

# Elliptische krommen cryptografie

Quirijn Meijer (4205197)

3 Juli 2015

## Inhoud

1	Gebruiken van cryptografie	1
2	Het trapdoor principe	2
3	De theorie van elliptische krommen	3
4	Het Diffie-Hellman protocol	4
5	Het discreet logaritmisch probleem	5
6	Implementatie in Python	6
7	Aanvallen op de encryptie	9
8	Prestaties	10

# 1 Gebruiken van cryptografie

Cryptografie ontleent zijn belang aan de noodzaak gevoelige over te dragen informatie voldoende te beschermen van onbevoegde partijen, zodanig dat enkel verzender en ontvanger het bericht in kunnen zien. Om dit te bereiken wordt het bericht versleuteld door de verzender, waarna de ontvanger deze kan ontsleutelen. Het algoritme dat hiervoor gebruikt wordt moet zo gekozen worden dat zij garandeert dat eenieder anders dan de bestemde ontvanger het onderschept bericht niet kan ontsleutelen. Er wordt vooralsnog aangenomen dat dit geheel onmogelijk maken een onmogelijkheid in zichzelf is. In realiteit worden om deze reden de algoritmen zo ontworpen dat een bepaalde mate van veiligheid gegarandeerd kan worden. Voor vele algoritmen houdt deze mate van beveiliging verband met de sleutel die gekozen wordt. Hierdoor kan de beveiliging van een boodschap naar behoeven gekozen worden. Dit betekent echter niet dat een dergelijke sleutel een pijler is voor de veiligheid van ieder willekeurig algoritme. De komende hoofdstukken in dit verslag zullen de theorie benodigd om op veilige wijze een gemeenschappelijke sleutel vast te stellen uit de doeken doen. Voor dit gebeurt volgt nog enkele achtergrondinformatie.

Het dagelijks leven biedt vele voorbeelden van cryptografie. Op het internet wordt bij vrijwel iedere vorm van identificatie het verkeer versleuteld. Specifieke voorbeelden zijn het inloggen op websites, het doen van aankopen via het internet, of internetbankieren. Een voorbeeld buiten het internet om is het opnemen van geld bij een geldautomaat.

De Enigma machine, gebruikt door de Wehrmacht tijdens de tweede wereldoorlog, verdient een eervolle vermelding. Deze machine werd gebruikt om de oorlogsmachine op afstand te coördineren. Het breken van de encryptie van de Enigma met behulp van de Bombe is een klassiek voorbeeld van de samenkomst van cryptografie en de computer.

## 2 Het trapdoor principe

Een groot deel van de efficiëntie van een cryptografisch systeem berust op de eenvoud waarmee informatie versleuteld en ontsleuteld kan worden wanneer de benodigde parameters bekend zijn, en de moeilijkheid van de ontsleuteling wanneer deze deels of niet bekend zijn. Het doel van het versleutelen van informatie is immers het afschermen van de informatie voor partijen die niet specifiek toegang tot de informatie verleend zijn. Dit mag echter geen hinder vormen voor de vertrouwde partijen. Een cryptografisch systeem moet zodoende beschikken over de eigenschap dat zij eenvoudig toepasbaar is, maar lastig omkeerbaar door kwaadwillenden. Een functie die deze eigenschappen bezit wordt een trapdoor-functie genoemd. Dit is een metafoor voor een werkelijk valluik: één richting volgen moet eenvoudig zijn, de tegengestelde richting niet. De trapdoor-functie in dit verslag zal het Diffie-Hellman protocol zijn, welke zich baseert op de theorie van elliptische krommen over eindige velden van priem orde. Het achterliggend probleem dat de veiligheid van dit protocol waarborgt is het elliptische kromme discreet logaritmisch probleem.

### 3 De theorie van elliptische krommen

Een elliptische kromme  $K(\mathbb{R})$  wordt gedefiniëerd door alle paren  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  die voldoen aan de volgende vergelijking:

$$K(\mathbb{R}) : y^2 = x^3 + ax + b$$

voor  $a, b \in \mathbb{R}$ , met als randvoorwaarde dat de discriminant

$$\Delta_K = -16(4a^3 + 27b^2)$$

ongelijk is aan 0. Deze voorwaarde garandeert dat de kromme niet-singulier is. Als conventie wordt vervolgens een afzonderlijk punt  $O$  in oneindig toegevoegd. De punten op deze krommen kunnen nu onderling opgeteld worden, met als resultaat een som van de punten die zich wederom op de kromme bevindt. Evenzo kan een scalaire vermenigvuldiging met dezelfde eigenschap gedefiniëerd worden. Een belangrijke observatie is dat wanneer de coëfficiënten  $a, b$  en de coördinaten  $x, y$  van de punten op de kromme niet langer genomen worden uit  $\mathbb{R}$ , maar uit een eindig lichaam  $\mathbb{F}_p$  van priem orde  $p$  groter dan 3, deze eigenschappen behouden blijven. De resulterende grafiek van de kromme zal geheel anders van aanzicht zijn, en begrensd in het vlak. Het is nu mogelijk de verzameling punten op  $K(\mathbb{F}_p)$  samen met de operatie van optelling van punten te nemen om een groep  $\mathbf{G} = (K(\mathbb{F}_p), +)$  te vormen. Merk op dat niet iedere kromme voldoet aan de vereisten om bruikbaar te zijn voor cryptografische doeleinden, maar de veelal voorgeschreven krommen dit wel doen. Merk tevens op dat omdat de orde van  $\mathbf{G}$  een priemgetal is de groep cyclisch en daardoor abels is. Een opsomming van deze groep is als volgt:

- Voor alle punten  $P, Q$  op de kromme  $K(\mathbb{F}_p)$  geldt dat de som  $P + Q$  op de kromme ligt. De groep  $\mathbf{G}$  is gesloten onder de groepsoperatie.
- De groepsoperatie is associatief. Ofwel, voor  $P, Q, R \in \mathbf{G}$  geldt  $P + (Q + R) = (P + Q) + R$ .
- Het toegevoegde punt in oneindig wordt gerelateerd aan het eenheidselement  $e_{\mathbf{G}}$ .
- Voor iedere  $P \in \mathbf{G}$  bestaat een element  $P^{-1} \in \mathbf{G}$  zodat  $P + P^{-1} = P^{-1} + P = e_{\mathbf{G}}$ .

Deze groepseigenschappen zijn niet vanzelfsprekend, maar behoeven een uitgebreid bewijs voor dit verslag. Het volstaat te concluderen dat een groep bestaat welke correspondeert met de kromme  $K(\mathbb{F}_p)$ .

## 4 Het Diffie-Hellman protocol

Het Diffie-Hellman protocol is een systeem dat de uitwisseling van cryptografische sleutels tussen twee partijen beveiligt. Hierop volgend kan deze sleutel gebruikt worden om de communicatie tussenbeide te beveiligen.

Er wordt aangenomen dat de variabelen  $(a, b, p)$  die een elliptische kromme  $K(\mathbb{F}_p)$  definiëren publiek bekend zijn, en dat verzender en ontvanger overeenstemmen deze kromme te gebruiken. Daarnaast is een specifiek genererend element  $k$  van de groep  $\mathbf{G}$  behorend bij deze kromme bekend bij beide partijen. De communicatie vindt vervolgens plaats zoals voorgeschreven door het volgende stappenplan.

1. De eerste partij kiest een getal  $\lambda \in [1, p-1]$  en zendt de tweede partij het punt  $k^\lambda$  toe. De verzender beschikt nu over een sleutel  $(\lambda, k^\lambda)$  waarin  $\lambda$  de zogeheten privé-sleutel is, en  $k^\lambda$  de publieke sleutel.
2. De tweede partij kiest een getal  $\mu \in [1, p-1]$  en stuurt de publieke sleutel  $k^\mu$  als reactie.
3. De tweede partij berekent het punt  $(k^\lambda)^\mu = k^{\lambda\mu}$ .
4. De eerste partij berekent het punt  $(k^\mu)^\lambda = k^{\mu\lambda}$ , welke dankzij de commutativiteit van de groep  $\mathbf{G}$  gelijk is aan  $k^{\lambda\mu}$ . Dit punt zal in het vervolg met  $C$  aangeduid worden.

Beide partijen beschikken nu over hetzelfde punt  $C$ . Omdat alleen de punten  $k^\lambda$  en  $k^\mu$  gepubliceerd zijn is het voor een derde partij die een van beide onderschept onmogelijk  $C$  te berekenen zonder dat  $\mu$  danwel  $\lambda$  bij deze partij bekend is. Deze partij kan pogen een van beiden uit de publieke sleutels te winnen, om hiermee  $C$  te berekenen. Het volgend hoofdstuk verklaart waarom deze aanpak geen vruchtbare onderneming is.

## 5 Het discreet logaritmisch probleem

Gegeven een punt  $l$  uit de groep  $\mathbf{G}$ , en een genererend element  $k \in \mathbf{G}$ . Het discreet logaritmisch probleem is de naam gegeven aan het probleem  $\nu$  te vinden zo dat  $l = k^\nu$ . De naam is vanzelfsprekend afgeleid uit het feit dat voor deze combinatie geldt dat  $\nu = \log_k(l)$ . Het Diffie-Hellman protocol baseert zich op de aanname dat geen voldoende efficiënte algoritmen bestaan om dit getal  $\nu$  te vinden. Voorbeelden van algoritmen die een oplossing aan dit probleem kunnen bieden, maar niet efficiënt genoeg zijn, zijn de *brute force*-aanpak en het *baby step, giant step*-algoritme. De classificatie van deze algoritmen zijn respectievelijk  $\mathcal{O}(p)$  en  $\mathcal{O}(\sqrt{p})$ , waaruit blijkt dat voor afdoende grote  $p$  de tijd benodigd om een oplossing te vinden aanzienlijk is. Ter illustratie: Curve25519, een veelgebruikte kromme, gebruikt het priemgetal  $p = 2^{255} - 19$ . Zoals de naam doet vermoeden is een brute force aanval weinig elegant, in de zodenigheid dat voor iedere  $x \in [1, p]$  gecontroleerd wordt of  $x$  voldoet aan  $k^x = l$ . Is dit het geval, dan kan voor alle gebruiken geconcludeerd worden dat  $x = \nu$  en wordt de bewerking afgebroken. De classificatie verraadde reeds dat in het ergste geval alle  $2^{255} - 19$  mogelijke waarden voor  $x$  gecontroleerd worden. Deze onderneming kan met de hedendaags beschikbare computatiekracht jaren in beslag nemen.

## 6 Implementatie in Python

In dit hoofdstuk wordt de theorie zoals besproken in de vorige hoofdstukken verenigd, en wordt invulling gegeven aan de operaties op de groep. Vervolgens worden deze vertaald naar hun bijbehorende methoden in Python 3.4. De resulterende uitwerking hiervan kan in de volgende repository gevonden worden:

<http://github.com/QuirijnMeijer/Eindopdracht>

Doorgaans zal in het gehele hoofdstuk aangenomen worden dat over het lichaam  $\mathbb{R}$  (wanneer  $p = 0$ ) gewerkt wordt. Wanneer specifiek met een ander karakteristiek gewerkt wordt is dit nadrukkelijk vermeld – dit omdat de berekeningen over deze lichamen een aanpassing zijn van de tegenhangers over  $\mathbb{R}$ .

### Elliptische kromme

#### Negatie

Uit de inherente horizontale symmetrie van iedere elliptische kromme kan afgeleid worden dat de negatie van een punt niets anders is dan de spiegeling van het punt rondom de  $x$ -as. De methode levert voor een punt  $P = (x, y)$  de spiegeling  $-P = (x, -y)$  als Punt-object op. Het is eenvoudig na te gaan dat wanneer  $(x, y)$  voldoet aan de vergelijking zoals geïntroduceerd in hoofdstuk 3, het punt  $(x, -y)$  dit ook doet. Er geldt  $(y)^2 = (-y)^2$ .

#### Optelling

Om twee punten  $P, Q$ ,  $P \neq Q$  gelegen op een elliptische kromme op te tellen wordt een rechte lijn door de twee punten getrokken, welke dankzij de aard van de elliptische krommen één snijpunt anders dan  $P, Q$  zal hebben met de kromme. Dit punt wordt aangeduid met  $P * Q$ . Op dezelfde wijze volgt nu  $P + Q = O * (P * Q) = -(P * Q)$ .

Om dit te implementeren in Python beschouwen we dit proces meetkundig, om zo de coördinaten van het punt  $P + Q$  uitgedrukt in bekende waarden te vinden.

De lijn door de punten  $P = (x_1, y_1), Q = (x_2, y_2)$  zoals hierboven beschreven heeft  $\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  als hellingscoëfficiënt, en omdat  $P$  op de lijn ligt kan het steunpunt  $\beta$  gevonden worden door  $y_1 = \alpha x_1 + \beta$  op te lossen. Hieruit volgt  $\beta = y_1 - \alpha x_1$ . De gezochte vergelijking van de lijn is zo  $y = \alpha x + \beta$ . Om  $P * Q = (x_3, y_3)$  te vinden moet het snijpunt met de elliptische kromme  $y^2 = x^3 + ax + b$  bepaald worden. Deze wordt verkregen door  $y = \alpha x + \beta$  te substitueren in de vergelijking van de elliptische kromme,  $y^2 = (\alpha x + \beta)^2 = x^3 + ax + b$ . Uitwerken hiervan levert de volgende vergelijking op:

$$x^3 + (-\alpha^2)x^2 + (a - 2\alpha\beta)x + (b - \beta^2) = 0$$



Omdat bekend is dat  $x_1, x_2, x_3$  door constructie nulpunten zijn van deze vergelijking moet volgen dat:

$$x^3 + (-\alpha^2)x^2 + (a - 2\alpha\beta)x + (b - \beta^2) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Waarvan op zijn beurt het rechterlid gelijk is aan:

$$x^3 + (-x_1 - x_2 - x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)x + (-x_1x_2x_3)$$

Door nu de coëfficiënten van  $x^2$  aan beide zijden te vergelijken wordt bevonden dat  $-\alpha^2 = -x_1 - x_2 - x_3$ . Uit het rearrangeren van deze vergelijking volgt  $x_3 = \alpha^2 - x_1 - x_2$ . Omdat het punt  $P * Q$  op de lijn  $y = \alpha x + \beta$  door  $P, Q$  ligt moet volgen dat  $y_3 = \alpha x_3 + \beta$ . De volgende expliciete coördinaten van  $P * Q$  in termen van  $x_1, x_2, y_1, y_2$  zijn nu gevonden:

$$P * Q = (x_3, y_3) = ([\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}]^2 - x_1 - x_2, [\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}] \cdot [x_3 - x_1] + y_1)$$

Zoals eerder besproken volgt  $P + Q = O * (P * Q) = (x_3, -y_3)$ . Wanneer  $p = 0$  zal de methode dit punt terugkeren als Punt-object. Indien de karakteristiek groter dan 3 is wordt in iedere stap modulo  $p$  gerekend om zo te garanderen dat de coördinaten elementen van  $\mathbb{F}_p$  zijn, en het resulterende punt zich bovendien op de elliptische kromme bevindt.

In het geval dat  $P = Q$  is de richtingscoëfficiënt  $\alpha$  van de lijn door  $P = (x_1, y_1)$  niet goed gedefinieerd. Om dit te verhelpen wordt teruggevallen op de helling in het punt  $P$  zoals gegeven door de afgeleide. Om deze te bepalen wordt de vergelijking  $y^2 = x^3 + ax + b$  herschreven als  $y^2 = f(x)$  en impliciet gedifferentieerd:

$$\frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}f(x) \Rightarrow 2y \frac{dy}{dx} = f'(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{2y}$$

Bekend is dat  $f(x) = x^3 + ax + b$ , dus  $f'(x) = 3x^2 + a$ . Nu volgt:

$$\alpha = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_1, y_1} = \frac{3x_1^2 + a}{2y_1}$$

En zo:

$$P * P = (x_3, y_3) = ([\frac{3x_1^2 + a}{2y_1}]^2 - 2x_1, [\frac{3x_1^2 + a}{2y_1}] \cdot [x_3 - x_1] + y_1)$$

Zoals eerder vermeld moet ook hier rekening gehouden worden met de karakteristiek van het lichaam waarover wordt gewerkt, en op dezelfde manier wordt de negatie  $2P = O * (P * P)$  als Punt-object teruggekeerd.

De methode die in dit hoofdstuk tot stand is gekomen zal in uitvoering zelden direct aangeroepen worden, maar is essentieel voor de implementering van de scalaire vermenigvuldiging zoals gebruikt in het Diffie-Hellman protocol.

#### Scalaire vermenigvuldiging

Scalaire vermenigvuldiging van een punt  $P$  met een getal  $n \in \mathbb{N}$  is gedefiniëerd als  $nP = \sum_{i=1}^n P$ . Deze methode roept herhaaldelijk de methode gewijd aan optelling aan, en keert het resultaat terug als Punt-object. Omdat de groepsoperatie van  $\mathbf{G}$  optelling is wordt  $nP$  in deze context ook als  $P^n$  geschreven.

#### Aftrekking

Het aftrekken van een punt  $Q$  van een punt  $P$  geschiedt door de negatie van het punt  $Q$  te nemen, zodat  $P - Q$  berekend kan worden als  $P + (-Q)$ . Het resultaat van deze bewerking is een Punt-object.

### **Punt**

De klasse Punt is bewust eenvoudig gelaten omdat alle taken zijn gedelegeerd naar de klasse behorend bij de elliptische kromme, en dient alleen het doel een punt op de kromme als object te vertegenwoordigen.

### **Diffie-Hellman**

## 7 Aanvallen op de encryptie

[— 'Baby step, giant step', Pollard Rho —]

## 8 Prestaties

In dit afsluitend hoofdstuk worden het gebruik van de code en de reeds behaalde prestaties besproken.

## Bronnen

Tate, Silverman (1994). Rational Points on Elliptic Curves (gecorrigeerd). New York City, New York: Springer-Verlag.

<http://en.wikipedia.org/wiki/Cryptography>

[http://en.wikipedia.org/wiki/Elliptic\\_curve](http://en.wikipedia.org/wiki/Elliptic_curve)

[http://en.wikipedia.org/wiki/Diffie-Hellman\\_key\\_exchange](http://en.wikipedia.org/wiki/Diffie-Hellman_key_exchange)

[http://en.wikipedia.org/wiki/Discrete\\_logarithm](http://en.wikipedia.org/wiki/Discrete_logarithm)