Orientación del Proyecto Conjunto: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Matemática Numérica Segundo Año, Ciencia de la Computación, Universidad de La Habana, Curso 2025-2026

September 29, 2025

Objetivo General:

Desarrollar un proyecto integrador que aplique conceptos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) y Matemática Numérica (MN) para resolver problemas modelados mediante EDOs, enfatizando el análisis numérico, la validación de algoritmos y la visualización interactiva de resultados.

Descripción del Proyecto

Formación de equipos: Máximo 3 estudiantes por equipo.
Asignación de problemas: Cada equipo recibirá un problema específico de EDO.

Enfoque:

- Modelación: Resumen de la aplicación de las EDO en el estudio del tema que le toque. Resolver el ejercicio asignado representando el problema como una EDO, identificando parámetros, condiciones iniciales y contexto físico/biológico.
- Análisis teórico: Determinar si el problema está bien planteado (existencia, unicidad y estabilidad de soluciones), hacer uso de un campo de isoclinas en la parte A para obtener información cualitativa de la solución e interpretarlo.
- Visualización: Construir un diagrama de bifurcación e la parte B e interpretarlo para entender mejor el problema.
- Análisis numérico (Parte A de cada tema):
    - Evaluar la condición del problema (sensibilidad a cambios en datos iniciales).
    - Implementar y comparar al menos dos algoritmos numéricos.
    - Realizar análisis de error: error relativo, análisis hacia adelante (perturbaciones en datos) y hacia atrás (estabilidad del algoritmo).
    - Determinar el orden de convergencia y complejidad computacional de los algoritmos.

- Validación: Usar benchmarks (conjuntos de datos con solución analítica conocida) para verificar precisión.
- Análisis de estabilidad y plano de fase: En la parte C, calcular al sistema de ecuaciones ordinarias los puntos críticos y clasificarlos según su tipo y estabilidad, verificarlo contruyendo el plano de fase e interpretarlo.

Entregables Clave

- **Informe técnico:** Máximo 10 páginas (plantilla JCE MatCom), incluyendo:
  - Introducción, modelado, análisis teórico y numérico.
  - Tablas comparativas de algoritmos (errores, orden de convergencia, costo computacional).
  - Gráficos de soluciones, diagramas de fase y mapas de bifurcación.
- **Código interactivo:** IPython Notebooks o dashboards en Python (usando librerías como matplotlib, plotly, scipy) que permitan:
  - Simular soluciones para diferentes parámetros.
  - Visualizar comparativas de métodos numéricos.
  - Explorar bifurcaciones y estabilidad de puntos críticos.

Cronograma

- Semana 3: Formación de equipos.
- Semana 4: Asignación de problemas y orientación docente.
- Semana 6: Revisión de avances (modelado y selección de algoritmos).
- Semanas 14-16:
  - Presentación: 10 minutos (exposición) + 5 minutos (preguntas).
  - Entrega final: Informe y código interactivo.

Temas

- **Tema 1: Velocidad y aceleración**
  Resumen de la aplicación de las EDO en el cálculo de la velocidad y la aceleración según el material en el libro (Edwards & Penney, 4ta edición, págs. 12-15, incluyendo el ejemplo resuelto)
  - **Parte A (cinemática directa, isoclinas).** Un automóvil diesel acelera gradualmente, de tal manera que para los primeros 10 s la aceleración está dada por

    $$\frac{dv}{dt} = 0.12t^2 + 0.6t.$$

    si el auto parte de la posición de reposo $t_0 = 0, v_0 = 0$, encontrar la distancia que ha recorrido al final de los primeros 10 s y su velocidad en ese tiempo. Dibuje el campo de isoclinas en el plano (t, v) para obtener información cualitativa de la solución e interprételo.

- **Parte B (Bifurcación).** Considere un modelo en el que la fuerza del motor depende de un parámetro r:

$$\frac{dv}{dt} = rv - v^3.$$

  1. Determine los puntos de equilibrio en función de r.
  2. Clasifique su estabilidad mediante $v' = r - 3v^2$.
  3. Construya el diagrama de bifurcación y discuta el cambio de régimen cuando r pasa de negativo a positivo.

- **Parte C (Plano de fase).** Modele el movimiento del automóvil acoplado a un resorte con amortiguamiento:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v, \\ \dfrac{dv}{dt} = -\alpha v - \beta x, \quad \alpha, \beta > 0. \end{cases}$$

  1. Calcule los puntos críticos y clasifíquelos según su tipo y estabilidad (estable, asintóticamente estable o inestable)
  2. Verifíquelo contruyendo el plano de fase y interprételo.

- **Tema 2: Movimiento vertical y aceleración gravitacional**

Resumen de la aplicación de las EDO en el Movimiento vertical y aceleración gravitacional según el material en el libro (Edwards & Penney, 4ta edición, págs. 15-16, incluyendo el ejemplo resuelto)

- **Parte A (Cinemática vertical e isoclinas).** Se lanza una granada desde un helicóptero suspendido a una altura de 800 ft sobre el piso. Desde el piso, directamente bajo el helicóptero, se dispara un proyectil en línea recta hacia la granada exactamente 2 s después de que ésta fue soltada.

  1. ¿Con qué velocidad inicial debe dispararse el proyectil para que alcance la granada a una altitud de exactamente 400 ft?
  2. Dibuje el campo de isoclinas en el plano para obtener información cualitativa de la solución e interprételo.

- **Parte B (Bifurcación).** Para capturar cambios de régimen en la velocidad vertical, considere el modelo no lineal con parámetro μ:

$$\frac{dv}{dt} = \mu - v^2.$$

  1. Encuentre los puntos de equilibrio en función de μ.
  2. Estudie su estabilidad mediante $v' = \dfrac{d}{dv}(\mu - v^2) = -2v$.
  3. Construya el diagrama de bifurcación en el plano (μ, v), identifique el tipo de bifurcación y discuta su interpretación cualitativa en el contexto del movimiento vertical.

- **Parte C (Plano de fase).** Modele la altura $y(t)$ y la velocidad $v(t)$ con el sistema *numérico*:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = v, \\ \dfrac{dv}{dt} = -2\,v - 5\,y. \end{cases}$$

1. Calcule el/los puntos críticos y clasifíquelos (tipo y estabilidad).
2. Verifíquelo construyendo el plano de fase y ofreciendo una breve interpretación física del comportamiento de las trayectorias.

- **Tema 3: Problema del nadador**
  Resumen de la aplicación de las EDO en el Problema del nadador según el material en el libro (Edwards & Penney, 4ta edición, págs. 16-17, incluyendo el ejemplo resuelto)

  - **Parte A (Trayectoria con perfil cuártico e isoclinas).** Si $a = 0.5\,\text{mi}$, $v_0 = 9\,\text{mi/h}$ y $v_S = 3\,\text{mi/h}$ como en el ejemplo, pero la velocidad del río viene dada por

  $$v_R \;=\; v_0\left(1 - \frac{x^4}{a^4}\right)$$

  en lugar de la función cuadrática. Encuentre ahora a qué distancia aguas abajo es llevado el nadador al cruzar el río.

  1. Dibuje el campo de isoclinas asociado e interprete el patrón cualitativo del flujo.

  - **Parte B (Bifurcación).** Para modelar cambios de régimen efectivos en una velocidad vertical/escalar reducida $z(t)$ (p. ej., relación corriente/nado o control de rumbo), considere la EDO con parámetro μ:

  $$\frac{dz}{dt} \;=\; \mu\, z - z^2.$$

  1. Determine los puntos de equilibrio en función de μ.
  2. Clasifique su estabilidad mediante $z' = \mu - 2z$.
  3. Construya el diagrama de bifurcación en el plano (μ, z) e identifique el tipo de bifurcación. Interprete cualitativamente qué significaría, en este contexto, que μ cambie de signo (intercambio de estabilidad entre “quedarse sin avance” y “lograr avance”).

  - **Parte C (Plano de fase y estabilidad).** Considere el sistema lineal *numérico* para la altura lateral $y(t)$ y su velocidad $v(t)$:

  $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = v, \\ \dfrac{dv}{dt} = -3\,v \;-\; 4\,y. \end{cases}$$

  1. Calcule el/los puntos críticos y clasifíquelos (tipo y estabilidad).
  2. Verifíquelo construyendo el plano de fase y explique brevemente el significado físico de las trayectorias.

- **Tema 4: Enfriamiento y calentamiento**
  Resumen de la aplicación de las EDO en el Enfriamiento y calentamiento según el material en el libro (Edwards & Penney, 4ta edición, págs. 40-41, incluyendo el ejemplo resuelto)

  - **Parte A (Ley de Newton e isoclinas).** Justo antes del mediodía se encuentra el cuerpo de una víctima de un presunto homicidio dentro de un cuarto que se conserva a una temperatura constante de 70 °F. A las 12 del día la temperatura del cuerpo es de 80 °F y a la 1 P.M. de 75 °F. Considere que la temperatura del cuerpo al morir era de 98.6 °F y que éste se ha enfriado de acuerdo con la ley de Newton. ¿A qué hora murió la víctima?

1. Dibuje el campo de isoclinas para el modelo en el plano e interprételo cualitativamente.

- **Parte B (Bifurcación).** Para modelar cambios de régimen térmico en una temperatura adimensional $u(t)$ (desviación respecto al ambiente), considere la EDO con parámetro μ:

$$\frac{du}{dt} = \mu u + u^3.$$

1. Determine los puntos de equilibrio en función de μ.
2. Clasifique su estabilidad mediante $u' = \mu + 3u^2$.
3. Construya el diagrama de bifurcación en el plano (μ, u) e identifique el tipo de bifurcación. Interprete cualitativamente qué significa, en este contexto térmico, que μ cambie de signo.

- **Parte C (Plano de fase y estabilidad).** Considere el siguiente sistema lineal *numérico* que modela un sólido con temperatura interna $X(t)$ en contacto con una "capa" o camisa $Y(t)$, estando el ambiente fijo en $A = 70$ (se trabaja con temperaturas relativas $x = X - A$, $y = Y - A$):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4\,(x - y), \\ \dfrac{dy}{dt} = -\,y. \end{cases}$$

1. Calcule los puntos críticos y clasifíquelos (tipo y estabilidad).
2. Verifíquelo construyendo el plano de fase y explique brevemente el significado físico de las trayectorias.

- **Tema 5: Ley de Torricelli**
Resumen de la aplicación de las EDO en la Ley de Torricelli según el material en el libro (Edwards & Penney, 4ta edición, págs. 41-42, incluyendo el ejemplo resuelto)

- **Parte A (Clepsydra con caida a velocidad constante e isoclinas).** (La clepsydra, o reloj de agua) Un reloj de agua de 12 horas se diseña con las dimensiones que se muestran en la figura 1, dada la forma de la superficie obtenida al girar la curva $y = f(x)$ alrededor del eje y. ¿Cuál debe ser esta curva, y qué radio debe tener el orificio circular del fondo para que el nivel del agua caiga a una velocidad constante de 4 pulgadas por hora (in/h)?

1. Dibuje el campo de isoclinas asociado al modelo general de Torricelli

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{a}{A(y)}\sqrt{2gy},$$

e interprete el patrón cualitativo (indique, por ejemplo, cómo varían las pendientes con y y qué papel juega $A(y)$).

- **Parte B (Bifurcación).** Para estudiar cambios de régimen en una variable escalar reducida $z(t)$ (p. ej., una "razón de vaciado adimensional" vinculada al diseño), considere la EDO con parámetro μ:

$$\frac{dz}{dt} = \mu + z - z^2.$$

1. Determine los puntos de equilibrio en función de μ.
2. Clasifique su estabilidad mediante $z' = 1 - 2z$.

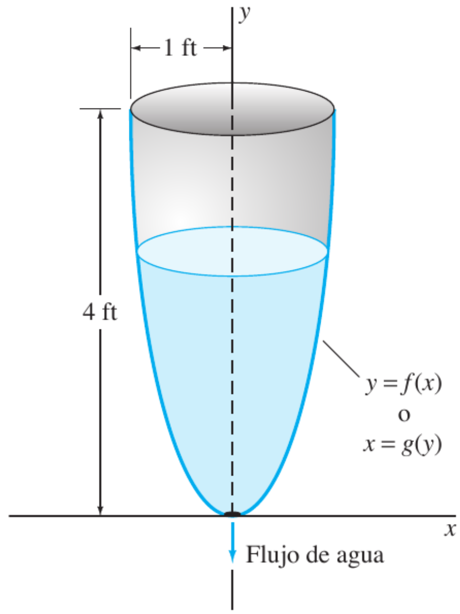

Figure 1: La clepsydra.

3. Construya el diagrama de bifurcación en el plano (μ, z) e identifique el tipo de bifurcación. Comente, cualitativamente, qué implicaría para el vaciado que μ cruce el umbral crítico.

- **Parte C (Plano de fase y estabilidad).** Considere el siguiente sistema lineal numérico que idealiza la dinámica acoplada de dos "niveles" (o un nivel y un flujo linealizado) alrededor de un punto de operación:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - 2y. \end{cases}$$

1. Calcule los puntos críticos y clasifíquelos (tipo y estabilidad).
2. Verifíquelo construyendo el plano de fase y explique brevemente el significado físico de las trayectorias en el contexto de niveles/flujo acoplados.

- **Tema 6: Problemas de mezclas**
Resumen de la aplicación de las EDO en Problemas de mezclas según el material en el libro (Edwards & Penney, 4ta edición, págs. 53-55, incluyendo el ejemplo resuelto)

- **Parte A (Cascada de tanques e isoclinas).** Considere la cascada de los dos tanques mostrados en la figura 2, siendo los volúmenes de cada tanque $V_1 = 100$ gal y $V_2 = 200$ gal respectivamente. Cada tanque contiene inicialmente 50 lb de sal. Las tres tasas de flujo indicadas en la figura son de 5 gal/min, siendo de agua pura el flujo de entrada al tanque 1.

1. Encuentre la cantidad $x(t)$ de sal en el tanque 1 en el tiempo t.
2. Suponga que $y(t)$ es la cantidad de sal en el tanque 2. Muestre que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{5}{100}x - \frac{5}{200}y,$$

y resuelva para $y(t)$ aplicando la función $x(t)$ encontrada en el inciso (1).

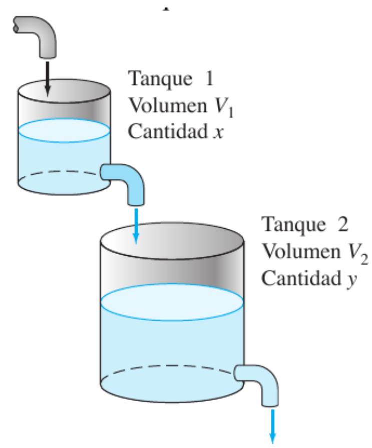

Figure 2: Cascada de dos tanques.

3. Halle la cantidad máxima de sal en el tanque 2.
4. Dibuje el campo de isoclinas en el plano (t, x) para la ecuación diferencial de $x(t)$ y analice cualitativamente cómo varía la concentración en el tanque 1.

- **Parte B (Bifurcación).** Para modelar transiciones en un sistema reducido de concentración adimensional $z(t)$, considere la ecuación con parámetro μ:

$$\frac{dz}{dt} = \mu - z^2.$$

1. Determine los puntos de equilibrio en función de μ.
2. Clasifique su estabilidad mediante $z' = -2z$.
3. Construya el diagrama de bifurcación en el plano (μ, z) e identifique el tipo de bifurcación. Interprete el resultado en el contexto de concentraciones en un tanque (por ejemplo, aparición o desaparición de estados estacionarios).

- **Parte C (Plano de fase y estabilidad).** Considere el sistema lineal numérico que acopla las cantidades de sal en dos depósitos idealizados:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\frac{1}{20}x + \frac{1}{20}y, \\ \dfrac{dy}{dt} = \frac{1}{20}x - \frac{3}{40}y. \end{cases}$$

1. Calcule los puntos críticos y clasifíquelos (tipo y estabilidad).
2. Verifíquelo construyendo el plano de fase y explique brevemente el significado físico de las trayectorias en el contexto de la cascada de tanques.

- **Tema 7: Oscilaciones de temperatura en interiores**
  Resumen de la aplicación de las EDO en Oscilaciones de temperatura en interiores según el material en el libro (Edwards & Penney, 4ta edición, págs. 58-60, incluyendo el ejemplo resuelto)

  - **Parte A (Modelo con temperatura exterior periódica e isoclinas).** Suponga que en una oficina la temperatura exterior varía a lo largo del día como

$$A(t) = 85 - 10\cos\left(\tfrac{\pi}{12}t\right),$$

donde t se mide en horas. La temperatura interior $u(t)$ sigue la ley de enfriamiento de Newton:

$$\frac{du}{dt} \;=\; -k\,(u - A(t)), \qquad k = 0.3,$$

con condición inicial $u(0) = 70$ °F (medianoche).

1. Estime la temperatura interior al cabo de 12 horas (mediodía).
2. Dibuje el campo de isoclinas en el plano (t, u) y analice cualitativamente el comportamiento de las soluciones en relación con la oscilación exterior.

- **Parte B (Bifurcación).** Para modelar el equilibrio térmico reducido en una variable $z(t)$ (temperatura interior adimensional relativa al promedio), considere la ecuación con parámetro μ:

$$\frac{dz}{dt} \;=\; \mu z - z^3.$$

1. Determine los puntos de equilibrio en función de μ.
2. Clasifique su estabilidad mediante $z' = \mu - 3z^2$.
3. Construya el diagrama de bifurcación en el plano (μ, z) e identifique el tipo de bifurcación. Interprete qué significa en el contexto del control térmico que μ cambie de signo.

- **Parte C (Plano de fase y estabilidad).** Considere el sistema lineal numérico que representa dos estancias conectadas (con temperaturas relativas $x(t)$ y $y(t)$ respecto del promedio exterior):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 3y. \end{cases}$$

1. Calcule los puntos críticos y clasifíquelos (tipo y estabilidad).
2. Verifíquelo construyendo el plano de fase y explique brevemente qué significa en términos de intercambio de calor entre habitaciones.

- **Tema 8: Trayectorias de vuelo**
  Resumen de la aplicación de las EDO en Trayectorias de vuelo según el material en el libro (Edwards & Penney, 4ta edición, págs. 66-68, incluyendo el ejemplo resuelto)

- **Parte A (Modelo de trayectoria e isoclinas).** Como en la presentación de este tema, suponga que un avión mantiene su dirección hacia un aeropuerto en el origen. Si $v_0 = 500$ mi/h y $w = 50$ mi/h (con el viento soplando hacia el norte), y el avión inicia en el punto $(200, 150)$, pruebe que su trayectoria se describe por

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} \;=\; 2\,(200x^9)^{1/10}.$$

1. Dibuje el campo de isoclinas asociado a la ecuación diferencial de la trayectoria $\dfrac{dy}{dx}$ y analice cualitativamente cómo influye la relación $k = w/v_0$ en la forma de la curva.

- **Parte B (Bifurcación).** Para modelar la desviación lateral reducida $z(t)$ en función del parámetro μ (razón entre velocidad del viento y velocidad del avión), considere:

$$\frac{dz}{dt} \;=\; \mu - z^3.$$

1. Determine los puntos de equilibrio en función de μ.
2. Clasifique su estabilidad mediante $z' = -3z^2$.
3. Construya el diagrama de bifurcación en el plano (μ, z) y discuta la interpretación física: ¿qué significa que aparezcan o desaparezcan equilibrios en términos de posibles trayectorias de vuelo?

- **Parte C (Plano de fase y estabilidad).** Considere el siguiente sistema lineal numérico que representa el movimiento acoplado en coordenadas $x(t)$ y $y(t)$ bajo viento constante:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - y. \end{cases}$$

1. Calcule los puntos críticos y clasifíquelos (tipo y estabilidad).
2. Verifíquelo construyendo el plano de fase y explique brevemente cómo se interpreta el comportamiento de las trayectorias en términos de convergencia o desvío respecto al destino.

- **Tema 9: Modelos de población**
  Resumen de la aplicación de las EDO en Modelos de población según el material en el libro (Edwards & Penney, 4ta edición, págs. 79-80, incluyendo el ejemplo resuelto)

- **Parte A (Crecimiento poblacional e isoclinas).** Considere que un cierto lago se llena con peces y que las tasas de natalidad y mortalidad β y δ son ambas inversamente proporcionales a $\sqrt{P}$.

1. Muestre que
$$P(t) \;=\; (\tfrac{1}{2}kt + \sqrt{P_0})^2,$$
donde k es una constante.
2. Si $P_0 = 100$ y en 6 meses hay 169 peces en el lago, determine cuántos habrá después de 1 año.
3. Dibuje el campo de isoclinas asociado a la ecuación diferencial correspondiente y analice cualitativamente el comportamiento de las soluciones.

- **Parte B (Bifurcación).** Considere el modelo poblacional reducido

$$\frac{dz}{dt} \;=\; \mu z - z^2,$$

donde μ representa un parámetro que modela la diferencia neta entre natalidad y mortalidad.

1. Determine los puntos de equilibrio en función de μ.
2. Clasifique su estabilidad mediante $z' = \mu - 2z$.
3. Construya el diagrama de bifurcación en el plano (μ, z) e identifique el tipo de bifurcación. Interprete el resultado en el contexto de modelos poblacionales (umbral de crecimiento o colapso de la población).

- **Parte C (Plano de fase y estabilidad).** Modele la dinámica de dos especies que interactúan débilmente mediante el sistema lineal numérico

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 0.1x - 0.05y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 0.05x - 0.1y. \end{cases}$$

1. Calcule los puntos críticos y clasifíquelos (tipo y estabilidad).
2. Verifíquelo construyendo el plano de fase y explique brevemente la interpretación física de las trayectorias en términos de poblaciones acopladas.

- **Tema 10: Poblaciones acotadas y la ecuación logística**
  Resumen de la aplicación de las EDO en Poblaciones acotadas y la ecuación logística según el material en el libro (Edwards & Penney, 4ta edición, págs. 81-82, incluyendo el ejemplo resuelto)

  - **Parte A (Modelo logístico con tasa variable e isoclinas).** Un tumor puede ser considerado como una población de células multiplicándose. Se encuentra, empíricamente, que la "tasa de natalidad" de las células en un tumor decrece exponencialmente con el tiempo, tal que $\beta(t) = \beta_0 e^{-\alpha t}$ (donde α y β_0 son constantes positivas). Entonces

$$\frac{dP}{dt} = \beta_0 e^{-\alpha t} P, \qquad P(0) = P_0.$$

    1. Calcule cómo se comporta el crecimiento del tumor $P(t)$.
    2. Observe que $P(t)$ se aproxima a la población límite finita $P_0 \exp(\beta_0/\alpha)$ conforme $t \to \infty$.
    3. Dibuje el campo de isoclinas en el plano (t, P) e interprete cualitativamente el crecimiento hacia la población límite.

  - **Parte B (Bifurcación).** Para un modelo poblacional reducido considere

$$\frac{dz}{dt} = \mu z - z^3,$$

    donde μ representa un parámetro de control ambiental.

    1. Determine los puntos de equilibrio en función de μ.
    2. Clasifique su estabilidad mediante $z' = \mu - 3z^2$.
    3. Construya el diagrama de bifurcación en el plano (μ, z) e identifique el tipo de bifurcación. Interprete el resultado en el contexto de poblaciones acotadas (aparición de estados estables/inestables según el ambiente).

  - **Parte C (Plano de fase y estabilidad).** Considere el siguiente sistema lineal numérico que describe dos subpoblaciones acopladas (por ejemplo, células activas e inactivas):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 3y. \end{cases}$$

    1. Calcule los puntos críticos y clasifíquelos (tipo y estabilidad).
    2. Verifíquelo construyendo el plano de fase y explique brevemente cómo interpretar las trayectorias en términos de interacción entre subpoblaciones.

- **Tema 11: Poblaciones limitadas y capacidad máxima**
  Resumen de la aplicación de las EDO en Poblaciones limitadas y capacidad máxima según el material en el libro (Edwards & Penney, 4ta edición, págs. 82-85, incluyendo el ejemplo resuelto)

- **Parte A (Modelo logístico e isoclinas).** Durante el periodo de 1790 a 1930 la población de Estados Unidos $P(t)$ (t en años) creció de 3.9 millones a 123.2 millones. En este lapso, $P(t)$ permaneció cercana a la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = 0.03135P - 0.0001489P^2, \qquad P(0) = 3.9.$$

  1. ¿Qué población predice para 1930 la ecuación logística?
  2. ¿Qué población límite pronostica?
  3. ¿Esta ecuación logística ha continuado siendo precisa desde 1930 para modelar a la población de Estados Unidos?
  4. Dibuje el campo de isoclinas en el plano (t, P) para esta ecuación y analice cualitativamente la convergencia hacia la capacidad máxima.

  [Este problema está basado en el modelo de Verhulst, quien en 1845 utilizó los datos de la población de Estados Unidos del periodo 1790-1840 para predecir con precisión su evolución hasta el año 1930 (por supuesto, mucho después de su propia muerte).]

- **Parte B (Bifurcación).** Considere el modelo poblacional reducido

$$\frac{dz}{dt} = \mu z - z^2,$$

  donde μ es un parámetro ambiental que mide la capacidad de crecimiento.

  1. Determine los puntos de equilibrio en función de μ.
  2. Clasifique su estabilidad mediante $z' = \mu - 2z$.
  3. Construya el diagrama de bifurcación en el plano (μ, z) e identifique el tipo de bifurcación. Interprete el resultado en el contexto de poblaciones limitadas y capacidad máxima.

- **Parte C (Plano de fase y estabilidad).** Considere el siguiente sistema lineal numérico que representa dos subpoblaciones que comparten recursos limitados:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 0.02x - 0.01y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 0.01x - 0.03y. \end{cases}$$

  1. Calcule los puntos críticos y clasifíquelos (tipo y estabilidad).
  2. Verifíquelo construyendo el plano de fase y explique brevemente cómo interpretar las trayectorias en términos de equilibrio poblacional y capacidad máxima compartida.

• **Tema 12: Explosión demográfica contra extinción**
Resumen de la aplicación de las EDO en Explosión demográfica contra extinción según el material en el libro (Edwards & Penney, 4ta edición, págs. 86-87, incluyendo el ejemplo resuelto)

- **Parte A (Explosión demográfica e isoclinas).** Una prolífica cría de conejos, cuyas tasas de nacimiento y mortalidad β y δ son cada una proporcional a la población de conejos $P = P(t)$, con $\beta > \delta$.

  1. Muestre que

$$P(t) = \frac{P_0}{1 - kP_0 t},$$

  donde k es una constante. Observe que $P(t) \to \infty$ cuando $t \to \frac{1}{kP_0}$ (Día del Juicio Final).

2. Suponga que $P_0 = 6$, y que hay 9 conejos después de 10 meses. ¿Cuándo ocurre la explosión demográfica?
3. Dibuje el campo de isoclinas en el plano (t, P) y explique cualitativamente la tendencia hacia la explosión demográfica.

- **Parte B (Bifurcación).** Considere el modelo reducido

$$\frac{dz}{dt} = z(\mu - z),$$

donde μ representa una población umbral crítica.

1. Determine los puntos de equilibrio en función de μ.
2. Clasifique su estabilidad mediante $z' = \mu - 2z$.
3. Construya el diagrama de bifurcación en el plano (μ, z) e identifique el tipo de bifurcación. Interprete el significado: ¿cuándo la población tiende a la extinción y cuándo se dispara hacia la explosión?

- **Parte C (Plano de fase y estabilidad).** Considere el siguiente sistema lineal numérico que modela dos subpoblaciones de conejos (jóvenes $x(t)$ y adultos $y(t)$) con dinámica acoplada:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 0.4x + 0.2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -0.3x + 0.1y. \end{cases}$$

1. Calcule los puntos críticos y clasifíquelos (tipo y estabilidad).
2. Verifíquelo construyendo el plano de fase y explique brevemente cómo se interpreta el comportamiento de las trayectorias en términos de supervivencia o colapso poblacional.

- **Tema 13: Cosecha en una población logística**
Resumen de la aplicación de las EDO en Cosecha en una población logística según el material en el libro (Edwards & Penney, 4ta edición, págs. 96-97, incluyendo el ejemplo resuelto)

- **Parte A (Modelo con cosecha proporcional e isoclinas).** Considere la ecuación logística

$$\frac{dx}{dt} = kx(M - x)$$

que modela una población $x(t)$ de peces en un lago después de t meses, durante los cuales no se realiza pesca. Suponga ahora que, debido a la pesca, los peces son capturados del lago a una tasa de hx individuos por mes (h es una constante positiva). De esta manera, los peces son "cosechados" a una tasa proporcional a la población existente, en lugar de a una tasa constante.

1. Si $0 < h < kM$, muestre que la población sigue siendo logística. ¿Cuál es la nueva población límite?
2. Si $h \geq kM$, demuestre que $x(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$, de modo que el lago estará eventualmente sin peces.
3. Dibuje el campo de isoclinas en el plano (t, x) y explique cómo se refleja en él la presencia de la tasa de cosecha proporcional.

- **Parte B (Bifurcación).** Considere el modelo reducido

$$\frac{dz}{dt} = \mu z - z^2 - h,$$

donde μ mide la tasa neta de crecimiento y h representa la presión de cosecha.

1. Determine los puntos de equilibrio en función de μ y h.
2. Clasifique su estabilidad mediante $z' = \mu - 2z$.
3. Construya el diagrama de bifurcación en el plano (μ, z) para distintos valores de h, e interprete cómo cambia el destino de la población cuando la cosecha supera un umbral crítico.

- **Parte C (Plano de fase y estabilidad).** Considere el siguiente sistema lineal numérico que representa la interacción entre peces adultos $x(t)$ y juveniles $y(t)$ bajo cosecha:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 0.04x - 0.01y - 0.02x, \\ \dfrac{dy}{dt} = 0.02x - 0.03y. \end{cases}$$

1. Calcule los puntos críticos y clasifíquelos (tipo y estabilidad).
2. Verifíquelo construyendo el plano de fase y explique brevemente cómo interpretar las trayectorias en términos de sostenibilidad o colapso de la población con cosecha.

- **Tema 14: Resistencia proporcional a la velocidad y a su cuadrado**
Resumen de la aplicación de las EDO en Resistencia proporcional a la velocidad y a su cuadrado según el material en el libro (Edwards & Penney, 4ta edición, págs. 101-105, incluyendo el ejemplo resuelto)

  - **Parte A (Caída con paracaídas e isoclinas).** Una mujer que se lanza en paracaídas desde un avión a una altitud de 10,000 ft cae libremente por 20 s, y entonces abre el paracaídas. ¿Cuánto le tomará llegar al piso? Considere una resistencia lineal del aire rv (ft/s^2), tomando $r = 0.15$ sin el paracaídas y $r = 1.5$ con el paracaídas.

    1. Determine primero su altura sobre el piso y su velocidad en el instante en que abre el dispositivo.
    2. Calcule el tiempo total de caída hasta llegar al piso.
    3. Dibuje el campo de isoclinas de la ecuación $\dfrac{dv}{dt} = -g - rv$ en el plano (t, v) e interprete la tendencia hacia la velocidad terminal en cada caso.

  - **Parte B (Bifurcación).** Para un modelo simplificado de velocidad reducida $z(t)$ bajo arrastre no lineal, considere la ecuación con parámetro μ:

$$\frac{dz}{dt} = \mu - z^2.$$

    1. Determine los puntos de equilibrio en función de μ.
    2. Clasifique su estabilidad mediante $z' = -2z$.
    3. Construya el diagrama de bifurcación en el plano (μ, z) e identifique el tipo de bifurcación. Interprete el significado en términos de existencia de una velocidad terminal o pérdida de equilibrio dinámico.

- **Parte C (Plano de fase y estabilidad).** Considere el siguiente sistema lineal numérico que representa la interacción entre altura $y(t)$ y velocidad $v(t)$ de un cuerpo en caída con resistencia lineal:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = v, \\ \dfrac{dv}{dt} = -32 - 0.5v. \end{cases}$$

  1. Calcule los puntos críticos y clasifíquelos (tipo y estabilidad).
  2. Verifíquelo construyendo el plano de fase y explique cómo se interpreta el comportamiento de las trayectorias en términos de aproximación al suelo con velocidad terminal.

- **Tema 15: Aceleración gravitacional variable**

  Resumen de la aplicación de las EDO en Aceleración gravitacional variable según el material en el libro (Edwards & Penney, 4ta edición, págs. 105-106, incluyendo el ejemplo resuelto)

  - **Parte A (Problema de Julio Verne e isoclinas).** En el problema original de Julio Verne el proyectil lanzado desde la superficie de la Tierra es atraído tanto por ésta como por la Luna, y su distancia $r(t)$ desde el centro del planeta satisface el problema de valor inicial:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM_e}{r^2} + \frac{GM_m}{(S-r)^2}, \quad r(0) = R, \quad r'(0) = v_0,$$

    donde M_e y M_m representan las masas de la Tierra y la Luna, respectivamente; R es el radio de la Tierra, y $S = 384{,}400$ km es la distancia entre los centros de ambos cuerpos. Para llegar al satélite, el proyectil debe pasar por el punto de equilibrio donde la aceleración neta desaparece. Después de esto, quedará bajo el control de la Luna y caerá desde allí a la superficie lunar.

    1. Encuentre la velocidad mínima de lanzamiento v_0 suficiente para que el proyectil logre viajar “De la Tierra a la Luna”.
    2. Dibuje el campo de isoclinas asociado a la ecuación $\dfrac{dv}{dr} = -\dfrac{GM_e}{r^2 v} + \dfrac{GM_m}{(S-r)^2 v}$ e interprete el patrón cualitativo de las trayectorias.

  - **Parte B (Bifurcación).** Para capturar cambios en la dinámica gravitacional reducida, considere el modelo unidimensional con parámetro μ:

$$\frac{dz}{dt} = \mu z - z^3.$$

    1. Determine los puntos de equilibrio en función de μ.
    2. Clasifique la estabilidad mediante $z' = \mu - 3z^2$.
    3. Construya el diagrama de bifurcación en el plano (μ, z) e identifique el tipo de bifurcación. Interprete qué significa físicamente el paso de $\mu < 0$ a $\mu > 0$ en términos de escape gravitacional frente a captura.

  - **Parte C (Plano de fase y estabilidad).** Considere el siguiente sistema numérico simplificado para la altura $y(t)$ y la velocidad $v(t)$ de un cuerpo bajo aceleración gravitacional decreciente:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = v, \\ \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{100}{(y+1)^2}. \end{cases}$$

1. Calcule el/los puntos críticos y clasifíquelos según tipo y estabilidad.
2. Construya el plano de fase y explique brevemente cómo se interpreta el movimiento: caída hacia el centro o acercamiento estable a órbita.

- **Tema 16: Velocidad de escape**
  Resumen de la aplicación de las EDO en Velocidad de escape que aparece en la página 107, incluyendo el ejemplo resuelto)

  - **Parte A (Velocidad de escape e isoclinas).** La masa del Sol es 329,320 veces mayor que la de la Tierra y su radio es 109 veces el radio del planeta.

    1. ¿Qué radio (en metros) debe tener la Tierra para ser comprimida y transformada en un hoyo negro —es decir, para que la velocidad de escape de su superficie iguale la velocidad de la luz $c = 3 \times 10^8$ m/s?
    2. Repita el inciso anterior con el Sol en lugar de la Tierra.
    3. Dibuje el campo de isoclinas asociado a la ecuación

    $$\frac{dv}{dr} = -\frac{GM}{r^2 v},$$

    e interprete la tendencia cualitativa hacia la condición límite de escape.

  - **Parte B (Bifurcación).** Para un modelo simplificado de velocidad radial reducida $z(t)$, considere la ecuación dependiente de un parámetro μ:

    $$\frac{dz}{dt} = \mu - z^2.$$

    1. Determine los puntos de equilibrio en función de μ.
    2. Clasifique la estabilidad mediante $z' = -2z$.
    3. Construya el diagrama de bifurcación en el plano (μ, z) e identifique el tipo de bifurcación. Interprete su significado en términos de condiciones de escape frente a colapso gravitacional.

  - **Parte C (Plano de fase y estabilidad).** Considere el sistema numérico simplificado para la distancia radial $r(t)$ y la velocidad $v(t)$:

    $$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = v, \\ \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{50}{r^2}. \end{cases}$$

    1. Calcule el/los puntos críticos y clasifíquelos (tipo y estabilidad).
    2. Construya el plano de fase y explique brevemente cómo interpretar las trayectorias como escape o caída hacia el centro.

- **Tema 17: Propulsión de cohetes**
  Resumen de la aplicación de las EDO en Propulsión de cohetes según el material en el libro (Edwards & Penney, 4ta edición, págs. 110-112, incluyendo el ejemplo resuelto)

- **Parte A (Modelo de propulsión e isoclinas).** Un cohete de masa inicial $m_0 = 20{,}000$ kg quema combustible a razón de $\beta = 150$ kg/s, expulsando gases con velocidad constante $c = 2{,}500$ m/s. Suponiendo que no hay resistencia del aire y que $g = 9.8$ m/s^2, la ecuación diferencial para la velocidad es

$$\frac{dv}{dt} = -g + \frac{c\,\beta}{m_0 - \beta t}, \quad v(0) = 0.$$

  1. Calcule la velocidad $v(t)$ y la altitud $y(t)$ del cohete en el instante en que se acaba el combustible ($t = 100$ s).
  2. Dibuje el campo de isoclinas en el plano (t, v) y explique qué tendencias cualitativas del movimiento pueden observarse en él.

- **Parte B (Bifurcación).** Para un modelo simplificado de la velocidad reducida $z(t)$ bajo efectos de empuje y resistencia, considere

$$\frac{dz}{dt} = \mu z - z^3,$$

  donde μ es un parámetro relacionado con la razón empuje/peso.

  1. Determine los puntos de equilibrio en función de μ.
  2. Clasifique su estabilidad usando $z' = \mu - 3z^2$.
  3. Construya el diagrama de bifurcación y describa el fenómeno físico: transición entre "ascenso sostenido" y "imposibilidad de despegar".

- **Parte C (Plano de fase y estabilidad).** Considere el siguiente sistema simplificado para la altura $y(t)$ y la velocidad $v(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = v, \\ \dfrac{dv}{dt} = 50 - v - y. \end{cases}$$

  1. Calcule los puntos críticos y clasifíquelos (tipo y estabilidad).
  2. Dibuje el plano de fase y explique cómo las trayectorias pueden interpretarse como despegues exitosos, vuelos sostenidos o caídas.

- **Tema 18: Sistema masa-resorte-amortiguador**
  Resumen de la aplicación de las EDO en Sistema masa-resorte-amortiguador según el material en el libro (Edwards & Penney, 4ta edición, págs. 185-186 y casos específicos de Movimiento libre amortiguado y no amortiguado en las páginas 187-195, incluyendo el ejemplo resuelto)

  - **Parte A (Movimiento amortiguado y análisis cualitativo).** Un peso de 12 lb (masa $m = 0.375$ slugs en unidades fps) está unido a un resorte suspendido verticalmente que se estira 6 in., y a un amortiguador que proporciona una resistencia de 3 lb por cada ft/s de velocidad.

    1. Si el peso es colocado 1 ft por debajo de su posición de equilibrio estático y se suelta en el tiempo $t = 0$, encuentre la función de la posición $x(t)$.
    2. Verifique la frecuencia, la amplitud variante en el tiempo y el ángulo de fase del movimiento.

3. Represente la dinámica en el plano de fase (x, v) mostrando las trayectorias que surgen de distintas condiciones iniciales y discuta su interpretación física.

- **Parte B (Bifurcación).** Para estudiar cambios en la dinámica, considere el modelo reducido con parámetro μ:

$$\frac{dz}{dt} = \mu z - z^3.$$

1. Determine los puntos de equilibrio en función de μ.
2. Clasifique su estabilidad usando $z' = \mu - 3z^2$.
3. Construya el diagrama de bifurcación y explique cómo se relaciona con la transición entre oscilaciones amortiguadas que mueren y oscilaciones que persisten.

- **Parte C (Plano de fase y estabilidad).** Considere el sistema lineal simplificado:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v, \\ \dfrac{dv}{dt} = -4v - 9x. \end{cases}$$

1. Calcule el punto crítico y clasifíquelo (tipo y estabilidad).
2. Construya el plano de fase y explique qué significan las trayectorias en términos de movimiento subamortiguado, críticamente amortiguado o sobreamortiguado.

- **Tema 19: El péndulo simple**

Resumen de la aplicación de las EDO en El péndulo simple según el material en el libro (Edwards & Penney, 4ta edición, págs. 186-187, incluyendo el ejemplo resuelto)

- **Parte A (Problemas clásicos de periodo y análisis cualitativo).**

1. Dos péndulos de longitudes L_1 y L_2, ubicados a distancias R_1 y R_2 respecto del centro de la Tierra, tienen periodos p_1 y p_2. Muestre que

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{R_1\sqrt{L_1}}{R_2\sqrt{L_2}}.$$

2. Un péndulo de longitud 100.10 in., localizado a nivel del mar donde el radio de la Tierra es $R = 3960$ mi, tiene el mismo periodo que un péndulo de longitud 100.00 in. en la cima de una montaña cercana. Utilice el inciso anterior para encontrar la altura de la montaña.

- **Parte B (Bifurcación).** El péndulo no lineal completo está gobernado por

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \sin\theta = 0.$$

Para capturar fenómenos de estabilidad simplificados, considere el sistema reducido

$$\frac{dz}{dt} = \mu \sin z,$$

con μ parámetro que representa la intensidad de la gravedad relativa.

1. Determine los puntos de equilibrio en función de μ.

2. Clasifique su estabilidad con el criterio lineal $z' = \mu \cos z$.
3. Construya el diagrama de bifurcación en (μ, z) y explique cómo se interpreta en términos de posiciones estables (péndulo abajo) e inestables (péndulo arriba).

- **Parte C (Plano de fase y estabilidad).** Considere el sistema simplificado para el ángulo θ y su velocidad ω:

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = \omega, \\ \dfrac{d\omega}{dt} = -0.5\,\omega - \sin\theta. \end{cases}$$

1. Calcule los puntos críticos y clasifíquelos (tipo y estabilidad).
2. Dibuje el plano de fase y explique qué significan las trayectorias en términos del movimiento del péndulo (caídas, oscilaciones amortiguadas, equilibrio estable o inestable).

- **Tema 20: Circuitos eléctricos**
Resumen de la aplicación de las EDO en Circuitos eléctricos según el material en el libro (Edwards & Penney, 4ta edición, págs. 225-230, incluyendo el ejemplo resuelto)

- **Parte A (Circuito RC e isoclinas).** Se trabaja con un circuito RC que contiene un resistor (R ohms), un capacitor (C farads), un interruptor y una fuente de fem, pero no cuenta con inductor. La ecuación diferencial para la carga $Q(t)$ en el capacitor es

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t),$$

donde $E(t) = E_0$ es un voltaje constante suministrado por una batería y el interruptor se cierra en el tiempo $t = 0$, de tal manera que $Q(0) = 0$. Note que la corriente es $I(t) = Q'(t)$.

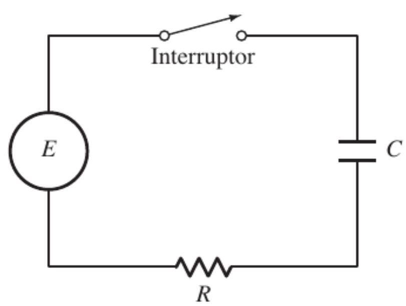

Figure 3: Circuito eléctrico.

1. Encuentre la carga $Q(t)$ y la corriente $I(t)$ en el circuito.
2. Verifique que $\lim_{t\to+\infty} Q(t) = E_0 C$ y que $\lim_{t\to+\infty} I(t) = 0$.
3. Dibuje el campo de isoclinas en el plano (t, Q) e interprete el comportamiento cualitativo de la solución.

- **Parte B (Bifurcación).** Para modelar un circuito no lineal con un diodo especial, considere la dinámica reducida de la corriente $z(t)$:

$$\frac{dz}{dt} = \mu - z^2,$$

donde μ representa un parámetro de control del voltaje aplicado.

1. Determine los puntos de equilibrio en función de μ.
2. Estudie su estabilidad usando $z' = -2z$.
3. Construya el diagrama de bifurcación en el plano (μ, z) e interprete qué significa, en este contexto eléctrico, el paso de $\mu < 0$ a $\mu > 0$.

- **Parte C (Plano de fase y estabilidad).** Considere ahora un circuito RLC con parámetros numéricos:

$$\begin{cases} \dfrac{dQ}{dt} = I, \\ \dfrac{dI}{dt} = -2I - 5Q. \end{cases}$$

1. Calcule el punto crítico y clasifíquelo (tipo y estabilidad).
2. Construya el plano de fase y explique cómo deben interpretarse físicamente las trayectorias en términos de la descarga oscilatoria del capacitor en el circuito.

- **Tema 21: Movimiento circular de un cable**
Resumen de la aplicación de las EDO en Movimiento circular de un cable según el material en el libro (Edwards & Penney, 4ta edición, págs. 237-239, incluyendo el ejemplo resuelto)

- **Parte A (Velocidades críticas e isoclinas).** Considere una cuerda de longitud $L = 2$ m, densidad lineal $\rho = 0.05$ kg/m y tensión $T = 10$ N que se hace girar con velocidad angular ω.

1. Plantee y resuelva el problema de valores en la frontera

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad y(0) = y(L) = 0,$$

con $\lambda = \frac{\rho\omega^2}{T}$.

2. Determine la primera velocidad crítica ω_1 para la cual aparece una deflexión no trivial de la cuerda.
3. Dibuje el campo de isoclinas asociado y explique la interpretación cualitativa de las soluciones $y(x)$ para $\omega < \omega_1$ y para $\omega > \omega_1$.

- **Parte B (Bifurcación).** Para modelar la transición de la cuerda entre "sin deflexión" y "con deflexión", considere el modelo reducido

$$\frac{dz}{dt} = \mu z - z^3,$$

donde z representa la amplitud de la oscilación y μ depende de la relación ω/ω_1.

1. Encuentre los puntos de equilibrio en función de μ.
2. Clasifique su estabilidad usando $z' = \mu - 3z^2$.
3. Construya el diagrama de bifurcación y explique cómo se interpreta físicamente en el cable giratorio (aparición de modos oscilatorios a partir de un umbral crítico).

- **Parte C (Plano de fase y estabilidad).** Considere el sistema simplificado para el desplazamiento $y(t)$ y la velocidad $v(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = v, \\ \dfrac{dv}{dt} = -5y - 2v. \end{cases}$$

1. Calcule el punto crítico y clasifíquelo (tipo y estabilidad).
2. Dibuje el plano de fase y explique cómo interpretarlo en el contexto de la cuerda: amortiguamiento hacia la posición de equilibrio o crecimiento inestable de las oscilaciones.

- **Tema 22: Deflexión de una viga uniforme**
  Resumen de la aplicación de las EDO en Deflexión de una viga uniforme según el material en el libro (Edwards & Penney, 4ta edición, págs. 239-242, incluyendo el ejemplo resuelto)

  - **Parte A (Deflexión con isoclinas).** (a) Suponga que una viga está fija en sus extremos $x = 0$ y $x = L$. Muestre que su forma está dada por

  $$y(x) = \frac{w}{24EI}\left(x^4 - 2Lx^3 + L^2x^2\right).$$

  (b) Verifique que las raíces de $y'(x) = 0$ son $x = 0$, $x = L$ y $x = L/2$, de tal manera que la deflexión máxima de la viga es:

  $$y_{\max} = y(\frac{L}{2}) = \frac{wL^4}{384EI}.$$

  una quinta parte de la viga con extremos simplemente apoyados (ocurre en el centro de la viga). ¿Por qué?
  (c) Dibuje las isoclinas de la ecuación diferencial reducida $y'(x) = \frac{w}{2EI}(x^2 - Lx)$ y explique su interpretación geométrica en el perfil de la viga.

  - **Parte B (Bifurcación).** Para modelar la transición entre deflexión nula y deflexión no trivial bajo una carga crítica, considere el modelo reducido

  $$\frac{dz}{dt} = \mu z - z^3,$$

  donde z representa la amplitud de la deflexión en el centro de la viga y μ depende de w/EI.

  1. Encuentre los puntos de equilibrio y clasifíquelos usando z'.
  2. Dibuje el diagrama de bifurcación y explique el significado físico de la *carga crítica* que inicia la deformación permanente.

  - **Parte C (Plano de fase).** Considere el sistema linealizado alrededor del equilibrio:

  $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = v, \\ \dfrac{dv}{dt} = -ky - cv, \end{cases}$$

  con $k > 0$ y $c > 0$ representando la rigidez y amortiguamiento del material.

  1. Encuentre el punto crítico y determine su tipo y estabilidad.
  2. Dibuje el diagrama de fases y explique qué representa: amortiguamiento hacia la deflexión cero o oscilaciones amortiguadas.

- **Tema 23: Modelo presa-depredador y de competencia**
  Resumen de la aplicación de las EDO en Modelo presa-depredador según el material en el libro (Dennis G.Zill, 9na edición, págs. 107-109, incluyendo los ejemplos resueltos)

- **Parte A (Modelo presa-depredador de Lotka-Volterra).**
  Considere el modelo presa–depredador de Lotka–Volterra definido por el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -0.1x + 0.02xy, \\ \dfrac{dy}{dt} = 0.2y - 0.025xy, \end{cases}$$

  donde $x(t)$ representa la población de depredadores (en miles) y $y(t)$ la población de presas (en miles). Suponga que $x(0) = 6$ y $y(0) = 6$.

  1. Utilice un programa de solución numérica para graficar $x(t)$ y $y(t)$. Use las gráficas para aproximar:
     * El tiempo $t > 0$ en el cual las dos poblaciones vuelven a ser iguales por primera vez.
     * El periodo aproximado de oscilación de cada población.
  2. Determine los puntos críticos del sistema y analice su tipo y estabilidad.
  3. Construya el diagrama de fase en el plano (x, y) y describa cualitativamente la interacción entre depredadores y presas.

- **Parte B (Isoclinas en un modelo de presa).** Suponga que la población $y(t)$ de presas crece de manera logística pero sujeta a una presión de depredación proporcional a y. El modelo es

$$\frac{dy}{dt} = y(2 - y) - 0.5y.$$

  1. Dibuje el campo de isoclinas correspondiente e interprete los valores de y donde la población no cambia.
  2. Explique en qué intervalos la población crece y en cuáles decrece.

- **Parte C (Bifurcación en un modelo de competencia).** Para modelar la densidad $x(t)$ de una especie competidora, considere la ecuación con parámetro μ:

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x^2.$$

  1. Encuentre los puntos de equilibrio en función de μ.
  2. Analice su estabilidad mediante $x' = \mu - 2x$.
  3. Dibuje el diagrama de bifurcación en el plano (μ, x) e identifique el tipo de bifurcación. Interprete cuál sería el umbral para la supervivencia de la especie.

Equipos

1. Equipo 1:
   - Miguel Andrés Cazorla Zamora
   - Eric Reyes Milán
   - Alfonso Tejeda Rodríguez
2. Equipo 2: Los Galácticos
   - Yosvany Castillo

- Leandro Márquez
- Charly Blanco

3. Equipo 3: Los Hijos de Euler

    - Ana Laura Hernández Cutiño
    - Kamila Reinoso Asin
    - Juan Carlos Yern Espinosa

4. Equipo 4:

    - Ernesto J. Govea
    - Anthony Cruz García
    - Olivia Ortiz Arboláez

5. Equipo 5:

    - Liz Cartaya Salabarría
    - Lianet Tamarit Tejas
    - Maya Ramón Castellanos

6. Equipo 6:

    - Ailema Matos Rodríguez
    - Meylí Jiménez Velázquez
    - Raúl R. Espinosa Poma

7. Equipo 7:

    - Enrique González González
    - Ernesto Soler
    - Mauricio Bridon

8. Equipo 8:

    - Luis Daniel Friol Rodríguez
    - Ahmed Rodríguez Martínez
    - Gabriel Ernesto Bonilla Pérez

9. Equipo 9:

    - Rene Diaz Gonzalez
    - Gabriel Perez Suarez
    - Gilberto Rodriguez Crespo

10. Equipo 10:

- Enrique A. González Moreira
- Heily Rodríguez Rodríguez
- Alex L. Cuervo Grillo

11. Equipo 11:
    - Adrian Estevez Alvarez
    - Karla Yisel Ramírez Garcell
    - Javier Fontes Basabe
12. Equipo 12:
    - Lázaro Javier Aragón García
    - Eduard González Prieto
    - Cristian Miguel Castañeda Guzmán
13. Equipo 13 (Anulo Rima):
    - Johan Ajete Rubiera
    - Bryan Mora Cespedes
    - Erick Hernández Peón
14. Equipo 14:
    - Abner Alexandro Abreu Tamayo
    - Anthony Ventosa Lescay
    - Ignacio Miguel Rodríguez Pacheco
15. Equipo 15:
    - David Castillo Rodríguez
    - Patricia Conde
    - Boris Luis Vizcay Cartaya
16. Equipo 16:
    - Bryan Ernesto Moya Aquino
    - Héctor Duarte Vázquez
    - Javier Arias Sotolongo
17. Equipo 17:
    - Diana Martínez Almanza
    - Fabio Hernández Piloto
    - Yisell Velázquez Ochoa
18. Equipo 18:

- José Antonio Bello Cabrera
- Ana Laura Oliva Avilés
- Karen Negrín

19. Equipo 19: Ciencias de Datos
    - Barbaro Yoel Martínez González
    - Ernesto Herrera García
    - Rafael Oscar Valdivia Jiménez
    - David Michel Garcia Batista
20. Equipo 20:
    - Adrian Xavier Brioso Jurado
    - Alejandro López Castro
    - Alejandro García Ruiz
21. Equipo 21:
    - Daniel Alejandro Estupiñán Reyes
    - José Alejandro Albanés Febles
    - Luis David Díaz Chiang
22. Equipo 22:
    - Jorge Julio de León Massón
    - Richard Alejandro Reyes García
    - Raciel Pupo Santos
23. Equipo 23:
    - José Manuel Porras Guerra
    - Eddy J. Valdés Menéndez