

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Физтех-школа аэрокосмических технологий

# **Отчёт о выполнении лабораторной работы**

## **1.2.5**

Исследование вынужденной регулярной прецессии гироскопа

Автор:

Волков Илья Александрович

Б03-503

Долгопрудный 2025

## 1. Аннотация

**Цель работы:** исследовать вынужденную прецессию гироскопа; установить зависимость скорости вынужденной прецессии от величины момента сил, действующих на ось гироскопа; определить скорость вращения ротора гироскопа и сравнить ее со скоростью, рассчитанной по скорости прецессии.

**В работе используются:** гироскоп в кардановом подвесе, секундомер, набор грузов, отдельный ротор гироскопа, цилиндр известной массы, крутильный маятник, штангенциркуль, линейка.

## 2. Теоретические сведения

Уравнения движения твердого тела можно записать в виде

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (1)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \quad (2)$$

Так как сила  $\vec{F}$  не зависит от угловой скорости, а момент сил  $\vec{M}$  – от скорости поступательного движения, то уравнения движения можно рассматривать отдельно.

$$\vec{L} = \vec{i}I_x\omega_x + \vec{j}I_y\omega_y + \vec{k}I_z\omega_z, \quad (3)$$

Гироскоп – быстро вращающееся тело, для которого, с точностью до перестановки индексов, выполнено условие:

$$I_z\omega_z \gg I_x\omega_x, I_y\omega_y, \quad (4)$$

Уравновешенный гироскоп – тот гироскоп, для которого центр масс неподвижен. Если момент внешних сил действует в течение короткого промежутка времени, то:

$$|\Delta\vec{L}| = \left| \int \vec{M} dt \right| \ll |\vec{L}|, \quad (5)$$

Рассмотрим маховик, вращающийся вокруг оси z (рисунок 1). Будем считать что

$$\omega_x = \omega_0, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = 0, \quad (6)$$

Пусть ось вращения повернулась на угол  $d\varphi$  в плоскости zx:

$$d\varphi = \Omega dt$$

Будем считать, что  $L_\Omega \ll L_{\omega_0}$ . Это означает, что момент импульса маховика изменится только по направлению:

$$|d\vec{L}| = Ld\varphi = L\Omega dt, \quad (7)$$

Изменение направлено вдоль оси x, поэтому  $d\vec{L}$  можно представить:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L}, \quad (8)$$

Если учесть уравнение вращательного движения:

$$\vec{M} = \vec{\Omega} \times \vec{L}, \quad (9)$$

Под действием момента  $\vec{M}$  ось гироскопа медленно вращается вокруг оси  $y$  с угловой скоростью  $\Omega$  – регулярная прецессия гироскопа. Скорость в случае движения уравновешенного гироскопа под действием моментов сил подвешенных грузов:

$$\Omega = \frac{mgl}{I_z \omega_0}, \quad (10)$$

Где  $l$  – расстояние от центра карданова подвеса до точки крепления груза на оси гироскопа (рисунок 2).

Силы трения не лежат в плоскости осей вращения, поэтому они могут изменять момент импульса и по направлению, и по величине. Для ротора действие сил трения скомпенсировано действием электромотора. В результате действия нескомпенсированных сил трения в осях карданова подвеса ось гироскопа будет опускаться в направлении груза.

Момент инерции ротора относительно оси симметрии  $I_0$  изменяется по крутильным колебаниям на жесткой проволоке.

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{f}}, \quad (11)$$

Где  $f$  – модуль кручения проволоки. Чтобы исключить  $f$  можно подвесить цилиндр с известным размерами и массой:

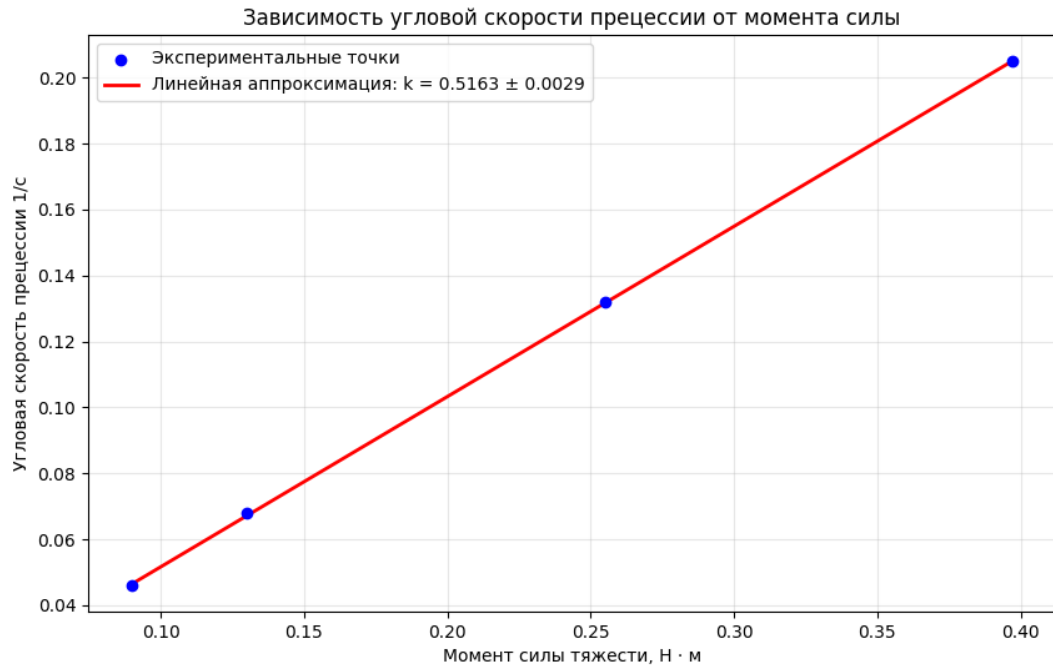
$$I_0 = I_{\text{ц}} \frac{T_0^2}{T_{\text{ц}}^2}, \quad (12)$$

### 3. Измерения и обработка данных

#### 3.1 Исследование зависимости скорости прецессии от момента сил

Отклонив рычаг на 5-6 градусов вверх и подвесив к нему груз, найдем скорость опускания рычага и скорость регулярной прецессии. Результаты измерений представлены в таблице 1. Погрешность секундомера – 0.1 с, весов – 0.01 гр.

m, г	N оборотов	T, с	$\Omega$ прецессии, 1/сек	$\omega$ опускания, 1/сек
335	14	428	0.205	0.00040
215	10	477	0.132	0.00036
112	6	554	0.068	0.00031
76	4	546	0.046	0.00032



### 3.2 Измерение момента инерции ротора

Размеры цилиндра:  $m = 1615,4$  г,  $d = 78,8$  мм. Результаты измерений периодов крутильных колебаний для цилиндра и ротора представлены в таблице 2. Погрешность штангенциркуля – 0.1 мм.

N оборотов	T вращения ротора, с	T вращения цилиндра, с
10	3.17	4
10	3.16	4
10	3.16	4

Момент инерции цилиндра равен  $\frac{1}{2}mR^2 = 0,0012538$  кг · м<sup>2</sup>. Из приведенных измерений можно сказать что:

$$I_0 = (0.78 \pm 0.06) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

### 3.3 Расчет частоты вращения и момента сил трения

По формуле (10) можно увидеть, что частота вращения обратно пропорциональна наклону графика на рисунке (ч). С помощью МНК найдем наклон графика  $k$ , а из него

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi \cdot k I_0} = 392 \pm 3.7 \text{ Гц}$$

Определим момент сил трения. Для каждого эксперимента измерим угол опускания за период измерения.

$$M_{\text{тр}} = \frac{mgl\Delta\alpha}{2\pi N}$$

Где  $\Delta\alpha$  – угол опускания за N оборотов регулярной прецессии.

m, гр	335	215	112	76
M <sub>тр</sub> , мН * м	1.81	1.46	1.09	1.15
ΔM <sub>тр</sub> , мН * м	0.06	0.07	0.09	0.13

### **3.4 Определения частоты вращения ротора по фигурам Лиссажу**

Если на один вход осциллографа подать ЭДС во второй обмотке статора гироскопа, а на второй – напряжение с генератора, то при совпадении частот можно увидеть эллипс. Для достижения неподвижной картинке на дисплее осциллографа, можно на короткое время выключить питание гироскопа, чтобы ток первой обмотки не мешал измерениям. Таким образом:

$$\nu = 389 \pm 1 \text{ Гц}$$

Данное значения частоты лежит в пределах погрешности частоты, измеренной с помощью экспериментов с вращением гироскопа.

Проверим справедливость соотношения моментов импульсов. Значения моментов инерции ротора по разным осям не отличаются по порядку, а угловые скорости:

$$\Omega \approx 0.07 \text{ 1/с} \ll \omega_0 \approx 2444 \text{ 1/с}$$

Поэтому предположенное соотношение верно.

## **4. Вывод**

Установлена зависимость скорости вынужденной прецессии от величины момента сил, действующих на ось гироскопа. Полученная экспериментальным образом частота совпадает со значением частоты, измеренным с помощью осциллографа в пределах погрешности. Был определен момент силы трения, действующей на ось гироскопа. Несмотря на малость значения по сравнению с моментом силы тяжести груза, его было достаточно для поворота гироскопа вокруг своей оси.