



**TÉCNICO**  
**LISBOA**

Instituto Superior Técnico  
LEEC  
Sinais e Sistemas

## **Relatório Laboratório Sinais e Sistemas**

Aluno: Henrique Machado 103202

Aluno: Miguel Neves 103462

Janeiro  
2023

# Conteúdo

1	Sinais Sinusoidais	1
2	Notas Musicais	1
3	Impulso e Degrau Unitários	1
4	Sistemas	3
5	Série de Fourier	6
6	Resposta em Frequência	7
7	Filtragem	10
8	Amostragem	11

## 1 Sinais Sinusoidais

- **Q1:** As sinusoidais com frequência mais altas correspondem aos sons mais agudos, inversamente, as sinusoidais com frequência mais baixa correspondem aos sons mais graves.
- **Q2:** A frequência mínima que nós conseguimos ouvir foi  $55\text{hz}$  e a frequência máxima que conseguimos ouvir foi  $18000\text{hz}$ .

## 2 Notas Musicais

- **Q3:**

Mi<sub>4</sub>:  $329.63\text{hz}$

Fá<sub>4</sub><sup>#</sup>:  $370.00\text{hz}$

Sol<sub>4</sub>:  $392.00\text{hz}$

Si<sub>4</sub>:  $493.89\text{hz}$

Dó<sub>5</sub>:  $554.37\text{hz}$

## 3 Impulso e Degrau Unitários

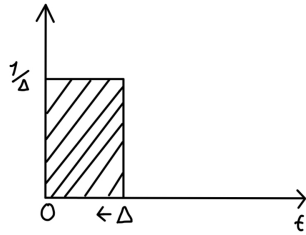
- **Q4:** Com base na definição de degraú unitário,  $u(at + b)$  pode ser escrito como  $u(\pm t - t_0)$  uma vez que:  $t_0 = \frac{b}{|a|}$ , onde temos que

$$\begin{cases} a > 0, & t > 0 \\ a < 0, & t < 0 \end{cases}$$

Caso  $a < 0$ , verifica-se uma inversão no tempo do gráfico de  $u(t)$ .

- **Q5:**  $\delta(at) = \frac{1}{\Delta}[u(at) - u(at - \Delta)]$  e  $\delta(at) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(at)$ , com  $a > 0$

Para  $\delta(t)$



Para  $\delta(at)$

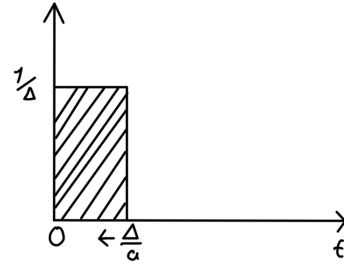


Figura 1: Comparação entre os gráficos entre  $\delta(t)$  e  $\delta(at)$

$$\text{Área} = \frac{1}{\Delta} \times \Delta = 1$$

$$\text{Área} = \frac{1}{\Delta} \times \frac{\Delta}{a} = \frac{1}{a}$$

Logo,  $\delta(at) = \frac{1}{a}\delta(t)$ , com  $a > 0$ .

- **Q6:** Não se verifica nenhuma mudança no gráfico de  $\delta(at)$  em relação ao gráfico de  $\delta(t)$ . No entanto, pelo que foi concluído previamente, o que deveria acontecer seria uma redução da área do impulso devido ao produto pelo termo  $\frac{1}{a}$  (sendo  $a > 1$ ) transformação esta que não é visível no visor.

## 4 Sistemas

- **Q7:** O sistema apresentado é linear:

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = x_1(t) + 0.5x_1(t - 0.25)$$

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = x_2(t) + 0.5x_2(t - 0.25)$$

$$x_3(t) \rightarrow \text{Combinação linear de } x_1(t) \text{ e } x_2(t) : x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$$

$$y_3(t) = x_3(t) + 0.5x_3(t + 0.25)$$

$$= ax_1(t) + bx_2(t) + 0.5(ax_1(t - 0.25) + bx_2(t - 0.25))$$

$$= ax_1(t) + bx_2(t) + 0.5ax_1(t - 0.25) + 0.5bx_2(t - 0.25)$$

$$= a(x_1(t) + 0.5x_1(t - 0.25)) + b(x_2(t) + 0.5x_2(t - 0.25))$$

$$= ay_1(t) + by_2(t) \rightarrow \text{é linear.}$$

E é invariante no tempo:

$$y_1(t) = x_1(t) + 0.5x_1(t - 0.25)$$

$$x_2(t) = x_1(t - t_0) \rightarrow y_2(t) = x_2(t) + 0.5x_2(t - 0.25)$$

$$= x_1(t - t_0) + 0.5x_1(t - t_0 - 0.25)$$

$$y_1(t - t_0) = x_1(t - t_0) + 0.5x_1(t - t_0 - 0.25)$$

logo  $y_2(t) = y_1(t - t_0) \rightarrow$  é invariante no tempo.

- **Q8:** Resposta do sistema ao impulso unitário:  $\delta(t)y(t) = \delta(t) + 0.5\delta(t - 0.25)$

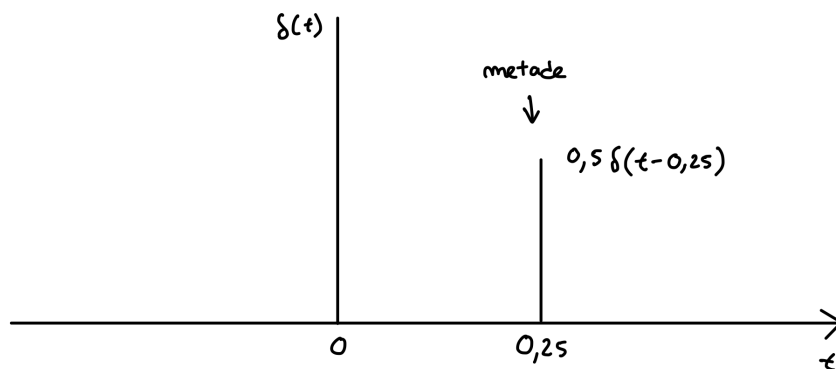


Figura 2: Visualização dos gráficos

- **Q9:** O sistema apresentado ( $y(t)$ ) possui memória visto que não depende apenas do valor de  $x(t)$  mas sim de  $x(t)$  e de  $(t-0.25)$ . Para além disso é um sistema causal uma vez que o seu output depende apenas dos valores do presente  $x(t)$  e do passado  $x(t-0.25)$ . Em relação à sua estabilidade, pode-se afirmar que é um sistema estável, visto que não é possível encontrar nenhum input limitado que provocasse um output não limitado:

Sendo  $a, b$  números arbitrários que verificam as condições

$$\begin{cases} |x(t)| < a \\ |x(t-0.25)| < b \end{cases}$$

Então:  $-a - 0.5b < y(t) < at + 0.5b$ , o que representa um output limitado.

- **Q10:** O efeito produzido pelo sistema é um eco (prolongamento do som).
- **Q11:**  $x_2(t) = \cos(44t)$ , que pode ser escrito como

$$x_2(t) = \frac{1}{2}e^{j44t} + \frac{1}{2}e^{-j44t}$$

$$y_2(t) = x_2(t) + 0.5x_2(t-0.25) =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}e^{j44t} + \frac{1}{2}e^{-j44t} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2}e^{j44t-0.25} + \frac{1}{2}e^{-j44t+0.25} \right) \\ &= \frac{1}{2}e^{j44t} + \frac{1}{2}e^{-j44t} + \frac{1}{4}e^{j44t-11} + \frac{1}{4}e^{-j44t+11} \\ &= \frac{1}{2}e^{j44t} + \frac{1}{2}e^{-j44t} + \frac{1}{4e^{11}}e^{j44t} + \frac{e^{11}}{4}e^{-j44t} \\ &= \frac{2e^{11}+1}{4e^{11}}e^{j44t} + \frac{2+e^{11}}{4}e^{-j44t} \end{aligned}$$

- **Q12:** Para avaliarmos estas propriedades deste sistema, testamos o seu comportamento com vários sinais de input.

Para testar a linearidade, testamos com  $x_1(t) = u(t)$  e com  $x_2(t) = 2tu(t)$ . Ao analisarmos os gráficos de saída obtidos, não se verificou que  $y_0(t) = 2ty_1(t)$ , logo o sistema não é linear.

Em relação à invariância no tempo, utilizámos o mesmo input  $x_1(t) = u(t)$ , mas agora um  $x_2(t) = u(t - 1)$ . Para o sistema ser invariante no tempo, o gráfico obtido de saída de  $y_2(t)$  deveria traduzir-se numa translação do gráfico de  $y_1(t)$ , algo que não acontece. Assim, conclui-se que o sistema não é variante no tempo.

Para testar a memória, utilizámos os inputs  $x_1(t) = 0$  e  $x_2(t) = \delta(t)$ . Apenas em  $t = 0$ , os valores dos sinais de entrada seriam diferentes na hipótese do sistema não ter memória. No entanto verificam-se mais instantes em que isso acontece, logo o sistema tem memória.

No que diz respeito à causalidade, por mais testes que realizássemos para vários sinais de entrada, nunca seria possível concluir nada pois seria necessário testar toda a infinidade de entradas possíveis. No entanto para os testes que efetuamos, aparenta ser um sinal causal.

Por último, testamos o sistema com alguns sinais de entrada limitados, sendo o resultado obtido também limitado. Contudo, tal como a causalidade, não podemos ter a certeza porque o sistema tem de ter este comportamento para todos os inputs possíveis.

## 5 Série de Fourier

- **Q13:**  $w_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.4} = 5\pi$   $T = 0.4$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt = \frac{1}{0.4} \times 1.2 = \frac{12}{4} = 3$$

Utilizando as propriedades da série de Fourier:

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk w_0 t} dt = \frac{\sin(k w_0 T_1)}{k\pi} = \frac{\sin(k \times 5\pi \times 0.2)}{k\pi} = \frac{\sin(k\pi)}{k\pi}$$

Propriedade do deslocamento  $\rightarrow b_k = a_k e^{-jk(5\pi)0.1} = a_k e^{-jk0.5\pi}$

Existe um offset que provoca um deslocamento do sinal para cima, que afeta apenas  $a_0$

$$b_k = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ 4, & k = 0 \end{cases} \quad e_k = \begin{cases} a_k e^{-jk0.5\pi}, & k \neq 0 \\ a_0 + 4, & k = 0 \end{cases}$$

Propriedade da derivada:

Para  $k \neq 0$ :

$$e_k = jk(5\pi)dk \Leftrightarrow d_k = \frac{e_k}{5\pi jk} \Leftrightarrow d_k = \frac{a_k e^{-jk0.5\pi}}{5\pi jk} \Leftrightarrow d_k = \frac{\sin(k\pi) e^{-jk0.5\pi}}{5\pi^2 k^2 j}$$

- **Q14:**

$$\begin{aligned} x_N(t) &= \sum_{k=-N}^N a_k e^{jk w_0 t} = \sum_{k=-\inf}^{-1} a_k e^{jk w_0 t} + a_0 + \sum_{k=1}^{+\inf} a_k e^{jk w_0 t} \\ &= \sum_{k=-\inf}^{-1} a_k (\cos(k w_0 t) - j \sin(k w_0 t)) + a_0 + \sum_{k=1}^{+\inf} a_k (\cos(k w_0 t) + j \sin(k w_0 t)) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{+\inf} a_k \cos(\varphi_k) \cos(k w_0 t) - a_k \sin(\varphi_k) \sin(k w_0 t) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{+\inf} a_k \cos(k w_0 t + \varphi_k) \end{aligned}$$

Sendo  $a = a_k \cos(\varphi_k)$   $b = -a_k \sin(\varphi_k)$ , então:

$$A_k = \sqrt{(a^2 + b^2)} \text{ e } \varphi_k = \arctan\left(-\frac{b}{a}\right), A_0 = a_0$$



## 6 Resposta em Frequência

- **Q18:** Para determinar o módulo e o argumento da resposta em frequência do sistema  $H(jw)$  para cada valor de  $w$ , precisamos de medir experimentalmente no sinal de saída  $y(t)$  a amplitude e a fase da frequência  $w$ .

Com esses valores conseguimos calcular a transformada de Fourier de  $y(t)$  a partir da fórmula:

$$Y(jw) = \int y(t)e^{-jw t} dt$$

Com isso conseguimos calcular o módulo de  $H(jw)$  a partir da fórmula:

$$|H(jw)| = \frac{|Y(jw)|}{|X(jw)|}$$

Sendo  $X(jw)$  a transformada de Fourier de  $x(t)$ .

O argumento da resposta em frequência do sistema  $H(jw)$  é calculado a partir da fórmula:

$$\angle H(jw) = \angle Y(jw) - \angle X(jw)$$

- **Q19:** Para calcular o módulo da resposta em frequências do sistema usaremos a fórmula

$$|H(jw)| = \frac{|Y(jw)|}{|X(jw)|}$$

em que  $|Y(jw)|$  é a amplitude do sinal de saída e  $|X(jw)|$  é a amplitude do sinal de entrada dado por  $\cos(wt)$ .

$$w = 0, |Y(jw)| = 1 \text{ e } |X(jw)| = 1, \text{ logo } |H(jw)| = \frac{1}{1} = 1$$

$$w = 1, |Y(jw)| = 0.933 \text{ e } |X(jw)| = 1, \text{ logo } |H(jw)| = \frac{0.933}{1} = 0.933$$

$$w = 3, |Y(jw)| = 0.657 \text{ e } |X(jw)| = 3, \text{ logo } |H(jw)| = \frac{0.657}{3} = 0.219$$

$$w = 5, |Y(jw)| = 0.463 \text{ e } |X(jw)| = 5, \text{ logo } |H(jw)| = \frac{0.463}{5} = 0.0926$$

$$w = 10, |Y(jw)| = 0.252 \text{ e } |X(jw)| = 10, \text{ logo } |H(jw)| = \frac{0.252}{10} = 0.0252$$

$$w = 20, |Y(jw)| = 0.130 \text{ e } |X(jw)| = 20, \text{ logo } |H(jw)| = \frac{0.130}{20} = 0.0065$$

$$w = 50, |Y(jw)| = 0.065 \text{ e } |X(jw)| = 50, \text{ logo } |H(jw)| = \frac{0.065}{50} = 0.0013$$

- Q20:

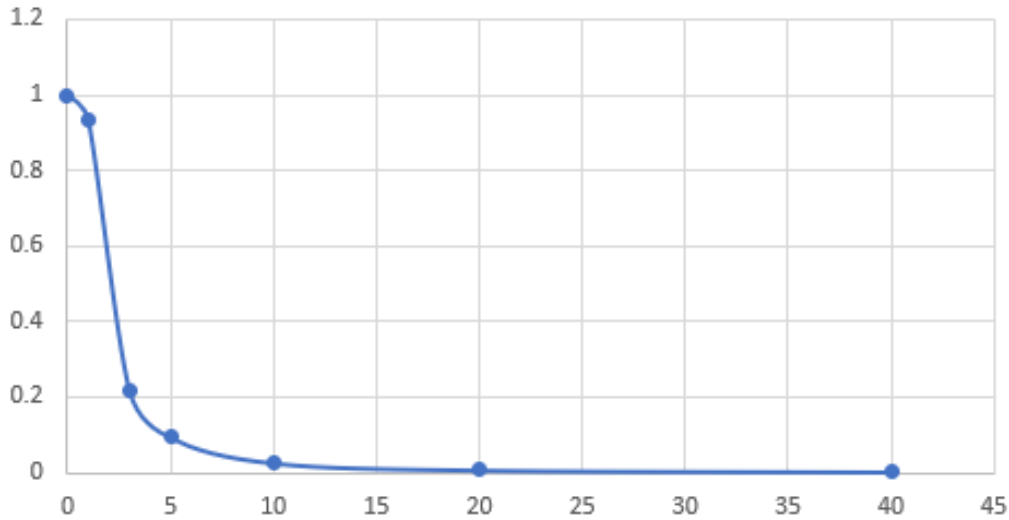


Figura 3: Gráfico do módulo da resposta em frequência

Interpretando o gráfico conseguimos ver que é um filtro passa baixo, pois com as frequências mais baixas o módulo é maior. Este filtro não é ideal pois exibe as características de transmissão com distorção.

- Q21: A equação diferencial a que obedece o sistema é:

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

uma vez que se trata de um sistema de primeira ordem,  $RC$ .

Sendo  $\tau > 0$  e  $x(t) = e^{j\omega t} : \frac{\tau dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$

Utilizando as propriedades da transformada da série de Fourier:

$$\Leftrightarrow \tau j\omega Y(j\omega) + Y(j\omega) = X(j\omega) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\tau j\omega Y(j\omega)}{X(j\omega)} + \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = 1 \Leftrightarrow \tau j\omega H(j\omega) + H(j\omega) = 1$$

$$\Leftrightarrow H(j\omega)(\tau j\omega + 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow H(j\omega) = \frac{1}{\tau j\omega + 1}, \text{ Sendo } \tau = RC, H(j\omega) = \frac{1}{RCj\omega + 1}$$

Sendo a resposta do circuito ao impulso unitário  $\delta(t)$  dada por  $h(t)$

$$L\delta(\tau) = 1$$

$$y(t) = \frac{\frac{1}{\tau}}{s + \frac{1}{\tau}} \text{ e } x(t) = L^{-1}\{y(t)\} = \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\text{Logo, } h(t) = x(t) \times u(t) = \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} \times u(t) = \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}u(t)$$

$$|H(jw)| = \left| \frac{1}{RCjw + 1} \right| = \frac{|1|}{|RCjw + 1|} = \frac{1}{\sqrt{(RCw)^2 + 1}}$$

Para calcularmos o  $\angle H(jw)$ , podemos apenas calcular o desfazamento do sinal de entrada  $x(t)$  com o sinal de saída  $y(t)$ :

$$\angle H(jw) = \Delta s \times w, \text{ sendo } \Delta s \text{ o desfazamento.}$$

- **Q22:**

## 7 Filtragem

- **Q23:** Sendo que um filtro passa-baixo apenas deixa passar as frequências baixas e rejeita as frequências mais altas, logo este não reproduz bem as zonas de variação rápida do sinal  $p$ , mas reproduz bem as zonas de variação lenta.  
Por sua vez o filtro passa-alto, como é o inverso do filtro passa-baixo, reproduz bem as zonas de variação rápida do sinal  $p$ , mas não reproduz bem as zonas de variação lenta.
- **Q24:** O valor aproximado das frequências dessas sinusóides é no intervalo de  $800\text{hz}$  a  $1000\text{hz}$ , ou seja o intervalo do filtro.  
Com a aplicação deste mesmo filtro ao sinal  $p$  é de esperar que a zona de frequência mais baixa do sinal, ou seja, com frequência menor que  $800\text{hz}$  não seja reproduzida. Como a zona de variação rápida do sinal é composta por infinitos sinais de diversas frequências é de esperar que quando se aplica este filtro isto se restrinja e apenas alguns sinais sejam reproduzidos, daí a característica sinusoidal.

## 8 Amostragem

- **Q25:** O Teorema da Amostragem afirma que, para reconstruir corretamente um sinal contínuo a partir de suas amostras, é necessário que

$$w_s > 2w_{onda}$$

sendo  $w_s$  a taxa de amostragem e  $w_{onda}$  a frequências da onda. A frequência máxima no nosso caso é de  $10\pi$  radianos por segundo, logo a taxa de amostragem vai ter de ser maior que  $20\pi$  amostras por segundo, logo como  $w = \frac{2\pi}{T} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{w}$  temos que a gama de valores terá de ser menor que  $T = \frac{2\pi}{20\pi} = \frac{1}{10} = 10^{-1}$ .

- **Q26:** Os sinais relacionam-se da seguinte maneira:  $xd(n) = xc\left(\frac{n}{100}\right)$ , isto é, verifica-se um escalamento com coeficiente  $a = \frac{1}{100}$  do gráfico de  $xd(n)$  em relação ao de  $xc(n)$ .
- **Q27:** Período de  $y_c = T_{y_c} = 0.1$
- **Q28:**

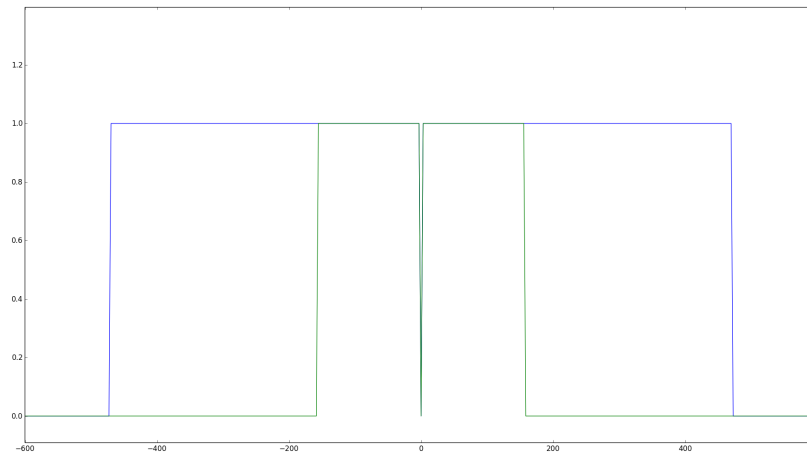


Figura 4: Transformação de Fourier de  $xc1$ (verde) e  $yc1$ (azul)

- **Q29:** O espectro que obtivemos provem dos processos de amostragem e de reconstrução de sinais. O método de amostragem consiste em obter um sinal formado por várias réplicas da transformada de  $xc1$ , réplicas estas que se vão repetindo com uma frequência pré-definida (frequência de amostragem). Posteriormente, efetua-se um escalamento de maneira a que o sinal se converta num sinal discreto.

Neste caso, a condição do Teorema da Amostragem ( $w_s > 2w_{onda}$ ) não se verifica, o que leva ao chamado *aliasing*, provocando diferenças no sinal à saída relativamente ao  $xc1$  (Alguns traços do sinal desaparecem). No que toca à reconstrução de sinais, é possível afirmar que a frequência do sinal é modificada: frequência  $yc1$  = frequência  $xc1$

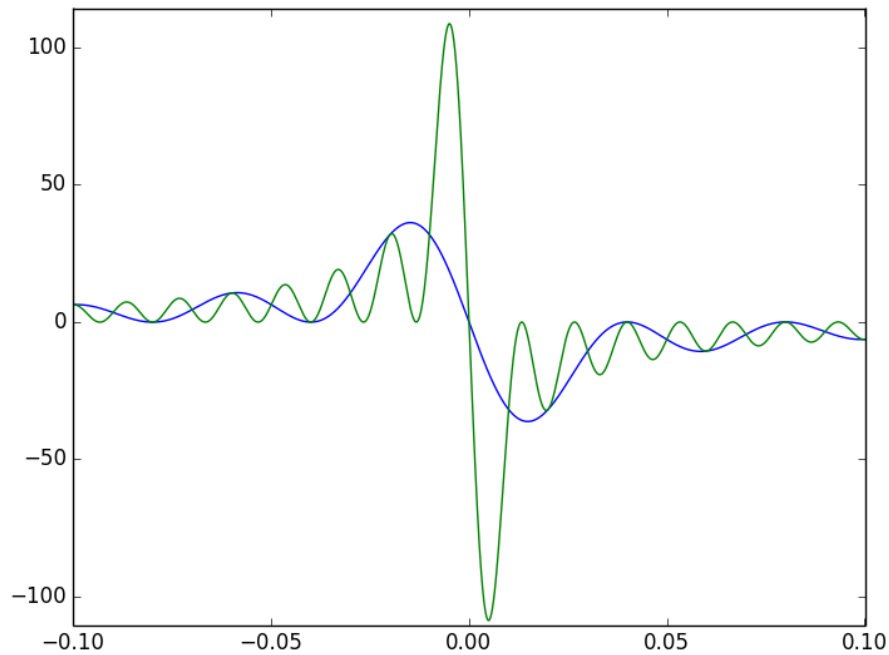


Figura 5: Função  $xc1$ (verde) e  $yc1$ (azul)