Instituto Superior Técnico

LEEC

Sinais e Sistemas

Relatório Laboratório Sinais e Sistemas

Aluno: Henrique Machado 103202
Aluno: Miguel Neves 103462

Janeiro
2023

Conteúdo

1 Sinais Sinusoidais

- **Q1:** As sinusoidais com frequência mais altas correspondem aos sons mais graves, inversamente, as sinusoidais com frequência mais baixa correspondem aos sons mais graves.

- **Q2:** A frequência minima que nós conseguimos ouvir foi $55hz$ e a frequência máxima que conseguimos ouvir foi $18000hz$.

2 Notas Musicais

- **Q3:**

  Mi$_4$: $329.63hz$

  Fá$_4^{\#}$: $370.00hz$

  Sol$_4$: $392.00hz$

  Si$_4$: $493.89hz$

  Dó$_5$: $554.37hz$

3 Impulso e Degrau Unitários

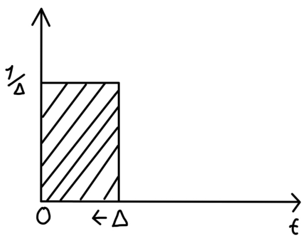
- **Q4:** Com base na definição de degrau unitário, $u(at + b)$ pode ser escrito como $u(\pm t - t_0)$ uma vez que: $t_0 = \frac{b}{|a|}$, onde temos que

$$\begin{cases} a > 0, & t > 0 \\ a < 0, & t < 0 \end{cases}$$

  Caso $a < 0$, verifica-se uma inversão no tempo do gráfico de $u(t)$.

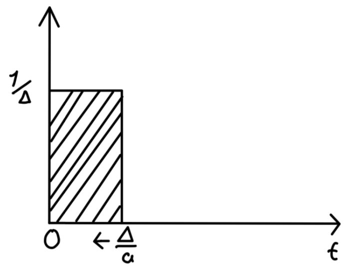
- **Q5:** $\delta(at) = \frac{1}{\Delta}[u(at) - u(at - \Delta)]$ e $\delta(at) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_{\Delta}(at)$, com $a > 0$

  Para $\delta(t)$

  Área $= \frac{1}{\Delta} \times \Delta = 1$

  Para$\delta(at)$

  Área $= \frac{1}{\Delta} \times \frac{\Delta}{a} = \frac{1}{a}$

  Logo, $\delta(at) = \frac{1}{a}\delta(t)$, com $a > 0$.

- **Q6:** Não se verifica nenhuma mudança no gráfico de $\delta(at)$ em relação ao gráfico de $\delta(t)$. No entanto, pelo que foi concluído previamente, o que deveria acontecer seria uma redução da área do impulso devido ao produto pelo termo $\frac{1}{a}$ (sendo $a > 1$) transformação esta que não é visível no visor.

4 Sistemas

- **Q7:** O sistema apresentado é linear:

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = x_1(t) + 0.5x_1(t - 0.25)$$

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = x_2(t) + 0.5x_2(t - 0.25)$$

$x_3(t) \rightarrow$ Combinação linear de $x_1(t)$ e $x_2(t)$: $x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$

$$y_3(t) = x_3(t) + 0.5x_3(t + 0.25)$$

$$= ax_1(t) + bx_2(t) + 0.5(ax_1(t - 0.25) + bx_2(t - 0.25))$$
$$= ax_1(t) + bx_2(t) + 0.5ax_1(t - 0.25) + 0.5bx_2(t - 0.25)$$
$$= a(x_1(t) + 0.5x_1(t - 0.25)) + b(x_2(t) + 0.5x_2(t - 0.25))$$
$$= ay_1(t) + by_2(t) \rightarrow \text{é linear.}$$

E é invariante no tempo:

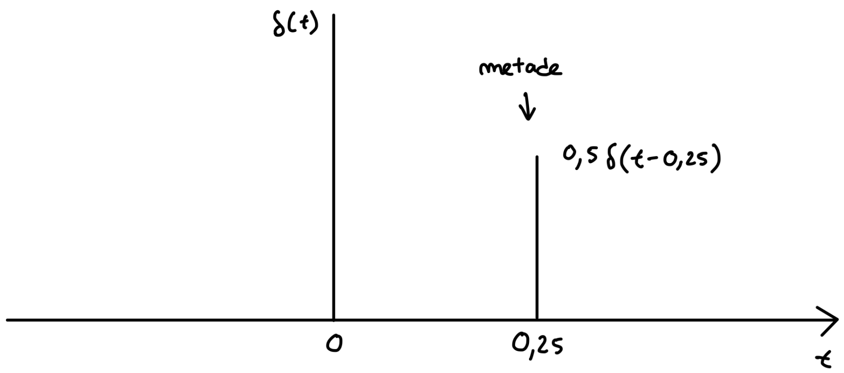
$$y_1(t) = x_1(t) + 0.5x_1(t - 0.25)$$

$$x_2(t) = x_1(t - t_0) \rightarrow y_2(t) = x_2(t) + 0.5x_2(t - 0.25)$$
$$= x_1(t - t_0) + 0.5x_1(t - t_0 - 0.25)$$

$$y_1(t - t_0) = x_1(t - t_0) + 0.5x_1(t - t_0 - 0.25)$$

$$\text{logo } y_2(t) = y_1(t - t_0) \rightarrow \text{é invariante no tempo.}$$

- **Q8:** Resposta do sistema ao impulso unitário: $\delta(t)y(t) = \delta(t) + 0.5\delta(t - 0.25)$



- **Q9:** O sistema apresentado ($y(t)$) possui memória visto que não depende apenas do valor de $x(t)$ mas sim de $x(t)$ e de $(t-0.25)$. Para além disso é um sistema causal uma vez que o seu output depende apenas dos valores do presente $x(t)$ e do passado $x(t-0.25)$. Em relação à sua estabilidade, pode-se afirmar que é um sistema estável, visto que não é possível encontrar nenhum input limitado que provocasse um output não limitado:
  Sendo a, b números arbitrários que verificam as condições

$$\begin{cases} |x(t)| < a \\ |x(t-0.25)| < b \end{cases}$$

  Então: $-a - 0.5b < y(t) < at + 0.5b$, o que representa um output limitado.

- **Q10:** O efeito produzido pelo sistema é um eco (prolongamento do som).

- **Q11:** $x_2(t) = \cos(44t)$, que pode ser escrito como

$$x_2(t) = \frac{1}{2}e^{j44t} + \frac{1}{2}e^{-j44t}$$

  $y_2(t) = x_2(t) + 0.5x_2(t-0.25) =$

$$= \frac{1}{2}e^{j44t} + \frac{1}{2}e^{-j44t} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{j44t-0.25} + \frac{1}{2}e^{-j44t+0.25}\right)$$

$$= \frac{1}{2}e^{j44t} + \frac{1}{2}e^{-j44t} + \frac{1}{4}e^{j44t-11} + \frac{1}{4}e^{-j44t+11}$$

$$= \frac{1}{2}e^{j44t} + \frac{1}{2}e^{-j44t} + \frac{1}{4e^{11}}e^{j44t} + \frac{e^{11}}{4}e^{-j44t}$$

$$= \frac{2e^{11}+1}{4e^{11}}e^{j44t} + \frac{2+e^{11}}{4}e^{-j44t}$$

5 Série de Fourier

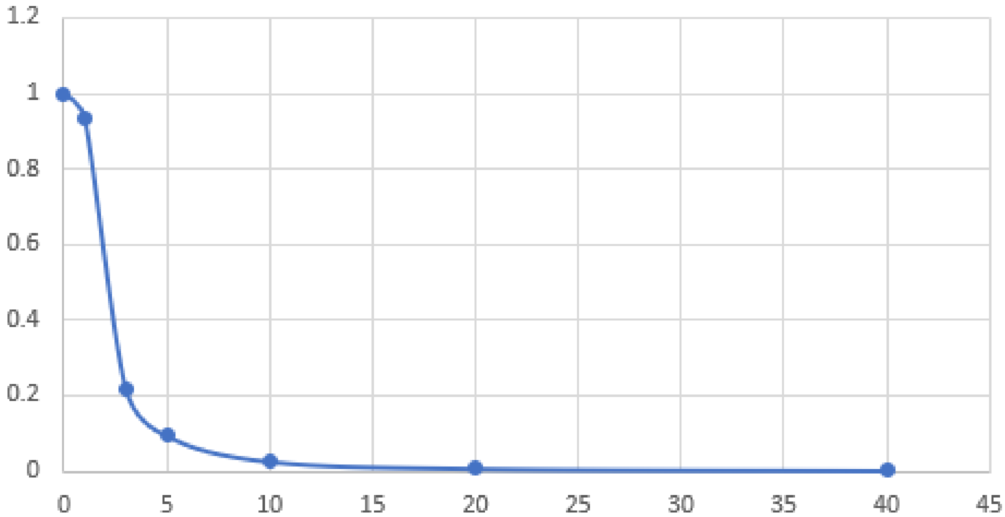
6 Resposta em Frequência

- **Q18:** Para determinar o módulo e o argumento da resposta em frequência do sistema $H(jw)$ para cada valor de w, necessitamos de medir experimentalmente no sinal de saída $y(t)$ a amplitude e a fase da frequência w.
  Com esses valores conseguimos calcular a transformada de Fourier de $y(t)$ a partir da fórmula:
  $$Y(jw) = \int y(t)e^{-jwt}dt$$
  Com isso conseguimos calcular o módulo de $H(jw)$ a partir da fórmula:
  $$|H(jw)| = \frac{|Y(jw)|}{|X(jw)|}$$
  Sendo $X(jw)$a transformada de Fourier de $x(t)$.
  O argumento da resposta em frequência do sistema $H(jw)$ é calculado a partir da fórmula:
  $$\angle H(jw) = \angle Y(jw) - \angle X(jw)$$

- **Q19:** Para calcular o módulo da resposta em frequências do sistema3 usaremos a fórmula
  $$|H(jw)| = \frac{|Y(jw)|}{|X(jw)|}$$
  em que $|Y(jw)|$ é a amplitude do sinal de saída e $|X(jw)|$ é a amplitude do sinal de entrada dado por $\cos(wt)$.

$$w = 0, |Y(jw)| = 1 \text{ e } |X(jw)| = 1, \text{ logo } |H(jw)| = \frac{1}{1} = 1$$
$$w = 1, |Y(jw)| = 0.933 \text{ e } |X(jw)| = 1, \text{ logo } |H(jw)| = \frac{0.933}{1} = 0.933$$
$$w = 3, |Y(jw)| = 0.657 \text{ e } |X(jw)| = 3, \text{ logo } |H(jw)| = \frac{0.657}{3} = 0.219$$
$$w = 5, |Y(jw)| = 0.463 \text{ e } |X(jw)| = 5, \text{ logo } |H(jw)| = \frac{0.463}{5} = 0.0926$$
$$w = 10, |Y(jw)| = 0.252 \text{ e } |X(jw)| = 10, \text{ logo } |H(jw)| = \frac{0.252}{10} = 0.0252$$
$$w = 20, |Y(jw)| = 0.130 \text{ e } |X(jw)| = 20, \text{ logo } |H(jw)| = \frac{0.130}{20} = 0.0065$$
$$w = 50, |Y(jw)| = 0.065 \text{ e } |X(jw)| = 50, \text{ logo } |H(jw)| = \frac{0.065}{50} = 0.0013$$

- **Q20:**



Interpretando o gráfico conseguimos ver que é um filtro passa baixo, pois com as frequênciasmais baixas o módulo é maior. Este filtro não é ideal pois exibe as características de transmissão com distorção.

7 Filtragem

- **Q23:** Sendo que um filtro passa-baixo apenas deixa passar as frequências baixas e rejeita as frequências mais altas, logo este não reproduz bem as zonas de variação rápida do sinal p, mas reproduz bem as zonas de variação lenta.
  Por sua vez o filtro passa-alto, como é o inverso do filtro passa-baixo, reproduz bem as zonas de variação rápida do sinal p, mas não reproduz bem as zonas de variação lenta.

8 Amostragem

- **Q25:** O Teorema da Amostragem afirma que, para reconstruir corretamente um sinal contínuo a partir de suas amostras, é necessário que

$$w_s > 2w_{onda}$$

sendo w_s a taxa de amostragem e w_{onda} a frequências da onda. A frequência máxima no nosso caso é de 10π radianos por segundo, logo a taxa de amostragem vai ter de ser maior que 20π amostras por segundo, logo como $w = \frac{2\pi}{T} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{w}$ temos que a gama de valores terá de ser $T = \frac{2\pi}{20\pi} = \frac{1}{10} = 10^{-1}$.