac{x^3}{y}\right)dy=0$$

Solution.

$$\begin{aligned}\frac{y}{x}\,dx+dy=0 &\implies \mu_1=x \quad F_1=xy+C\\ 3x^2\,dx+\frac{x^3}{y}\,dy=0 &\implies \mu_2=y \quad F_2=x^3y+C\end{aligned}$$

希望找到公共积分因子:

$$\mu=\mu_1\cdot\varphi(F_1)=\mu_2\cdot\psi(F_2)$$

(猜)

$$\begin{aligned}&x(xy)^\alpha=y(x^3y)^\beta\\ \implies &\begin{cases}1+\alpha=3\beta\\ \alpha=1+\beta\end{cases}\\ \implies &\begin{cases}\alpha=2\\ \beta=1\end{cases}\end{aligned}$$

由此我们得到:

$$\begin{aligned}\mu&=x^3y^2\\ F&=\frac{1}{3}x^3y^3+\frac{1}{2}x^6y^2=C\end{aligned}$$

$\square$

2.3 一般形式

考虑一般形式的一阶 ODE:

$$F(x,y,y')=0$$

令 $p=y'$，则 $F(x,y,p)=0$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的 2D 平面.

希望找到 (s,t) 使得:

$$\begin{cases}x=x(s,t)\\ y=y(s,t)\\ p=p(s,t)\end{cases}$$

找 $F(x,y,p)$ 上的一条曲线，使得:

$$\begin{aligned}&dy=p\,dx\\ \implies &dy(s,t)=p(s,t)\,dx(s,t)\\ \implies &y_s\,ds+y_t\,dt=p(x_s\,ds+x_t\,dt)\\ \implies &\frac{dt}{ds}\end{aligned}$$

下面给出一些特殊情况.

Example 2.12. 求解可化为 $y = f(x, y')$ 的 ODE:

$$x(y')^2 - 2yy' + 9x = 0$$

Solution. 令 $p = y'$，则

$$y = \frac{xp^2 + 9x}{2p} = \frac{xp}{2} + \frac{9x}{2p} \tag{$\star$}$$

代入 $dy = p\,dx$:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{9}{2p} - \frac{p}{2}\right) dx + \left(\frac{x}{2} - \frac{9x}{2p^2}\right) dp = 0 \\
\implies &\left(\frac{1}{2} - \frac{9}{2p^2}\right) (x\,dp - p\,dx) = 0 \\
\implies &p = \pm 3 \quad 或 \quad p = Cx
\end{aligned}$$

代回 $(\star)$ 可得:

$$y = \pm 3x \quad 或 \quad y = \frac{C}{2}x^2 + \frac{9}{2C}$$

$\square$

Example 2.13. 求解可化为 $x = f(y, y')$ 的 ODE:

$$(y')^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0$$

Solution. 令 $p = y'$，则

$$x = \frac{p^3 + 8y^2}{4yp} - \frac{p^2}{4y} + \frac{2y}{p} \tag{$\star$}$$

代入 $dy = p\,dx$:

$$\begin{aligned}
&\left(1 - \frac{p^3}{4y^2}\right) dy + \left(\frac{p^2}{2y} - \frac{2y}{p}\right) dp = 0 \\
\implies &\left(1 - \frac{p^3}{4y^2}\right) \left(dy - \frac{2y}{p}\,dp\right) = 0 \\
\implies &1 = \frac{p^3}{4y^2} \quad 或 \quad dy = \frac{2y}{p}\,dp \\
\implies &p = (2y)^{\frac{2}{3}} \quad 或 \quad p = C\sqrt{y}
\end{aligned}$$

代回 $(\star)$ 可得:

$$y = \frac{4}{27}x^3 \quad 或 \quad y = C(x - C)^2$$

$\square$

2.4 奇解

Definition 2.7. 对于 $F(x,y,y')=0$ 有通解的曲线族 $\Gamma=\{(x,y),\, y=\psi(x), x\in I\}$. 若存在不属于 Γ 的另一个解 $y=\varphi(x), x\in I$，对于任意 $y=\varphi(x)$ 上的点 (x_0,y_0)，均存在一条曲线 $\phi(x)\in\Gamma$ 与 $y=\varphi(x)$ 在 (x_0,y_0) 处相切，则称 $y=\varphi(x)$ 为 $F(x,y,y')=0$ 的**奇解**.

$F(x,y,y')=0$ 的所有解 = 通解族 + 奇解.

Example 2.14 (克莱罗方程)**.** 求解 ODE:

$$y=xy'+f(y')$$

其中，$f''\neq 0$

Solution. 令 $p=y'$，则

$$\begin{aligned}
&y=xp+f(p)\\
\Longrightarrow\ &p\,dx=x\,dp+p\,dx+f'(p)\,dp\\
\Longrightarrow\ &(x+f'(p))\,dp=0\\
\Longrightarrow\ &x+f'(p)=0\quad\text{或}\quad dp=0\\
\Longrightarrow\ &\text{求解}\begin{cases}x=-f'(p)\\ y=-pf'(p)+f(p)\end{cases}\\
&\text{或}\quad y=xC+f(C)
\end{aligned}$$

□

我们希望不求通解，直接求出奇解.

Theorem 2.5. *$F(x,y,p)\in C(G)$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}$, $\dfrac{\partial F}{\partial p}\in C(G)$，若 $y=\varphi(x)$, $x\in I$ 是奇解，则满足:*

$$\begin{cases}F(x,y,p)=0\\ F_p(x,y,p)=0\end{cases}$$

其中 $y=\varphi(x), p=\varphi'(x), x\in I$. 这个方程组称为 p-判别式，消去 p 后得到的方程 $c(x,y)=0$ 称为 p-判别曲线.

Solution. 这里使用了隐函数定理与 Picard 定理进行证明，我们会在后面进一步学习.

反证：设存在某个 $x_0\in I$, $F_p(x_0,\varphi(x_0),\varphi'(x_0))\neq 0$. 根据奇解的定义，$(x_0,\varphi(x_0))$ 附近有不同的解 $\varphi(x),\psi(x)$. 这两个都是 $\begin{cases}y'=f(x,y)\\ y(x_0)=\varphi(x_0)\end{cases}$ 的解.

由 Picard 定理，$\begin{cases}y'=f(x,y)\\ y(x_0)=\varphi(x_0)\end{cases}$ 存在唯一解，矛盾! □

总结一下 对于 $F(x,y,p)=0$，若根据 p-判别式得到的 p-判别曲线 $y=\varphi(x)$ 满足:

$$\begin{cases} F_y(x,\varphi(x),\varphi'(x)) \neq 0 \\ F_{pp}(x,\varphi(x),\varphi'(x)) \neq 0 \quad \forall x \in I \\ F_p(x,\varphi(x),\varphi'(x)) = 0 \end{cases}$$

则 $y=\varphi(x)$ 是奇解.

2.5 可降阶二阶 ODE

对于一般的 $y''=f(x,y,y')$ 的求解，我们会在第 3 章进行更详细的学习，但是有一些特殊的情况，使得我们能够变成将它一阶 ODE 来求解. 下面我们讨论三种特殊的情形.

1. $y''=f(x)$

$$\begin{aligned} y' &= \int f(x)\,dx + C_1 \\ \Longrightarrow y &= \int \left(\int f(x)\,dx + C_1 \right) dx + C_2 \end{aligned}$$

2. $y''=f(x,y')$

$$\begin{aligned} & p = y' \\ \Longrightarrow\ & p' = f(x,p) \\ \Longrightarrow\ & p = \varphi(x,C_1) \\ \Longrightarrow\ & y = \int \varphi(x,C_1)\,dx + C_2 \end{aligned}$$

3. $y''=f(y,y')$

$$\begin{aligned} & p = y' \\ \Longrightarrow\ & p' = \frac{dp}{dy}\cdot p = f(y,p) \\ \Longrightarrow\ & p = p(y,C_1) \\ \Longrightarrow\ & y' = p(y,C_1) \\ \Longrightarrow\ & y = \varphi(x,C_1,C_2) \end{aligned}$$

3 线性常微分方程组（LODEs）

这一章我们讨论如下的 n 阶线性常微分方程组:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + f_1(t) \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + f_2(t) \\ \quad \vdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + f_n(t) \end{cases}$$

转化成向量形式，即为求解:

$$\mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X} + \mathbf{F}(t)$$

在求解之前，我们最先考虑的肯定是解存在吗?

3.1 解的存在性与唯一性

Theorem 3.1.

$$\begin{cases} \mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X} + \mathbf{F}(t) \\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \end{cases}$$

在区间 I 上存在唯一解.

思路 我们证明简单一点的情况:

$$\begin{cases} \mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X} \\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \end{cases} \tag{$\star$}$$

将 $(\star)$ 转化为积分方程:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)\mathbf{X}(s)\, ds$$

应用 Picard 迭代序列:

$$\mathbf{X}_0(t) = \mathbf{X}_0$$
$$\mathbf{X}_{n+1}(t) = \mathbf{X}_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)\mathbf{X}_n(s)\, ds$$

用数学归纳法可得 $\mathbf{X}_k \subset C(I)$, $k = 1, 2, \cdots$ 接着我们证明 $\{\mathbf{X}_n\}$ 是 $C(I)$ 上的 Cauchy 列. 这样 $\{\mathbf{X}_n\}$ 所收敛的极限即为所求解.

准备工作 对于实数列的一致收敛，我们是通过绝对值来度量的. 此时，我们需要一个类似的工具.

Definition 3.1. 对于 $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$，定义 **范数**为:

$$\|\mathbf{X}\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

与此同时，我们也定义矩阵的范数:

$$\|A\| = \sum \sum |a_{ij}|$$

Lemma 3.2. 设 $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}, \mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$，则

$$\|A\mathbf{X}\| \leq \|A\| \cdot \|\mathbf{X}\|$$

$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

Definition 3.2. $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall m, n > N$

$$\|\mathbf{X}_m(t) - \mathbf{X}_n(t)\| < \varepsilon \quad (\forall t \in I)$$

则称 $\{\mathbf{X}_n\}$ 为 $C(I)$ 上的 **Cauchy 列**，$\{\mathbf{X}_n\}$ 一致收敛于 $\mathbf{X}(t)$，记为:

$$\mathbf{X}_n(t) \rightrightarrows \mathbf{X}(t)$$

有了这些我们就可以证明 **Theorem 3.1** 了.

Solution. 构造 Picard 迭代序列:

$$\mathbf{X}_0(t) = \mathbf{X}_0$$
$$\mathbf{X}_{n+1}(t) = \mathbf{X}_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)\mathbf{X}_n(s)\, ds$$

由数学归纳法可知 $\mathbf{X}_n \in C(I), n = 1, 2, \cdots$ 下面我们证明 $\{\mathbf{X}_n\}$ 是 $C(I)$ 上的 Cauchy 列.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{X}_1(t) - \mathbf{X}_0(t)\| &\leq \int_{t_0}^{t} \|A\mathbf{X}_0\|\, ds \\ &\leq \sup \|A(t)\|\|\mathbf{X}_0\|(t-t_0) \\ &\leq D(t-t_0)\end{aligned}$$

其中 $C = \sup \|A(t)\|$, $D = C\|\mathbf{X}_0\|$. 因此我们得到:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{X}_2(t) - \mathbf{X}_1(t)\| &\leq \int_{t_0}^{t} \|A(\mathbf{X}_1(s) - \mathbf{X}_0(s))\|\, ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t} \|A\|\|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0\|\, ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t} CD(s-t_0)\, ds \\ &= \frac{1}{2}CD(t-t_0)^2\end{aligned}$$

以此类推，由数学归纳法，我们得到:

$$\|\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k\| \leq \frac{1}{(k+1)!}C^k D(t-t_0)^{k+1}$$

因此对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，当 $k > h > N$ 时，有:

$$\begin{aligned}\|(\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_h)(t)\| &\leq \sum_{m=h}^{k-1} \|\mathbf{X}_{m+1}(t) - \mathbf{X}_m(t)\| \\ &\leq \sum_{m=h}^{k-1} \frac{D}{C} \cdot \frac{[C(t-t_0)]^{m+1}}{(m+1)!} \\ &\leq \frac{D}{C}\varepsilon\end{aligned}$$

即一致收敛. 设 $\mathbf{X}(t)=\lim_{n\to\infty}\mathbf{X}_n(t)$，则 $\mathbf{X}(t)$ 即为积分方程的解. 由微积分基本定理可知 $\mathbf{X}(t)$ 也是原微分方程的解，**存在性**得证.

下面证明**唯一性**，假设 $\mathbf{X}_1(t)$ 和 $\mathbf{X}_2(t)$ 都是微分方程的解. 则

$$\begin{cases}(\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2)'=A(t)(\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2)\\ (\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2)(t_0)=0\end{cases}$$

因此

$$\|\mathbf{X}_1(t)-\mathbf{X}_2(t)\|\le\int_{t_0}^{t}C\|\mathbf{X}_1(s)-\mathbf{X}_2(s)\|\,ds$$

由 Gronwall 不等式可知 $\|\mathbf{X}_1(t)-\mathbf{X}_2(t)\|=0$，即 $\mathbf{X}_1=\mathbf{X}_2$，矛盾！**唯一性**得证. □

3.2 解的形式

先考虑 n 阶齐次 LODEs:

$$\mathbf{X}'=A(t)\mathbf{X} \tag{$\star$}$$

容易发现 $\{(\star)$ 的解$\mathbf{X}(t)\}$ 是一个线性空间. 自然地，我们猜测这个线性空间是 n 维的，那么只需找到 n 个解形成极大线性无关组

$$\{\mathbf{X}_1(t),\mathbf{X}_2(t),\cdots,\mathbf{X}_n(t)\}$$

即可得到齐次方程的通解:

$$C_1\mathbf{X}_1(t)+C_2\mathbf{X}_2(t)+\cdots+C_n\mathbf{X}_n(t)$$

考虑

$$\begin{cases}\mathbf{X}'=A(t)\mathbf{X}\\ \mathbf{X}(t_0)=e_1=(1,0,\cdots,0)^T\end{cases}\longrightarrow\mathbf{X}_1(t)$$

$$\begin{cases}\mathbf{X}'=A(t)\mathbf{X}\\ \mathbf{X}(t_0)=e_2=(0,1,\cdots,0)^T\end{cases}\longrightarrow\mathbf{X}_2(t)$$

$$\vdots$$

$$\begin{cases}\mathbf{X}'=A(t)\mathbf{X}\\ \mathbf{X}(t_0)=e_n=(0,0,\cdots,1)^T\end{cases}\longrightarrow\mathbf{X}_n(t)$$

这样 $\{\mathbf{X}_1(t),\mathbf{X}_2(t),\cdots,\mathbf{X}_n(t)\}$ 是否就是极大线性无关组呢?

Definition 3.3. 对于 $\mathbf{X}_1(t),\mathbf{X}_2(t),\cdots,\mathbf{X}_n(t)$，若存在不全为 0 的常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 使得

$$c_1\mathbf{X}_1(t)+c_2\mathbf{X}_2(t)+\cdots+c_n\mathbf{X}_n(t)=0\quad(\forall t\in I)$$

则称 $\mathbf{X}_1(t),\mathbf{X}_2(t),\cdots,\mathbf{X}_n(t)$ 线性相关，否则称线性无关.

引入**朗斯基行列式**

$$W(t)=\det(\mathbf{X}_1(t),\mathbf{X}_2(t),\cdots,\mathbf{X}_n(t))$$

Lemma 3.3. $\mathbf{X}_1(t), \mathbf{X}_2(t), \cdots, \mathbf{X}_n(t)$ 是 $(\star)$ 的 n 个解，则 $\mathbf{X}_1(t), \mathbf{X}_2(t), \cdots, \mathbf{X}_n(t)$ 线性无关的充分必要条件为 $W(t) \neq 0$，即朗斯基行列式恒不为零.

Solution. (Sufficiency)

$$c_1\mathbf{X}_1(t) + c_2\mathbf{X}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{X}_n(t) = 0$$

则

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1(t) & \mathbf{X}_2(t) & \cdots & \mathbf{X}_n(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = 0$$

因为 $W(t) \neq 0$，所以系数行列式非零，因此 $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$，即 $\mathbf{X}_1(t), \mathbf{X}_2(t), \cdots, \mathbf{X}_n(t)$ 线性无关.

(Necessity) 用逆否命题来进行证明.

$$\exists t_0,\, W(t_0) = 0 \implies \mathbf{X}_1(t), \mathbf{X}_2(t), \cdots, \mathbf{X}_n(t)\text{ 线性相关}$$

在 $t = t_0$ 时，

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1(t_0) & \mathbf{X}_2(t_0) & \cdots & \mathbf{X}_n(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = 0W(t_0) = 0$$

因此存在非零解 $\mathbf{c}$，即

$$c_1\mathbf{X}_1(t_0) + c_2\mathbf{X}_2(t_0) + \cdots + c_n\mathbf{X}_n(t_0) = 0$$

设 $\mathbf{Y}(t) = c_1\mathbf{X}_1(t) + c_2\mathbf{X}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{X}_n(t)$，则

$$\begin{cases} \mathbf{Y}' = A(t)\mathbf{Y} \\ \mathbf{Y}(t_0) = 0 \end{cases}$$

由 **Theorem 3.1** 可知 $\mathbf{Y}(t) \equiv 0$. □

Lemma 3.4 (Liouville 公式). 设 $\mathbf{X}_1(t), \mathbf{X}_2(t), \cdots, \mathbf{X}_n(t)$ 是 *LODEs* 的 n 个解，则朗斯基行列式满足:

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)\, ds}$$

其中 $\operatorname{tr} A(t)$ 为矩阵 $A(t)$ 的迹.

Solution. 目标：证明 $W'(t) = \operatorname{tr} A(t) \cdot W(t)$. 令 $\mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{bmatrix}$，则

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_{11} & x'_{12} & \cdots & x'_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x'_{n1} & x'_{n2} & \cdots & x'_{nn} \end{bmatrix}$$

而 $\mathbf{X}_1' = A\mathbf{X}_1$，因此：

$$x_{1k}' = \sum_{j=1}^n a_{1j} x_{jk}$$

$$\Longrightarrow x_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{jk}$$

得到：

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}W(t) &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^n a_{1j}x_{jn} \\ x_{21} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}x_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^n a_{nj}x_{jn} \end{bmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^n a_{1j} \begin{bmatrix} x_{j1} & \cdots & x_{jn} \\ & & \\ & & \end{bmatrix} + \cdots + \sum_{j=1}^n a_{nj} \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ x_{j1} & \cdots & x_{jn} \end{bmatrix} \\
&= a_{11} \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ & & \\ & & \end{bmatrix} + \cdots + a_{nn} \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \\
&= \operatorname{tr} A(t) \cdot W(t)
\end{aligned}$$

□

回到开头的问题，我们考虑：

$$\begin{cases} \mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X} \\ \mathbf{X}(t_0) = e_1 = (1, 0, \cdots, 0)^T \end{cases} \longrightarrow \mathbf{X}_1(t)$$

$$\begin{cases} \mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X} \\ \mathbf{X}(t_0) = e_2 = (0, 1, \cdots, 0)^T \end{cases} \longrightarrow \mathbf{X}_2(t)$$

$$\vdots$$

$$\begin{cases} \mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X} \\ \mathbf{X}(t_0) = e_n = (0, 0, \cdots, 1)^T \end{cases} \longrightarrow \mathbf{X}_n(t)$$

对于所有满足 $\begin{cases} \mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X} \\ \mathbf{X}(t_0) \in \mathbb{R}^n \end{cases}$ 的解 $\mathbf{X}(t)$，$\exists \mathbf{X}(t_0) = c_1e_1 + c_2e_2 + \cdots + c_ne_n$. 令 $\mathbf{Y}(t) = c_1\mathbf{X}_1(t) + c_2\mathbf{X}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{X}_n(t)$ ，我们得到：

$$\begin{cases} (\mathbf{X} - \mathbf{Y})' = A(t)(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \\ (\mathbf{X} - \mathbf{Y})(t_0) = 0 \end{cases}$$

由 **Theorem 3.1** 可知 $\mathbf{X}(t) \equiv \mathbf{Y}(t)$，因此 $\{\mathbf{X}_1(t), \mathbf{X}_2(t), \cdots, \mathbf{X}_n(t)\}$ 构成了齐次方程的一个极大线

性无关组，齐次方程的通解为:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(t) &= \begin{bmatrix}\mathbf{X}_1(t) & \mathbf{X}_2(t) & \cdots & \mathbf{X}_n(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1\\C_2\\\vdots\\C_n\end{bmatrix}\\ &= \Phi(t)\mathbf{C}\end{aligned}$$

其中 $\Phi(t)$ 称为**基解矩阵**.

Corollary 3.5. *若 LODEs 有基解矩阵 $\Phi(t)$，则对所有的可逆的 $\mathbf{C}$，ΦC 也是基解矩阵.*

对于一般的 LODEs:

$$\mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X} + \mathbf{B}(t)$$

设解为 $\mathbf{X}(t) = \Phi\mathbf{U}(t)$，则

$$\begin{aligned}&\Phi\mathbf{U}' + \Phi'\mathbf{U} = A(t)\Phi\mathbf{U} + \mathbf{B}(t)\\ \Longrightarrow\ &\Phi\mathbf{U}' = \mathbf{B}(t)\\ \Longrightarrow\ &\mathbf{U}' = \Phi^{-1}\mathbf{B}(t)\\ \Longrightarrow\ &\mathbf{U} = \int \Phi^{-1}\mathbf{B}(t)\,dt + \mathbf{C}\end{aligned}$$

那现在的问题是，如何求出基解矩阵 $\Phi(t)$?

3.3 求解方法

3.3.1 分析角度

对于 ODE，由 $y' = p\,y$ 可得 $y = c\cdot e^{\int p\,dt}$；但是对于 LODEs $\mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X}$，如果直接套用指数函数 $\mathbf{X} = e^{\int A(t)\,dt}\mathbf{C}$，则会遇到指数为矩阵的情况. 我们需要对这个矩阵指数进行定义.

我们知道

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

因此我们定义:

$$e^{\mathbf{D}(t)} = E + \mathbf{D}(t) + \frac{\mathbf{D}^2(t)}{2!} + \frac{\mathbf{D}^3(t)}{3!} + \cdots + \frac{\mathbf{D}^n(t)}{n!} + \cdots$$

因为 $\sup\|\mathbf{D}(t)\|$ 存在，所以该级数一致收敛，因此定义成立.

Theorem 3.6. *若 $A(t)$ 满足:*

$$\mathbf{A}(t)\int_{t_0}^{t}\mathbf{A}(s)\,ds = \int_{t_0}^{t}\mathbf{A}(s)\,ds\cdot\mathbf{A}(t)$$

则 LODEs $\begin{cases}\mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X}\\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0\end{cases}$ *的解为:*

$$\mathbf{X}(t) = e^{\int_{t_0}^{t}A(s)\,ds}\mathbf{X}_0$$

Lemma 3.7. 若 $AB = BA$，则

$$e^{At+Bt} = e^{At} \cdot e^{Bt}$$

Solution.

$$\begin{aligned}
e^{At} \cdot e^{Bt} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(Bt)^m}{m!}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^i B^j}{i! \cdot j!} t^{i+j} \quad (\text{考虑二次展开，} k = i + j) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{k!} \cdot \frac{k! A^i B^{k-i}}{i!(k-i)!} t^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^k}{k!} t^k \quad (\text{这里用了} AB = BA) \\
&= e^{(A+B)t}
\end{aligned}$$

□

Example 3.1. 求解 ODE:

$$\begin{cases} \mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix} \\ \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Solution. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，$D = \begin{pmatrix} 2t & t \\ 0 & 2t \end{pmatrix} = At$，$AD = DA$. 所以

$$\Phi = e^{At}$$

因为 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2E + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 因此

$$\begin{aligned}
\Phi &= \exp\left(2Et + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t\right) \\
&= e^{2Et} \cdot \exp\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{2Et} &= E + 2Et + \frac{(2Et)^2}{2!} + \cdots \\
&= E\left(1 + 2t + \cdots + \frac{(2t)^n}{n!}\right) \\
&= e^{2t} E
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\exp\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}t\right) &= E+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}t+\frac{1}{2!}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}^2 t^2+\cdots\\
&= E+\begin{pmatrix}0 & t\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow\ \Phi=e^{2t}\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}
$$

□

Claim 3.8.

$$
\exp\left[\begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}t\right]=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t}\end{pmatrix}
$$

$$
\exp\left[\begin{pmatrix}0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}t\right]=\begin{pmatrix}1 & t & \cdots & \frac{t^m}{m!}\\ 0 & 1 & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & t\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}
$$

Corollary 3.9. *当* $A=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{bmatrix}$ *是 Jordan 型矩阵时，LODEs* $\begin{cases}\mathbf{X}'=A\mathbf{X}\\ \mathbf{X}(t_0)=\mathbf{X}_0\end{cases}$ *的解能算出.*

对任意的 A，对其进行 Jordan 分解 $A=PJP^{-1}$，则

$$
\begin{aligned}
e^A &= E+A+\frac{A^2}{2!}+\cdots+\frac{A^m}{m!}+\cdots\\
&= E+PJP^{-1}+\frac{(PJP^{-1})^2}{2!}+\cdots+\frac{(PJP^{-1})^m}{m!}+\cdots\\
&= P\left(E+J+\frac{J^2}{2!}+\cdots+\frac{J^m}{m!}+\cdots\right)P^{-1}\\
&= Pe^JP^{-1}
\end{aligned}
$$

所以

$$
e^{At}=Pe^{Jt}P^{-1}
$$

由此可得

$$
e^{At}P=Pe^{Jt}
$$

也是基解矩阵.

3.3.2 一重根

接下来我们考虑特征值都是一重根情形下的 n 阶 LODEs: 那么系数矩阵的 Jordan 型为

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

记每个特征值对应的特征向量为 $\mathbf{r}_i$，则有

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \cdots & \mathbf{r}_n \end{pmatrix}$$

则基解矩阵为:

$$\begin{aligned} \Phi &= Pe^{Jt} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \cdots & \mathbf{r}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 e^{\lambda_1 t} & \mathbf{r}_2 e^{\lambda_2 t} & \cdots & \mathbf{r}_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Theorem 3.10. *矩阵 A 有 n 个不同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，对应的特征向量分别为 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \cdots, \mathbf{r}_n$，则 $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$ 的一个基解矩阵为:*

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 e^{\lambda_1 t} & \mathbf{r}_2 e^{\lambda_2 t} & \cdots & \mathbf{r}_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

通解为:

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \mathbf{r}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{r}_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n \mathbf{r}_n e^{\lambda_n t}$$

可以发现 $\mathbf{r}_i e^{\lambda_i t}$ 是 $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$ 的一个非零解. 因此得到:

$$\lambda_i \mathbf{r}_i e^{\lambda_i t} = A\mathbf{r}_i e^{\lambda_i t}$$

即

$$A\mathbf{r}_i = \lambda_i \mathbf{r}_i$$

，因此 λ_i 是 A 的特征值，$\mathbf{r}_i$ 是对应的特征向量.

Example 3.2. 求解 ODE:

$$\begin{cases} x' = 7y + 4z \\ y' = -2x - 9y - 4z \\ z' = 3x + 9y + 3z \end{cases}$$

Solution. 设 $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，则

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 \\ -2 & -9 & -4 \\ 3 & 9 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{X}$$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 7 & 4 \\ -2 & -9-\lambda & -4 \\ 3 & 9 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3) = 0$$

因此 $\lambda_1 = -1$，$\lambda_2 = -2$，$\lambda_3 = -3$，$\mathbf{r}_1 = (2, -2, 3)^T$，$\mathbf{r}_2 = (1, -2, 3)^T$，$\mathbf{r}_3 = (-1, 1, -1)^T$，所以通解为:

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

□

注意到，我们前面所讨论的都是考虑实数的情况，但是在实际问题中，矩阵的特征值可能是复数. 而我们希望我们的基解矩阵也只包含实数的解. 事实上

Theorem 3.11. *矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \alpha_1 + i\beta_1, \alpha_1 - i\beta_1, \alpha_2 + i\beta_2, \alpha_2 - i\beta_2, \cdots, \alpha_m + i\beta_m, \alpha_m - i\beta_m$，对应特征向量为*

$$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \cdots, \mathbf{r}_n, \mathbf{l}_1, \bar{\mathbf{l}}_1, \mathbf{l}_2, \bar{\mathbf{l}}_2, \cdots, \mathbf{l}_m, \bar{\mathbf{l}}_m$$

则 $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$ 的一个基解矩阵为:

$$\begin{aligned}\Phi(t) = \Big(& \mathbf{r}_1 e^{\lambda_1 t} \quad \mathbf{r}_2 e^{\lambda_2 t} \quad \cdots \quad \mathbf{r}_n e^{\lambda_n t} \\ & \mathrm{Re}(\mathbf{l}_1 e^{(\alpha_1 + i\beta_1)t}) \quad \mathrm{Im}(\mathbf{l}_1 e^{(\alpha_1 + i\beta_1)t}) \quad \cdots \quad \mathrm{Re}(\mathbf{l}_m e^{(\alpha_m + i\beta_m)t}) \quad \mathrm{Im}(\mathbf{l}_m e^{(\alpha_m + i\beta_m)t}) \Big)\end{aligned}$$

Example 3.3. 求解 ODE:

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X}$$

Solution.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 + 1 = 0$$

因此 $\lambda_1 = 1 + i$，$\lambda_2 = 1 - i$，$\mathbf{l}_1 = (1, i)^T$，

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} \cos t\, e^t \\ -\sin t\, e^t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin t\, e^t \\ \cos t\, e^t \end{pmatrix}$$

因此基解矩阵为:

$$\Phi(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

通解为:

$$\mathbf{X} = e^t \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \mathbf{C}$$

□

3.3.3 多重根

这里我们考虑矩阵 A 的特征值为:

$$|A - \lambda E| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s} = 0$$

那么我们能够推出:

$$A = P \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix} P^{-1}$$

于是我们只需要找:

$$\Phi(t) = Pe^{Jt} = P \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & & & \\ & e^{J_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{J_s t} \end{bmatrix}$$

我们完全可以从代数的角度将 P 求解出来. 下面从分析的角度来讨论如何求解.

Example 3.4.

$$\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$$

其中 A 可表示为 $P \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} P^{-1}$，求解 $\Phi(t)$.

Solution. 记 $P = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 \end{bmatrix}$. 并且我们有:

$$\begin{aligned} e^{At}P &= Pe^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e^{2t} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_1 t + \mathbf{r}_2 \end{bmatrix} e^{2t} \end{aligned}$$

由基解矩阵的定义，$(\mathbf{r}_1 t + \mathbf{r}_2)e^{2t}$ 为 $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$ 的解，即:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 e^{2t} + 2(\mathbf{r}_1 t + \mathbf{r}_2)e^{2t} &= A(\mathbf{r}_1 t + \mathbf{r}_2)e^{2t} \\ \Longrightarrow & \begin{cases} \mathbf{r}_1 + 2\mathbf{r}_2 = A\mathbf{r}_2 \\ 2\mathbf{r}_2 = A\mathbf{r}_1 \end{cases} \\ \Longrightarrow \ (A - 2E)^2\mathbf{r}_2 = 0&, \mathbf{r}_1 = (A - 2E)\mathbf{r}_2 \end{aligned}$$

□

Remark 3.1. $(A-2E)^2\mathbf{l}=0$ 找出 2 个线性无关解 $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2$. 则原方程有两个线性无关解:

$$\mathbf{X}_1 = (\mathbf{l}_1 + (A-2E)\mathbf{l}_1 t)e^{2t}$$
$$\mathbf{X}_2 = (\mathbf{l}_2 + (A-2E)\mathbf{l}_2 t)e^{2t}$$

一般地，当 λ_1 是 A 的 n_1 重特征根，那么我们找

$$(A-\lambda_1 E)^{n_1}\mathbf{l}=0$$

的 n_1 个线性无关解 $\mathbf{l}_1^1, \mathbf{l}_2^1, \cdots, \mathbf{l}_{n_1}^1$，那么原方程有 n_1 个线性无关解:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_1^1 &= \left[\mathbf{l}_1^1 + (A-\lambda_1 E)\mathbf{l}_1^1 t + \cdots + \frac{(A-\lambda_1 E)^{n_s-1}\mathbf{l}_1^1 t^{n_s-1}}{(n_s-1)!}\right]e^{\lambda_1 t} \\ &\vdots \\ \mathbf{X}_{n_1}^1 &= \cdots\end{aligned}$$

其他 λ_i 同理，若为复数则取实部虚部. 最终我们得到 LODEs 的一个基解矩阵. 这个时候我们的基解矩阵是有无穷多个的，那有没有什么特殊的性质呢?

Theorem 3.12. *对所有的基解矩阵 $\Phi(t)$，都有:*

$$e^{At} = \Phi(t)\cdot\Phi^{-1}(0)$$

事实上，我们还有如下结论:

Theorem 3.13. *若 λ 是矩阵 A 的 n 重特征值，则*

$$e^{At} = e^{\lambda t}\left[E + \frac{(A-\lambda E)t}{1!} + \frac{(A-\lambda E)^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{(A-\lambda E)^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!}\right]$$

Example 3.5. 求解 ODE:

$$\begin{cases} x' = y+z \\ y' = x+z \\ z' = x+y \end{cases}$$

Solution. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$（二重根）. λ_1 对应特征向量分别为 $\mathbf{r}_1 = (1,1,1)^T$，λ_2 对应特征向量为 $\mathbf{r}_2 = (1,-1,0)^T$，$\mathbf{r}_3 = (1,0,-1)^T$.

因此基解矩阵为:

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$\mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

事实上，我们还可以用前面学过的的解法. 注意到: $(x+y+z)' = 2(x+y+z)$，因此:

$$x+y+z = c_1 e^{2t}$$

我们将方程组改写为:

$$\begin{cases} x' = c_1 e^{2t} - x \\ y' = c_1 e^{2t} - y \end{cases}$$

其中 $z = c_1 e^{2t} - x - y$ 也就不需要写出来了，而这两个方程就是两个一阶线性方程. 我们可以很快求出:

$$\begin{cases} x = e^{-t}\left(c_2 + \dfrac{c_1}{3} e^{3t}\right) \\ y = e^{-t}\left(c_3 + \dfrac{c_1}{3} e^{3t}\right) \end{cases}$$

这样 z 也就出来了. $\square$

一般地，对于 $\mathbf{X}' = A\mathbf{X} + B(t)$，我们有公式:

$$\mathbf{X} = \Phi(t)\mathbf{C} + \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)B(t)\,dt$$

到那时这样就非常麻烦（算逆矩阵再矩阵乘法再积分），我们后面会学习更简便的方法.

4 线性常微分方程（LODE）

这一部分我们考虑的是如下的方程:

$$y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(t)y' + p_n(t)y = f(t)$$

4.1 解的存在性

我们可以将其转化为如下的矩阵形式:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

那么我们可以写成

$$\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y} + B$$

的形式. 让我们将 A, B 写开:

$$\mathbf{Y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -p_n(t) & -p_{n-1}(t) & -p_{n-2}(t) & \cdots & -p_1(t) \end{pmatrix} \mathbf{Y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

根据前面的内容，我们知道

Theorem 4.1. 当 $p_1(t), p_2(t), \cdots, p_n(t), f(t) \in C(I)$, $t \in I$ 时，方程

$$\begin{cases} \dfrac{d^n y}{dt^n} + p_1(t)\dfrac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}(t)\dfrac{dy}{dt} + p_n(t)y = f(t) \\ y(t_0) = y_0^0,\ y'(t_0) = y_1^0,\ \cdots,\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}^0 \end{cases}$$

在区间 I 上存在唯一解.

同样我们也从齐次方程入手:

Theorem 4.2. 方程

$$\frac{d^n y}{dt^n} + p_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}(t)\frac{dy}{dt} + p_n(t)y = 0$$

的通解为:

$$y(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \cdots + c_n\phi_n(t)$$

其中 $\phi_1(t), \phi_2(t), \cdots, \phi_n(t)$ 是该方程的 n 个线性无关解，被称为该方程的一组基本解组.

对于非齐次方程，我们有如下结论:

Theorem 4.3. 方程

$$\frac{d^n y}{dt^n}+p_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+p_{n-1}(t)\frac{dy}{dt}+p_n(t)y=f(t)$$

的通解为:

$$y(t)=c_1\phi_1(t)+c_2\phi_2(t)+\cdots+c_n\phi_n(t)+y^*(t)$$

其中 $\phi_1(t),\phi_2(t),\cdots,\phi_n(t)$ 是对应齐次方程的基本解组，$y^*(t)$ 是该非齐次方程的一个特解.

那么我们求解 n 阶 LODE 的关键就在于找到这 n 个线性无关解以及一个特解.

对于 $\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_n$ 线性无关解，对应到 LODEs 的:

$$\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_1'\\ \phi_1''\\ \vdots\\ \phi_1^{(n-1)}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\phi_2\\ \phi_2'\\ \phi_2''\\ \vdots\\ \phi_2^{(n-1)}\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\phi_n\\ \phi_n'\\ \phi_n''\\ \vdots\\ \phi_n^{(n-1)}\end{pmatrix}$$

这 n 个解也是线性无关的，即朗斯基行列式

$$W(t)=\begin{vmatrix}\phi_1(t)&\phi_2(t)&\cdots&\phi_n(t)\\ \phi_1'(t)&\phi_2'(t)&\cdots&\phi_n'(t)\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \phi_1^{(n-1)}(t)&\phi_2^{(n-1)}(t)&\cdots&\phi_n^{(n-1)}(t)\end{vmatrix}\tag{$\star$}$$

在区间 I 上恒不为零. 同时也等价于

$$\exists t_0\in I,\ W(t_0)\neq 0$$

我们把 ($\star$) 式也称为该线性方程的朗斯基行列式.

回忆一下前面关于朗斯基行列式的内容，我们有 Liouville 公式，同样在这里也适用:

Lemma 4.4 (Liouville 公式)**.** *设 $W(t)$ 是 n 阶 LODE*

$$y^{(n)}+p_1(t)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(t)y'+p_n(t)y=0$$

的朗斯基行列式，则有:

$$W(t)=W(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t}p_1(\tau)\,d\tau}$$

Remark 4.1. 公式中 $\operatorname{tr}A=-p_1(t)$

4.2 求解方式

我们先考虑求解齐次方程.

4.2.1 齐次方程

我们考虑如下的齐次方程:

$$L_n[y]=y^{(n)}+p_1(t)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(t)y'+p_n(t)y=0$$

其实就是要找基本解组 $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$. 我们从二阶的入手，即解答

Problem 4.1.

$$y'' + by' + cy = 0$$

(1) 将二阶 LODE 转化为二阶 LODEs

Solution. 令 $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$，则有:

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{pmatrix} \mathbf{X}$$

我们计算矩阵的特征值:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -c & -b-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

得到 λ_1, λ_2，最终通解形式为:

$$\mathbf{X} = c_1 \mathbf{r}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{r}_2 e^{\lambda_2 t}$$

其中 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ 分别是 λ_1, λ_2 对应的特征向量. 我们取 $\mathbf{X}$ 的第一个分量即为 y 的通解. □

根据这个求解方法，我们感觉 y 应该长成 $e^{\lambda t}$ 的样子

(2) 猜测 $y = e^{\lambda t}$

Solution. 令 $y = e^{\lambda t}$，代入方程:

$$e^{\lambda t}(\lambda^2 + b\lambda + c) = 0$$

等价于

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

解得

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

(i) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为实数，则

$$y_1 = e^{\lambda_1 t}, y_2 = e^{\lambda_2 t}$$

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} \neq 0$$

所以通解为:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

(ii) $\lambda = \alpha \pm \beta i \, (\beta \neq 0)$，则

$$y_1 = e^{\alpha t} \cos \beta t, \; y_2 = e^{\alpha t} \sin \beta t$$

$$y = e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t)$$

(iii) $\lambda_1 = \lambda_2 = -\dfrac{b}{2}$，则

$$y_1 = e^{\lambda t},\ y_2 = te^{\lambda t}$$

$$y = e^{\lambda t}(c_1 + c_2 t)$$

□

Example 4.1.

$$y'' - 5y' + 4y = 0$$

Solution. 特征方程为:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

解得 $\lambda_1 = 4$，$\lambda_2 = 1$，因此通解为:

$$y = c_1 e^{4t} + c_2 e^t$$

□

Example 4.2.

$$y'' + ay = 0$$

Solution. 特征方程为:

$$\lambda^2 + a = 0$$

(1) $a > 0$，解得 $\lambda = \pm\sqrt{a}i$，因此通解为:

$$y = c_1 \cos\sqrt{a}t + c_2 \sin\sqrt{a}t$$

(2) $a = 0$，解得 $\lambda = 0$，因此通解为:

$$y = c_1 + c_2 t$$

(3) $a < 0$，解得 $\lambda = \pm\sqrt{-a}$，因此通解为:

$$y = c_1 e^{\sqrt{-a}t} + c_2 e^{-\sqrt{-a}t}$$

□

事实上，

Theorem 4.5. *若特征方程为:*

$$(\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s} = 0$$

那么我们有如下基本解组:

$$\begin{matrix} e^{\lambda_1 t}, & te^{\lambda_1 t}, & \cdots, & t^{n_1 - 1}e^{\lambda_1 t}, \\ e^{\lambda_2 t}, & te^{\lambda_2 t}, & \cdots, & t^{n_2 - 1}e^{\lambda_2 t}, \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{\lambda_s t}, & te^{\lambda_s t}, & \cdots, & t^{n_s - 1}e^{\lambda_s t} \end{matrix}$$

下面我们来说明为什么. 我们引入微分算子记号 $Dy=\dfrac{dy}{dx}$，考虑二阶情形:

$$\begin{aligned} &L_2[y]=y''+by'+cy=0\\ &D^2y+bDy+cy=0\\ &(D^2+bD+c)y=0\\ &(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)y=0\\ \Longrightarrow\ &(D-\lambda_2)y=c_1e^{\lambda_1 t}\\ \Longrightarrow\ &y=e^{\lambda_2 t}\left[c_2+c_1\int e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}\,dt\right] \end{aligned}$$

拓展到 n 阶情形（a_i 为实数常数）：

$$\begin{aligned} L_n[y]&=(D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_{n-1}D+a_n)y\\ &=(D-\lambda_1)^{n_1}(D-\lambda_2)^{n_2}\cdots(D-\lambda_s)^{n_s}y\\ &=0 \end{aligned}$$

我们看 $(D-\lambda_1)^{n_1}y=0$.

$$\begin{aligned} \because\quad & e^{-\lambda_1 t}(D-\lambda_1)y=D(e^{-\lambda_1 t}y)\\ \therefore\quad & (D-\lambda_1)y=e^{\lambda_1 t}D(e^{-\lambda_1 t}y)\\ \Longrightarrow\quad & (D-\lambda_1)^2y=e^{\lambda_1 t}D^2(e^{-\lambda_1 t}y) \end{aligned}$$

由数学归纳法可得:

$$(D-\lambda_1)^{n_1}y=e^{\lambda_1 t}D^{n_1}(e^{-\lambda_1 t}y)=0$$

$$\Longrightarrow\ D^{n_1}(e^{-\lambda_1 t}y)=0$$

$$\Longrightarrow\ e^{-\lambda_1 t}y=c_1+c_2t+\cdots+c_{n_1}t^{n_1-1}$$

$$\Longrightarrow\ y=e^{\lambda_1 t}(c_1+c_2t+\cdots+c_{n_1}t^{n_1-1})$$

同理其他 λ_i 也成立. 那么这些解线性无关吗?

我们知道 $1,t,\cdots,t^{n_1-1}$ 线性无关，因此 $e^{\lambda_1 t},te^{\lambda_1 t},\cdots,t^{n_1-1}e^{\lambda_1 t}$ 线性无关. 同理其他 λ_i 也成立. 然后我们要考虑不同 λ_i 之间的线性无关性. 我们通过定义来进行证明.

Problem 4.2. 假设存在 $a_1,a_2,\cdots,a_{n_1},b_1,b_2,\cdots,b_{n_2}$，使得

$$\begin{aligned} &a_1e^{\lambda_1 t}+a_2te^{\lambda_1 t}+\cdots+a_{n_1}t^{n_1-1}e^{\lambda_1 t}\\ &+b_1e^{\lambda_2 t}+b_2te^{\lambda_2 t}+\cdots+b_{n_2}t^{n_2-1}e^{\lambda_2 t}=0 \end{aligned}$$

证明 $a_i=0,b_j=0$

Solution. 我们可以将方程改写为

$$P_{n_1-1}(t)e^{\lambda_1 t}+Q_{n_2-1}(t)e^{\lambda_2 t}=0$$

方程两边 $\times e^{-\lambda_2 t}$，得到

$$P_{n_1-1}(t)e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}+Q_{n_2-1}(t)=0$$

两边对 t 进行 n_2 次求导:

$$P_{n_1-1}^{(n_2)}(t)e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}+\cdots+(\lambda_1-\lambda_2)^{n_2}P_{n_1-1}(t)=0$$

假设 $P_{n_1-1}(t)=c_mt^m+c_{m-1}t^{m-1}+\cdots+c_0\neq 0$ 那么

$$LHS=e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}[(\lambda_1-\lambda_2)^{n_2}c_mt^m+\cdots]=0$$

因此 $(\lambda_1-\lambda_2)^{n_2}c_m=0$，由于 $\lambda_1\neq\lambda_2$，所以 $c_m=0$，矛盾!

所以 $P_{n_1-1}(t)=0$，同理 $Q_{n_2-1}(t)=0$. □

Example 4.3. 求解 ODE:

$$y'''-3y''+4y=0$$

Solution. 特征方程为: $\lambda^3-3\lambda^2+4=0$，解得:

$$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=2\,(\text{二重根})$$

因此通解为:

$$y=c_1e^{-t}+c_2e^{2t}+c_3te^{2t}$$

□

我们刚刚都假定了 λ 为实数，那么如果 λ 为复数呢?

Theorem 4.6. *若特征值为:*

$$\lambda_1,\cdots,\lambda_s,\alpha_1\pm i\beta_1,\cdots,\alpha_l\pm i\beta_l$$

其中对应重数分别为:

$$n_1,\cdots,n_s,m_1,\cdots,m_l$$

则该方程的一组基本解组为:

$$\begin{array}{cccc}
e^{\lambda_1 t}, & te^{\lambda_1 t}, & \cdots, & t^{n_1-1}e^{\lambda_1 t},\\
\vdots & & & \\
e^{\lambda_s t}, & te^{\lambda_s t}, & \cdots, & t^{n_s-1}e^{\lambda_s t},\\
e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & \cdots, & t^{m_1-1}e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t,\\
e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & \cdots, & t^{m_1-1}e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t,\\
\vdots & & & \\
e^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, & te^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, & \cdots, & t^{m_l-1}e^{\alpha_l t}\cos\beta_l t,\\
e^{\alpha_l t}\sin\beta_l t, & te^{\alpha_l t}\sin\beta_l t, & \cdots, & t^{m_l-1}e^{\alpha_l t}\sin\beta_l t
\end{array}$$

Example 4.4. 求解 ODE:

$$y^{(6)}-2y^{(5)}+4y^{(4)}-4y'''+5y''-2y'+2y=0$$

Solution. 特征方程解为:

$$\lambda_1=i\,(\text{二重根}),\ \lambda_2=-i\,(\text{二重根}),\ \lambda_3=1+i,\ \lambda_4=1-i$$

因此基础解组为:

$$\cos t,\, t\cos t,\, \sin t,\, t\sin t,\, e^t\cos t,\, e^t\sin t$$

通解为:

$$y = c_1\cos t + c_2 t\cos t + c_3\sin t + c_4 t\sin t + c_5 e^t\cos t + c_6 e^t\sin t$$

□

4.2.2 非齐次方程

我们考虑非齐次方程:

$$L_n[y] = f(t)$$

可以转换为对应的 LODEs

$$\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y} + B(t)$$

进行求解. 当然我们希望能够直接求解. 二阶情况下:

$$\begin{aligned}
&L_2[y] = y'' + by' + cy = f(t) \\
\Longrightarrow\ &(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)y = f(t) \\
\Longrightarrow\ &(D-\lambda_2)y = e^{\lambda_1 t}\left(c_1 + \int e^{-\lambda_1 t} f(t)\, dt\right) \\
\Longrightarrow\ &y = e^{\lambda_2 t}\left[c_2 + \int e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}\left(c_1 + \int e^{-\lambda_1 t} f(t)\, dt\right) dt\right]
\end{aligned}$$

我们发现通解的形式为: $y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + y_*$，其中的**特解**

$$y_* = e^{\lambda_2 t}\int e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}\left(\int e^{-\lambda_1 t} f(t)\, dt\right) dt$$

求出这个特解 y_* 比较麻烦，但是对于一些特殊的 $f(t)$，我们能够更直接求出特解 y_*.

(1) 当 $f(t) = P_m(t)e^{\alpha t} = (b_m t^m + \cdots + b_0)e^{\alpha t}$，可以采用 **待定系数法**

$$y_* = e^{\lambda_2 t}\int e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}\left(\int P_m(t)e^{(\alpha-\lambda_1)t}\, dt\right) dt$$

(i) 若 $\alpha \neq \lambda_1, \lambda_2$，则能够推得:

$$\begin{aligned}
y_* &= e^{\lambda_2 t}\int e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}\widetilde{P}_m(t)e^{(\alpha-\lambda_1)t}\, dt \\
&= e^{\lambda_2 t}\widetilde{\widetilde{P}}_m(t)e^{(\alpha-\lambda_2)t} \\
&= \widetilde{\widetilde{P}}_m(t)e^{\alpha t}
\end{aligned}$$

于是我们可以设 $y_* = Q_m(t)e^{\alpha t} = (c_m t^m + \cdots + c_0)e^{\alpha t}$ ，代入 $y'' + by' + cy = P_m(t)e^{\alpha t}$，解出 c_i 即可.

(ii) 若 $\alpha = \lambda_1 \neq \lambda_2$. 则能够推得:

$$\begin{aligned}
y_* &= e^{\lambda_2 t} \int e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} \widetilde{P}_m(t) e^{(\alpha-\lambda_1)t}\, dt \\
&= e^{\lambda_2 t} \int e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}\, t\widetilde{P}_m(t)\, dt \\
&= e^{\lambda_2 t} \int e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} \widetilde{P}_{m+1}(t)\, dt \\
&= e^{\lambda_2 t} \widetilde{\widetilde{P}}_{m+1}(t) e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} \\
&= \widetilde{\widetilde{P}}_{m+1}(t) e^{\alpha t} \\
&= t\, Q_m(t) e^{\alpha t} + \widetilde{b}_0 e^{\alpha t}
\end{aligned}$$

于是我们可以设 $y_* = t\, Q_m(t)e^{\alpha t}$，代入 $y'' + by' + cy = P_m(t)e^{\alpha t}$，解出 c_i 即可.

(iii) 若 $\alpha = \lambda_1 = \lambda_2$ 为二重根的情况. 则能够推得:

$$\begin{aligned}
y_* &= e^{\lambda t} \int 1 \cdot \widetilde{P}_{m+1}(t)\, dt \\
&= \widetilde{\widetilde{P}}_{m+2}(t) e^{\alpha t} \\
&= t^2 Q_m(t) e^{\alpha t} + \widetilde{b}_1 t e^{\alpha t} + \widetilde{b}_0 e^{\alpha t}
\end{aligned}$$

于是我们可以设 $y_* = t^2 Q_m(t)e^{\alpha t}$，代入 $y'' + by' + cy = P_m(t)e^{\alpha t}$，解出 c_i 即可.

Example 4.5. 求解 ODE:

$$y'' + 3y' + 2y = 3t + 2$$

Solution. 对应齐次 ODE 的特征方程为:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

解得 $\lambda_1 = -1$，$\lambda_2 = -2$，因此齐次方程通解为:

$$Y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$$

(待定系数法) 设 $y_*(t) = At + B$，带入 LODE:

$$3A + 2(At + B) = 3t + 2$$

解得 $A = \dfrac{3}{2}, B = -\dfrac{5}{4}$，因此特解为:

$$y_* = \frac{3}{2}t - \frac{5}{4}$$

因此通解为:

$$y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + \frac{3}{2}t - \frac{5}{4}$$

□

Theorem 4.7. *若 $f(t) = P_m(t)e^{\alpha t}$，$\alpha$ 是 k 重根. 则可以设 $y_* = t^k Q_m(t)e^{\alpha t}$，其中 $Q_m(t)$ 的 $m+1$ 个系数由待定系数法确定.*

Example 4.6. 求解 ODE:

$$y''' + 9y' = t^2 e^{2t}$$

Solution.

$$\lambda^3 + 9\lambda = 0$$

解得 $\lambda_1 = 0$，$\lambda_2 = \pm 3i$，因此齐次方程通解为:

$$Y = c_1 + c_2 \cos 3t + c_3 \sin 3t$$

由于 $\alpha = 2$ 不是特征值，因此设特解为:

$$y_* = (At^2 + Bt + C)e^{2t}$$

带入 LODE 解得: $A = \dfrac{1}{26}$，$B = -\dfrac{21}{338}$，$C = -\dfrac{285}{8788}$. 因此通解为:

$$y = c_1 + c_2 \cos 3t + c_3 \sin 3t + \left(\frac{1}{26}t^2 - \frac{21}{338}t - \frac{285}{8788} \right) e^{2t}$$

□

(2) 当 $f(t) = P_m(t)e^{\alpha t} \cos \beta t$ 时，我们可以将其复化成

$$L_n[Y] = P_m(t)e^{(\alpha + i\beta)t}$$

解得

$$Y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n + Y_*$$
$$Y_* = t^k Q_m(t) e^{(\alpha + i\beta)t}$$

其中 k 为 $\alpha + i\beta$ 在特征方程中的重数. 然后取实部:

$$y = \mathrm{Re}(Y) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n + y_*$$
$$y_* = t^k e^{\alpha t} \left[\widetilde{Q}_m(t) \cos \beta t - \widetilde{\widetilde{Q}}_m(t) \sin \beta t \right]$$

Theorem 4.8. 若 $f(t) = P_m(t)e^{\alpha t} \cos \beta t$，$\alpha + i\beta$ 是 k 重根. 则可以设

$$y_* = t^k e^{\alpha t} \left[\widetilde{Q}_m(t) \cos \beta t - \widetilde{R}_m(t) \sin \beta t \right]$$

其中 $\widetilde{Q}_m(t), \widetilde{R}_m(t)$ 的 $m + 2$ 个系数由待定系数法确定.

4.2.3 常数变易法

我们考虑二阶情况. 大多数时候，$f(t)$ 并不是多项式与指数函数的乘积，这时我们可以使用 **常数变易法**来求解非齐次方程.

对于方程:

$$y'' + by' + cy = f(t)$$

我们已经知道对应齐次方程的通解为:

$$Y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

其中 c_1, c_2 是常数. 但我们希望将 Y 这条式子变成非齐次方程的解，那我们就需要将这两个常数变成函数，即设:

$$y = u_1(t)y_1 + u_2(t)y_2$$

我们需要确定 $u_1(t), u_2(t)$. 对于一阶导数:

$$y' = u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2'$$

从一项变成了四项，感觉有点多，我们认为要求 $u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0$，因此得到:

$$y' = u_1y_1' + u_2y_2'$$

$$\left\{\begin{array}{lllll} y'' & = u_1'y_1' + u_2'y_2' & +u_1y_1'' & +u_2y_2'' \\ +by' & & +bu_1y_1' & +bu_2y_2' \\ +cy & & +cu_1y_1 & +cu_2y_2 \\ & & \downarrow & \downarrow \\ & & 0 & 0 \end{array}\right\} = f(t)$$

得到方程组: $\begin{cases} u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0 \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' = f(t) \end{cases}$，转换成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

那么我们为什么会想到这样去设定呢? 本质上还是利用了线性方程组 $\mathbf{X}' = A\mathbf{X} + B$，也就是:

$$\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

我们知道线性方程组的求解公式是:

$$\mathbf{X} = \Phi(t)\mathbf{C} + \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)B(t)\,dt$$

其中 $\Phi(t) = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}$. 我们是设 $\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} = \Phi(t)\mathbf{C}$，代入线性方程组算的时候得到了:

$$\Phi(t)\mathbf{C}' = B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

这里的 $\mathbf{C}$ 就是我们之前的 $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$. 因此我们的 $\mathbf{C}$ 就是 $\Phi^{-1}B$ 的积分，而积分中出现的任意常数就给到了齐次方程的通解部分. 所以我们才会有线性方程组的求解公式:

$$\mathbf{X} = \Phi(t)\mathbf{C} + \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)B(t)\,dt$$

Example 4.7. 求解 ODE:

$$y'' + y = f(t)$$

Solution.

$$Y = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

设 $y = u_1(t)\cos t + u_2(t)\sin t$，其中 u_1', u_2' 满足:

$$\begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

解得:

$$u_1' = -f(t)\sin t,\ u_2' = f(t)\cos t$$

即:

$$u_1(t) = c_1 - \int f(t)\sin t\,dt \quad u_2(t) = c_2 + \int f(t)\cos t\,dt$$

因此为:

$$\begin{aligned} y &= c_1\cos t + c_2 \sin t + \int f(s)[\sin t\cos s - \cos t \sin s]\,ds \\ &= c_1 \cos t + c_2 \sin t + \int f(s)\sin(t-s)\,ds \end{aligned}$$

□

我们将这个结论推广到 n 阶情形:

Theorem 4.9. *求解 $L_n[y] = f(t)$. 设对应齐次方程的基本解组为 $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$，则非齐次方程的一组特解为: $y_* = u_1(t)y_1 + u_2(t)y_2 + \cdots + u_n(t)y_n$ 其中 $u_i(t)$ 满足:*

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \vdots \\ u_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{bmatrix}$$

4.3 变系数 LODE

前面所学的都是常系数 LODE，我们接下来研究变系数 LODE 及一些解法.

4.3.1 Eular 方程

Eular 方程是一种特殊的变系数 LODE.

Definition 4.1. 我们称以下形式的方程为 Eular 方程:

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 x\frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x)$$

其中，a_i 为常数，$a_n \neq 0$，$x > 0$.

我们首先看到这个式子:

$$x\frac{dy}{dx} = f(x)$$

我们可以通过变量代换 $x = e^t$，得到:

$$\frac{dy}{dt} = f(e^t)$$

这让我们想到，Eular 方程是否也可以进行同样的变量代换 $x = e^t$.

二阶情况下，Eular 方程为:

$$a_2x^2y'' + a_1xy' + a_0y = f(x)$$

变量代换 $x = e^t$，则:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt} \\
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) \\
&= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}
\end{aligned}$$

代入 Eular 方程，得到:

$$\begin{aligned}
a_2x^2\left(-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}\right) + a_1x \cdot \frac{1}{x}\frac{dy}{dt} + a_0y = f(e^t) \\
\Longrightarrow a_2\frac{d^2y}{dt^2} + (a_1 - a_2)\frac{dy}{dt} + a_0y = f(e^t)
\end{aligned}$$

成功将一个变系数 LODE 转化为一个常系数 LODE. 那么同样，在 n 阶情形下可以转化为:

$$b_n\frac{d^ny}{dt^n} + b_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + b_1\frac{dy}{dt} + b_0y = f(e^t)$$

若为齐次方程（$f = 0$），则特征方程为:

$$b_n\lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0 = 0$$

解得 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$，分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_s$ 重根，则通解为:

$$\begin{aligned}
y &= \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{n_i-1} c_{ij}t^je^{\lambda_it} \\
&= \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{n_i-1} c_{ij}(\ln x)^jx^{\lambda_i}
\end{aligned}$$

我们将 x^λ 代入 Eular 方程，得到:

$$[a_n\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1) + \cdots + a_0]$$

对其展开，得到

$$b_n\frac{d^ny}{dt^n} + b_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + b_1\frac{dy}{dt} + b_0y = f(e^t)$$

的对应系数.

Example 4.8. 求解 ODE:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = 6\ln x - \frac{1}{x}$$

Solution. 令 $x = e^t$，则方程变为:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 6t - e^{-t}$$

齐次方程通解为:

$$\begin{aligned} y &= \int\int (6t - e^{-t})\, dt\, dt \\ &= t^3 - e^{-t} + c_1 t + c_2 \\ &= (\ln x)^3 - \frac{1}{x} + c_1 \ln x + c_2 \end{aligned}$$

□

Example 4.9. 求解 ODE:

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} - 3x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 6x \frac{dy}{dx} - 6y = x^2$$

Solution. 把 $y = x^\lambda$ 代入左边.

$$\begin{aligned} LHS &= x^\lambda[\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) - 3\lambda(\lambda-1) + 6\lambda - 6] \\ &= x^\lambda(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6) \\ &= x^\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) \end{aligned}$$

令 $x = e^t$，因此方程变为:

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 6\frac{d^2y}{dt^2} + 11\frac{dy}{dt} - 6y = e^{2t}$$

且特征方程的解为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$，因此齐次 LODE 通解为:

$$Y = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t}$$

设特解为 $y_* = Ate^{2t}$，代入 LODE 解得 $A = -1$. 因此通解为:

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t} - te^{2t} = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 - x^2 \ln x$$

□

4.3.2 降阶法

对于高阶变系数 LODE，我们可以通过已知的解来降低阶数，从而进行求解.

对于二阶齐次方程 $y''+p(x)y'+q(x)y = 0$，我们已知一个非零解 $y_1(x)$，则可以设 $y = u(x)y_1(x)$，代入方程，得到:

$$\begin{aligned} y_1''u + 2y_1'u' + y_1u'' \\ +py_1'u + py_1u' \\ +qy_1u = 0 \end{aligned}$$

从而有:

$$y_1u'' + (2y_1' + py_1)u' = 0$$

设 $z = u'$，则:

$$y_1z' + (2y_1' + py_1)z = 0$$

化为一阶方程，实现了降阶. 解得:

$$z = c_1 \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)\, dx} = u'$$

$$u = c_2 + c_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)\, dx}\, dx$$

$$y = c_2 y_1 + c_1 y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)\, dx}\, dx$$

同理，降阶法对于非齐次方程也成立.

Example 4.10. 已知 ODE:

$$xy''' + 3y'' - xy' - y = 0$$

有解 $y_1 = \dfrac{1}{x}$，求其通解.

Solution. 令 $y = \dfrac{u(x)}{x}$，则:

$$u''' - u' = 0$$

特征方程为: $\lambda^3 - \lambda = 0$，解得 $\lambda = 0, \pm 1$，因此 $u = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x}$，所以通解为:

$$y = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2 e^x}{x} + \frac{c_3 e^{-x}}{x}$$

□

有时候可能题目并没有给出解，但是这个解比较容易猜测出来.

Example 4.11. 求解 ODE:

$$x^2 y'' - x(2-x)y' + (2-x)y = x^4$$

Solution. 我们先找 $x^2 y'' - x(2-x)y' + (2-x)y = 0$ 的一个解. 注意到 $y_1 = x$. 令 $y = u(x)x$，则:

$$u'' + u' = x$$

解得:

$$u = c_2 + c_1 e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - x$$

$$y = c_2 x + c_1 x e^{-x} + \frac{1}{2}x^3 - x^2$$

□

4.3.3 特殊系数

有一些二阶变系数 LODE 有特殊的系数形式，可以直接进行求解.

对于二阶齐次方程:

$$y'' + py' + qy = 0$$

令 $y=u(x)v(x)$，则:

$$\begin{aligned} u''v + 2u'v + uv'' &= 0 \\ +pu'v + puv' & \\ +quv & \end{aligned}$$

我们希望 $2u'v'+puv'=0$，因此得到:

$$2u'+pu=0$$

解得:

$$u=e^{-\frac{1}{2}\int p(x)\,dx}$$

代入方程 $(u''+pu'+qu)v+uv''=0$，得到:

$$v''+\frac{u''+pu'+qu}{u}v=0$$

$$v''+\left(-\frac{p'}{2}-\frac{p^2}{4}+q\right)v=0$$

我们希望 $-\frac{p'}{2}-\frac{p^2}{4}+q$ 为常数 a，则 $v''+av=0$ 可以快速解除 v.

Example 4.12. 求解 ODE:

$$y''+\frac{2}{x}y'+y=0$$

Solution. 注意到 $-\frac{p'}{2}-\frac{p^2}{4}+q=-\left(-\frac{1}{x^2}\right)/2-\frac{(2/x)^2}{4}+1=1$ 为常数. 令 $y=u(x)v(x)$，则:

$$u=e^{-\frac{1}{2}\int\frac{2}{x}\,dx}=\frac{1}{x}$$

$$v''+v=0$$

解得 $v=c_1\cos x+c_2\sin x$，因此通解为:

$$y=\frac{c_1\cos x+c_2\sin x}{x}$$

□

4.3.4 常数变易法

常数变易法同样适用于变系数 LODE 的非齐次方程.

Example 4.13. 求解 ODE:

$$y''+\frac{2}{x}y'+y=f(x)$$

Solution. 令 $y=\frac{\sin x}{x}u_1+\frac{\cos x}{x}u_2$，其中

$$\begin{bmatrix} \frac{\sin x}{x} & \frac{\cos x}{x} \\ \frac{\cos x}{x}-\frac{\sin x}{x^2} & -\frac{\sin x}{x}-\frac{\cos x}{x^2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \end{bmatrix}$$

□

4.3.5 （广义）幂级数法

Definition 4.2. 若函数 $p(x)$ 能写成:

$$p = \sum a_i (x - x_0)^i \quad |x - x_0| < \alpha$$

则称 $p(x)$ 可**实解析**.

Theorem 4.10 (Cauchy 定理)**.** *若 $p(x), q(x)$ 可实解析，则方程:*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

有形如 $\sum c_i (x - x_0)^i$ 的两个线性无关解，其中 c_i 由待定系数法确定.

Example 4.14. 求解 ODE:

$$y'' = xy$$

Solution. 设 $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$，则:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} = x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n = 2c_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}x^n$$

因此:

$$c_2 = 0 \quad c_{n+2}(n+2)(n+1) = c_{n-1}\,(n \geq 1)$$

由数学归纳法可得:

$$c_{3k} = \frac{(3k-2)!!!}{(3k)!}c_0 \quad c_{3k+1} = \frac{(3k-1)!!!}{(3k+1)!}c_1 \quad c_{3k+2} = 0$$

因此通解为:

$$y = c_0 \sum \frac{(3k-2)!!!}{(3k)!}x^{3k} + c_1 \sum \frac{(3k-1)!!!}{(3k+1)!}x^{3k+1}$$

□

Theorem 4.11 (广义幂级数法)**.** *若 $xp(x)$, $x^2 q(x)$ 在 x_0 附近可实解析，则方程:*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

有形如 $y = x^r \sum c_n x^n$ 的两个线性无关解（$c_0 \neq 0$）.

Example 4.15. 求解 ODE:

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0$$

Solution. 即求:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$$

令 $y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$（$a_0 \neq 0$），则:

$$\begin{aligned} & a_0 r^2 x^{r-2} + a_1 (r+1)^2 x^{r-1} + \sum_{m=0}^{\infty} \left(a_{m+2}(m+r+2)^2 + a_m\right) x^{m+r} = 0 \\ \implies & r = 0,\ a_1 = 0,\ a_{m+2} = -\frac{a_m}{(m+2)^2} \\ \implies & a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{\left(2^k k!\right)^2} \end{aligned}$$

因此其中一个解为:

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} a_0 \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}$$

然后我们就可以用降阶法求出通解了. □

4.4 二阶 LODE 的零点分布

Problem 4.3 (Bessal 方程)**.**

$$t^2 y'' + t y' + (t^2 - n^2) y = 0$$

其中 n 为非负整数.

方程两边同时除以 t^2，得到:

$$y'' + \frac{1}{t} y' + \left(1 - \frac{n^2}{t^2}\right) y = 0$$

能够得到:

$$y = e^{-\frac{1}{2}\int p\,dt} u = t^{\frac{1}{2}} u$$

其中 u 满足:

$$u'' + \left(1 - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{t^2}\right) u = 0$$

解的图像大概为:

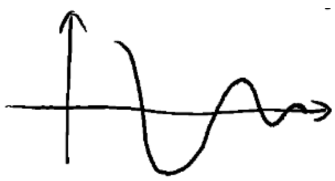


图 1: Bessal 方程解的图像

我们将研究解的零点分布情况，即个数、间距等.

考虑 $y'' + q(t) y = 0$（上面 Bessal 方程的例子表明 y' 可被吸收），$t \in [a,b]$，$q \in C([a,b])$.

Theorem 4.12 (孤立性)**.** 非零解在区间 $[a,b]$ 上至多有有限个零点.

Solution. 反证法：假设有无穷多个零点 $t_1, t_2, \cdots$，则有聚点定理，必有聚点 t_0.

$$t \to t_0,\ y(t) = 0$$

$$y'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} = 0$$

因此有 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} y'' + q(t)y = 0 \\ y(t_0) = 0 \\ y'(t_0) = 0 \end{cases}$$

有唯一零解，与非零解矛盾. □

Theorem 4.13 (Sturm 比较定理). 设 $P(t) \geq Q(t), t \in [a,b] \subset I, P, Q \in C(I)$，方程 $x'' + Q(t)x = 0$ 有解 $x(t), t \in I$，且 a, b 是 $x(t)$ 的相邻零点. 那么对于方程 $y'' + P(t)y = 0$ 的解 $y(t), t \in I$，存在 $c \in [a,b]$，使得 $y(c) = 0$.

Solution. 反证法：假设 $\forall t \in [a,b], y(t) \neq 0$，不妨 $y(t) > 0$. 则:

$$\begin{aligned} & (x'' + P(t)x)\, y - (y'' + Q(t)y)x = 0 \\ \Longrightarrow\ & x''y - xy'' = (P - Q)xy \\ & = (x'y - xy')' \end{aligned}$$

在 $[a,b]$ 上积分，得到:

$$(x'y - xy')|_a^b = \int_a^b (P - Q)xy\, dt$$

由条件，$x(a) = x(b) = 0$ 是相邻零点，因此 $x(t) \neq 0$. 不妨 $x(t) > 0$，则:

$$x'(b)y(b) - x'(a)y(a) = \int_a^b (P - Q)xy\, dt \geq 0$$

左式为负值，右式为正负值，矛盾! □

Corollary 4.14. $x'' + qx = 0$ 有两个线性无关解 x_1, x_2，设 a, b 是 x_1 的相邻零点，则 $\exists c \in (a,b), x_2(c) = 0$.

Solution. 由 Sturm 比较定理，$\exists c \in [a,b], x_2(c) = 0$. 如果取到了端点 a 或 b，那么在 $t = c$ 处，$W(t) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix} = 0$，与 x_1, x_2 线性无关矛盾! 因此 $c \in (a,b)$. □

事实上，我们也可以说:

- x_1, x_2 线性无关 $\Longleftrightarrow$ 零点不同 $\Longleftrightarrow W \neq 0$
- x_1, x_2 线性相关 $\Longleftrightarrow$ 零点相同 $\Longleftrightarrow W = 0$

那么，对于零点的间距，能否给出估计?

考虑 $y'' + q(x)y = 0, 0 < m \leq q(x) \leq M$. 已知:

$$\begin{aligned} y'' + my = 0 \quad & y = A\cos(\sqrt{m}x + \varphi_0) \\ y'' + My = 0 \quad & y = B\cos(\sqrt{M}x + \varphi_0) \end{aligned}$$

零点间距分别为 $\frac{\pi}{\sqrt{m}}, \frac{\pi}{\sqrt{M}}$. 因此:

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq \text{原式零点间距} \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}}$$

Solution. 先证明: $0 < m \leq q(x)$ 时，原间距 $\leq \dfrac{\pi}{\sqrt{m}}$.

反证法：设 a, b 是相邻零点，且 $b - a > \dfrac{\pi}{\sqrt{m}}$. 对于 $Y'' + mY = 0$，有解

$$Y = A \sin\left[\sqrt{m}(x-a)\right]$$

有相邻零点 $a, a + \dfrac{\pi}{\sqrt{m}}$. 由 Sturm 比较定理，$\exists c \in [a, a + \dfrac{\pi}{\sqrt{m}}]$, $y(c) = 0$. 但是当 $c = a$ 时无法导出矛盾!

修正: $\exists \varepsilon > 0, b > a + \varepsilon + \dfrac{\pi}{\sqrt{m}}$,

$$Y = \sin\left[\sqrt{m}(x-a-\varepsilon)\right]$$

有相邻零点 $a + \varepsilon, a + \varepsilon + \dfrac{\pi}{\sqrt{m}}$. 由 Sturm 比较定理，$\exists c \in [a + \varepsilon, a + \varepsilon + \dfrac{\pi}{\sqrt{m}}]$, $y(c) = 0$，因此 $c \in (a, b)$，与 a, b 是相邻零点矛盾！所以原间距 $\leq \dfrac{\pi}{\sqrt{m}}$.

同理可证: $q(x) \leq M$ 时，原间距 $\geq \dfrac{\pi}{\sqrt{M}}$. 综上所述，$\dfrac{\pi}{\sqrt{M}} \leq$ 原式零点间距 $\leq \dfrac{\pi}{\sqrt{m}}$ □

Corollary 4.15. 当 $q(x) \leq 0$ 时，非零解 $y(x)$ 最多有一个零点.

Solution. 反证法：假设有两个零点 $x_1 \neq x_2$，取 $M = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\pi}{|x_1 - x_2|}\right)^2$. 对于 $y'' + My = 0$，与原式比较，有

$$|x_1 - x_2| \geq \frac{\pi}{\sqrt{M}} = 2|x_1 - x_2|$$

矛盾! □

Problem 4.4 (n 阶 Bessal 方程零点分布)**.**

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

Solution. 吸收 y' 项，得到:

$$y'' + \left(1 - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right)y = 0$$

- $0 \leq n < \dfrac{1}{2}$，间距 $\leq \pi$
- $n = \dfrac{1}{2}$，间距 $= \pi$
- $n > \dfrac{1}{2}$，间距 $> \pi$

□

4.5 二阶 LODE 的边值问题

对于 $y'' + y = 0$，我们能推出通解:

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

若给出初值条件 $y(0)=0,\, y(\pi)=1$，则推出无解！

我们要考虑的是

$$\begin{cases} y''+py'+qy=0 \\ y(a)=\alpha,\, y(b)=\beta \end{cases} \tag{$\star$}$$

在 a,b 满足什么条件的时候有唯一解？

Definition 4.3. 若齐次边值问题

$$\begin{cases} y''+py'+qy=0 \\ y(a)=0,\, y(b)=0 \end{cases}$$

存在非零解，则称 a,b 为**共轭点**.

Theorem 4.16. *a,b 是方程*

$$y''+py'+qy=0$$

的共轭点的充分必要条件是：该方程的任意两个线性无关解 y_1,y_2 满足：

$$\begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{vmatrix}=0$$

Solution. 该方程的任意两个线性无关解 y_1,y_2 满足：

$$\begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{vmatrix}=0$$

等价于：

$$\begin{bmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

有非零解 c_1,c_2，因此有非零解 $y=c_1y_1+c_2y_2$ 满足：

$$y(a)=0,\, y(b)=0$$

等价于 a,b 为共轭点. □

Theorem 4.17. *边值问题*

$$\begin{cases} y''+py'+qy=0 \\ y(a)=\alpha,\, y(b)=\beta \end{cases}$$

存在唯一解的充分必要条件为 a,b 不是共轭点.

Solution. 设通解为 $y=c_1y_1+c_2y_2$，其中 y_1,y_2，边值条件等价于：

$$c_1y_1(a)+c_2y_2(a)=\alpha,\quad c_1y_1(b)+c_2y_2(b)=\beta$$

因此这个方程组对于 c_1,c_2 有唯一解的充分必要条件为：

$$\begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{vmatrix}=y_1(a)y_2(b)-y_2(a)y_1(b)\neq 0$$

也就等价于 a, b 不是共轭点. □

那我们如何求通解呢?

Example 4.16. 求解边值问题:

$$\begin{cases} y'' + py' + qy = 0 \\ y(a) = \alpha,\ y(b) = \beta \end{cases}$$

其中 a, b 不是共轭点.

Solution. 我们只需找到两个线性无关解 y_1, y_2. 我们令:

$$\begin{cases} y_1'' + py_1' + qy_1 = 0 \\ y_1(a) = 1,\ y_1(b) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2'' + py_2' + qy_2 = 0 \\ y_2(a) = 0,\ y_2(b) = 1 \end{cases}$$

因为 y_1, y_2 零点不同，所以符合线性无关，因此通解为:

$$y = \alpha y_1 + \beta y_2$$

□

那么，自然而然的，我们要考虑非齐次的情况.

Example 4.17. 求解边值问题:

$$\begin{cases} y'' + py' + qy = f(x) \\ y(a) = \alpha,\ y(b) = \beta \end{cases}$$

其中 a, b 不是共轭点.

Solution. 由上面的例子，我们先求出对应齐次方程的两个线性无关解 y_1, y_2. 设通解为:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_3$$

其中 y_3 满足:

$$\begin{cases} y_3'' + py_3' + qy_3 = f(x) \\ y_3(a) = y_3(b) = 0 \end{cases}$$

由于 $f(x)$ 的一般性，我们只能够使用常数变易法来求解 y_3. 设:

$$y_3 = u_1(x) y_1 + u_2(x) y_2$$

其中:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \end{bmatrix}$$

解得:

$$y_3 = y_1 \int_a^x \frac{-f y_2(t)}{W(t)}\, dt - y_2 \int_x^b \frac{f y_1(t)}{W(t)}\, dt$$

□

5 一阶常微分方程的适定性

这一章我们研究的是一般的一阶常微分方程:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

解的情况. 我们关心的是解的存在性、唯一性、连续依赖性，合在一起就称为这个 Cauchy 问题的**适定性**问题.

5.1 存在性

在前面的章节中，我们把解写出来了，自然解决了存在性的问题. 但是对于一般的方程，我们无法把解写出来.

Definition 5.1 (方向场)**.** $\Omega \subset \mathbb{R}^2, \forall (x,y) \in \Omega$，做斜率为 $f(x,y)$ 的短线段，形成 Ω 上的**方向场**. 我们把区域 Ω 和 Ω 上的方向场合在一起，称为 **ODE 的方向场**.

Definition 5.2. 若 Ω 上的一条曲线 Γ 满足：$\forall (x,y) \in \Gamma$，曲线在该点与方向场相切，则称 Γ 为**积分曲线**.

那么我们所研究的存在性，也就是想要找到解，也就等价于找过 (x_0, y_0) 的积分曲线.

Theorem 5.1 (Peano 定理)**.** *记矩形区域 $R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$，若 $f \in C(R)$，则 Cauchy 问题*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

在 $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ 内存在解. 其中:

$$\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \quad M = \max_{(x,y)\in R} |f(x,y)|$$

为什么是这样的 α 呢? 考虑 $f = 0$ 时，显然可以取到 $\alpha = a$. 而当 $f(x_0, y_0)$ 是一个很大的常数 M 时，积分曲线 Γ 与直线 $y = M(x - x_0) + y_0$ 相切，而所有的情况需要限制在 R 内，因此考虑直线与矩形区域 R 上边的交点，得到 $\alpha = \dfrac{b}{M}$，因此有 $\alpha = \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$. 其中的 M 由 f 决定，即 $M = \max_{(x,y)\in R} |f(x,y)|$

那么我们怎么去证明 Peano 定理呢? 首先想到的就是利用方向场来构造积分曲线. 下面考虑的是右行解. 我们将 $[x_0, x_0 + \alpha]$ 分成 n 份，每一份长度为 $h = \dfrac{\alpha}{n}$，记 $x_k = x_0 + kh\,(k = 0, 1, \ldots, n)$.

$$y_k = y_{k-1} + f(x_{k-1}, y_{k-1})(x_k - x_{k-1}) = y_0 + \sum_{i=0}^{k-1} f(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i)$$

定义分段函数: 当 $x \in [x_k, x_{k+1}]$ 时，

$$\varphi_n(x) = y_0 + \sum_{i=0}^{k-1} f(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i) + f(x_k, y_k)(x - x_k)$$

我们将这些线段连接起来，得到逼近解，我们称 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 为 **Eular 折线**，这些折线只满足在 $[x_0, x_0+\alpha]$ 上连续，也就是说：在收敛过程中，当 $n \to \infty$ 时，我们希望 $\varphi_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ 是方程的解，但是 $\varphi(x)$ 目前只满足连续，不能保证其满足一阶导数连续.

我们换个角度，把 Cauchy 问题改写成积分方程 (等价性显然):

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds \quad x \in [x_0, x_0+\alpha] = I$$

由积分方程解的定义，y 只需要在 I 上连续，并且满足积分方程即可. 那么我们希望上面所得到的 $\varphi(x)$ 满足这个积分方程.

对于 $\varphi_n(x)$ 的收敛情况，在数分中我们有:

Theorem (有界数列必有收敛子列). 设数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，存在常数 $N>0$，使得

$$|a_n| \le N, \quad \forall n$$

则 $\exists\{a_nj\}_{j=1}^{\infty}$, $a_nj \to a\,(j\to\infty)$

同样的，我们希望 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在满足一定条件下也有收敛子列，就能得到 $\varphi(x)$. 这里要引入 **Arzela-Ascoli 定理**:

Definition 5.3 (一致有界). 若 $\exists$ 常数 N，使得

$$|\varphi_n(x)| \le N, \quad \forall x \in I,\, n = 1, 2, \ldots$$

则称 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 I 上**一致有界**.

Definition 5.4 (等度连续). 若 $\varphi_n(x) \in C(I)$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$，使得

$$\forall x_1, x_2 \in I, |x_1 - x_2| < \delta \implies |\varphi_n(x_1) - \varphi_n(x_2)| < \varepsilon, \quad \forall n = 1, 2, \ldots$$

则称 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 I 上**等度连续**.

Theorem 5.2 (Arzela-Ascoli 定理). 设 $I \in [a,b]$ 是一个有界闭区域，$\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 I 上满足：一致有界、等度连续，则存在一致收敛子列 $\{\widetilde{\varphi}_n(x)\}_{j=1}^{\infty}$

$$\widetilde{\varphi}_n(x) \rightrightarrows \varphi(x) \quad \forall x \in I,\, n \to +\infty$$

并且 $\varphi(x) \in C(I)$.

Solution. 我们取 $A = \{I\text{中的有理点}\}$，则 A 是可数集，记 $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_m, \cdots\}$.

对于函数列 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$，$x = x_1$ 处的值构成数列 $\{\varphi_n(x_1)\}_{n=1}^{\infty}$，因为有界数列必有收敛子列，存在收敛子列

$$\{\varphi_n^{(1)}(x_1)\}_{n=1}^{\infty} \quad \varphi_n^{(1)}(x_1) \to y_1\,(n\to\infty)$$

对于函数列 $\{\varphi_n^{(1)}(x)\}_{n=1}^{\infty}$，$x = x_2$ 处的值构成数列 $\{\varphi_n^{(1)}(x_2)\}_{n=1}^{\infty}$，存在收敛子列

$$\{\varphi_n^{(2)}(x_2)\}_{n=1}^{\infty} \quad \varphi_n^{(2)}(x_2) \to y_2\,(n\to\infty)$$

以此类推，得到:

$$\{\varphi_n^{(m)}(x_m)\}_{n=1}^{\infty} \quad \varphi_n^{(m)}(x_m) \to y_m\,(n\to\infty)$$

并且有包含关系:

$$\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \supset \{\varphi_n^{(1)}(x)\}_{n=1}^{\infty} \supset \{\varphi_n^{(2)}(x)\}_{n=1}^{\infty} \supset \cdots \supset \{\varphi_n^{(m)}(x)\}_{n=1}^{\infty} \supset \cdots$$

同时写成表格形式:

$$\begin{matrix} \varphi_1^{(1)}(x_1) & \varphi_2^{(1)}(x_1) & \varphi_3^{(1)}(x_1) & \cdots & \to y_1 \\ \varphi_1^{(2)}(x_2) & \varphi_2^{(2)}(x_2) & \varphi_3^{(2)}(x_2) & \cdots & \to y_2 \\ \varphi_1^{(3)}(x_3) & \varphi_2^{(3)}(x_3) & \varphi_3^{(3)}(x_3) & \cdots & \to y_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{matrix}$$

由包含关系，每一行都是上一行的子列，我们取对角线上的元素，得到子列:

$$\widetilde{\varphi}_n(x) = \varphi_n^{(n)}(x)$$

下面我们的目标是证明：$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n, m > N,$

$$|\widetilde{\varphi}_n(x) - \widetilde{\varphi}_m(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in I$$

根据有理数的稠密性，我们可以找到 $\overline{x_i} \in A$，使得 $x \sim \overline{x_i}$. 由三角不等式，有:

$$\begin{aligned} |\widetilde{\varphi}_n(x) - \widetilde{\varphi}_m(x)| \leq & |\widetilde{\varphi}_n(x) - \widetilde{\varphi}_n(\overline{x_i})| \\ & + |\widetilde{\varphi}_n(\overline{x_i}) - \widetilde{\varphi}_m(\overline{x_i})| \\ & + |\widetilde{\varphi}_m(\overline{x_i}) - \widetilde{\varphi}_m(x)| \end{aligned}$$

由于 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 I 上等度连续，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得

$$\forall |x_1 - x_2| < \delta, |\varphi_n(x_1) - \varphi_n(x_2)| < \varepsilon \quad \forall n = 1, 2, \cdots$$

由于 I 有界闭，则 $I \subset \bigcup_{x_i \in A}(x_i - \frac{\delta}{2}, x_i + \frac{\delta}{2})$，由有限覆盖定理，存在有限个 $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_L \in A$，使得:

$$I = \bigcup_{i=1}^{L}(\overline{x}_i - \frac{\delta}{2}, \overline{x}_i + \frac{\delta}{2})$$

记 $B = \{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_L\}$，那么 $\forall x \in I, \exists \widehat{x} \in B, |x - \widehat{x}| < \frac{\delta}{2}$. 因此:

$$|\varphi_n(x) - \varphi_n(\widehat{x})| < \varepsilon$$

因为:

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{\varphi}_n(\overline{x}_i) = \overline{y_i}$$

所以 $\exists N_i$，使得当 $n, m > N_i$ 时，有:

$$|\widetilde{\varphi}_n(\overline{x}_i) - \widetilde{\varphi}_m(\overline{x}_i)| < \varepsilon$$

取 $N = \max\{N_1, \cdots, N_L\}$，则当 $n, m > N$ 时，有:

$$|\widetilde{\varphi}_n(\overline{x}_i) - \widetilde{\varphi}_m(\overline{x}_i)| < \varepsilon \quad \forall i = 1, 2, \ldots, L$$

综上所述，当 $n, m > N$ 时，有:

$$\begin{aligned}|\widetilde{\varphi}_n(x) - \widetilde{\varphi}_m(x)| &\le |\widetilde{\varphi}_n(x) - \widetilde{\varphi}_n(\widehat{x})| \\ &+ |\widetilde{\varphi}_n(\widehat{x}) - \widetilde{\varphi}_m(\widehat{x})| \\ &+ |\widetilde{\varphi}_m(\widehat{x}) - \widetilde{\varphi}_m(x)| \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon\end{aligned}$$

所以，$\{\widetilde{\varphi}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 I 上一致收敛于 $\varphi(x)$，

$$\widetilde{\varphi}_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$$

并且 $\varphi(x) \in C(I)$. □

那么 Peano 定理的证明就可以分为以下几步:

- 将微分方程改写为积分方程 $y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds$
- 构造 Eular 折线 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.
- 证明 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 I 上一致有界、等度连续. 由 Arzela-Ascoli 定理，其一致收敛于 $\varphi(x)$.
- 证明 $\varphi(x)$ 满足积分方程.

Theorem (Peano 定理)**.** *记矩形区域 $R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$，若 $f \in C(R)$，则 Cauchy 问题*

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0\end{cases}$$

在 $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ 内存在解. 其中:

$$\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \quad M = \max_{(x,y)\in R} |f(x, y)|$$

Solution (Peano 定理的证明)**.** 记 $I = [x_0, x_0 + \alpha]$ 微分方程等价于积分方程:

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds \quad x \in I$$

构造 Eular 折线:

$$\varphi_n(x) = y_0 + \sum_{i=0}^{k-1} f(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i) + f(x_k, y_k)(x - x_k), \quad x \in [x_k, x_{k+1}]$$

其中 $y_k = y_{k-1} + f(x_{k-1}, y_{k-1})(x_k - x_{k-1})$.

$$\begin{aligned}|\varphi_n(x) - y_0| &\le \sum_{i=0}^{k-1} |f|\frac{\alpha}{n} + |f|\frac{\alpha}{n} \le (k+1)\frac{\alpha}{n} \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \\ &\le \alpha\end{aligned}$$

$$|\varphi_n(x)| \le |y_0| + \alpha$$

因此 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 I 上一致有界.

对于任意 $\varepsilon > 0$，取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2M}$，则当 $|x_1' - x_2'| < \delta$ 时，有:

$$\begin{aligned}|\varphi_n(x_1') - \varphi_n(x_2')| &\le |\varphi_n(x_1') - \varphi_n(x_i)| + \cdots + |\varphi_n(x_j) - \varphi_n(x_2')| \quad (\text{有限项})\\ &\le M|x_1' - x_i| + \cdots + M|x_j - x_2'|\\ &\le M|x_1' - x_2'| < M\delta = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\end{aligned}$$

因此 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 I 上等度连续.

由 Arzela-Ascoli 定理，$\exists$ 一致收敛子列

$$\widetilde{\varphi}_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$$

记

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_n(s))\, ds + \delta_n(x)$$

我们的目标是证明 $\delta_n(x) \rightrightarrows 0\,(n \to \infty)$. 由构造可知:

$$\delta_n(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x_i, y_i) - f(s, \varphi_n(s))]\, ds + \int_{x_k}^{x} [f(x_k, y_k) - f(s, \varphi_n(s))]\, ds$$

因为 $f \in C(R)$，$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，使得 $\forall |x_1 - x_2| < \delta, |y_1 - y_2| < \delta$，有

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$$

我们需要 $h = \dfrac{\alpha}{n} < \delta$ 和 $|\varphi_n(s) - y_i| \le Mh = M\dfrac{\alpha}{n} < \delta$.

因此取 $N = \dfrac{(2+M)\alpha}{\delta}$，当 $n > N$ 时，满足 $h = \dfrac{\alpha}{n} < \delta$ 和 $|\varphi_n(s) - y_i| \le Mh = M\dfrac{\alpha}{n} < \delta$. 因此

$$|\delta_n(x)| \le \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon(x_{i+1} - x_i) + \varepsilon(x - x_k) \le \varepsilon\alpha$$

因此 $\delta_n(x) \rightrightarrows 0\,(n \to \infty)$.

综上所述，$\varphi(x)$ 满足积分方程，因此 $\varphi(x)$ 是 Cauchy 问题的解，即解存在.

□

Peano 定理保证了解的存在性，我们希望更对 f 进行进一步的限制，从而保证解的唯一性.

5.2 唯一性

5.2.1 Lip 条件

Definition 5.5 (Lipschitz 条件 (简称 Lip 条件))**.** 设区域 $R \subset \mathbb{R}^2$，若对于 R 中的每一个紧集 $K, \exists L_K > 0$，使得

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L_K |y_1 - y_2|, \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in R$$

则称 $f(x, y)$ 在 R 上满足 **(局部) Lipschitz 条件**.

进一步的：若 $\exists L > 0$，使得

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L |y_1 - y_2|, \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in R$$

则称 $f(x, y)$ 在 R 上满足**一致 Lipschitz 条件**.

Lemma 5.3 (Gronwall 不等式). 设 $u(x), \alpha(x)$ 在区间 I 上连续，有 $u, \alpha \geq 0; c, k \geq 0$，若

$$u(x) \leq c + \int_{x_0}^{x} [\alpha(s)u(s) + k]\, ds$$

则

$$u(x) \leq [c + k(x - x_0)]e^{\int_{x_0}^{x} \alpha(s)\, ds}$$

Solution. 记 $Y(x) = c + \int_{x_0}^{x} [\alpha(s)u(s) + k]\, ds$ ，则 $Y(x)$ 可导，且

$$Y'(x) = \alpha(x)u(x) + k \leq \alpha(x)Y(x) + k$$

因此:

$$\left(e^{-\int_{x_0}^{x} \alpha(s)\, ds} Y(x)\right)' \leq k e^{-\int_{x_0}^{x} \alpha(s)\, ds}$$

$$e^{-\int_{x_0}^{x} \alpha(s)\, ds} Y(x) - Y(x_0) \leq k(x - x_0)$$

$$u(x) \leq Y(x) \leq [c + k(x - x_0)]e^{\int_{x_0}^{x} \alpha(s)\, ds}$$

特别的: $c, k = 0$ 时，$u = 0$. □

Theorem 5.4 (Picard 定理). 记矩形区域 $R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$，若 $f \in C(R)$ 并且在 R 上满足 *Lip* 条件，则 *Cauchy* 问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

在 $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ 内存在唯一解. 其中:

$$\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \quad M = \max_{(x,y)\in R} |f(x, y)|$$

Solution. 我们只证明右行解.

存在性: 转化为积分方程:

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds$$

构造 **Picard 迭代序列**作为逼近解:

$$y_0 = y_0$$

$$y_{k+1} = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_k(s))\, ds$$

由数学归纳法可知 $\{y_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ 是良定义的，即:

$$\begin{cases} y_k(x) \in C(I) \\ |y_k(x) - y_0| \leq b \end{cases}$$

我们断言:

$$|y_k(x) - y_{k-1}(x)| \leq \frac{M}{L} \frac{[L(x - x_0)]^k}{k!}$$

由数学归纳法：当 $k=1$ 时，

$$|y_1-y_0|=\left|\int_{x_0}^{x} f(s,y_0)\,ds\right|\le M(x-x_0)=\frac{M}{L}\frac{[L(x-x_0)]^1}{1!}$$

假设 k 成立，则对于 $k+1$，有:

$$\begin{aligned}
|y_{k+1}-y_k| &= \left|\int_{x_0}^{x}[f(s,y_k(s))-f(s,y_{k-1}(s))]\,ds\right| \\
(\text{Lip}) &\le \int_{x_0}^{x} L|y_k-y_{k-1}|(s)\,ds \\
&\le \int_{x_0}^{x} L\frac{M}{L}\frac{[L(s-x_0)]^k}{k!}\,ds \\
&= \frac{M}{L}\frac{[L(x-x_0)]^{k+1}}{(k+1)!}
\end{aligned}$$

因此断言成立.

将不等式进一步放大:

$$|y_k-y_{k-1}|(x)\le\frac{M}{L}\frac{[L\alpha]^k}{k!}$$

因为级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{[L\alpha]^k}{k!}=e^{L\alpha}-1$ 收敛，所以 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0$，

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{[L\alpha]^n}{n!}<\varepsilon$$

因此当 $n,m>N$ 时，有:

$$\begin{aligned}
|y_n-y_m|(x) &\le \sum_{k=n}^{m}|y_k-y_{k-1}|(x) \\
&\le \frac{M}{L}\sum_{k=n}^{m}\frac{[L\alpha]^k}{k!} \\
&< \frac{M}{L}\varepsilon
\end{aligned}$$

因此 $y_k(x)\rightrightarrows y(x)\,(k\to\infty)\,\forall x\in I$.

对于逼近解取 $k\to\infty$，得到:

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,y(s))\,ds$$

正好是积分方程，因此 $y_k(x)$ 的极限 $y(x)$ 就是原 Cauchy 问题的解.

唯一性: 假设 $y=y_1(x),y=y_2(x)$ 是 Cauchy 问题的两个不同的解，则

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,y_1(s))\,ds \\
y_2 &= y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,y_2(s))\,ds
\end{aligned}$$

两式相减取绝对值，得到:

$$\begin{aligned}
|y_1-y_2|(x) &= \left|\int_{x_0}^{x}[f(s,y_1(s))-f(s,y_2(s))]\,ds\right| \\
(\text{Lip}) &\le \int_{x_0}^{x} L|y_1-y_2|(s)\,ds
\end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式可知，$|y_1-y_2|(x)=0$，即 $y_1=y_2$，与假设矛盾. □

5.2.2 Osgood 条件

Definition 5.6 (Osgood 条件)**.** 设区域 $R \subset \mathbb{R}^2$，若存在 $[0,+\infty)$ 上的连续函数 $F(r)>0$，使得

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \le F(|y_1-y_2|), \quad \forall (x,y_1),(x,y_2) \in R$$

并且

$$\int_0^{r_1} \frac{dr}{F(r)} = +\infty, \quad \forall r_1 > 0$$

则称 $f(x,y)$ 在 R 上满足 **Osgood 条件**.

Theorem 5.5. *记矩形区域 $R=[x_0-a,x_0+a]\times[y_0-b,y_0+b]$，若 $f \in C(R)$ 并且在 R 上满足 Osgood 条件，则 Cauchy 问题*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

在 $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ 内存在唯一解. 其中:

$$\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \quad M = \max_{(x,y)\in R} |f(x,y)|$$

Solution. 存在性与 Picard 定理相同. 下面证明唯一性.

反证法:假设 $y=y_1(x), y=y_2(x)$ 是 Cauchy 问题的两个不同的解,则 $\exists x_2 \in I$, $y_1(x_2) \neq y_2(x_2)$，因此 $\exists x_1 \in [x_0,x_2]$, $y_1(x_1)=y_2(x_1)$，且 $\forall x \in (x_1,x_2]$, $y_1(x)>y_2(x)$.

令 $r(x)=(y_1-y_2)(x)$，则 $r(x)>0$，且

$$r' = y_1' - y_2' = f(x,y_1) - f(x,y_2) \le F(r)$$

取 $x_3 \in (x_1,x_2)$，则 $\forall x \in [x_3,x_2]$，

$$\frac{r'}{F(r)} \le 1$$

对上式在 $[x_3,x_2]$ 上积分，得到:

$$\int_{x_3}^{x_2} \frac{r'}{F(r)}\,dx \le x_2 - x_3$$

由变量替换，有:

$$\int_{r(x_3)}^{r(x_2)} \frac{dr}{F(r)} \le x_2 - x_3$$

令 $x_3 \to x_1^+$，则:

$$\infty = \int_0^{r(x_2)} \frac{dr}{F(r)} \le x_2 - x_1 < +\infty$$

矛盾，因此解唯一. □

5.2.3 单调递减条件

Theorem 5.6. *记矩形区域* $R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$*，若* $f \in C(R)$ *并且在* R *上关于* y *单调递减，则 Cauchy 问题*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

在 $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ *内存在唯一解. 其中:*

$$\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \quad M = \max_{(x,y)\in R} |f(x, y)|$$

Solution. 假设 $y = y_1(x), y = y_2(x)$ 是 Cauchy 问题的两个不同的解，则 $\exists x_2 \in I$, $y_1(x_2) \neq y_2(x_2)$，因此 $\exists x_1 \in [x_0, x_2]$，使得 $y_1(x_1) = y_2(x_1)$，且 $\forall x \in (x_1, x_2]$, $y_1(x) > y_2(x)$. 但是:

$$\begin{aligned} y_1(x_2) &= y_1(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} f(s, y_1(s))\, ds \\ &\leq y_1(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} f(s, y_2(s))\, ds \\ &= y_2(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} f(s, y_2(s))\, ds \\ &= y_2(x_2) \end{aligned}$$

矛盾，因此解唯一. □

5.2.4 Cauchy 存在定理

Theorem 5.7 (Cauchy 存在定理)**.** *设区域* $R \subset \mathbb{R}^2$*，若* $f \in C(R)$ *并且在* R *上可被实解析. 即*

$$f(x, y) = \sum a_{ij}(x - x_0)^i (y - y_0)^j$$

在 R *上收敛，则 Cauchy 问题*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

在 $[x_0 - \rho, x_0 + \rho]$ *存在唯一实解析解.*

证明方法其实就是运用待定系数法，将解表示为幂级数，然后代入方程中求解系数.

Example 5.1. 求解方程:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2y + x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Solution. 一阶 LODE

$$y = \frac{5}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$$

Peano 定理: $x \in [0,1]$ 内分成 n 等份，$h = \dfrac{1}{n}$，$x_k = \dfrac{k}{n}$，构造 Eular 折线:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + f(x_k, y_k) \cdot \frac{1}{n} \\ &= y_k + (2y_k + x_k) \cdot \frac{1}{n} \\ &= \left(1 + \frac{2}{n}\right) y_k + \frac{k}{n^2} \end{aligned}$$

因此:

$$y_{k+1} + \frac{k+1}{2n} + \frac{1}{4} = \left(1 + \frac{2}{n}\right)\left(y_k + \frac{k}{2n} + \frac{1}{4}\right)$$

所以:

$$\begin{aligned} y_k &= \left(1 + \frac{2}{n}\right)^k \left(y_0 + \frac{0}{2n} + \frac{1}{4}\right) - \frac{k}{2n} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{5}{4}\left(1 + \frac{2}{n}\right)^k - \frac{k}{2n} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{5}{4}\left[\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^{2x_k} - \frac{x_k}{2} - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

取 $k \to \infty$，得到:

$$y(x) = \frac{5}{4}e^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$$

Picard 定理: 构造 Picard 迭代序列:

$$\begin{aligned} &y_0 = 1 \\ &y_1 = 1 + \int_0^x f(s, y_0)\, ds = 1 + \int_0^x (2+s)\, ds = 1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 \\ &\cdots \\ &y_k(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + 2x + 2x^2 + \frac{5}{4}\left(\frac{(2x)^3}{3!} + \cdots + \frac{(2x)^{k+1}}{(k+1)!}\right) - \frac{(2x)^{k+1}}{(k+1)!} \end{aligned}$$

取 $k \to \infty$，得到:

$$y(x) = \frac{5}{4}e^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$$

幂级数法设解为幂级数形式:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

能够得到:

$$\begin{gathered} c_0 = 1 \\ c_1 = 2 \quad c_2 = \frac{5}{2} \quad c_3 = \frac{5}{3} \\ c_k = \frac{5}{4} \cdots \frac{2^k}{k!} \quad k \geq 4 \end{gathered}$$

因此:

$$y = \frac{5}{4}e^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$$

□

5.3 解的延拓

对于 Cauchy 问题

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

其解为:

$$y = \frac{1}{1-x} \quad x \in (-\infty, 1)$$

前面的 Peano 定理和 Picard 定理只能保证在 $|x - x_0| \le \alpha \le \dfrac{1}{4}$ 内存在唯一解，但是实际上解空间是 $(-\infty, 1)$ 上，相差很大.

因此我们会思考，能否将解延拓到更大的区间上去?

5.3.1 存在性

Lemma 5.8. 设 $f \in C(G)$，$G \subset \mathbb{R}^2$ 是开集. 假设 $\phi(x)$ 是 $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 在 $[x_0, b)$ 上的解，记解曲线为

$$\Gamma = \{(x, \phi(x)) \,|\, x \in [x_0, b)\} \subset A \subset G$$

若 A 是紧集（有界闭集），则 $\phi(x)$ 可延拓至 $[x_0, b]$.

我们的目标是 1. 求出 $\phi(b)$ 的值；2. $\phi(x)$ 在 $[x_0, b]$ 上是解，即:

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \phi(s))\, ds \quad x \in [x_0, b]$$

我们希望由 $\phi \in C(G)$ 再加上某些条件，来证明 $\phi(x)$ 一致收敛，这样就能证明 $\lim_{x \to b} \phi(x)$ 存在，令其为 $\phi(b)$ 即可. 那也就是说，我们的目标是证明 $|\phi'(x)|$ 有界（中值定理）.

Solution. 因为 A 是紧集，$f \in C(G)$，所以 $f(A)$ 是紧的. 所以 $\exists M > 0$，使得

$$|f(x, y)| \le M \quad \forall (x, y) \in A$$

因此 $\forall x \in [x_0, b)$，有:

$$|\phi'(x)| = |f(x, \phi(x))| \le M$$

所以 $\phi(x)$ 在 $[x_0, b)$ 上一致连续. 因此 $\lim_{x \to b^-} \phi(x)$ 存在，记为 $\phi(b)$.

由解的定义，有:

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \phi(s))\, ds \quad x \in [x_0, b)$$

令 $x \to b$，得到:

$$\phi(b) = y_0 + \int_{x_0}^{b} f(s, \phi(s))\, ds$$

因此解 $\phi(x)$ 可延拓至 $[x_0, b]$ □

Lemma 5.9. 设 $f \in C(G)$，$G \subset \mathbb{R}^2$ 是开集. 设 $\phi(x), \psi(x)$ 分别是 $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 在

$[x_0,b],[b,c]$ 上的两个解（一定有 $\phi(b)=\psi(b)$）. 则

$$y(x)=\begin{cases}\phi(x) & x\in[x_0,b]\\ \psi(x) & x\in[b,c]\end{cases}$$

是 *ODE* 在 $[x_0,c]$ 上的解.

Solution. 由条件，ODE 在 $[x_0,b)\cup(b,c]$ 上成立. 注意到 $y'(b)=\phi'(b^-)=\psi'(b^+)$ 与 $\phi'(b^-)=\phi'(b)=f(b,\phi(b))=f(b,\psi(b))=\psi'(b)=\psi'(b^+)$ 因此 $y'(b)=f(b,\phi(b))=f(b,y(b))$. 所以 ODE 在 $[x_0,c]$ 上成立. □

Theorem 5.10 (解延拓定理)**.** 设 $f\in C(G)$，$G\subset\mathbb{R}^2$ 是开集. 对于 $\forall(x_0,y_0)\in G$ ，*Cauchy* 问题

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$$

有解曲线 Γ，则解曲线 Γ 可延拓至 G 的边界（∂G）.

参考 W. Walter 的 ODE(GTM 182) 教材，分两步证明：1. 证明对于 G 中的任意紧集 A，解曲线 Γ 可延拓至 A 外；2. 反证法证明定理.

Solution. 对于 G 中的一个紧集 A，A 与 ∂G 有距离的，记:

$$3a=\begin{cases}\mathrm{dist}(A,\partial G)=\min\{\mathrm{dist}((x,y),\partial G)\,|\,(x,y)\in A\}, & \text{G 有界}\\ 3, & \text{G 无界}\end{cases}$$

那么有 $\forall(x_0,y_0)\in A$, $R_{(x_0,y_0)}=[x_0-a,x_0+a]\times[y_0-a,y_0+a]\subset G$. 在 $R_{(x_0,y_0)}$ 中用 Peano 定理，令 $M=\max_{\mathrm{dist}\{(x,y),A\}\le a}|f(x,y)|$，$\alpha=\min\left\{a,\dfrac{a}{M}\right\}$，则解在 $[x_0-\alpha,x_0+\alpha]$ 上存在，其中 α 是固定的.

若 $\Gamma=\{(x,\phi(x))|x\in[\xi,b)\}$，其中 ϕ 是解，则由引理5.8可知，ϕ 可延拓至 $[\xi,b]$.

那么我们对 $\begin{cases}y'=f(x,y)\\ y(b)=\phi(b)\end{cases}$ 在 $R_{(b,\phi(b))}$ 上用 Peano 定理，得到解:

$$y=\psi(x)\quad x\in[b,b+\alpha]$$

由引理5.9可知，有解 $y(x)$, $x\in[\xi,b+\alpha]$.

同理，经过有限步（至多 $\dfrac{D}{\alpha}+1$ 步，D 是 A 的直径)，解曲线 Γ 可延拓至 A 外.

构造 $A_m=\{x\in G,\mathrm{dist}(x,\partial G)\ge\frac{1}{m}\}$，则 $A_1\subset A_2\subset\cdots\subset G$.

那么解曲线 Γ_0 要么能延拓至 ∂G，要么未能延拓至 ∂G. 若未能延拓至 ∂G，则存在 i_1，$\Gamma_0\subset A_{i_1}$，则 Γ_0 可延拓至 A_{i_1} 外，记为 Γ_1.

重复这个过程，若 Γ_k 未能延拓至 ∂G，则存在 $i_{k+1}>i_k$，使得 $\Gamma_k\subset A_{i_{k+1}}$，则 Γ_k 可延拓至 $A_{i_{k+1}}$ 外，记为 Γ_{k+1}.

记 $\Gamma_k=\{(x,\phi_k(x)),x\in[\xi,b_k]\}$，则 $b_k<b_{k+1},\phi_k=\phi_{k+1}$. 令 $b=\lim_{k\to\infty}b_k$. 则解 ϕ 在 $[x_0,b)$ 上存在.

$$\lim_{x\to b}(x,\phi(x))\in\partial G$$

即可以延拓至 ∂G. □

Corollary 5.11. 解的最大存在区间是开区间.

Definition 5.7. 若 $\phi(x)$ 是 $y' = f(x,y)$ 在 (a,b) 上的解，$\psi(x)$ 是 $y' = f(x,y)$ 在 J 上的解，并且 $(a,b) \subset J$, $\phi(x)|_{(a,b)} = \psi(x)|_{(a,b)}$，则称 $\phi(x)$ 是 **可延拓的**，$\psi(x)$ 是 $\phi(x)$ 在 J 上的一个**延拓**.

反之，若不存在这样的 $\psi(x)$，则称 $\phi(x)$ 为**饱和解**.

因此解延拓定理说明了，$f \in C(G)$ 时，$y' = f(x,y)$ 存在饱和解.

5.3.2 唯一性

前面 Picard 定理已经说明了，若 f 满足 Lip 条件，则解有存在唯一性. 那么就有定理:

Theorem 5.12. 设 $f \in C(G)$, $G \subset \mathbb{R}^2$ 是开集，并且 f 在 G 上满足 *Lip* 条件. 则 $\forall (x_0, y_0) \in G$, $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 存在唯一饱和解.

5.3.3 整体解

Definition 5.8. 考虑 $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 在 $R = (a,b) \times (-\infty, +\infty)$ 上（a, b 都可以取 $-\infty$ 或 $+\infty$），若 f 在 (a,b) 上存在，则称为 **整体解**.

我们知道，当 $p(x), q(x) \in C((a,b))$ 时，线性方程 $\begin{cases} y' = p(x)y + q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 的解就是整体解. 考虑一般一点的情况:

Theorem 5.13. 若 f 在 R 上关于 y 满足一致 *Lip* 条件，即 $\exists L > 0$，使得对任意 $(x, y_1), (x, y_2) \in R$ 有:

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L|y_1 - y_2|$$

则任意饱和解在 (a,b) 上存在.

Remark 5.1. 也就是说，任意饱和解都是整体解.

Solution. 同样的我们考虑右行解. 假设 $\exists (x_0, y_0) \in R$，其饱和解 $y = \varphi(x)$ 的最大存在区间为 $[x_0, \beta)$，其中 $\beta < b$. 那么

$$\overline{\lim_{x \to \beta^-}} |\varphi(x)| = \infty$$

否则可以延拓到边界. 因此 $\varphi(x)$ 满足

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))\, ds \quad x \in [x_0, \beta)$$

$$
\begin{aligned}
|\varphi(x) - y_0| &\leq \int_{x_0}^{x} |f(s, \varphi(s))|\, ds \\
&\leq \int_{x_0}^{x} |f(s, y_0)|\, ds + \int_{x_0}^{x} |f(s, \varphi(s)) - f(s, y_0)|\, ds \\
(\text{Lip}) &\leq \max_{s\in[x_0,b)} |f(s, y_0)|(\beta - x_0) + \int_{x_0}^{x} L|\varphi(s) - y_0|\, ds
\end{aligned}
$$

由 Gronwall 不等式可知:

$$
|\varphi(x) - y_0| \leq \max_{s\in[x_0,b)} |f(s, y_0)|(\beta - x_0)e^{L(\beta-x_0)}
$$

是有限的，与 $\overline{\lim}_{x\to\beta^-}|\varphi(x)| = \infty$ 矛盾. □

事实上，$y' = p(x)y + q(x)$ 并不关于 y 满足一致 Lip 条件，这是因为 $L = p(x)$ 有可能趋于无穷.

Example 5.2. 对于方程:

$$
y' = e^{-x} + \ln(1 + y^2)
$$

证明其在 $(-\infty, +\infty)$ 上存在唯一整体解.

Solution. 令 $f = e^{-x} + \ln(1 + y^2)$，那么

$$
|\partial_y f| = |\frac{2y}{1 + y^2}| \leq 1
$$

取 $L = 1$，则 f 关于 y 满足一致 Lip 条件，因此在 $(-\infty, +\infty)$ 上存在唯一饱和解，也就是饱和解. □

Example 5.3. 对于方程:

$$
y' = \sin\frac{y}{x}
$$

证明其在 $(0, +\infty)$ 上存在唯一整体解.

Solution.

$$
\partial_y f = \frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}
$$

在 $(\varepsilon, +\infty)$ 上，取 $L = \frac{1}{\varepsilon}$，则 f 关于 y 满足一致 Lip 条件，因此在 $(\varepsilon, +\infty)$ 上存在唯一饱和解. 由于 ε 的任意性，因此在 $(0, +\infty)$ 上存在唯一整体解. □

Example 5.4. 对于方程:

$$
y' = x^2 + y^2
$$

证明其右行解存在区间有限.

Solution. 设最大存在区间为 $[x_0, \beta)$. 若 $\beta \leq 0$，即证.

对于 $\beta > 0$，找 $x_1 \in [0, \beta)$，使得 $\forall x \in [x_1, \beta)$，有 $y' = x^2 + y^2 \geq x_1^2 + y^2$，因此:

$$
\frac{y'}{x_1^2 + y^2} \geq 1
$$

对上式在 $[x_1,\beta)$ 上积分，得到:

$$\int_{x_1}^{\beta}\frac{y'}{x_1^2+y^2}\,dx\ge\beta-x_1$$

$$\frac{1}{x_1}\arctan\frac{y}{x_1}\Big|_{y(x_1)}^{y(\beta)}\ge\beta-x_1$$

左式是有限的（$\arctan x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$），所以:

$$\beta\le x_1+\frac{1}{x_1}\arctan\frac{y}{x_1}\Big|_{y(x_1)}^{y(\beta)}<+\infty$$

因此右行解存在区间有限. □

Example 5.5. $f\in C'(\mathbb{R}^2)$，$|f|$, $|\partial_y f|$ 有界，求方程组:

$$\begin{cases}y'=e^x+f(x,y)\sin\left[2\pi(y-e^x)\right]\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$$

的最大解存在区间.

Solution. 令 $F(x,y)=e^x+f(x,y)\sin\left[2\pi(y-e^x)\right]$，则:

$$\partial_y F=\partial_y f(x,y)\sin\left[2\pi(y-e^x)\right]+2\pi f(x,y)\cos\left[2\pi(y-e^x)\right]$$

$$|\partial_y F|\le|\partial_y f(x,y)|+2\pi|f(x,y)|\le+\infty$$

因此 F 关于 y 满足一致 Lip 条件，所以最大解存在区间为 $(-\infty,+\infty)$. □

Example 5.6. 证明对于一般的 f，方程组:

$$\begin{cases}y'=e^x+f(x,y)\sin\left[2\pi(y-e^x)\right]\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$$

的最大解存在区间也是 $(-\infty,+\infty)$.

Solution. $\forall K\subset\mathbb{R}^2$，$K$ 有界闭集，$|\partial_y F|\le M<+\infty$. 因此 F 关于 y 满足局部 Lip 条件，所以存在唯一饱和解.

注意到 $y'=e^x+f(x,y)\sin\left[2\pi(y-e^x)\right]$ 有特解:

$$y=e^x+\frac{k}{2}\quad x\in(-\infty,+\infty),\ k\in\mathbb{Z}$$

取 $x_0=0$. 则当 $y_0=1+\frac{k}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$ 时，存在唯一整体解 $y=e^x+\frac{k}{2}$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

若 $y_0\ne1+\frac{k}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$，则 $\exists m\in\mathbb{Z}$,

$$1+\frac{m}{2}<y_0<1+\frac{m+1}{2}$$

考虑 $\Omega=\left\{(x,y)|x\in\mathbb{R},\ e^x+\frac{m}{2}<y<e^x+\frac{m+1}{2}\right\}$ 由 Cauchy 问题存在唯一解，保证解曲线与 $y=e^x+\frac{m}{2}$ 和 $y=e^x+\frac{m+1}{2}$ 不相交. 由延拓定理，解在 $(-\infty,+\infty)$ 上存在.

综上，无论 y_0 取何值，方程组的最大解存在区间均为 $(-\infty,+\infty)$. □

5.3.4 解存在区间估计

Theorem 5.14 (第一比较定理). 设 $f, F \in C(G)$，$G \subset \mathbb{R}^2$ 是开集，且

$$f(x,y) < F(x,y) \quad \forall (x,y) \in G$$

设 $Y(x), y(x)$ 分别是 $\begin{cases} y' = F(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 在区间 $[x_0, a)$ 上的解，则

$$y(x) < Y(x) \quad \forall x \in (x_0, b)$$

Solution. 令 $\psi(x) = Y(x) - y(x)$. 则 $\psi(x_0) = 0$，

$$\psi'(x_0) = F(x_0, y_0) - f(x_0, y_0) > 0$$

由连续函数保号性，$\exists \beta > 0$，使得

$$\psi'(x) > 0 \quad \forall x \in [x_0, x_0 + \beta)$$

因此 $\psi(x) > 0, \forall x \in (x_0, x_0 + \beta)$.

假设 $\exists x_2 \in (x_0 + \beta, b), \psi(x) > 0$，取 $x_1 = \min\{x \in (x_0 + \beta, b) | \psi(x) > 0\}$，则 $\psi'(x_1) \leq 0$. 但是:

$$\begin{aligned} \psi'(x_1) &= Y'(x_1) - y'(x_1) \\ &= F(x_1, Y(x_1)) - f(x_1, y(x_1)) \\ &> 0 \end{aligned}$$

矛盾，因此 $\forall x \in (x_0, b)$，有 $\psi(x) > 0$. □

但是一些特殊的情况，例如: $y' = (x - y)e^{x^2 y}$，就无法用第一比较定理.

Definition 5.9 (右行上解). 若 $w(x) \in C'([x_0, b))$，且满足:

$$\begin{cases} w'(x) > f(x, w(x)) \quad \forall x \in [x_0, b) \\ w(x_0) \geq y_0 \end{cases}$$

则称 $w(x)$ 为 $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 在 $[x_0, b)$ 上的**右行上解**.

相应的，有右行下解的定义.

Definition 5.10 (右行下解). 若 $v(x) \in C'([x_0, b))$，且满足:

$$\begin{cases} v'(x) < f(x, v(x)) \quad \forall x \in [x_0, b) \\ v(x_0) \leq y_0 \end{cases}$$

则称 $v(x)$ 为 $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 在 $[x_0, b)$ 上的**右行下解**.

Theorem 5.15. 方程 $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 在 $[x_0, b)$ 上存在解 $y(x)$，且有右行上解 $w(x)$ 和右行下解 $v(x)$，则有

$$v(x) < y(x) < w(x) \quad \forall x \in (x_0, b)$$

Solution. 取 $g(x) = w'(x) - f(x, w(x)) > 0\,(\forall x \in [x_0, b))$. 令 $F(x,y) = f(x,y) + g(x) > f(x,y)$，则有:

$$\begin{cases} w'(x) = F(x, w(x)) \\ w(x_0) \geq y_0 \end{cases}$$

由第一比较定理可知，$\forall x \in (x_0, b)$，有 $y(x) < w(x)$. 同理可证，$\forall x \in (x_0, b)$，有 $v(x) < y(x)$.

所以，$\forall x \in (x_0, b)$，有 $v(x) < y(x) < w(x)$. □

Theorem 5.16. 设区域 $G = \{(x,y) | x \in [x_0, b), y \in \mathbb{R}\}$，$f \in C(G)$，$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 在 $[x_0, \beta)$ 上存在解 $y(x)$. 若存在右行上解 $w(x)$ 和右行下解 $v(x)$，满足:

（1）w, v 在 $[x_0, \beta)$ 上存在，则 $\beta \geq \beta_0$.

（2）w 在 $[x_0, \beta_0)$ 上存在，$\lim_{x \to \beta_0^-} w(x) = -\infty$，则 $\beta \leq \beta_0$.

（3）v 在 $[x_0, \beta_0)$ 上存在，$\lim_{x \to \beta_0^-} v(x) = +\infty$，则 $\beta \leq \beta_0$.

Solution. （1）设 $\Omega = \{(x,y) | x \in (x_0, \beta_0), v(x) < y < w(x)\}$ 是开集，则 y 可延拓至 $\partial\Omega$. 因为 $v(x) < y < w(x)$，所以 y 只能延拓至 $x = \beta_0$，因此 $\beta \geq \beta_0$.

（2）设 $\Omega = \{(x,y) | x \in (x_0, \beta_0), y < w(x)\}$ 是开集，则 y 可延拓至 $\partial\Omega$. 因为 $y < w(x)$，所以 y 只能延拓至 $y \to -\infty$，因此 $\beta \leq \beta_0$.

（3）设 $\Omega = \{(x,y) | x \in (x_0, \beta_0), y > v(x)\}$ 是开集，则 y 可延拓至 $\partial\Omega$. 因为 $y > v(x)$，所以 y 只能延拓至 $y \to +\infty$，因此 $\beta \leq \beta_0$. □

与数学分析中的上界下界概念类似，我们可以定义“解的上界和下界”.

Definition 5.11. 若 $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 在 $[x_0, b)$ 上存在 2 个解 $v(x), w(x)$，且对方程组的所有解 $y(x)$，都有 $v(x) \leq y(x) \leq w(x)$，则称 $v(x), w(x)$ 分别为方程组在 $[x_0, b)$ 上的 **右行最小解**和**右行最大解**.

Theorem 5.17. 设区域 $R = \{(x,y) | x \in [x_0, x_0 + a), |y - y_0| < b\}$，$f \in C(R)$，记 $\alpha = \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}, M = \max_R |f|$，则存在 $0 < h < \alpha$，使得 $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 在 $[x_0, x_0 + h)$ 上存在右行最小解和右行最大解.

并且右行最小解和右行最大解各自唯一.

Solution. 我们发现形式和 Peano 定理很像，因此考虑采用 Peano 定理和第一比较定理的思路来证明.

对于 ODE:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) + \dfrac{1}{n} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

由 Peano 定理可知，$\exists \alpha_n > 0$，使得 ODE 在 $[x_0, x_0+\alpha_n]$ 上存在解 $\varphi_n(x)$，其中 $\alpha_n = \min\left\{a, \dfrac{b}{M+\frac{1}{n}}\right\}$. 令 $N = \dfrac{1}{\frac{b}{a} - M}$，则 $\forall n > N$，有 $\alpha_n \geq h$. 则 $\forall n \geq N$，$\{\varphi_n(x)\}_{n=N}^{\infty}$ 在 $[x_0, x_0+h]$ 上存在.

设 $y(x)$ 是 $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 在 $[x_0, x_0+h)$ 上的解，则由第一比较定理可知，

$$y(x) \leq \varphi_n(x) \quad \forall x \in [x_0, x_0+h],\ n \geq N$$

由 Peano 定理的构造过程可知，$\{\varphi_n(x)\}$ 在 $[x_0, x_0+h]$ 上一致有界且等度连续，因此由 Arzela-Ascoli 定理可知，存在子列 $\{\varphi_{n_j}(x)\}$ 在 $[x_0, x_0+h]$ 上一致收敛，记极限为 $w(x)$. 则

$$w(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, w(s))\, ds \quad x \in [x_0, x_0+h]$$

因此 $w(x)$ 是原 ODE 在 $[x_0, x_0+h]$ 上的解，并且

$$y(x) \leq w(x) \quad \forall x \in [x_0, x_0+h]$$

因此 $w(x)$ 是右行最大解.

同理可证，存在右行最小解.

由确界原理可知，右行最大解和右行最小解各自唯一. □

Theorem 5.18 (第二比较定理)**.** *若 $f \leq F$ ($\forall (x,y) \in G$)，设 Φ 是 $\begin{cases} y' = F(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 在 $[x_0, b)$ 上的右行最大解，φ 是 $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 在 $[x_0, b)$ 上的右行最小解，则*

$$\varphi(x) \leq \Phi(x) \quad \forall x \in [x_0, b)$$

Solution. 设 $\exists x_2 \in [x_0, a]$, $\Phi(x_2) < \varphi(x_2)$. 取 $x_1 = \max\{x \in [x_0, x_2], \Phi(x) = \varphi(x)\}$，由上一个定理的证明过程，$\begin{cases} y' = f(x,y) + \dfrac{1}{n} \\ y(x_1) = \Phi(x_1) \end{cases}$ 在 $[x_1, x_1+h]$ 上存在解 $\varphi_n(x)$，且

$$\varphi_{n_j}(x) \rightrightarrows \Phi(x)$$

由第一比较定理，有:

$$\varphi(x) < \varphi_n(x) \quad \forall x \in (x_1, x_2]$$

令 $n_j \to \infty$，则有 $\Phi(x) \geq \varphi(x)$，矛盾. □

Remark 5.2. 事实上，减弱一点条件:（1）Φ 是右行最大解，φ 是右行解;（2）Φ 是右行解，φ 是右行最小解. 结论依然成立.

Remark 5.3. 第一比较定理加上关于 y 的 Lip 条件，也能够加上等号.

Example 5.7. $f \in C([0,a]\times\mathbb{R})$，且满足

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \le \frac{q}{x}|y_1-y_2| \quad \forall x\in(0,a],\ y_1,y_2\in\mathbb{R}$$

其中 $0<q<1$，证明 $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(0)=y_0 \end{cases}$ 在 $[0,a]$ 上存在唯一解.

Solution. 这不是 Lip 条件! 首先想到 Peano 定理, $\exists\alpha>0$, ODE 在 $[0,\alpha]$ 上存在解, 记为 $y=\varphi(x)$. 那么就在 $[\alpha,a]$ 上满足 Lip 条件, 因此在 $[\alpha,a]$ 上存在唯一解, 记为 $\psi(x)$. 由引理5.9可知, $\forall x\in[0,a]$, 有:

$$y(x)=\begin{cases}\varphi(x) & x\in[0,\alpha] \\ \psi(x) & x\in[\alpha,a]\end{cases}$$

是 ODE 在 $[0,a]$ 上的解.

下面证明唯一性. 设存在不同的解 y_1,y_2. 不妨设 $\exists x_2\in[0,a], y_1(x_2)<y_2(x_2)$. $x_1=\max\{x\in[0,x_2], y_1(x)=y_2(x)\}$，令 $u(x)=y_2(x)-y_1(x)$.

$$\begin{aligned} u'(x) &= f(x,y_2(x))-f(x,y_1(x)) \\ &\le \frac{q}{x}(y_2(x)-y_1(x)) \\ &= \frac{q}{x}u(x) \end{aligned}$$

因此 $(x^{-q}u)'\le 0$，则有:

$$x_2^{-q}u(x_2)-x^{-q}u(x)\le 0 \quad x\to x1^+$$

$$x_2^{-q}u(x_2)\le x_1^{-q}u(x_1)=0$$

所以 $y_2(x_2)\le y_1(x_2)$，矛盾，因此解唯一.

额外的，若 $x_1=0$，需要证明 $\lim_{x\to 0+}x^{-q}u(x)=0$. 由 Lagrange 中值定理，$\exists\xi\in(0,x)$，使得:

$$u(x)-u(0)\sim u'(\xi)(x-0)$$

由于 u' 是有界的，又 $0<q<1$，所以 $\lim_{x\to 0+}u(x)=u(0)=0$. ◻

5.4 连续依赖性

这部分我们考虑的是对于微分方程初值问题进行一些小扰动:

$$\begin{cases} y'=f(x,y)+\varepsilon(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases} \quad \begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0+\varepsilon \end{cases}$$

是否仍有 $\varphi_\varepsilon(x)\to\varphi_0(x)$? $\varphi_0(x)$ 指没有扰动时的解.

Theorem 5.19. 设 $f,F\in C(G)$，f 关于 y 满足一致 *Lip* 条件，$|f-F|\le\varepsilon$，$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$

在 $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ 上有解 $y(x)$，$\begin{cases} y' = F(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 在 $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ 上有解 $\varphi(x)$，则

$$|y(x) - \varphi(x)| \le C\varepsilon \quad \forall x \in [x_0-\alpha, x_0+\alpha]$$

Solution. $\forall x \in [x_0, x_0+\alpha]$，有:

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds$$

$$\varphi = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(s, \varphi(s))\, ds$$

因此:

$$\begin{aligned} |y(x) - \varphi(x)| &\le \int_{x_0}^{x} |f(s,y(s)) - F(s,\varphi(s))|\, ds \\ &\le \int_{x_0}^{x} \left[|f(s,y(s)) - f(s,\varphi(s))| + |f(s,\varphi(s)) - F(s,\varphi(s))|\right]\, ds \\ (\text{Lip}) &\le \int_{x_0}^{x} \left[\varepsilon + L|y(s) - \varphi(s)|\right]\, ds \end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式可知:

$$|y(x) - \varphi(x)| \le \varepsilon \alpha e^{L\alpha}$$

记 $\varepsilon + L|y(s) - \varphi(s)| = LY$，则

$$Y = \frac{\varepsilon}{L} + |y(s) - \varphi(s)| \le \frac{\varepsilon}{L} + \int_{x_0}^{x} LY\, ds$$

由 Gronwall 不等式可知:

$$Y \le \frac{\varepsilon}{L} e^{L\alpha}$$

因此:

$$|y(x) - \varphi(x)| \le \frac{\varepsilon}{L}\left(e^{L\alpha} - 1\right)$$

□

Theorem 5.20. G 是 $\mathbb{R}^2$ 上的连通开区域，$(x_0, y_0) \in G, f \in C(G)$，$f$ 关于 y 满足局部 *Lip* 条件，$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 在 J 上存在唯一解 $\varphi(x, x_0, y_0)$，则对于任意 $[a,b] \subset J\,(x_0 \in [a,b])$，若 (ξ, η) 充分靠近 (x_0, y_0)，则 $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(\xi) = \eta \end{cases}$ 在 $[a,b]$ 上的唯一解 $\varphi(x, \xi, \eta)$ 满足:

$$\lim_{(\xi,\eta)\to(x_0,y_0)} \varphi(x,\xi,\eta) = \varphi(x, x_0, y_0)$$

Solution. 设 $\varphi(x, x_0, y_0)$ 的解曲线为 S. 由于 G 是开集，所以存在紧集 $G_1 \subset G$，使得 $S \subset G_1$的内部，在 G_1 上，f 关于 y 满足一致 Lip 条件.

我们断言，$\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \exists \delta > 0$，使得 $\forall (\xi, \eta)$，有:

$$(\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2 < \delta^2$$

$$|\varphi(x,\xi,\eta)-\varphi(x,x_0,y_0)|<\varepsilon$$

记 $\Omega_\varepsilon=\{(x,y)|x\in[a,b],|y-\varphi(x,x_0,y_0)|\le\varepsilon\}$，满足 $\Omega_\varepsilon\subset G_1$. 在 Ω_ε 中对 $\begin{cases}y'=f(x,y)\\y(\xi)=\eta\end{cases}$ 进行延拓，则 Ω_ε 中存在唯一饱和解 $f(x,\xi,\eta)\,(x\in[c,d])$.

因此我们将这个断言转化为断言 2： $c=a,d=b$. 仅看 $d=b$ 的情况.

假设 $d<b$，则 $|\varphi(d,\xi,\eta)-\varphi(d,x_0,y_0)|=\varepsilon$，而 $\varphi(x,\xi,\eta)=\eta+\int_\xi^x f(s,\varphi(s))\,ds$，$\varphi(x,x_0,y_0)=y_0+\int_{x_0}^x f(s,\varphi(s))\,ds$，因此:

$$\begin{aligned}|\varphi(d,\xi,\eta)-\varphi(d,x_0,y_0)|&\le|\eta-y_0|+\left|\int_{x_0}^{\xi}f\,ds\right|+\int_\xi^x|f(s,\varphi(s,\xi,\eta))-f(s,\varphi(s,x_0,y_0))|\,ds\\&\le\delta+M\delta+\int_\xi^x L|\varphi(s,\xi,\eta)-\varphi(s,x_0,y_0)|\,ds\end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式可知:

$$|\varphi(d,\xi,\eta)-\varphi(d,x_0,y_0)|\le\delta(1+M)e^{L(b-a)}$$

为了导出矛盾，需要 $\delta(1+M)e^{L(b-a)}\le\dfrac{\varepsilon}{2}$. 因此取 $\delta=\min\{x_0-a,b-x_0,\varepsilon,\dfrac{\varepsilon}{2(1+M)}e^{-L(b-a)}\}$，得到矛盾，断言 2 成立! □

事实上，若 $f\in C(G)$ 关于 y 满足一致 Lip 条件，则三元函数 $\varphi(x;x_0,y_0)$ 连续.

Theorem 5.21. *设 G 是 $\mathbb{R}^2$ 上的连通开区域, $f,\dfrac{\partial f}{\partial y}\in C(G)$, $\begin{cases}y'=f(x,y)\\y(x_0)=y_0\end{cases}$ 的解 $\varphi(x,x_0,y_0)$ 在其定义域上连续可微.*

Solution. 上一个定理说明了连续性. 下面直接求出偏导来证明可微性.

$$\varphi(x,x_0,y_0)=y_0+\int_{x_0}^x f(s,\varphi(s,x_0,y_0))\,ds$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}=&\,0-f(x_0,\varphi(x_0,x_0,y_0))\\&+\int_{x_0}^x\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\,ds\end{aligned}$$

记为 $z(x)=-f(x_0,y_0)+\int_{x_0}^x\dfrac{\partial f}{\partial y}z(s)\,ds$，则 $z(x)$ 满足:

$$\begin{cases}z'=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x,x_0,y_0))z\\z(x_0)=-f(x_0,y_0)\end{cases}$$

因此:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}=-f(x_0,y_0)\exp\left\{\int_{x_0}^x\frac{\partial f}{\partial y}(s,\varphi(s,x_0,y_0))\,ds\right\}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}=1+\int_{x_0}^x\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}\,ds$$

记为 $w(x)=1+\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f}{\partial y}w(s)\,ds$，则 $w(x)$ 满足:

$$\begin{cases} w'=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x,x_0,y_0))w \\ w(x_0)=1 \end{cases}$$

因此:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}=\exp\left\{\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f}{\partial y}(s,\varphi(s,x_0,y_0))\,ds\right\}$$

□

Example 5.8. 方程组:

$$\begin{cases} y'=\sin(xy) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

有解 $\varphi(x,x_0,y_0)$，求 $\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0}\right|_{(x_0,y_0)=(0,0)}$ 和 $\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_0}\right|_{(x_0,y_0)=(0,0)}$.

Solution. $f=\sin(xy)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=x\cos(xy)$. $\begin{cases} y'=\sin(xy) \\ y(0)=0 \end{cases}$ 有唯一解 $y=0$，$\varphi(x;0,0)=0$. 因此:

$$f_y(x,\varphi(x;0,0))=f_y(x,0)=x$$
$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\right|_{(0,0)}=0$$
$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}\right|_{(0,0)}=\exp\left\{\int_0^x s\,ds\right\}=e^{\frac{x^2}{2}}$$

□

Example 5.9. 方程组:

$$\begin{cases} y'=f(x,y,\lambda) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

求 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\lambda}$.

Solution.

$$\varphi(x,x_0,y_0,\lambda)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(s,\varphi(s,x_0,y_0,\lambda),\lambda)\,ds$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\,ds+\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f}{\partial\lambda}\,ds$$

记为 $u(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f}{\partial y}u(s)\,ds+\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f}{\partial\lambda}\,ds$，则 $u(x)$ 满足:

$$\begin{cases} u'=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x,x_0,y_0,\lambda))u+\dfrac{\partial f}{\partial\lambda}(x,\varphi(x,x_0,y_0,\lambda)) \\ u(x_0)=0 \end{cases}$$

因此:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f}{\partial \lambda}(s,\varphi(s,x_0,y_0,\lambda))\exp\left\{\int_{s}^{x}\frac{\partial f}{\partial y}(t,\varphi(t,x_0,y_0,\lambda))\,dt\right\}ds$$

□

5.5 求解高阶 ODEs

5.5.1 首次积分法

Example 5.10. 求解 ODE:

$$\begin{cases} x'=y-x(x^2+y^2-1)\\ y'=-x-y(x^2+y^2-1)\end{cases}$$

Solution.

$$x'y-y'x=x^2+y^2$$
$$\frac{xy'-yx'}{x^2+y^2}=-1$$

得到:

$$\arctan\frac{y}{x}+t=C_1$$
$$x'x+y'y=-(x^2+y^2)(x^2+y^2-1)$$
$$\frac{(x^2+y^2)'}{2}=-(x^2+y^2)(x^2+y^2-1)$$

得到:

$$\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2}\cdot e^{2t}=C_2$$

联立两个方程，得到通解.

$$x=\frac{1}{\sqrt{1-C_2e^{-2t}}}\cos(C_1-t)$$
$$y=\frac{1}{\sqrt{1-C_2e^{-2t}}}\sin(C_1-t)$$

□

Definition 5.12. 设 $\mathbf{X}'=F(t,\mathbf{X})$，$G\subset\mathbb{R}^2$，$\Phi$ 在 G 中连续可微，且不恒等于常数. 若对 $\mathbf{X}'=F(t,\mathbf{X})$ 的任意解 $\mathbf{X}(t)$，都有

$$\Phi(t,\mathbf{X}(t))=\text{常数}$$

则称 $\Phi(t,\mathbf{X})$ 为 $\mathbf{X}'=F(t,\mathbf{X})$ 的一个 **首次积分**.

5.5.2 Hamilton 系统

Definition 5.13. 设 $H\in C'(G)$，$G\subset\mathbb{R}^2$，则称方程组:

$$\begin{cases} x'=\dfrac{\partial H}{\partial y}\\ y'=-\dfrac{\partial H}{\partial x}\end{cases}$$

为 **Hamilton 系统**，$H(t,x,y)$ 为 **Hamilton 量**.

判断依据：$\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial g}{\partial y}=0$. 得到的 Hamilton 量即为首次积分.

5.5.3 极坐标法

进行变换：

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

从而将 ODE 转化为 r,θ 的方程组.

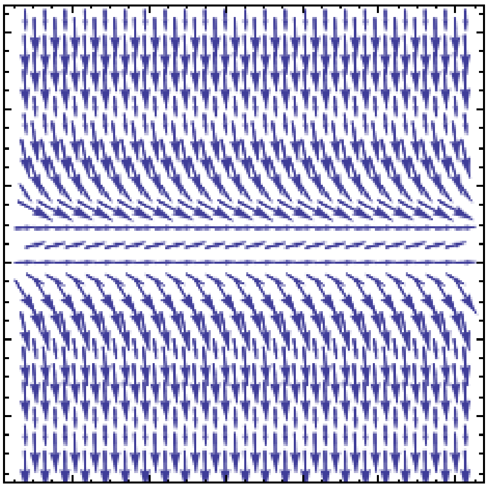
6 稳定性理论

前面连续依赖性的章节，我们关注的是一段区间内，解对初值的依赖性. 但是我们没办法照顾到全空间的情况. 这个章节我们关注的是整个空间中，解对初值的依赖性，也就是稳定性理论.

我们看到这个函数对应的解曲线:

$$y' = y - y^2$$

已知有两个解：$y = 0$ 和 $y = 1$. 我们发现，初值在 1 附近的解，都会趋向于 1; 初值在 0^+ 附近的



解，都会趋向于 1; 而初值在 0^- 附近的解，都会趋向于 0. 因此我们说，$y = 1$ 附近比较“稳定”，而 $y = 0$ 附近比较“不稳定”.

Definition 6.1. 设 $\mathbf{X}' = F(t, \mathbf{X})$，$F$ 连续，且关于 $\mathbf{X}$ 满足 Lip 条件，$\varphi(t)$ 为 $(\beta, +\infty)$ 上的解.

若 $\forall \varepsilon > 0, t_0 > \beta$，$\exists \delta > 0$，使得 $\forall \mathbf{X}_0\ (\|\mathbf{X}_0 - \varphi(t_0)\| < \delta)$，都有 $\begin{cases} \mathbf{X}' = F(t, \mathbf{X}) \\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \end{cases}$ 在 $[t_0, +\infty)$ 上存在解 $\mathbf{X}(t; t_0, \mathbf{X}_0)$，且

$$\|\mathbf{X}(t; t_0, \mathbf{X}_0) - \varphi(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \in [t_0, +\infty)$$

则称 $\varphi(t)$ 是**稳定的**.

Definition 6.2. 若 $\exists \varepsilon > 0, t_0 > \beta, \forall \delta > 0$, 使得 $\exists \mathbf{X}_0\ (\|\mathbf{X}_0 - \varphi(t_0)\| < \delta)$, 使得 $\begin{cases} \mathbf{X}' = F(t, \mathbf{X}) \\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \end{cases}$ 在 $[t_0, +\infty)$ 上不存在解 $\mathbf{X}(t; t_0, \mathbf{X}_0)$，或者存在解 $\mathbf{X}(t; t_0, \mathbf{X}_0)$，但

$$\exists t_1 > t_0, \|\mathbf{X}(t_1; t_0, \mathbf{X}_0) - \varphi(t_1)\| \geq \varepsilon$$

则称 $\varphi(t)$ 是**不稳定的**.

Definition 6.3. $\forall t > \beta, \exists \eta > 0$，使得：只要 $\|\mathbf{X}_0 - \varphi(t)\| < \eta$，都有 $\begin{cases} \mathbf{X}' = F(t, \mathbf{X}) \\ \mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0 \end{cases}$ 在

$[t,+\infty)$ 上存在解 $\mathbf{X}(t;t,\mathbf{X}_0)$，且

$$\lim_{t\to+\infty}\|\mathbf{X}(t;t,\mathbf{X}_0)-\varphi(t)\|=0$$

则称 $\varphi(t)$ 是**吸引的**.

Definition 6.4. 若 $\varphi(t)$ 既是稳定的又是吸引的，则称 $\varphi(t)$ 是**渐近稳定的**.

那么么如何判断一个解是否稳定呢？最朴素的是求出解然后用定义. 对于一些特殊的情况，我们有更方便的方法.

6.1 LODEs 的稳定性

对于 LODEs:

$$\mathbf{X}'=A(t)\mathbf{X}$$

Theorem 6.1. 零解稳定，等价于：$\forall t_0>\beta,\exists K(t_0)$，使得

$$\|\Phi(t)\|\le K(t_0)\quad\forall t\ge t_0$$

Solution. 先证明充分性. $\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\dfrac{\varepsilon}{K\|\Phi^{-1}(t)\|}$ 使得:

$$\|\mathbf{X}_0\|\le\|\Phi(t)\|\|\Phi^{-1}(t)\|\|\mathbf{X}_0\|<K\|\Phi^{-1}(t)\|\delta=\varepsilon$$

再证明必要性. $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使得对于所有的 $\|\mathbf{X}_0\|<\delta$，都有

$$\|\mathbf{X}(t;t_0,\mathbf{X}_0)\|<\varepsilon\quad\forall t\ge t_0$$

则有 $\|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\mathbf{X}_0\|<\varepsilon$. 取 $\mathbf{X}_i=\dfrac{\delta}{2}e_i$，其中 e_i 为标准正交基，则有:

$$\|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)e_i\|<\varepsilon\frac{2}{\delta}$$

$$\|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)E\|<\varepsilon\frac{2n}{\delta}$$

$$\begin{aligned}\|Phi(t)\|&\le\|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\|\|\Phi(t_0)\|\\&<\varepsilon\frac{2n}{\delta}\|\Phi(t_0)\|\\&=K\end{aligned}$$

□

Theorem 6.2. 零解渐近稳定，等价于:

$$\lim_{t\to+\infty}\|\Phi(t)\|=0$$

如果 A 是常矩阵，则有更简单的判据.

Theorem 6.3. 设 $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ 为常实数矩阵，则 $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$ 零解稳定的充分必要条件为：

$$Re\lambda_i \le 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

且 $Re\lambda_i = 0$ 时对应的 *Jordan* 块为一阶的.

Theorem 6.4. 设 $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ 为常实数矩阵，则 $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$ 零解渐近稳定的充分必要条件为：

$$Re\lambda_i < 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Theorem 6.5. 设 $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ 为常实数矩阵，则 $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$ 零解不稳定的充分条件为：

$$\exists i, 使得 Re\lambda_i > 0$$

或者

$$\exists i, 使得 Re\lambda_i = 0，且对应的\ Jordan\ 块不止一阶$$

6.2 线性近似法

我们考虑非线性微分方程：

$$\mathbf{X}' = A\mathbf{X} + R(t, \mathbf{X})$$

其中 $R(t, \mathbf{X})$ 满足：

$$\lim_{\|\mathbf{X}\|\to 0} \frac{\|R(t, \mathbf{X})\|}{\|\mathbf{X}\|} = 0$$

Theorem 6.6. 若 A 的所有特征值的实部均小于零，则 $\mathbf{X}' = A\mathbf{X} + R(t, \mathbf{X})$ 的零解渐近稳定.

Solution. 运用 Picard 定理和延拓定理进行证明.

$$\begin{cases} \mathbf{X}' = A\mathbf{X} + R(t, \mathbf{X}) \\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \end{cases}$$

存在唯一解 $\mathbf{X}(t), t \in [t_0, T)$.

$$\mathbf{X}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{X}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} R(s, \mathbf{X}(s))\, ds$$

$$\|\mathbf{X}(t)\| \le \|e^{A(t-t_0)}\|\|\mathbf{X}_0\| + \int_{t_0}^{t} \|e^{A(t-s)}\|\|R\|\, ds$$

由于 A 的所有特征值的实部均小于零，$\sigma > 0$，使得

$$\mathrm{Re}\lambda_i < -\sigma \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$|e^{\lambda_i t}| \le e^{-\sigma t}$$

因此，$\exists M > 0$，使得：

$$\|e^{At}\| \le Me^{-\frac{\sigma}{2}t}$$

所以

$$\|\mathbf{X}(t)\| \le Me^{-\frac{\sigma}{2}(t-t_0)}\|\mathbf{X}_0\| + \int_{t_0}^{t} Me^{-\frac{\sigma}{2}(t-s)}\varepsilon_1\|\mathbf{X}\|\,ds$$

得到:

$$e^{\frac{\sigma}{2}t}\|\mathbf{X}(t)\| \le Me^{\frac{\sigma}{2}t_0}\|\mathbf{X}_0\| + \int_{t_0}^{t} M\varepsilon_1 e^{\frac{\sigma}{2}s}\|\mathbf{X}(s)\|\,ds$$

由 Gronwall 不等式可知:

$$e^{\frac{\sigma}{2}t}\|\mathbf{X}(t)\| \le Me^{\frac{\sigma}{2}t_0}\|\mathbf{X}_0\|e^{\int_{t_0}^{t} M\varepsilon_1\,ds} = Me^{\frac{\sigma}{2}t_0}\|\mathbf{X}_0\|e^{M\varepsilon_1(t-t_0)}$$

因此:

$$\|\mathbf{X}(t)\| \le Me^{(M\varepsilon_1-\frac{\sigma}{2})(t-t_0)}\|\mathbf{X}_0\|$$

$$\|\mathbf{X}(t)\| = Me^{-\frac{\sigma}{4}(t-t_0)}\|\mathbf{X}_0\|$$

因此 $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta = \dfrac{\varepsilon \mathrm{or} \delta_1}{2M}$，当 $\|\mathbf{X}_0\| < \delta$ 时，有

$$\|\mathbf{X}(t)\| < \frac{\varepsilon \mathrm{or} \delta_1}{2} \quad \forall t \ge t_0$$

由延拓定理可知，$\mathbf{X}(t)$ 在 $[t_0, +\infty)$ 上存在唯一解. 且

$$\|\mathbf{X}(t)\| \le \frac{\varepsilon \mathrm{or} \delta_1}{2}e^{-\frac{\sigma}{4}(t-t_0)} \quad \forall t \ge t_0$$

□

Theorem 6.7. *若 A 存在特征值的实部大于零，则 $\mathbf{X}' = A\mathbf{X} + R(t, \mathbf{X})$ 的零解不稳定.*

Theorem 6.8. *实系数特征多项式*

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n$$

所有根有负实部的充分必要条件为:

$$\frac{a_j}{a_0} > 0 \quad (j = 0, 1, \cdots, n)$$

Theorem 6.9 (Routh-Hurwitz 准则). *实系数特征多项式*

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n$$

所有根有负实部的充分必要条件为: Routh-Hurwitz 行列式

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

的所有顺序主子式均大于零.

Example 6.1. 求:

$$\begin{cases} x' = -2x + y - z + x^3 e^y \\ y' = x - y + z^3 xy \\ z' = x + y - z - e^x(\cos z - 1) \end{cases}$$

的零解的稳定性.

Solution. 满足

$$\lim_{\|\mathbf{X}\| \to 0} \frac{\|R(t, \mathbf{X})\|}{\|\mathbf{X}\|} = 0$$

$|A - \lambda E| = -\lambda^3 - 4\lambda^2 - 5\lambda - 3 = 0$，看 $\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 3 = 0$

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 4 > 0, \Delta_2 = 17 > 0, \Delta_3 = 51 > 0$ 所以 $\forall \lambda_i, \mathrm{Re}\lambda_i < 0$，因此零解渐近稳定. □

6.3 Lyapunov 第二方法

我们这一部分仅研究自治系统:

$$\mathbf{X}' = F(\mathbf{X})$$

零解的稳定性.

Definition 6.5. 若 $V(\mathbf{X})$ 满足：（1）$V(0) = 0$；（2）存在 h，对所有 $\|\mathbf{X}\| < h$，都有 $V(\mathbf{X}) \in C'$；（3）对所有 $0 < \|\mathbf{X}\| < h$，都有 $V(\mathbf{X}) > 0 \,(< 0)$. 则称 $V(\mathbf{X})$ 为**正定 (负定) 函数**.

Definition 6.6. 若 $V(\mathbf{X})$ 满足：（1）$V(0) = 0$；（2）存在 h，对所有 $\|\mathbf{X}\| < h$，都有 $V(\mathbf{X}) \in C'$；（3）对所有 $0 < \|\mathbf{X}\| < h$，都有 $V(\mathbf{X}) \leq 0 \,(\geq 0)$. 则称 $V(\mathbf{X})$ 为**常负 (常正) 函数**.

Theorem 6.10. $\mathbf{X}' = F(\mathbf{X}), F(0) = 0$. *若存在* $h > 0$，$\|\mathbf{X}\| \leq h$ *上的正定函数* $V(\mathbf{X})$，*且全导数*

$$\nabla_{\mathbf{X}} V(\mathbf{X}) \cdot F(\mathbf{X})$$

是常负的，则零解是稳定的.

Theorem 6.11. $\mathbf{X}' = F(\mathbf{X}), F(0) = 0$. *若存在* $h > 0$，$\|\mathbf{X}\| \leq h$ *上的正定函数* $V(\mathbf{X})$，*且全导数*

$$\nabla_{\mathbf{X}} V(\mathbf{X}) \cdot F(\mathbf{X})$$

是定负的，则零解是渐近稳定的.

Theorem 6.12. $\mathbf{X}' = F(\mathbf{X}), F(0) = 0$. 若存在 $h > 0$，$\|\mathbf{X}\| \le h$ 上的正定函数 $V(\mathbf{X})$，且全导数

$$\nabla_{\mathbf{X}} V(\mathbf{X}) \cdot F(\mathbf{X})$$

是定正的，则零解是不稳定的.

Theorem 6.13. 若存在 $V(\mathbf{X})$ 在 *0* 的某个邻域 B_δ 的开子区域 N 上满足：（*1*）$V(0) \in C'(N)$；（*2*）$\{0\} \in \partial N, V\Big|_{\partial N} = 0$；（*3*）$N \cap B_\delta$ 上，全导数

$$\nabla_{\mathbf{X}} V(\mathbf{X}) \cdot F(\mathbf{X})$$

是定正的，则零解是不稳定的.

上述定理中，函数 $V(\mathbf{X})$ 称为 **Lyapunov 函数**. 通过寻找 Lyapunov 函数来解决零点稳定性问题的方法，称为 **Lyapunov 第二方法**.

7 几何理论

当我们将自治微分方程组:

$$\begin{cases} \mathbf{X}' = F(\mathbf{X}) \\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \end{cases}$$

的解 $\varphi(t; t_0, \mathbf{X}_0)$ 中的 t 视为自变量，将以 t 为参数且沿着 t 增加的方向的曲线 $\mathbf{X} = \varphi(t; t_0, \mathbf{X}_0)$ 称为**轨线**，将表明所有轨线之间位置关系的拓扑结构图称为**相图**.

其实轨线就是积分曲线在相空间中的投影.

Theorem 7.1 (轨线的唯一性)**.** *自治微分方程组的任意两条轨线不相交.*

若对一切 $t \in (-\infty, +\infty)$ ，$\varphi(t) = \mathbf{x}_0$ 为常向量，则称 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ 为一个**平衡解**，称该点为自治微分方程组的一个 **奇点**.

7.1 线性方程

我们考虑的是对于一个自治微分方程组:

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

其奇点为 $(0, 0)$，研究奇点附近的轨线形状.

第一种方法是将解求出来，然后分析解的形状. 但是这种方法并不总是最好的.

我们记 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，解出特征值 λ_1, λ_2，并讨论以下几种情况:

1. $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$　为稳定结点. 求解:

$$\left.\frac{y'}{x'}\right|_{y=kx} = k$$

得到两条直轨线 $y = k_1 x$ 和 $y = k_2 x$. 再根据 $\left.y'\right|_{(1,0)}$ 的符号判断非直轨线的方向.

2. $0 < \lambda_1 < \lambda_2$　为不稳定结点. 求解:

$$\left.\frac{y'}{x'}\right|_{y=kx} = k$$

得到两条直轨线 $y = k_1 x$ 和 $y = k_2 x$. 再根据 $\left.y'\right|_{(1,0)}$ 的符号判断非直轨线的方向.

3. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$　为鞍点. 求解:

$$\left.\frac{y'}{x'}\right|_{y=kx} = k$$

得到两条直轨线 $y = k_1 x$ 和 $y = k_2 x$. 再根据 $\left.y'\right|_{(1,k_1)}$ 的符号判断直轨线的方向，随之即得非直轨线的方向.

4. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ，根据 λ 符号判断是否稳定. 求解：

$$\left.\frac{y'}{x'}\right|_{y=kx} = k$$

若只有一个 k，则为退化结点. 再根据 $\left.y'\right|_{(1,0)}$ 的符号判断非直轨线的方向；若有无穷多个 k，则为星形结点.

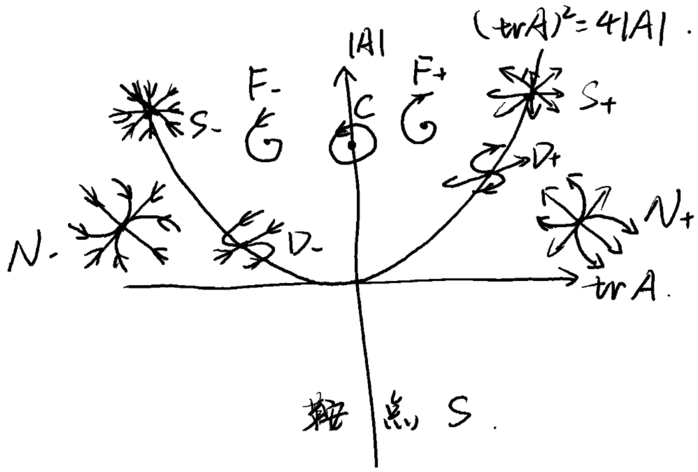
5. $\lambda = \alpha \pm i\beta$. 若 $\alpha = 0$，则为中心；若 $\alpha < 0$，则为稳定焦点，根据 $\left.y'\right|_{(1,0)}$ 的符号判断旋转方向；若 $\alpha > 0$，则为不稳定焦点，根据 $\left.y'\right|_{(1,0)}$ 的符号判断旋转方向.

更一般的，我们可以转换成极坐标形式 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ ，从而得到：

$$y'x - x'y = r^2\theta'$$

根据正负判断旋转方向. 事实上，前面的 $\left.y'\right|_{(1,0)} = \left.(y'x - x'y)\right|_{(1,0)}$，是一样的.

同时注意到 λ_1, λ_2 由 $\mathrm{tr}A$ 和 $\det A$ 决定，所以有如下分布图



7.2 非线性方程

对于非线性的自治微分方程组：

$$\begin{cases} x' = ax + by + R_1 \\ y' = cx + dy + R_2 \end{cases}$$

若满足 $\|(R_1, R_2)\| = o(\|(x, y)\|)$，则对应线性方程组的结点类型为 S, $N_\pm$, $F_\pm$ 时，非线性方程组在奇点处的轨线形状与线性方程组相同.

若满足 $\|(R_1, R_2)\| = o(\|(x, y)\|^{1+\delta})\,(\delta > 0)$，则对应线性方程组的结点类型为 $S_\pm$, $D_\pm$ 时，非线性方程组在奇点处的轨线形状与线性方程组相同.

若奇点并不是原点，则可以通过平移变换将奇点移到原点，再进行判断.

8 一阶偏微分方程 (PDE)

一阶偏微分方程的一般形式为:

$$F(t,x,u,u_t,u_x)=0$$

如果 $\partial_t u=0$，那么有 $u(t,x)=g(x), (g\in C')$，也就转化为常微分方程.

8.1 一阶 LPDE

如果满足 $\partial_t u+c\partial_x u=0$，则为一阶线性偏微分方程. 我们可以有两种看法:

1. $(1,c)\cdot(\partial_t u,\partial_x u)=0$，$(1,c)$ 与 $(\partial_t u,\partial_x u)$ 垂直.

2. 以 x 为横轴，t 为纵轴，记 $V=(c,1)$，则 u 沿着 V 的方向导数:

$$\begin{aligned}D_V u&=V\cdot Du\\&=V\cdot(\partial_x u,\partial_t u)\\&=c\partial_x u+\partial_t u\\&=0\end{aligned}$$

即 u 沿着直线 $x=x_0+ct$ 不变，则有:

$$u(t,x)=g(x-ct)\quad (g\in C')$$

3. 做变换 $\begin{cases}\widetilde{x}=cx+t\\\widetilde{t}=-x+ct\end{cases}$，则有:

$$\begin{aligned}\partial_x u&=\partial_{\widetilde{x}}u\cdot\frac{\partial\widetilde{x}}{\partial x}+\partial_{\widetilde{t}}u\cdot\frac{\partial\widetilde{t}}{\partial x}\\&=c\partial_{\widetilde{x}}u-\partial_{\widetilde{t}}u\\\partial_t u&=\partial_{\widetilde{x}}u\cdot\frac{\partial\widetilde{x}}{\partial t}+\partial_{\widetilde{t}}u\cdot\frac{\partial\widetilde{t}}{\partial t}\\&=\partial_{\widetilde{x}}u+c\partial_{\widetilde{t}}u\\\partial_t u+c\partial_x u&=(1+c^2)\partial_{\widetilde{x}}u=0\end{aligned}$$

所以 $u=g(\widetilde{t})=g(-x+ct), \forall g\in C'$.

我们将 $x=x_0+ct$ 称为**特征线**. 将其参数化:

$$\begin{cases}t=s\\x=x_0+cs\end{cases}$$

则原方程转化为:

$$\begin{cases}\dfrac{dt}{ds}=1\quad t\Big|_{s=0}=0\\\dfrac{dx}{ds}=c\quad x\Big|_{s=0}=x_0\end{cases}$$

那么就有

$$u(t,x)=u(t(s),x(s))=\widetilde{u}(s)$$

$$\begin{aligned}\frac{du}{ds} &= \frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds} \\ &= \partial_t u + c\partial_x u \\ &= 0\end{aligned}$$

$$u\Big|_{s=0} = g(x_0)$$

如果加上初值:

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 \\ u\Big|_{t=0} = g(x) \end{cases}$$

我们可以转变成:

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{ds} = 1 \quad t\Big|_{s=0} = 0 \\ \dfrac{dx}{ds} = c \quad x\Big|_{s=0} = x_0 \\ \dfrac{du}{ds} = 0 \quad u\Big|_{s=0} = g(x_0) \end{cases}$$

变成常微分方程组进行求解.

8.2 一般的一阶 LPDE

对于一般的方程:

$$au_t + bu_x = c,\ u\Big|_{t=0} = g(x)$$

我们有特征线方程:

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{ds} = a \quad t\Big|_{s=0} = 0 \\ \dfrac{dx}{ds} = b \quad x\Big|_{s=0} = x_0 \\ \dfrac{du}{ds} = c \quad u\Big|_{s=0} = g(x_0) \end{cases}$$

其中 $a = a(t,x,u), b = b(t,x,u), c = c(t,x,u)$. 由 Picard 定理可知有唯一解: $\begin{cases} t = t(s,x_0) \\ x = x(s,x_0) \\ u = u(s,x_0) \end{cases}$ 中, t, x 由隐函数定理可知存在 $s = s(t,x), x_0 = x_0(t,x)$. 因此有解:

$$u = u(s(t,x), x_0(t,x)) = \widetilde{u}(t,x)$$

Example 8.1 (Burgers 方程)**.** 求解:

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u\Big|_{t=0} = x \end{cases}$$

Solution. 特征线方程:

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{ds} = 1 \quad t\Big|_{s=0} = 0 \\ \dfrac{dx}{ds} = u \quad x\Big|_{s=0} = x_0 \\ \dfrac{du}{ds} = 0 \quad u\Big|_{s=0} = x_0 \end{cases}$$

解得:

$$\begin{cases} t = s \\ u = x_0 \end{cases}$$

代入第二条，得到 $x = x_0 s + x_0$，因此有:

$$x_0 = \frac{x}{t+1}$$

所以解为:

$$u = \frac{x}{t+1}$$

□

Example 8.2. 求解:

$$\begin{cases} u_t + x u_x = x \\ u\Big|_{t=0} = x^3 \end{cases}$$

Solution. 特征线方程:

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{ds} = 1 \quad t\Big|_{s=0} = 0 \\ \dfrac{dx}{ds} = x \quad x\Big|_{s=0} = x_0 \\ \dfrac{du}{ds} = x \quad u\Big|_{s=0} = x_0^3 \end{cases}$$

解得:

$$\begin{cases} t = s \\ x = x_0 e^s \end{cases}$$

代入第三条，得到:

$$u = x_0^3 + x_0(e^s - 1)$$

所以解为:

$$u = x^3 e^{-3t} + x(1 - e^{-t})$$

□

上面的**特征线法**，通过找特征线，将偏微分方程转化为常微分方程组进行求解.

8.3 首次积分法

先看其次的:

$$A_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + A_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$$

其特征方程为:

$$\frac{dx_1}{A_1} = \frac{dx_2}{A_2} = \cdots = \frac{dx_n}{A_n}$$

得到 $n-1$ 个首次积分 φ_i，则通解为:

$$u = g(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}) \quad \forall g \in C'$$

非齐次情况下，我们先看二元的：

$$A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}=C$$

那么 $\exists F, F(x,y,u)=0$，则有：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_u},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_u}$$

代入原方程，得到：

$$AF_x+BF_y+CF_u=0$$

变成了齐次方程. 其特征方程为：

$$\frac{dx}{A}=\frac{dy}{B}=\frac{du}{C}$$

得到两个首次积分 φ_1,φ_2，则通解为：

$$F=g(\varphi_1,\varphi_2)=0\quad \forall g\in C'$$

Example 8.3. 求解：

$$uu_t+u_x=1$$

过曲线 $t=a,x=a,u=\frac{1}{2}a$.

Solution. **(1)** 特征线法.

$$\begin{cases}\dfrac{dt}{ds}=u & t\Big|_{s=0}=a\\ \dfrac{dx}{ds}=1 & x\Big|_{s=0}=a\\ \dfrac{du}{ds}=1 & u\Big|_{s=0}=\dfrac{1}{2}a\end{cases}$$

解得：

$$x=a+s,u=\frac{1}{2}a+s$$

代入第一条，得到：

$$t=\frac{1}{2}s^2+\frac{1}{2}as+a$$

所以：

$$s=\frac{t-x}{\frac{1}{2}x-1},\ a=x-\frac{t-x}{\frac{1}{2}x-1}$$

因此解为：

$$u=\frac{1}{2}\left(x-\frac{t-x}{\frac{1}{2}x-1}\right)+\frac{t-x}{\frac{1}{2}x-1}$$

(2) 首次积分法.

$$\frac{dt}{u}=\frac{dx}{1}=\frac{du}{1}$$

$$\frac{dt}{u}=\frac{du}{1}\quad\therefore\ t-\frac{1}{2}u=c_1$$

$$\frac{dx}{1}=\frac{du}{1}\quad\therefore\ x-u=c_2$$

因此解为：

$$\Phi\left(t-\frac{1}{2}u,x-u\right)=0$$

不妨设 $t-\dfrac{1}{2}u=f(x-u)$. 代入初始条件，得到：

$$\begin{aligned} a-\frac{1}{8}a^2 &= f\left(a-\frac{1}{2}a\right) \\ &= f\left(\frac{1}{2}a\right) \end{aligned}$$

所以：

$$f(\xi)=2\xi-\frac{1}{2}\xi^2$$

代入 $t-\dfrac{1}{2}u=f(x-u)$，得到：

$$t-\frac{1}{2}u=2(x-u)-\frac{1}{2}(x-u)^2$$

因此解为：

$$u^2-2(x+1)u+4x-2t=0$$

$\square$