



TÉCNICO
LISBOA

Instituto Superior Técnico
LEEC
Sinais e Sistemas

Relatório Laboratório Sinais e Sistemas

Aluno: Henrique Machado 103202

Aluno: Miguel Neves 103462

Grupo: 79

Janeiro
2023

Conteúdo

1	Sinais Sinusoidais	1
2	Notas Musicais	1
3	Impulso e Degrau Unitários	1
4	Sistemas	3
5	Série de Fourier	6
6	Resposta em Frequência	8
7	Filtragem	11
8	Amostragem	12

1 Sinais Sinusoidais

- **Q1:** As sinusoidais com frequência mais altas correspondem aos sons mais agudos, inversamente, as sinusoidais com frequência mais baixa correspondem aos sons mais graves.
- **Q2:** A frequência mínima que nós conseguimos ouvir foi 55hz e a frequência máxima que conseguimos ouvir foi 18000hz .

2 Notas Musicais

- **Q3:**

Mi₄: 329.63hz

Fá₄[#]: 370.00hz

Sol₄: 392.00hz

Si₄: 493.89hz

Dó₅: 554.37hz

3 Impulso e Degrau Unitários

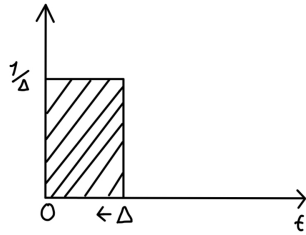
- **Q4:** Com base na definição de degrau unitário, $u(at + b)$ pode ser escrito como $u(\pm t - t_0)$ uma vez que: $t_0 = \frac{b}{|a|}$, onde temos que

$$\begin{cases} a > 0, & t > 0 \\ a < 0, & t < 0 \end{cases}$$

Caso $a < 0$, verifica-se uma inversão no tempo do gráfico de $u(t)$.

- **Q5:** $\delta(at) = \frac{1}{\Delta}[u(at) - u(at - \Delta)]$ e $\delta(at) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(at)$, com $a > 0$

Para $\delta(t)$



Para $\delta(at)$

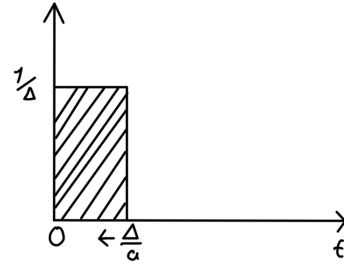


Figura 1: Comparação entre os gráficos entre $\delta(t)$ e $\delta(at)$

$$\text{Área} = \frac{1}{\Delta} \times \Delta = 1$$

$$\text{Área} = \frac{1}{\Delta} \times \frac{\Delta}{a} = \frac{1}{a}$$

Logo, $\delta(at) = \frac{1}{a}\delta(t)$, com $a > 0$.

- **Q6:** Não se verifica nenhuma mudança no gráfico de $\delta(at)$ em relação ao gráfico de $\delta(t)$. No entanto, pelo que foi concluído previamente, o que deveria acontecer seria uma redução da área do impulso devido ao produto pelo termo $\frac{1}{a}$ (sendo $a > 1$) transformação esta que não é visível no visor.

4 Sistemas

- **Q7:** O sistema apresentado é linear:

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = x_1(t) + 0.5x_1(t - 0.25)$$

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = x_2(t) + 0.5x_2(t - 0.25)$$

$$x_3(t) \rightarrow \text{Combinação linear de } x_1(t) \text{ e } x_2(t) : x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$$

$$y_3(t) = x_3(t) + 0.5x_3(t + 0.25)$$

$$= ax_1(t) + bx_2(t) + 0.5(ax_1(t - 0.25) + bx_2(t - 0.25))$$

$$= ax_1(t) + bx_2(t) + 0.5ax_1(t - 0.25) + 0.5bx_2(t - 0.25)$$

$$= a(x_1(t) + 0.5x_1(t - 0.25)) + b(x_2(t) + 0.5x_2(t - 0.25))$$

$$= ay_1(t) + by_2(t) \rightarrow \text{é linear.}$$

E é invariante no tempo:

$$y_1(t) = x_1(t) + 0.5x_1(t - 0.25)$$

$$x_2(t) = x_1(t - t_0) \rightarrow y_2(t) = x_2(t) + 0.5x_2(t - 0.25)$$

$$= x_1(t - t_0) + 0.5x_1(t - t_0 - 0.25)$$

$$y_1(t - t_0) = x_1(t - t_0) + 0.5x_1(t - t_0 - 0.25)$$

logo $y_2(t) = y_1(t - t_0) \rightarrow$ é invariante no tempo.

- **Q8:** Resposta do sistema ao impulso unitário: $\delta(t)y(t) = \delta(t) + 0.5\delta(t - 0.25)$

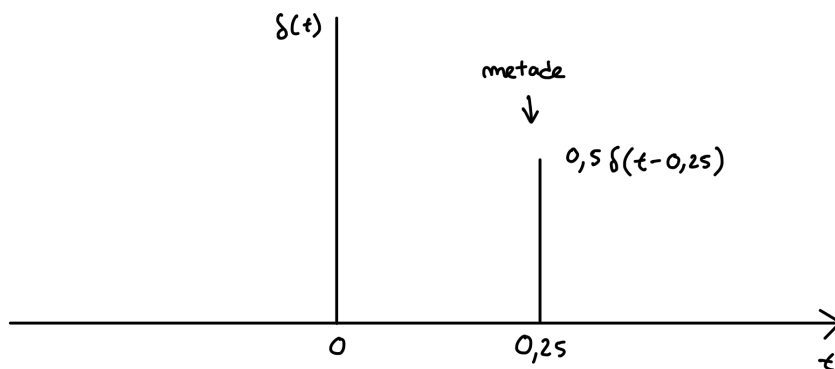


Figura 2: Visualização dos gráficos

- **Q9:** O sistema apresentado ($y(t)$) possui memória visto que não depende apenas do valor de $x(t)$ mas sim de $x(t)$ e de $(t-0.25)$. Para além disso é um sistema causal uma vez que o seu output depende apenas dos valores do presente $x(t)$ e do passado $x(t-0.25)$. Em relação à sua estabilidade, pode-se afirmar que é um sistema estável, visto que não é possível encontrar nenhum input limitado que provocasse um output não limitado:

Sendo a, b números arbitrários que verificam as condições

$$\begin{cases} |x(t)| < a \\ |x(t-0.25)| < b \end{cases}$$

Então: $-a - 0.5b < y(t) < at + 0.5b$, o que representa um output limitado.

- **Q10:** O efeito produzido pelo sistema é um eco (prolongamento do som).
- **Q11:** $x_2(t) = \cos(44t)$, que pode ser escrito como

$$x_2(t) = \frac{1}{2}e^{j44t} + \frac{1}{2}e^{-j44t}$$

$$y_2(t) = x_2(t) + 0.5x_2(t-0.25) =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}e^{j44t} + \frac{1}{2}e^{-j44t} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}e^{j44t-0.25} + \frac{1}{2}e^{-j44t+0.25} \right) \\ &= \frac{1}{2}e^{j44t} + \frac{1}{2}e^{-j44t} + \frac{1}{4}e^{j44t-11} + \frac{1}{4}e^{-j44t+11} \\ &= \frac{1}{2}e^{j44t} + \frac{1}{2}e^{-j44t} + \frac{1}{4e^{11}}e^{j44t} + \frac{e^{11}}{4}e^{-j44t} \\ &= \frac{2e^{11}+1}{4e^{11}}e^{j44t} + \frac{2+e^{11}}{4}e^{-j44t} \end{aligned}$$

- **Q12:** Para avaliarmos estas propriedades deste sistema, testamos o seu comportamento com vários sinais de input.

Para testar a linearidade, testamos com $x_1(t) = u(t)$ e com $x_2(t) = 2tu(t)$. Ao analisarmos os gráficos de saída obtidos, não se verificou que $y_0(t) = 2ty_1(t)$, logo o sistema não é linear.

Em relação à invariância no tempo, utilizámos o mesmo input $x_1(t) = u(t)$, mas agora um $x_2(t) = u(t - 1)$. Para o sistema ser invariante no tempo, o gráfico obtido de saída de $y_2(t)$ deveria traduzir-se numa translação do gráfico de $y_1(t)$, algo que não acontece. Assim, conclui-se que o sistema não é variante no tempo.

Para testar a memória, utilizámos os inputs $x_1(t) = 0$ e $x_2(t) = \delta(t)$. Apenas em $t = 0$, os valores dos sinais de entrada seriam diferentes na hipótese do sistema não ter memória. No entanto verificam-se mais instantes em que isso acontece, logo o sistema tem memória.

No que diz respeito à causalidade, por mais testes que realizássemos para vários sinais de entrada, nunca seria possível concluir nada pois seria necessário testar toda a infinidade de entradas possíveis. No entanto para os testes que efetuamos, aparenta ser um sinal causal.

Por último, testamos o sistema com alguns sinais de entrada limitados, sendo o resultado obtido também limitado. Contudo, tal como a causalidade, não podemos ter a certeza porque o sistema tem de ter este comportamento para todos os inputs possíveis.

5 Série de Fourier

- **Q13:** $w_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.4} = 5\pi$ $T = 0.4$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt = \frac{1}{0.4} \times 1.2 = \frac{12}{4} = 3$$

Utilizando as propriedades da série de Fourier:

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk w_0 t} dt = \frac{\sin(k w_0 T_1)}{k\pi} = \frac{\sin(k \times 5\pi \times 0.2)}{k\pi} = \frac{\sin(k\pi)}{k\pi}$$

Propriedade do deslocamento $\rightarrow b_k = a_k e^{-jk(5\pi)0.1} = a_k e^{-jk0.5\pi}$

Existe um offset que provoca um deslocamento do sinal para cima, que afeta apenas a_0

$$b_k = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ 4, & k = 0 \end{cases} \quad e_k = \begin{cases} a_k e^{-jk0.5\pi}, & k \neq 0 \\ a_0 + 4, & k = 0 \end{cases}$$

Propriedade da derivada:

Para $k \neq 0$:

$$e_k = jk(5\pi)dk \Leftrightarrow d_k = \frac{e_k}{5\pi jk} \Leftrightarrow d_k = \frac{a_k e^{-jk0.5\pi}}{5\pi jk} \Leftrightarrow d_k = \frac{\sin(k\pi) e^{-jk0.5\pi}}{5\pi^2 k^2 j}$$

- **Q14:**

$$\begin{aligned} x_N(t) &= \sum_{k=-N}^N a_k e^{jk w_0 t} = \sum_{k=-\inf}^{-1} a_k e^{jk w_0 t} + a_0 + \sum_{k=1}^{+\inf} a_k e^{jk w_0 t} \\ &= \sum_{k=-\inf}^{-1} a_k (\cos(k w_0 t) - j \sin(k w_0 t)) + a_0 + \sum_{k=1}^{+\inf} a_k (\cos(k w_0 t) + j \sin(k w_0 t)) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{+\inf} a_k \cos(\varphi_k) \cos(k w_0 t) - a_k \sin(\varphi_k) \sin(k w_0 t) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{+\inf} a_k \cos(k w_0 t + \varphi_k) \end{aligned}$$

Sendo $a = a_k \cos(\varphi_k)$ $b = -a_k \sin(\varphi_k)$, então:

$$A_k = \sqrt{(a^2 + b^2)} \text{ e } \varphi_k = \arctan\left(-\frac{b}{a}\right), A_0 = a_0$$

- **Q15:** $A_0 = a_0 = 0.75 + 0.9 = 1.65$
- **Q16:** A sobreposição destes sinais da série truncada para os vários valores de N forma o sinal original da série de Fourier, o que é o esperado acontecer, uma vez que estamos a unir as várias harmónicas. Quanto mais sinais $x_n(t)$ utilizarmos, mais parecido será este gráfico com o sinal original.
- **Q17:** Os gráficos da parte real das transformadas de Fourier dos sinais $x_n(t)$ assemelham-se aos gráficos das transformadas de Fourier de, por exemplo, uma onda quadrada já que estes sinais x_n são sinais simples.

6 Resposta em Frequência

- **Q18:** Para determinar o módulo e o argumento da resposta em frequência do sistema $H(jw)$ para cada valor de w , precisamos de medir experimentalmente no sinal de saída $y(t)$ a amplitude e a fase da frequência w .

Com esses valores conseguimos calcular a transformada de Fourier de $y(t)$ a partir da fórmula:

$$Y(jw) = \int y(t)e^{-jw t} dt$$

Com isso conseguimos calcular o módulo de $H(jw)$ a partir da fórmula:

$$|H(jw)| = \frac{|Y(jw)|}{|X(jw)|}$$

Sendo $X(jw)$ a transformada de Fourier de $x(t)$.

O argumento da resposta em frequência do sistema $H(jw)$ é calculado a partir da fórmula:

$$\angle H(jw) = \angle Y(jw) - \angle X(jw)$$

- **Q19:** Para calcular o módulo da resposta em frequências do sistema usaremos a fórmula

$$|H(jw)| = \frac{|Y(jw)|}{|X(jw)|}$$

em que $|Y(jw)|$ é a amplitude do sinal de saída e $|X(jw)|$ é a amplitude do sinal de entrada dado por $\cos(wt)$.

$$w = 0, |Y(jw)| = 1 \text{ e } |X(jw)| = 1, \text{ logo } |H(jw)| = \frac{1}{1} = 1$$

$$w = 1, |Y(jw)| = 0.933 \text{ e } |X(jw)| = 1, \text{ logo } |H(jw)| = \frac{0.933}{1} = 0.933$$

$$w = 3, |Y(jw)| = 0.657 \text{ e } |X(jw)| = 3, \text{ logo } |H(jw)| = \frac{0.657}{3} = 0.219$$

$$w = 5, |Y(jw)| = 0.463 \text{ e } |X(jw)| = 5, \text{ logo } |H(jw)| = \frac{0.463}{5} = 0.0926$$

$$w = 10, |Y(jw)| = 0.252 \text{ e } |X(jw)| = 10, \text{ logo } |H(jw)| = \frac{0.252}{10} = 0.0252$$

$$w = 20, |Y(jw)| = 0.130 \text{ e } |X(jw)| = 20, \text{ logo } |H(jw)| = \frac{0.130}{20} = 0.0065$$

$$w = 50, |Y(jw)| = 0.065 \text{ e } |X(jw)| = 50, \text{ logo } |H(jw)| = \frac{0.065}{50} = 0.0013$$

- Q20:

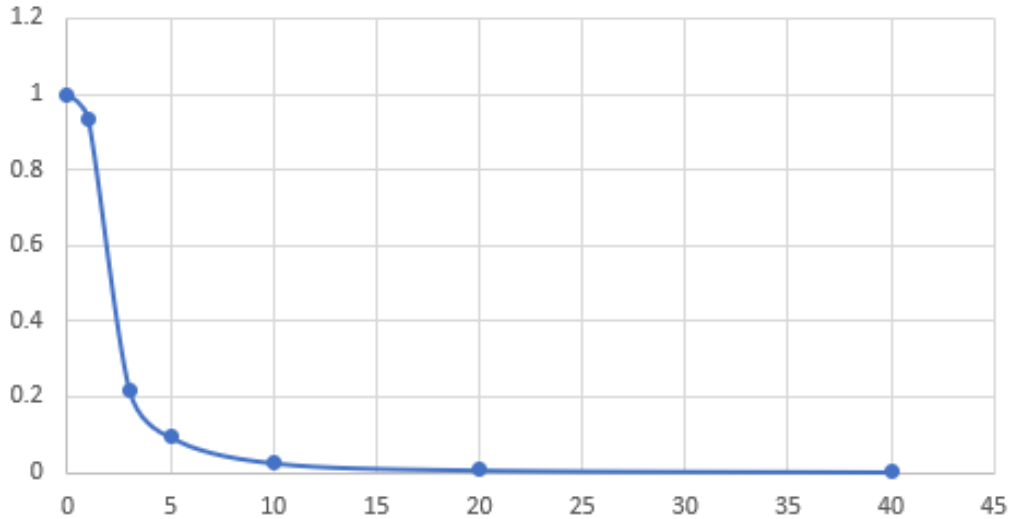


Figura 3: Gráfico do módulo da resposta em frequência

Interpretando o gráfico conseguimos ver que é um filtro passa baixo, pois com as frequências mais baixas o módulo é maior. Este filtro não é ideal pois exibe as características de transmissão com distorção.

- Q21: A equação diferencial a que obedece o sistema é:

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

uma vez que se trata de um sistema de primeira ordem, RC .

Sendo $\tau > 0$ e $x(t) = e^{j\omega t} : \frac{\tau dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$

Utilizando as propriedades da transformada da série de Fourier (Propriedade da derivada e linearidade):

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \tau j\omega Y(j\omega) + Y(j\omega) &= X(j\omega) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\tau j\omega Y(j\omega)}{X(j\omega)} + \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} &= 1 \Leftrightarrow \tau j\omega H(j\omega) + H(j\omega) = 1 \\ \Leftrightarrow H(j\omega)(\tau j\omega + 1) &= 1 \\ \Leftrightarrow H(j\omega) = \frac{1}{\tau j\omega + 1}, \text{ Sendo } \tau = RC, H(j\omega) &= \frac{1}{RCj\omega + 1} \end{aligned}$$

Sendo a resposta do circuito ao impulso unitário $\delta(t)$ dada por $h(t)$

$$L\delta(\tau) = 1$$

$$y(t) = \frac{\frac{1}{\tau}}{s + \frac{1}{\tau}} \text{ e } x(t) = L^{-1}\{y(t)\} = \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\text{Logo, } h(t) = x(t) \times u(t) = \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} \times u(t) = \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}u(t)$$

$$|H(jw)| = \left| \frac{1}{RCjw + 1} \right| = \frac{|1|}{|RCjw + 1|} = \frac{1}{\sqrt{(RCjw)^2 + 1}}$$

Para calcularmos o $\angle H(jw)$, podemos apenas calcular graficamente o desfazamento do sinal de entrada $x(t)$ com o sinal de saída $y(t)$:

$$\angle H(jw) = \Delta s \times w, \text{ sendo } \Delta s \text{ o desfazamento.}$$

$$\text{Ou de outra forma, } \angle H(jw) = -\arctan(wRC)$$

• **Q22:**

$$H(jw) = \frac{1}{RCjw + 1} \Leftrightarrow H(jw)(RCjw + 1) = 1$$

$$RCjw = \frac{1}{H(jw)} - 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{H(jw)Rjw} - \frac{1}{Rjw}$$

$$w = 1 \Rightarrow C = (1.41 \times 10^{-4})e^{-\frac{\pi}{2j}}$$

$$w = 3 \Rightarrow C = (2.36 \times 10^{-3})e^{-\frac{\pi}{2j}}$$

$$w = 5 \Rightarrow C = (5.91 \times 10^{-3})e^{-\frac{\pi}{2j}}$$

$$w = 10 \Rightarrow C = (7.70 \times 10^{-3})e^{-\frac{\pi}{2j}}$$

$$w = 20 \Rightarrow C = (1.52 \times 10^{-2})e^{-\frac{\pi}{2j}}$$

$$w = 50 \Rightarrow C = (3.04 \times 10^{-2})e^{-\frac{\pi}{2j}}$$

7 Filtragem

- **Q23:** Sendo que um filtro passa-baixo apenas deixa passar as frequências baixas e rejeita as frequências mais altas, logo este não reproduz bem as zonas de variação rápida do sinal p , mas reproduz bem as zonas de variação lenta.
Por sua vez o filtro passa-alto, como é o inverso do filtro passa-baixo, reproduz bem as zonas de variação rápida do sinal p , mas não reproduz bem as zonas de variação lenta.
- **Q24:** O valor aproximado das frequências dessas sinusóides é no intervalo de 800hz a 1000hz , ou seja o intervalo do filtro.
Com a aplicação deste mesmo filtro ao sinal p é de esperar que a zona de frequência mais baixa do sinal, ou seja, com frequência menor que 800hz não seja reproduzida. Como a zona de variação rápida do sinal é composta por infinitos sinais de diversas frequências é de esperar que quando se aplica este filtro isto se restrinja e apenas alguns sinais sejam reproduzidos, daí a característica sinusoidal.

8 Amostragem

- **Q25:** O Teorema da Amostragem afirma que, para reconstruir corretamente um sinal contínuo a partir de suas amostras, é necessário que

$$w_s > 2w_{onda}$$

sendo w_s a taxa de amostragem e w_{onda} a frequências da onda. A frequência máxima no nosso caso é de 10π radianos por segundo, logo a taxa de amostragem vai ter de ser maior que 20π amostras por segundo, logo como $w = \frac{2\pi}{T} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{w}$ temos que a gama de valores terá de ser menor que $T = \frac{2\pi}{20\pi} = \frac{1}{10} = 10^{-1}$.

- **Q26:** Os sinais relacionam-se da seguinte maneira: $xd(n) = xc\left(\frac{n}{100}\right)$, isto é, verifica-se um escalamento com coeficiente $a = \frac{1}{100}$ do gráfico de $xd(n)$ em relação ao de $xc(n)$.
- **Q27:** Período de $y_c = T_{y_c} = 0.1$
- **Q28:**

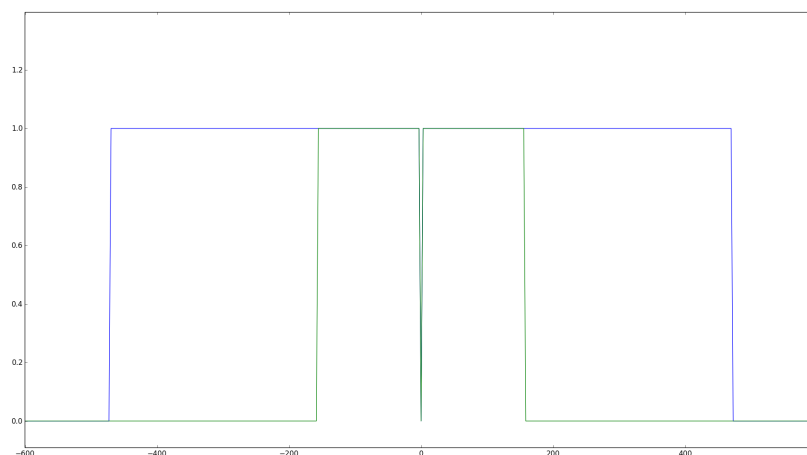


Figura 4: Transformação de Fourier de $xc1$ (verde) e $yc1$ (azul)

- **Q29:** O espectro que obtivemos provem dos processos de amostragem e de reconstrução de sinais. O método de amostragem consiste em obter um sinal formado por várias réplicas da transformada de $xc1$, réplicas estas que se vão repetindo com uma frequência pré-definida (frequência de amostragem). Posteriormente, efetua-se um escalamento de maneira a que o sinal se converta num sinal discreto.

Neste caso, a condição do Teorema da Amostragem ($w_s > 2w_{onda}$) não se verifica, o que leva ao chamado *aliasing*, provocando diferenças no sinal à saída relativamente ao $xc1$ (Alguns troços do sinal desaparecem). No que toca à reconstrução de sinais, é possível afirmar que a frequência do sinal é modificada: frequência $yc1$ = frequência $xc1$

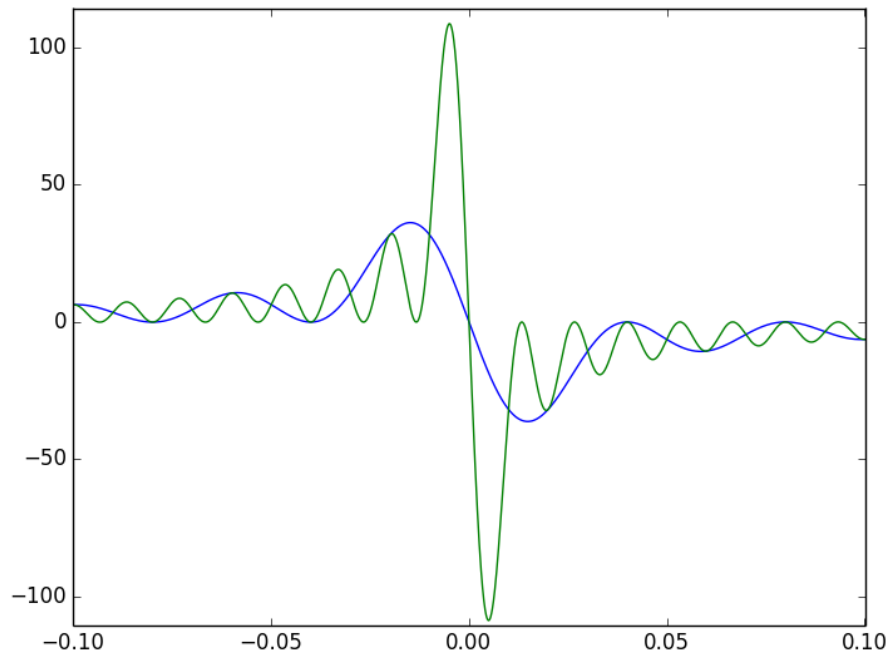


Figura 5: Função $xc1$ (verde) e $yc1$ (azul)