

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Физтех-школа аэрокосмических технологий

Отчёт о выполнении лабораторной работы

1.4.3

Изучение нелинейных колебаний длиннопериодного маятника

Автор:

Волков Илья Александрович

Б03-503

Долгопрудный 2025

1. Аннотация

2. Теоретические сведения

2.0. Физический маятник. Уравнение движения с трением

Физическим маятником называется твёрдое тело, совершающее колебания в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, не проходящей через центр масс.

Уравнение движения физического маятника с учётом вязкого трения имеет вид:

$$I\ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} + mga \sin(\varphi) = 0, \quad (1)$$

где I — момент инерции относительно оси вращения, b — коэффициент вязкого трения, φ — угол отклонения от вертикали, m — масса маятника, g — ускорение свободного падения, a — расстояние от оси вращения до центра масс.

Введём обозначения:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{I}}, \beta = \frac{b}{\omega_0 I}, \quad (2)$$

и безразмерное время $\tau = \omega_0 t$. При переходе к безразмерным переменным (штрих означает производную по τ) уравнение (1) принимает вид:

$$\varphi'' + \beta\varphi' + \sin(\varphi) = 0, \quad (3)$$

где β — безразмерный параметр затухания.

Условие применимости теории. В работе рассматриваются слабо затухающие колебания, для которых выполняется условие:

$$\beta \ll 1,0 < \beta < 0.1, \quad (4)$$

При выполнении этого условия нелинейное поведение маятника ярко выражено, и можно применять приближённые методы расчёта на основе анализа траекторий в фазовом пространстве.

2.1. Интегрирование уравнения движения без трения

При отсутствии трения ($\beta = 0$) уравнение (3) имеет первый интеграл — закон сохранения энергии:

$$\frac{(\varphi')^2}{2} + (1 - \cos \varphi) = \text{const}, \quad (5)$$

В момент максимального отклонения $\varphi = \varphi_x$ угловая скорость $\varphi' = 0$, откуда:

$$\text{const} = 1 - \cos \varphi_x$$

Подставляя в (5), получаем:

$$(\varphi')^2 = 2(\cos \varphi - \cos \varphi_x), \quad (6)$$

Используя тригонометрическое тождество для разности косинусов, формулу (6) можно переписать в виде:

$$(\varphi')^2 = 4 \left[\sin^2 \left(\frac{\varphi_x}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right], \quad (7)$$

Формула (7) устанавливает связь между углом φ и безразмерной угловой скоростью φ' при колебаниях с амплитудой φ_x в отсутствие трения.

2.2. Фазовый портрет. Сепаратриса

Фазовым портретом называется семейство интегральных кривых в фазовой плоскости (φ, φ') . Уравнение (6) или (7) даёт параметрическое семейство фазовых траекторий, параметром которого является амплитуда φ_x .

При малых амплитудах $\varphi_x \ll 1$ траектории близки к эллипсам. При больших амплитудах траектории деформируются.

Особый интерес представляет предельная траектория при $\varphi_x \rightarrow \pi$, называемая сепаратрисой. Она разделяет два типа движения: колебания ($|\varphi| < \pi$) и вращения. Уравнение сепаратрисы:

$$(\varphi')^2 = 2(1 + \cos(\varphi)), \quad (8)$$

Сепаратриса проходит через неустойчивые точки равновесия $\varphi = \pm\pi$ (маятник в перевёрнутом положении).

2.3. Связь амплитуды колебаний с угловыми скоростями в положении равновесия

Рассмотрим колебания с малым затуханием. Пусть в моменты прохождения маятника через положение равновесия ($\varphi = 0$) его безразмерные скорости равны φ'_0 и φ'_1 для двух последовательных прохождений, соответствующие амплитудам φ_{x0} и φ_{x1} .

Из уравнения (7) при $\varphi = 0$ имеем:

$$(\varphi'_0)^2 = 4 \sin^2 \left(\frac{\varphi_{x0}}{2} \right), \quad (9)$$

$$(\varphi'_1)^2 = 4 \sin^2 \left(\frac{\varphi_{x1}}{2} \right), \quad (10)$$

При слабом затухании амплитуды близки: $\varphi_{x0} \approx \varphi_{x1} \approx \varphi_x$. Существует три приближённых соотношения для оценки амплитуды:

Формула (11a) — среднее геометрическое:

$$\sin^2 \left(\frac{\varphi_x}{2} \right) = -\frac{\varphi'_1 \varphi'_0}{4}, \quad (11a)$$

(знак минус отражает то, что скорости φ'_0 и φ'_1 имеют разные знаки).

Формула (11б) — усреднение по двум прохождениям (метод последовательных приближений):

$$\sin^2\left(\frac{\varphi_x}{2}\right) = \frac{(\varphi'_0)^2 + (\varphi'_1)^2}{8}, \quad (11б)$$

Формула (11в) — среднее значение (наиболее точная):

$$\sin^2\left(\frac{\varphi_x}{2}\right) = \frac{(\varphi'_0 - \varphi'_1)^2}{16}, \quad (11в)$$

Исследование погрешностей показывает, что при $\beta = 0.1$ выражение (11в) является наиболее точным для оценки амплитуды колебаний, относительная погрешность не превышает 0.2 %. Для значений $\beta < 0.1$ точность формулы (11в) ещё выше.

Отметим, что эти выражения позволяют вычислять амплитуду колебания без явного знания значения параметра затухания β . Однако информация об этом параметре связана с различием угловых скоростей φ'_0 и φ'_1 .

2.4. Период колебаний

Под полупериодом колебаний маятника с затуханием понимается время между двумя последовательными моментами прохождения маятником положения равновесия.

Для колебаний без трения период нелинейного маятника выражается через полный эллиптический интеграл первого рода. При переходе к размерным переменным получается следующее выражение для периода:

$$T(\varphi_x) = T_0 \cdot F(\varphi_x) = T_0 \cdot \frac{2}{\pi} K\left(\sin^2\left(\frac{\varphi_x}{2}\right)\right), \quad (13)$$

где $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{mga}}$ — период линейных колебаний маятника, $K(k^2)$ — полный эллиптический интеграл первого рода:

$$K(k^2) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\alpha)^2}}$$

Разложение в ряд по степеням амплитуды даёт:

$$T(\varphi_x) = T_0 \left[1 + \left(\frac{\varphi_x}{4}\right)^2 + \frac{11}{12} \left(\frac{\varphi_x}{4}\right)^4 + \dots \right], \quad (14)$$

Из формулы (14) видно, что период растёт с увеличением амплитуды колебаний. При $\varphi_x \rightarrow$ период стремится к бесконечности, что соответствует движению по сепаратрисе.

2.5. Определение периода линейных колебаний

Для определения периода T_0 линейных колебаний маятника используется косвенный метод. Рассмотрим движение маятника из начального состояния с углом отклонения, равным 180 градусам ($\varphi_0 = \pi$) и нулевой начальной скоростью ($\varphi'_0 = 0$).

При отсутствии трения закон сохранения энергии даёт связь между угловой скоростью в положении равновесия ω_x и этим начальным состоянием:

$$\frac{I\omega_x^2}{2} = 2mga$$

$$\text{Отсюда угловая скорость } \omega_x = 2\sqrt{\frac{mga}{I}} = 2\omega_0.$$

Период линейных колебаний:

$$T_0 = \frac{4\pi}{\omega_x}, \quad (15)$$

Уравнение (15) справедливо в отсутствие трения. В случае вязкого трения можно оценить его вклад в качестве поправки первого порядка по β . Несмотря на наличие затухания, второй метод энергетически более выгоден, так как энергия маятника значительно больше, чем при прямом измерении малых колебаний, где влияние различных форм трения становится существенным.

2.6. Экспериментальная методика

В установке используется оптический датчик (оптопара), регистрирующий моменты пересечения луча спицей маятника.

Для каждого пересечения луча измеряются:

T_{1i} — момент времени начала затенения луча

T_{2i} — момент времени конца затенения луча

$\Delta t_i = T_{2i} - T_{1i}$ — время затенения луча, соответствующее i -му прохождению

Эффективный угловой размер затеняющей спицы $\Delta\varphi = 0.005$ рад определяется калибровкой установки.

Безразмерная угловая скорость при i -м прохождении маятника через равновесие:

$$\varphi'_i = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t_i \cdot \omega_0}, \quad (16)$$

Период полного колебания (время от i -го до $(i + 1)$ -го прохождения):

$$T_i = \frac{1}{2} [(T_{2i} - T_{1i}) + (T_{2(i+1)} - T_{1(i+1)})], \quad (17)$$

Амплитуда вычисляется по формуле (11в):

$$\varphi_{x,i} = 2\arcsin\left(\frac{|\varphi'_i - \varphi'_{i+1}|}{4}\right), \quad (18)$$

Для определения параметра затухания β используется детальный анализ затухания энергии за один полупериод с привлечением полных эллиптических интегралов (см. приложение в исходных материалах). Параметр β определяется по набору из нескольких полупериодов, а затем производится его усреднение.

3. Методика измерений

1. Установить грузы таким образом, чтобы верхний груз находился максимально близко к оси качания, а нижний – на максимальном удалении от оси. Измерить расстояния от грузов до оси качания.
2. Подобрать корректное положение оптопары.
3. Провести серию предварительных измерений для определения эффективного углового размера спицы и периода линейных колебаний.
4. Провести серию основных измерений для определения зависимости периода от амплитуды колебаний.
5. Повторить пункты 1-4 для различных положений груза.
6. Построить на одном графике зависимости нормализованного периода T/T_0 от амплитуды, полученные для различных положений груза. Определить, как при этом меняется характер линейности.
7. Построить зависимость периода T_0 линейных колебаний от положения груза. Определить из этого графика массу перемещаемого груза.
8. Проанализировать графики зависимости параметра затухания от средней скорости маятника. Какая модель трения больше подходит в том или ином диапазоне средних скоростей?
9. Построить зависимость усредненного коэффициента от положения груза. Усреднение необходимо делать по области амплитуд колебаний, где коэффициент трения практически не зависит от амплитуды. Объяснить полученный результат.

4. Результаты измерений и обработка данных

4.0. Предварительные данные

В ходе лабораторной работы проводилось 5 экспериментов, в которых менялось положение нижнего груза. Положение верхнего груза оставалось постоянным на протяжении всей лабораторной работы.

Расстояние от центра вращения до верхнего груза: 4.20 см

Расстояние от центра вращения до нижнего груза:

Номер эксперимента	Расстояние до груза, см
1	12.65
2	15.85
3	18.96
4	22.10
5	25.30

Данные предварительных опытов для каждого эксперимента:

Номер эксперимента	Эфф. угл. Размер $\varphi \pm 0.000003$ б. р.	Период $T_0 \pm 0.001$ с
1	0.005388	1.484
2	0.005388	1.375
3	0.005236	1.336
4	0.005180	1.323
5	0.005216	1.331

4.1. Зависимость «нормализованного» периода T/T_0 от амплитуды.

Теоретический период получим по следующей формуле:

$$\frac{T(\phi)}{T_0} = \frac{2}{\pi} K(k^2), \quad k^2 = \sin^2 \frac{\phi}{2}$$

Амплитуда по разности скоростей:

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\varphi_x}{2} &= \frac{\left[\alpha \left(\frac{1}{\Delta t_{i-1}} - \frac{1}{\Delta t_i} \right) \right]^2}{16} \\ \varphi_{x,i} &= \frac{360^\circ}{\pi} \cdot 2 \arcsin \left(\sqrt{\sin^2 \left(\frac{\varphi_{x,i}}{2} \right)} \right) \end{aligned}$$

Экспериментальный период:

$$T_i = \frac{1}{2} [(T_{2,i} - T_{1,i}) + (T_{2,i+1} - T_{1,i+1})]$$

Так как программа elliptic измеряет время в отсчетах системного таймера, все полученные величины нужно перевести в секунды:

$$t_i = \frac{T_i}{1193180}$$

$$T_{exp,i} = \frac{T_i}{T_0 \cdot 1193180}$$

График зависимости нормализованного периода от амплитуды представлен в приложении 7.

4.2. Зависимость периода Т0 линейных колебаний от положения груза и определение массы перемещаемого груза.

Период колебаний для маятника выражается по следующей формуле:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + m(R_h^2 + R_b^2)}{mg(R_h - R_b)}}$$

Где:

- I_0 – момент инерции стержня относительно оси вращения;
- m – масса одного груза;
- R_b, R_h – расстояния от оси вращения до верхнего и до нижнего груза соответственно.

Используя измеренные точки, строим аппроксимирующую кривую и вычисляем массу груза m

Полученный график представлен в приложении 9

Результат расчета: $m_{\text{рп}} = 364.4$ г. Полученное значение разумно для лабораторного груза.

4.3. Анализ графиков зависимости параметра затухания от средней скорости маятника.

В ходе эксперимента программа вывела графики зависимости параметра затухания от средней угловой скорости маятника (приложение 8). По их характеру можно заключить, что при малых скоростях (менее 1 рад/с) лучше всего описывает данные модель трения, пропорциональная квадрату скорости. В диапазоне средних скоростей (примерно 1–3 рад/с) наблюдается переходный режим, где наиболее адекватна смешанная модель. При больших скоростях (свыше 3 рад/с) поведение параметра затухания соответствует модели трения, практически не зависящей от скорости.

4.4. Зависимость усредненного коэффициента вязкого трения от положения груза.

Выражение для коэффициента вязкого трения:

$$b = \beta \cdot I \cdot \omega_0$$

Где:

- I – момент инерции маятника
- $\omega_0 = 2\pi/T_0$ – угловая частота малых колебаний
- β – безразмерный параметр затухания

По полученным в ходе эксперимента данным построим график (приложение 10)

5. Вывод

Были исследованы колебания длиннопериодного маятника. Установлено, что нормализованный период $T/T_0T/T_0T/T_0$ практически не зависит от положения нижнего груза. По экспериментальным данным выбраны наиболее адекватные модели трения в разных диапазонах угловых скоростей. Также по результатам обработки определены момент инерции установки без грузов и масса грузов. Выполнено сравнение моделей с двумя грузами и с одним грузом; показано, что модель с одним грузом для данной установки неприменима. Кроме того, получена близкая к линейной зависимость коэффициента затухания от расстояния нижнего груза до оси вращения.

6. Приложения

Приложение 1: вывод формулы 11б

Обозначим через φ'_0 скорость маятника без трения (нулевое приближение), и через φ'_1 скорость маятника с учётом трения в первом приближении:

$$0. \quad \varphi'_0 = 2\sqrt{\sin(\frac{\varphi_x}{2})^2 - \sin(\frac{\varphi}{2})^2}$$

$$1. \quad \varphi'_1 = 4(\sin(\frac{\varphi_x}{2})^2 - \sin(\frac{\varphi}{2})^2) - 2\beta \int \varphi'_0 d\varphi$$

Далее, для учёта трения, преобразуем интеграл скорости по углу, с учётом нулевого приближения скорости:

$$\int_0^{\varphi_x} \sqrt{\sin(\frac{\varphi_x}{2})^2 - \sin(\frac{\varphi}{2})^2} d\varphi = \sin(\frac{\varphi_x}{2}) \int_0^{\varphi_x} \sqrt{1 - \frac{\sin(\frac{\varphi}{2})^2}{\sin(\frac{\varphi_x}{2})^2}} d\varphi \quad (21)$$

Максимальный угол отклонения обозначен через φ_x . Применим замену переменной:

$$\frac{\sin(\frac{\varphi}{2})^2}{\sin(\frac{\varphi_x}{2})^2} = \sin(\theta)^2, \quad d\varphi = 2 \sin(\frac{\varphi_x}{2}) \frac{\sqrt{1-\sin(\theta)^2}}{\sqrt{1-\sin(\frac{\varphi_x}{2})^2 \cdot \sin(\theta)^2}} d\theta$$

И дальнейшие преобразования интеграла (21) принимают вид:

$$\begin{aligned} & \sin(\frac{\varphi_x}{2}) \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin(\theta)^2} \cdot 2 \sin(\frac{\varphi_x}{2}) \frac{\sqrt{1 - \sin(\theta)^2}}{\sqrt{1 - \sin(\frac{\varphi_x}{2})^2 \cdot \sin(\theta)^2}} d\theta = \\ & 2 \sin(\frac{\varphi_x}{2})^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \sin(\theta)^2}{\sqrt{1 - \sin(\frac{\varphi_x}{2})^2 \cdot \sin(\theta)^2}} d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \sin(\frac{\varphi_x}{2})^2 \cdot \sin(\theta)^2 + \sin(\frac{\varphi_x}{2})^2 - 1}{\sqrt{1 - \sin(\frac{\varphi_x}{2})^2 \cdot \sin(\theta)^2}} d\theta = \\ & 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin(\frac{\varphi_x}{2})^2 \cdot \sin(\theta)^2} d\theta + 2(\sin(\frac{\varphi_x}{2})^2 - 1) \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin(\frac{\varphi_x}{2})^2 \cdot \sin(\theta)^2}} = \\ & 2E(\frac{\pi}{2} | \sin(\frac{\varphi_x}{2})^2) + 2(\sin(\frac{\varphi_x}{2})^2 - 1) \cdot F(\frac{\pi}{2} | \sin(\frac{\varphi_x}{2})^2) \end{aligned}$$

Здесь выделены известные специальные математические функции:

$F(\frac{\pi}{2} | \sin(\frac{\varphi_x}{2})^2) = K(\sin(\frac{\varphi_x}{2})^2) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin(\frac{\varphi_x}{2})^2 \cdot \sin(\theta)^2}}$ – полный эллиптический интеграл первого рода

$E\left(\frac{\pi}{2} \mid \sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right)^2\right) = E\left(\sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right)^2\right) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right)^2 \cdot \sin(\theta)^2} d\theta$ - полный эллиптический интеграл второго рода

Существует относительно простой способ численного вычисления этих функций, не требующий явного вычисления интегралов. Используя полученное выражение для интеграла (21) можно записать в первом приближении скорость маятника φ'_0 - до и φ'_1 - после текущего максимального отклонения:

$$\begin{aligned}\varphi'^2_0 &= 4 \sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right)^2 + 8\beta \cdot (E\left(\sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right)^2\right) + (\sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right)^2 - 1) \cdot K\left(\sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right)^2\right)) \\ \varphi'^2_1 &= 4 \sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right)^2 - 8\beta \cdot (E\left(\sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right)^2\right) + (\sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right)^2 - 1) \cdot K\left(\sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right)^2\right))\end{aligned}$$

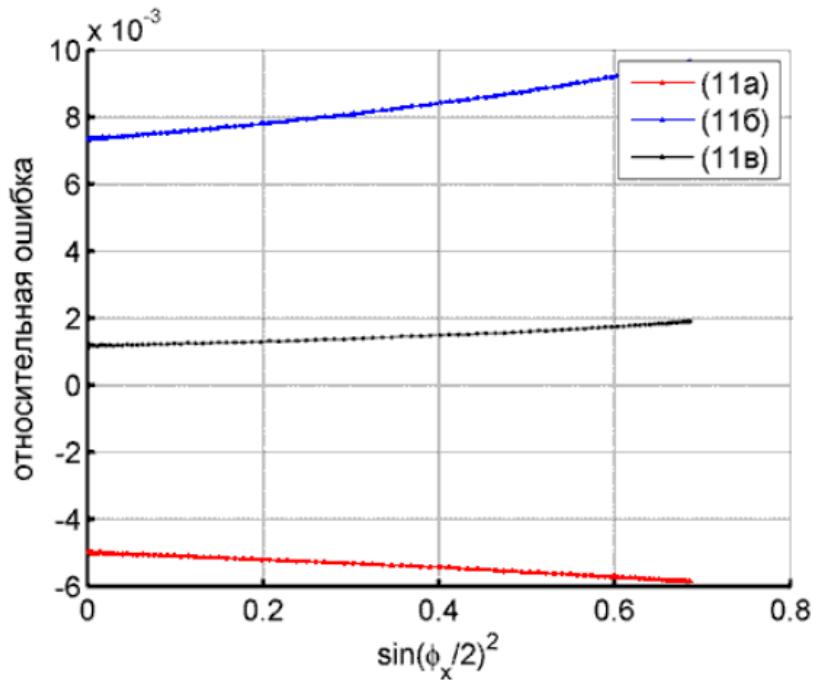
Сумма квадратов скоростей в этом приближении не зависит от параметра затухания:

$$\sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right)^2 = \frac{\varphi'^2_0 + \varphi'^2_1}{8} \quad (22)$$

А из разности квадратов скоростей получается оценочное выражение для параметра вязкого трения:

$$\begin{aligned}\varphi'^2_0 - \varphi'^2_1 &= 16\beta \cdot (E\left(\sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right)^2\right) + (\sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right)^2 - 1) \cdot K\left(\sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right)^2\right)) \Rightarrow \\ \beta &= \frac{\varphi'^2_0 - \varphi'^2_1}{16 \cdot (E\left(\sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right)^2\right) + (\sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right)^2 - 1) \cdot K\left(\sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right)^2\right))} \quad (23)\end{aligned}$$

Приложение 2: относительная точность формул 11а, 11б, 11в:



Приложение 3: способ численного вычисления эллиптического интеграла $K(x^2)$

На входе в алгоритм подаётся x – аргумент функции в диапазоне от 0 до 1 и последовательно выполняются вычисления:

1. $a_0 = \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}$
2. $b_0 = \sqrt{1 - a_0^2}$
3. $a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$
4. $b_1 = \sqrt{a_0 \cdot b_0}$

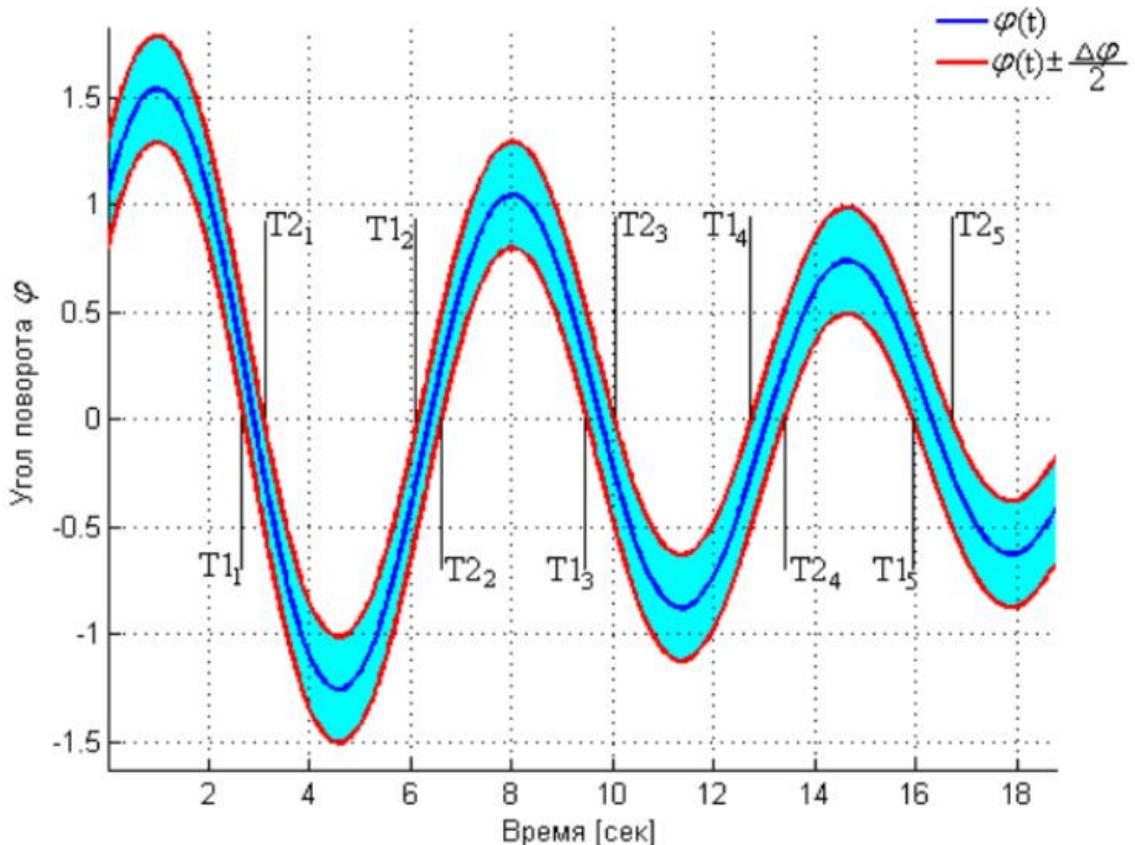
5. Если a_1 и b_1 различаются меньше чем требуемая точность, то закончить итерации и перейти к п. 7, иначе - перейти к п. 6

6. $a_0 = a_1, b_0 = b_1$, перейти к п.3

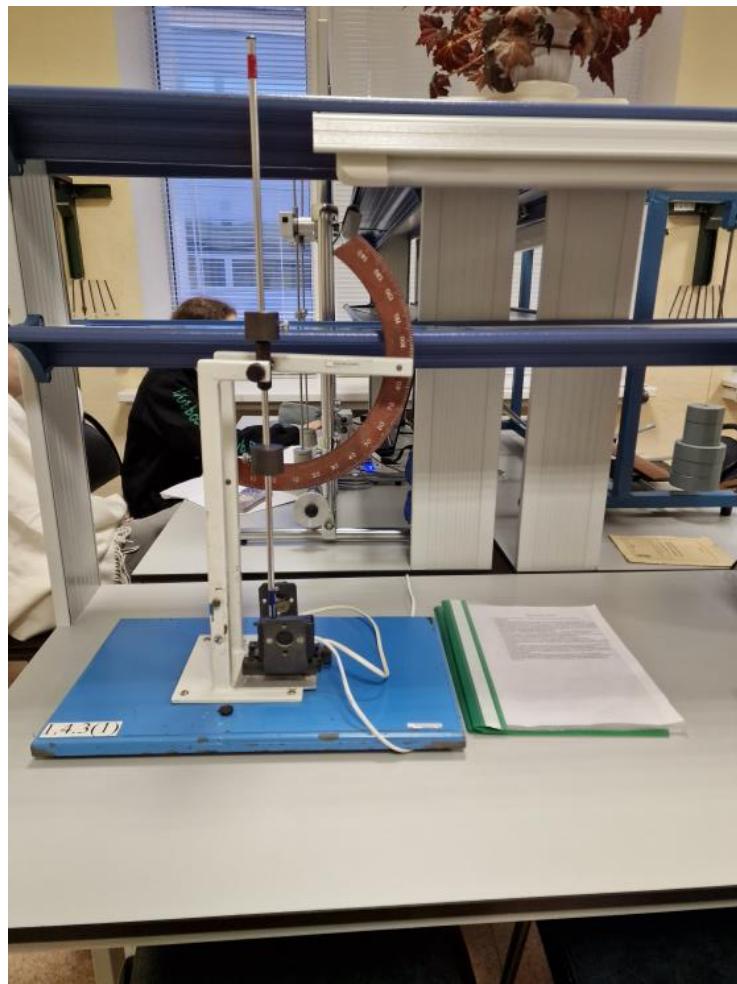
$$7. K = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} \cdot \frac{1}{a_1}$$

Вычисленная величина K есть приближённое значение полного эллиптического интеграла $K(x^2)$. Итерации этого алгоритма быстро сходятся – каждая итерация удваивает количество верных значащих цифр вдвое. При расчёте с помощью калькулятора достаточно провести 2-3 итерации для получения результата с 4-5 верными знаками после запятой.

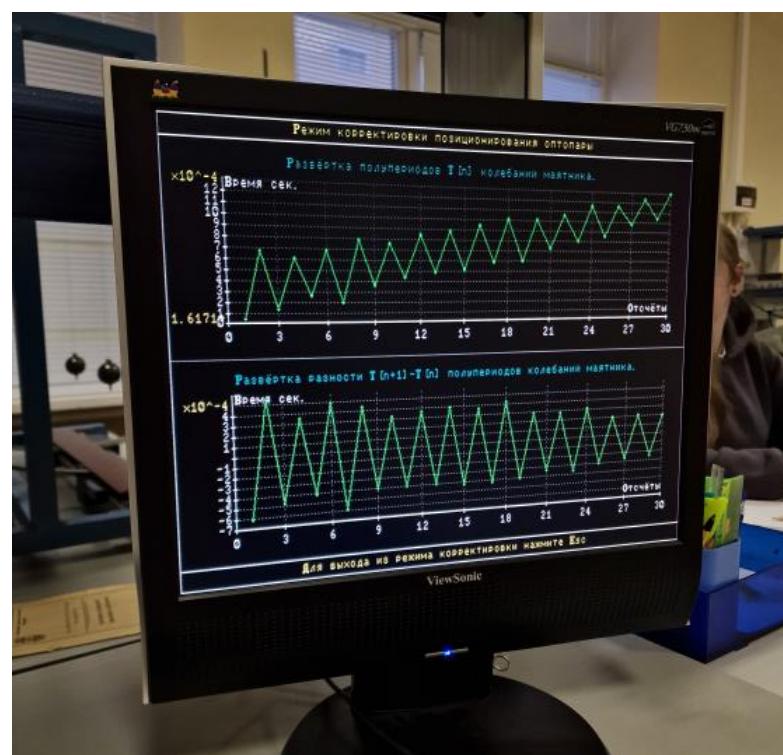
Приложение 4: Зависимость угла поворота маятника от времени – синяя кривая. Красные кривые – положение граней спицы маятника. Также показаны моменты времени, регистрируемые с помощью оптопары



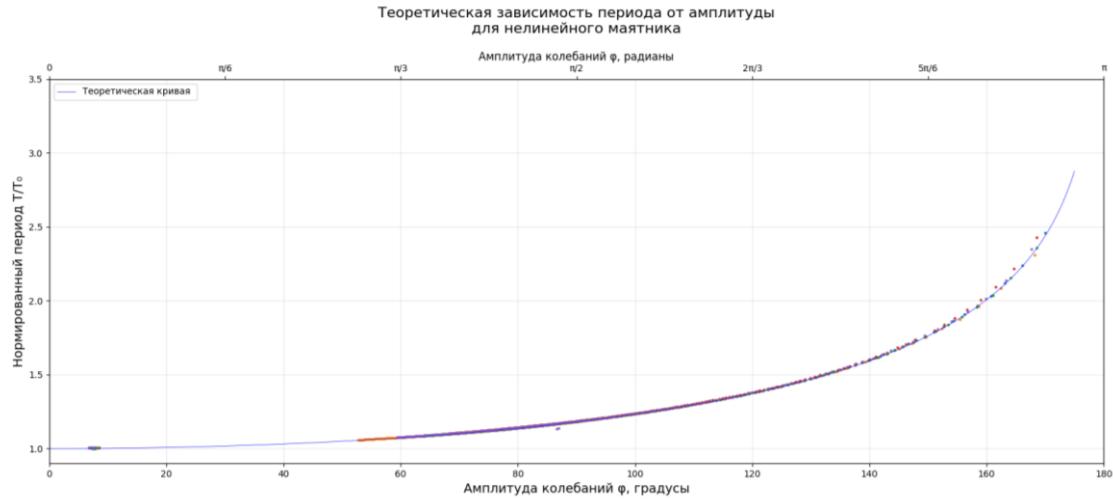
Приложение 5: фото установки



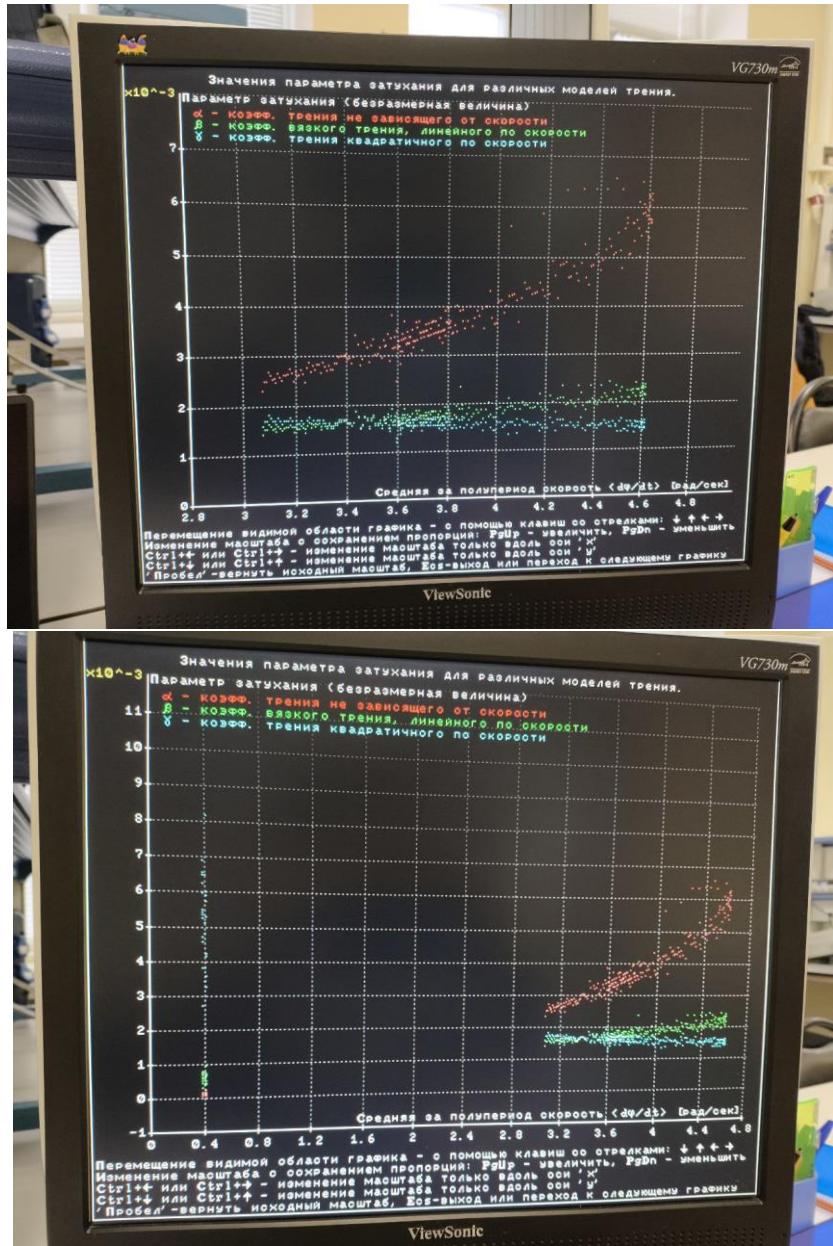
Приложение 6: фото калибровки



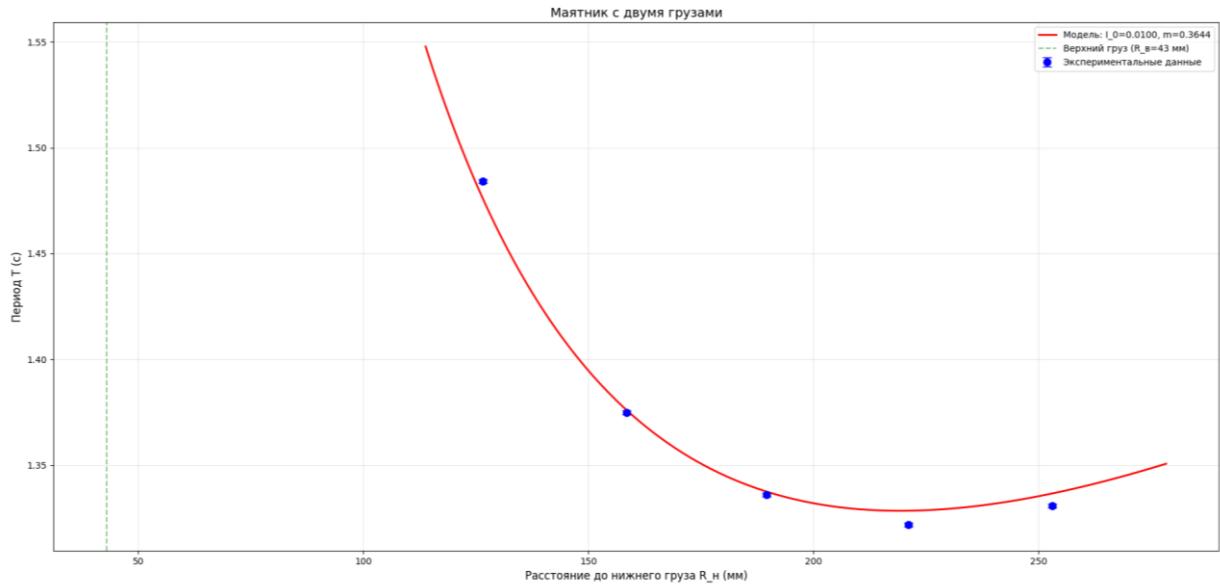
Приложение 7: график нормализованного периода от амплитуды



Приложение 8: графики зависимости параметра затухания от средней скорости маятника



Приложение 9: график T_0 от R_H



Приложение 10: график b от R_H

