UNIDAD I

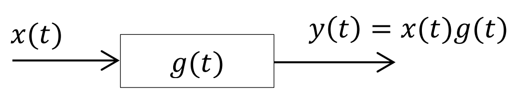
IDEA GENERAL DE LOS SISTEMAS

Conceptos

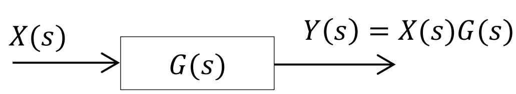
Sistemas de control es un sistema o subsistema que está constituido por un conjunto de componentes que regulan el comportamiento de un sistema (o de sí mismos) para lograr un objetivo. Cualquier sistema (organizaciones, seres vivos o máquinas) puede tener sistemas de control.

Planta es un equipo, quizás simplemente un juego de piezas de una máquina, funcionando conjuntamente, cuyo objetivo es realizar una operación determinada. Llamaremos PLANTA a cualquier objeto físico que deba controlarse (ejemplo: Acondicionador de aire, horno de calentamiento, casa domo-tizada, reactor químico, vehículo espacial).

Sistemas en lazo abierto en este tipo sistema se mantiene una relación establecida entre la salida y la entrada de referencia. En otras palabras, la variable de salida no tiene efecto sobre la acción de control.



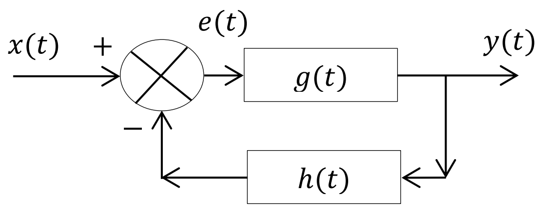
Sistema en lazo abierto, dominio en el tiempo



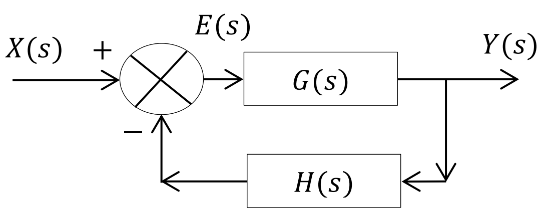
Sistema en lazo abierto, dominio en la frecuencia

La señal que sale del bloque, será igual a la señal que ingresa al mismo multiplicada por la ganancia de $G(s)$.

Sistemas en lazo cerrado

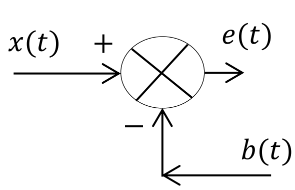


Sistema en lazo cerrado, dominio en el tiempo

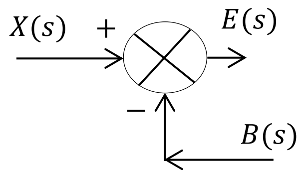


Sistema en lazo cerrado, dominio en la frecuencia

La señal de salida $Y(s)$ se obtiene gracias a la amplificación de la señal de error $E(s)$, mediante la etapa $G(s)$. Donde la señal de error nace de la comparación de dos señales, la señal de entrada $X(s)$ y la señal producida por el producto $Y(s).H(s)$. La esencia de este sistema, es el lazo de realimentación, el cual es vinculado por un punto suma.



Punto suma, dominio en el tiempo



Punto suma, dominio en la frecuencia

Los signos que se encuentran en el punto suma, indicarán si la operación que debe efectuarse, es una resta o una suma.

A tener en cuenta que la señal de salida del sistema en lazo cerrado debe convertirse a una fuerza, posición o voltaje antes que pueda compararse con la señal de entrada (las dos señales que se compararán deben ser de la misma especie).

Los sistemas de control, deben tener una etapa controladora. El cual debe ser capaz de reducir la desviación a cero o casi cero o sea, a un valor muy pequeño.

En el proceso de la **acción de control**, el controlador detecta la señal de error, que por lo general, esta señal se encuentra en un nivel de potencia muy bajo, entonces se procede a la amplificación de la señal de error, hasta un nivel lo suficientemente alto. La señal de salida de un controlador automático, se alimenta a un actuador, como lo es un motor eléctrico.

El **actuador** es un dispositivo de potencia que produce la entrada para la planta de acuerdo con la señal de control, a fin, que la señal de salida se aproxime a la señal de entrada de referencia.

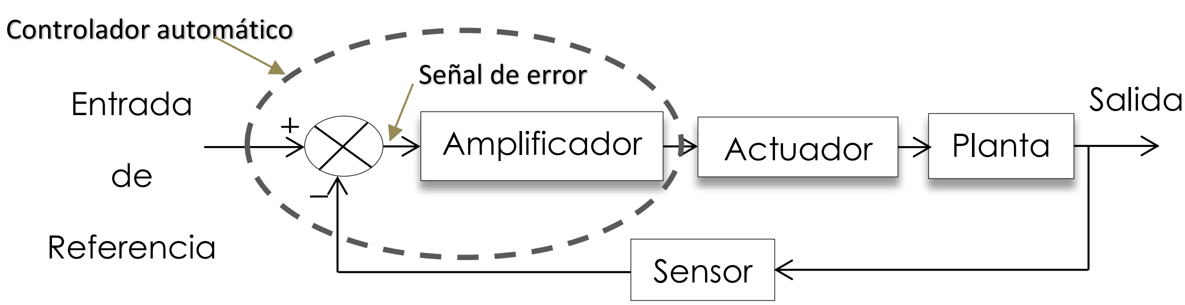


Diagrama de bloques de un sistema de control automático.

Dentro de algunas clasificaciones de controladores, podemos encontrar las siguientes:

- Controladores ON – OFF
- Controladores PD
- Controladores PI
- Controladores PID

La Transformada de Laplace y su inversa

El motivo por el que interviene la transformada de Laplace en este análisis, es simple; es para obtener una solución de las ecuaciones diferenciales de una manera más sencilla, que en la utilizada sin la aplicación de la TL. Por ello, el primer paso para lograr la solución de una ecuación diferencial es convertirla a la dependencia de la variable compleja "s", utilizando la Transformada de Laplace como herramienta de conversión, y una vez obtenida la solución en forma algebraica, procedemos a aplicar la Transformada Inversa de Laplace y conseguir la respuesta en el dominio del tiempo.

Entonces, primero convertir la ecuación diferencial a ecuación algebraica.

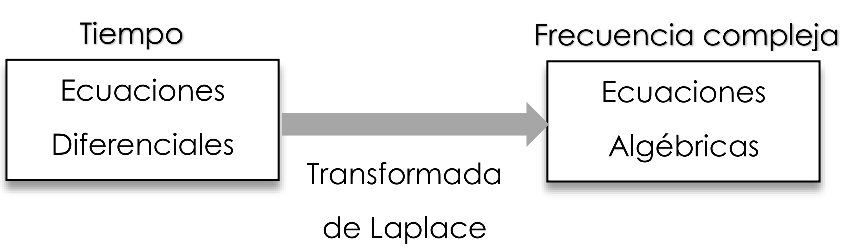


Diagrama de conversión de ecuación diferencial a ecuación algebraica

Una vez que se resuelve algebraicamente la ecuación, se procede a reconvertirla a ecuación diferencial nuevamente. Para tal cometido, se utiliza la Transformada Inversa de Laplace.

Diagrama de conversión de ecuación algebraica a ecuación diferencial

La Transformada de Laplace de una función $f(t)$ definida para todos los números positivos $t \geq 0$, es la función $F(s)$, definida por:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Tabla de la Transformada de Laplace	
$f(t)$	$F(s)$
Impulso unitario $\delta(t)$	1
Escalón unitario $1(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}; \quad (n = 1,2,3, \dots)$	$\frac{1}{s^n}$
$t^n; \quad (n = 1,2,3, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at}; \quad (n = 1,2,3, \dots)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
$t^n e^{-at}; \quad (n = 1,2,3, \dots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$\operatorname{sen} \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

$\operatorname{senh} \omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$
$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$
$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
$\frac{1}{b-a}(e^{-at}-e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+b)(s+a)}$
$\frac{1}{b-a}(be^{-bt}-ae^{-at})$	$\frac{s}{(s+b)(s+a)}$
$\frac{1}{ab}\left[1+\frac{1}{a-b}(be^{-at}-ae^{-bt})\right]$	$\frac{1}{s(s+b)(s+a)}$
$\frac{1}{a^2}(1-e^{-at}-ate^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)^2}$
$\frac{1}{a^2}(at-1+e^{-at})$	$\frac{1}{(s+a)s^2}$
$e^{-at}\operatorname{sen}\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\operatorname{sen}\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t$ $(0<\zeta<1)$	$\frac{\omega^2{}_n}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega^2{}_n}$
$-\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\operatorname{sen}(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t-\phi)$ $\phi=\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$ $(0<\zeta<1)$	$\frac{s}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega^2{}_n}$
$1-\cos\omega t$	$\frac{\omega^2}{(s^2+\omega^2)s}$
$\omega t-\operatorname{sen}\omega t$	$\frac{\omega^3}{(s^2+\omega^2)s^2}$
$-\omega t\cos\omega t+\operatorname{sen}\omega t$	$\frac{2\omega^3}{(s^2+\omega^2)^2}$
$1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\operatorname{sen}(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+\phi)$ $\phi=\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$ $(0<\zeta<1, 0<\phi<\pi/2)$	$\frac{\omega^2{}_n}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega^2{}_n)}$
$\frac{1}{2\omega}t\operatorname{sen}\omega t$	$\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$
$t\cos\omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$\frac{1}{\omega^2{}_2-\omega^2{}_1}(\cos\omega_1 t-\cos\omega_2 t)$ $(\omega^2{}_1\neq\omega^2{}_2)$	$\frac{s}{(s^2+\omega^2{}_1)(s^2+\omega^2{}_2)}$

$\frac{1}{2\omega}(\operatorname{sen}\omega t + \omega t\cos\omega t)$	$\frac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}$

Tabla de las propiedades de la Transformada de Laplace
$\mathcal{L}[Af(t)] = AF(s)$
$\mathcal{L}[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$
$\mathcal{L}_\pm\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0\pm)$
$\mathcal{L}_\pm\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right] = s^2F(s) - sf(0\pm) - \dot{f}(0\pm)$
$\mathcal{L}_\pm\left[\int f(t)\,dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s}\left[\int f(t)dt\right]_{t=0\pm}$
$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s}$
$\int_0^\infty f(t)dt = \lim_{s\to 0} F(s) \quad si \quad \int_0^\infty f(t)dt \quad salidas$
$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a)$
$\mathcal{L}[f(t-a)1(t-a)] = e^{-as}F(s); \qquad a \geq 0$
$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$

$\mathcal{L}[t^2 f(t)] = -\frac{d^2}{ds^2}F(s)$
$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s); \qquad (n = 1,2,3, \ldots\ldots)$
$\mathcal{L}\left[\frac{1}{t}f(t)\right] = \int_s^{\infty} F(s)ds; \qquad si\ \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}f(t)\ salidas$
$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{1}{a}\right)\right] = aF(as)$
$\mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau\right] = F_1(s)F_2(s)$
$\mathcal{L}[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\omega}^{c+j\infty} F(p)G(s-p)dp$

Tabla de Teoremas de la Transformada de Laplace	
$Teorema\ de\ valor\ inicial$	$f(0+) = \lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$
$Teorema\ de\ valor\ final$	$f(\infty) = \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$
$Función\ pulso$ $f(t) = \frac{A}{t_0}1(t) - \frac{A}{t_0}1(t-t_0)$	$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{A}{t_0 s} - \frac{A}{t_0 s}e^{-st_0}$
$Función\ impulso$ $g(t) = \lim_{t_0\to 0}\frac{A}{t_0}; \quad para\ \ 0 < t < t_0$ $g(t) = 0; \qquad para\ t < 0,\ \ t_0 < t$	$\mathcal{L}[g(t)] = \lim_{t_0\to 0}\left[\frac{A}{t_0 s}(1-e^{-st_0})\right]$ $= \lim_{t_0\to 0}\frac{\frac{d}{dt_0}A(1-e^{-st_0})}{\frac{d}{dt_0}(t_0 s)}$

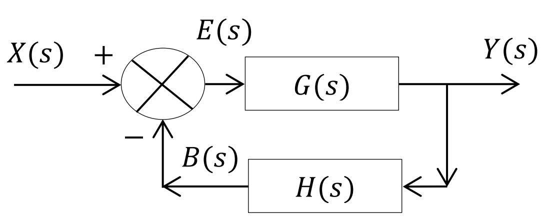
	$= \frac{As}{s} = A$

Teoría de Bloques

Los diagramas en bloques, son de suma importancia para la simplificación de sistemas, también nos ayudan a tener una visión más general de la finalidad que deben cumplir los sistemas. Un diagrama en bloques, es una representación gráfica, esquematizada en etapas, las cuales contienen una función de transferencia y el sentido de flujo de señales, están representado con flechas. Todo diagrama en bloques, puede ser expresado algebraicamente, siempre que se cumplan con sus propiedades y definiciones.

En un sistema en lazo cerrado, la salida $Y(s)$ se realimenta al punto suma algebraica (comparación), en donde se compara con la entrada de referencia $X(s)$. La salida del bloque, $Y(s)$ en este caso, se obtiene multiplicando la función de transferencia $G(s)$ por la entrada al bloque $X(s)$.

Cualquier sistema lineal de control realimentado puede representarse mediante un diagrama de bloques, formado por puntos suma, bloques y puntos de ramificación.



Sistema en lazo cerrado, dominio en la frecuencia

$X(s)$: Señal de entrada; señal referencial.

$Y(s)$: Señal de salida (variable controlada).

$B(s)$: Señal realimentada.

$H(s)$: función de transferencia del bloque de realimentación.

$E(s)$: señal de error.

$F(s)$: función transferencia de lazo cerrado, $F(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$

Deduciendo ecuaciones:

$E(s) = X(s) - B(s)$

La señal proveniente del lazo de realimentación, es la señal de salida, la cual es previamente amplificada, por la etapa, que se encuentra en el lazo de realimentación.

$E(s) = X(s) - H(s)Y(s)$

A su vez, la señal de salida, es la señal de error amplificada, por la etapa que se encuentra en la trayectoria directa.

$E(s) = X(s) - H(s)G(s)E(s)$

Despejando la señal de entrada.

$X(s) = E(s)[1 + H(s)G(s)]$

Como se mencionó anteriormente, la señal de salida, es:

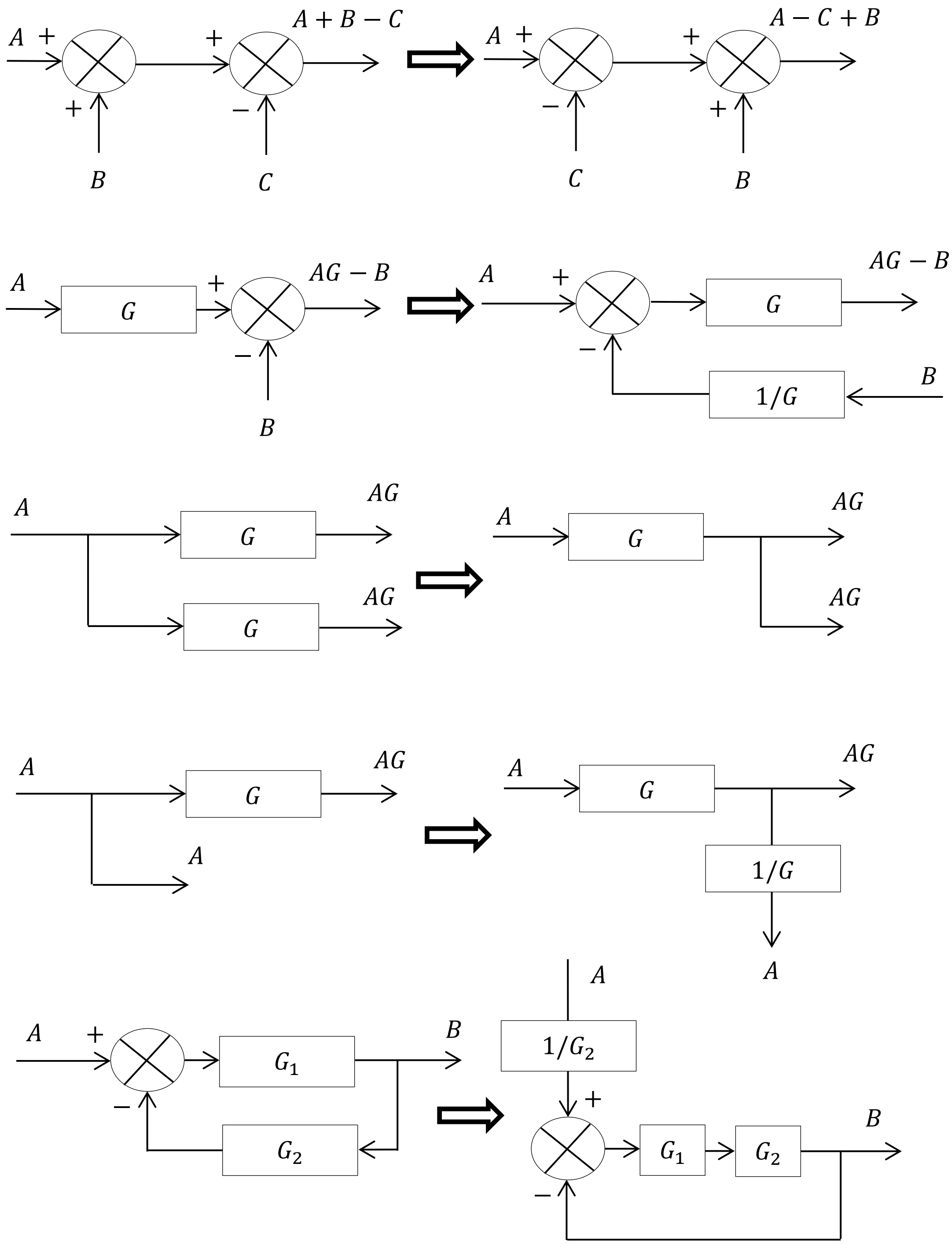
$Y(s) = G(s)E(s)$

Realizando el cociente entre la señal de salida y la señal de entrada, se obtiene la función transferencia del sistema.

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)E(s)}{E(s)[1 + H(s)G(s)]}$$

Propiedades, algebra de bloques

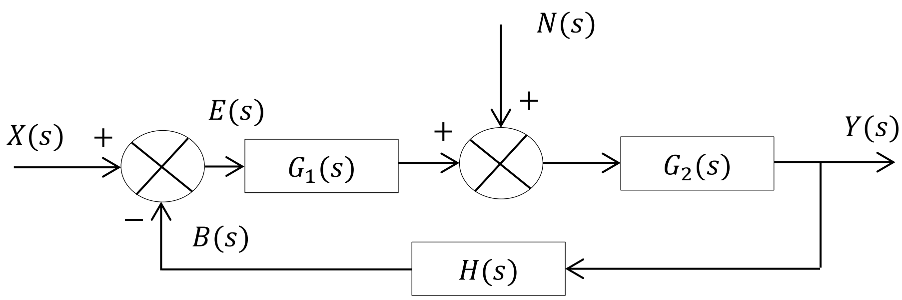
Hay situaciones en donde el diagrama de bloques se torna complicado, esto significa, un diagrama que contenga muchos lazos de realimentación, bloques, puntos de ramificación y puntos suma. Es posible simplificar el diagrama, mediante un reordenamiento paso a paso a través de las reglas del álgebra.



Propiedades, álgebra de bloques

Señales de perturbación

Cuando se presentan dos o más entradas (la señal de entrada "señal de referencia" y perturbaciones) en un sistema lineal, cada una de ellas puede tratarse en forma independiente; y las salidas correspondientes a cada entrada pueden sumarse para obtener la señal de salida completa.



Sistema con una señal de entrada y otra de perturbación.

Suponiendo que este cumple con el principio de superposición, las señales de entrada (referencia) y la de perturbación, están relacionadas con la señal de salida de la siguiente manera:

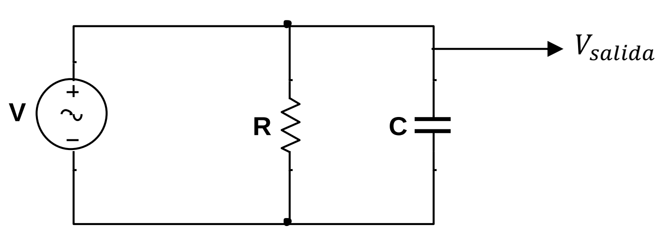
$$Y(s) = Y_X(s) + Y_N(s)$$

Para el caso de n entradas, tendremos:

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) + Y_3(s) + \cdots + Y_n(s)$$

Ejercicio resuelto

Realizar el diagrama de bloques correspondiente al circuito de la siguiente figura. Requisitos del diagrama: estar compuesto por lo menos por un punto suma, punto de ramificación y dos bloques.



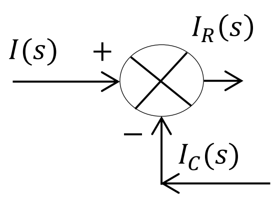
Circuito RC paralelo.

Según la ley de las corrientes de Kirchhoff, $I(s) = I_R(s) + I_C(s)$. El potencial eléctrico de entrada, es igual a la caída de tensión en los elementos pasivos (conexión en paralelo).

La suma de las corrientes $I_R(s)$ e $I_C(s)$ proveniente de cada rama, da como resultado, la corriente eléctrica de entrada $I(s)$.

$$I(s) = I_R(s) + I_C(s)$$

$$I_R(s) = I(s) - I_C(s)$$

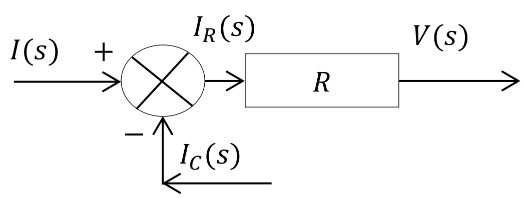


Comparación entre las dos corrientes.

Reemplazndo la corriente electrica que pasa por ele resistor (Ley de Ohm).

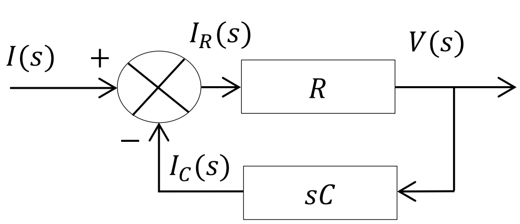
$$\frac{V(s)}{R} = I(s) - I_C(s)$$

$$V(s) = I_R(s)R = \frac{I_C(s)}{sC}$$



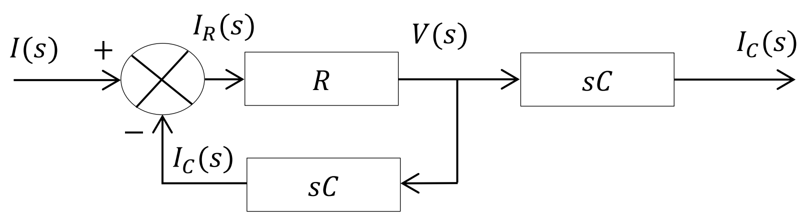
Primer bloque agregado.

De esta manera, se deduce el siguiente bloque $sCV(s) = I_C(s)$.



Segundo bloque agregado.

Para relacionar la señal de salida con respecto a la señal de entrada, la señal de salida debe una de las dos corrientes $I_R(s)$ o $I_C(s)$.



Tercer bloque agregado.

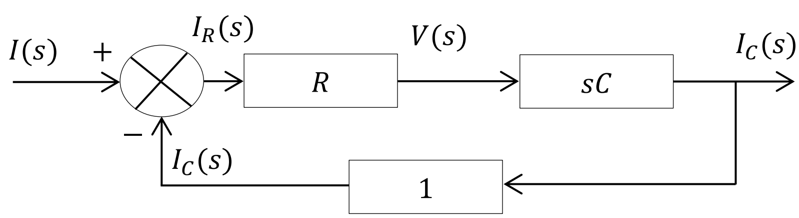


Diagrama final

Uso del MATLAB

Una forma muy segura de comprobar los resultados obtenidos de las diferentes situaciones problemáticas en sistemas electrónicos de control, es mediante la herramienta MATLAB. Además, de ser una herramienta informática sencilla de aplicar es divertida.

A continuación usaremos MATLAB, para convertir una función de en el dominio del tiempo al dominio de la frecuencia y viceversa. Para, tal encomienda se acude la sintaxis "$laplace(funcion)$ y $ilaplace(FUNCION)$" respectivamente.

Primero, debemos declarar las variables con "$syms$", que participarán de nuestro programa. Por ejemplo, "$t\ s\ V\ R\ C$". Luego definimos una o más funciones, ya sea en el dominio del tiempo o de la frecuencia, y luego aplicamos la sintaxis correspondiente para la obtención de la respuesta:

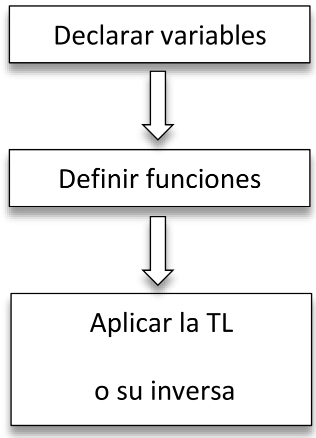
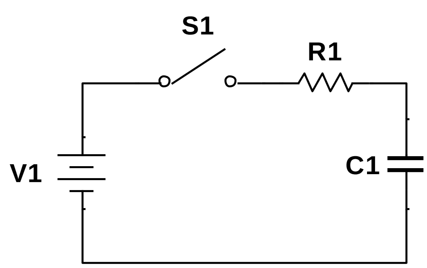


Diagrama de flujo del programa de conversión usando “laplace o ilaplace”

Ejemplo

Sistemas de primer orden - Circuito RC serie. Suponemos que las condiciones iniciales que se presentan son: el capacitor descargado, y el switch abierto. Cuando cambiamos el estado del switch, comenzará a circular una corriente eléctrica en el circuito RC y producirá una caída de tensión en el resistor, que ira variando a medida que transcurra el tiempo. La entrada es caracterizada como la señal de entrada de prueba escalón.



Análisis, aplicando LAPLACE - Ley de las tensiones de Kirchhoff

$$\frac{V}{s} = I(s)R + \frac{I(s)}{sC}$$

$$\frac{V}{s} = I(s)\left[R + \frac{1}{sC}\right]$$

$$I(s) = \frac{V}{s} / \left[R + \frac{1}{sC}\right]$$

MATLAB

$\gg syms\ t\ s\ V\ R\ C$

$\gg I = V/(s*(R+1/(s*C)));$

$\gg ilaplace(I)$

$ans\ =$

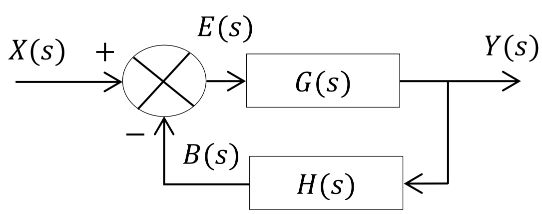
$(V*exp(-t/(C*R)))/R$

Función Transferencia

La función transferencia, es una forma de expresar la relación existente entre la salida de un sistema y su entrada.

Los sistemas que participan en esta definición, se describen mediante ecuaciones diferenciales lineales e invariantes en el tiempo.

Los sistemas de control, pueden ser representados por medio de diagramas en bloques, como se muestra en la figura.



Representación genérica de un sistema de control.

Se define la función de transferencia de la trayectoria directa de un sistema de control, a la relación entre la señal de salida y la señal de error.

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = G(s)$$

FT del sistema en lazo abierto

Se define la función de transferencia en lazo abierto de un sistema de control, a la relación entre la señal de realimentación y la señal de error (se considera a la señal de referencia igual a cero).

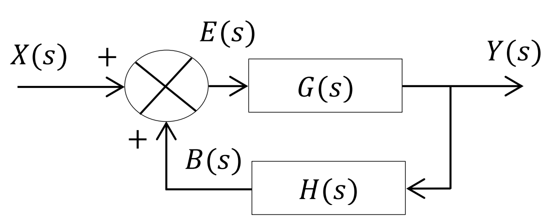
$$\frac{B(s)}{E(s)} = H(s)G(s)$$

FT del sistema en lazo cerrado

Se define la función de transferencia en lazo cerrado de un sistema de control, a la relación entre la señal de salida y la señal de entrada (referencia).

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Observe, que el signo del término que contiene el producto entre ganancia de la trayectoria directa y la ganancia de realimentación es positivo $G(s)H(s)$, esto se cumple cuando el signo del comparador (punto suma) es negativo. En el caso, que el punto suma contenga un signo positivo en el sector de realimentación, obtendremos el siguiente resultado:



Representación genérica de un sistema de control, con realimentación negativa.

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1 - G(s)H(s)}$$