# Введение в теорию графов

## Понятие графа

Граф - это математическая структура, состоящая из множества вершин (узлов) и множества ребер, которые соединяют пары вершин. Графы используются для моделирования различных объектов и их взаимосвязей, таких как социальные сети, транспортные системы, компьютерные сети и т.д.

## Вершины и ребра

- Вершина (node, vertex): Основной элемент графа, представляющий объект.  
- Ребро (edge): Связь между двумя вершинами графа.  
  
Графы могут быть:  
- Ориентированные (направленные): Ребра имеют направление, т.е. они идут от одной вершины к другой.  
- Неориентированные (ненаправленные): Ребра не имеют направления.

## Степень вершины

- Степень вершины в неориентированном графе: Количество ребер, инцидентных данной вершине.  
- Входящая степень (in-degree) в ориентированном графе: Количество ребер, входящих в вершину.  
- Исходящая степень (out-degree) в ориентированном графе: Количество ребер, исходящих из вершины.

## Хранение графа

Графы можно хранить различными способами в зависимости от типа задачи и требований к памяти и скорости выполнения операций.

### Список ребер

Список ребер хранит все ребра графа как пары вершин. Этот метод прост и подходит для хранения разреженных графов.  
  
Пример (неориентированный граф):  
[(1, 2), (2, 3), (3, 4)]

### Список смежности

Список смежности хранит для каждой вершины список всех смежных с ней вершин. Этот метод эффективен для хранения разреженных графов и позволяет быстро находить все вершины, смежные с данной.  
  
Пример (неориентированный граф):  
1: [2]  
2: [1, 3]  
3: [2, 4]  
4: [3]

### Матрица смежности

Матрица смежности - это двумерный массив (матрица), где элемент a[i][j] равен 1, если существует ребро между вершинами i и j, и 0 в противном случае. Этот метод удобен для плотных графов и позволяет быстро проверять наличие ребра между двумя вершинами.  
  
Пример (неориентированный граф):  
 1 2 3 4  
1 0 1 0 0  
2 1 0 1 0  
3 0 1 0 1  
4 0 0 1 0

## Методы класса графа и асимптотики времен выполнений

### Методы класса графа

- Добавление вершины (add\_vertex): Добавляет новую вершину в граф.  
- Добавление ребра (add\_edge): Добавляет новое ребро между двумя вершинами.  
- Удаление вершины (remove\_vertex): Удаляет вершину и все инцидентные ей ребра.  
- Удаление ребра (remove\_edge): Удаляет ребро между двумя вершинами.  
- Поиск смежных вершин (get\_neighbors): Возвращает список вершин, смежных с данной вершиной.  
- Проверка наличия ребра (has\_edge): Проверяет, существует ли ребро между двумя вершинами.

### Асимптотики времен выполнений

- Список ребер:  
 - Добавление ребра: O(1)  
 - Проверка наличия ребра: O(E), где E - количество ребер.  
 - Поиск смежных вершин: O(V), где V - количество вершин.  
  
- Список смежности:  
 - Добавление ребра: O(1)  
 - Проверка наличия ребра: O(степень(v)), где степень(v) - степень вершины v.  
 - Поиск смежных вершин: O(степень(v))  
  
- Матрица смежности:  
 - Добавление ребра: O(1)  
 - Проверка наличия ребра: O(1)  
 - Поиск смежных вершин: O(V)