МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Физтех-школа аэрокосмических технологий

Отчёт о выполнении лабораторной работы 1.4.8

Измерение модуля Юнга методом акустического резонанса

Автор:

Волков Илья Александрович

Б03-503

Долгопрудный 2025

1. Аннотация

Цель работы: исследовать явление акустического резонанса в тонком стержне; измерить скорость распространения продольных звуковых колебаний в тонких стержнях из различных материалов и различных размеров; измерить модули Юнга различных материалов.

В работе используются: генератор звуковых частот, частотомер, осциллограф, электромагнитные излучатель и приёмник колебаний, набор стержней из различных материалов.

2. Теоретические сведения

Основной характеристикой упругих свойств твёрдого тела является его *модуль Юнга* E. Согласно закону Гука, если к элементу среды приложено некоторое механическое напряжение σ, действующее вдоль некоторой оси x (напряжения по другим осям при этом отсутствуют), то в этом элементе возникнет относительная деформация вдоль этой же оси $\varepsilon = \Delta x / x_0$, определяемая соотношением

$$\sigma = \varepsilon E, \tag{1}$$

Если с помощью кратковременного воздействия в некотором элементе твёрдого тела создать малую деформацию, она будет далее распространяться в среде в форме волны, которую называют акустической (звуковой). Распространение этой волны осуществляется за счёт упругости и инерции среды. Если волны распространяются вдоль оси, по которой происходит деформация, то они называются продольными. Скорость u распространения продольной акустической волны в простейшем случае длинного тонкого стержня определяется соотношением:

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \tag{2}$$

где ρ – плотность среды.

Заметим, что размерность модуля Юнга E равна [Н/м^2] и совпадает с размерностью механического напряжения (или давления). Характерные для металлов значения модуля Юнга лежат в диапазоне от 10^{10} до 10^{12} Па, так что при плотности $\rho \sim 10^4$ кг/м^3 характерные скорости звука в твёрдых телах составляют $u \sim 10^3 \div 10^4$ м/с.

Акустическая волна, распространяющаяся в стержне конечной длины L, испытает отражение от торцов стержня. Если при этом на длине стержня укладывается цетое число полуволн, то отражённые волны будут складываться в фазе с падающими, что приведёт к резкому усилению амплитуды их колебаний и возникновению акустического резонанса в стержне. Измеряя соответствующие резонансные частоты, можно определить скорость звуковой волны в стержне и, таким образом, измерить модуль Юнга материала стержня. Акустический метод является одним из наиболее точных методов определения упругих характеристик твёрдых тел.

2.1 Уравнение волны в тонком стержне

Рассмотрим тонкий стержень постоянного круглого сечения, радиус R которого много меньше длины L. Условие тонкого стержня: длина звуковой волны $\lambda \gg R$. При продольной деформации смещение плоскости, исходно находящейся в точке x, описывается функцией $\xi(\mathrm{x}, \mathrm{t})$.

Относительное удлинение элемента стержня:

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \tag{3}$$

Согласно закону Гука, напряжение σ связано с деформацией:

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{\partial \xi}{\partial x}, \tag{4}$$

где E – модуль Юнга, $\sigma = F/S$, S – площадь поперечного сечения.

Результирующая сила, действующая на элемент стержня толщиной Δx:

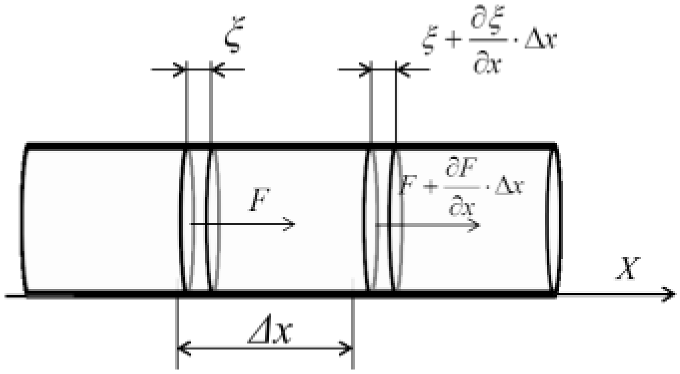
$$\Delta F = S\sigma(x + \Delta x) - S\sigma(x) = \frac{\partial \sigma}{\partial x} S\Delta x = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} ES\Delta x, \tag{5}$$

Масса элемента $\Delta m = S\rho\Delta x$. Ускорение $a = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$. По второму закону Ньютона $\Delta m a = \Delta F$ получаем:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \tag{6}$$

Вводя скорость распространения волны $u = \sqrt{E/\rho}$, приходим к волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = u^2\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \tag{7}$$



2.2 Бегущие акустические волны. Скорость волны

Волновое уравнение (7) имеет решения в виде бегущих волн. Функция вида

$$\xi(x, t) = \phi(x - ut)$$

Где ϕ – произвольная функция, описывает возмущение, бегущее в положительном направлении оси x со скоростью u без изменения формы. Аналогично, функция $\xi(x, t) = \phi(x + ut)$ описывает волну, бегущую в отрицательном направлении.

Общее решение волнового уравнения представляет собой суперпозицию двух волн, бегущих в противоположные стороны:

$$\xi(x,t) = \phi_1(x - ut) + \phi_2(x + ut)$$

2.3 Собственные колебания стержня. Стоячие волны

При гармоническом возбуждении с частотой f волну в стержне можно представить как суперпозицию двух встречных гармонических волн:

$$\xi(x,t) = A_1 \sin(\omega t - kx + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + kx + \varphi_2)\,, \tag{8}$$

где $\omega = 2\pi f$ – циклическая частота, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число.

Для стержня с незакреплёнными концами $x = 0$ и $x = L$ граничные условия – равенство нулю напряжения на торцах:

$$\sigma(0) = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial\xi}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \sigma(L) = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial\xi}{\partial x}\right|_{x=L} = 0, \tag{9}$$

Из этих условий следует, что амплитуды встречных волн равны $A_1 = A_2$, а их фазы совпадают $\varphi_1 = \varphi_2$. Результирующее колебание является стоячей волной:

$$\xi(x,t) = 2A\cos(kx)\sin(\omega t + \varphi)\,, \tag{10}$$

Второе граничное условие $x = L$ приводит к уравнению $\sin(kL) = 0$, откуда получаются допустимые волновые числа и собственные частоты:

$$k_n L = \pi n, \quad n = 1,2,3,\ldots, \tag{11}$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \tag{12}$$

$$f_n = \frac{u}{\lambda_n} = n\frac{u}{2L}, \tag{13}$$

Частоты f_n являются резонансными. При совпадении частоты внешнего воздействия с одной из собственных частот в стержне возникает акустический резонанс, характеризующийся резким возрастанием амплитуды колебаний и установлением стоячей волны.

2.4 Добротность

В идеальном случае резонанс достигается при строгом совпадении фактической и расчетной частот, однако в реальности резонансный пик имеет ширину Δf, которая на уровне $A = A_{max}/\sqrt{2}$ связана с резонансной частотой и добротностью соотношением:

$$Q = \frac{f_{\text{рез}}}{\Delta f}, \tag{14}$$

Используемые в работе металлические стержни являются высокодобротными системами, поэтому ширина резонанса оказывается довольно малой, что приводит к необходимости точной настройки генератора.

3. Оборудование

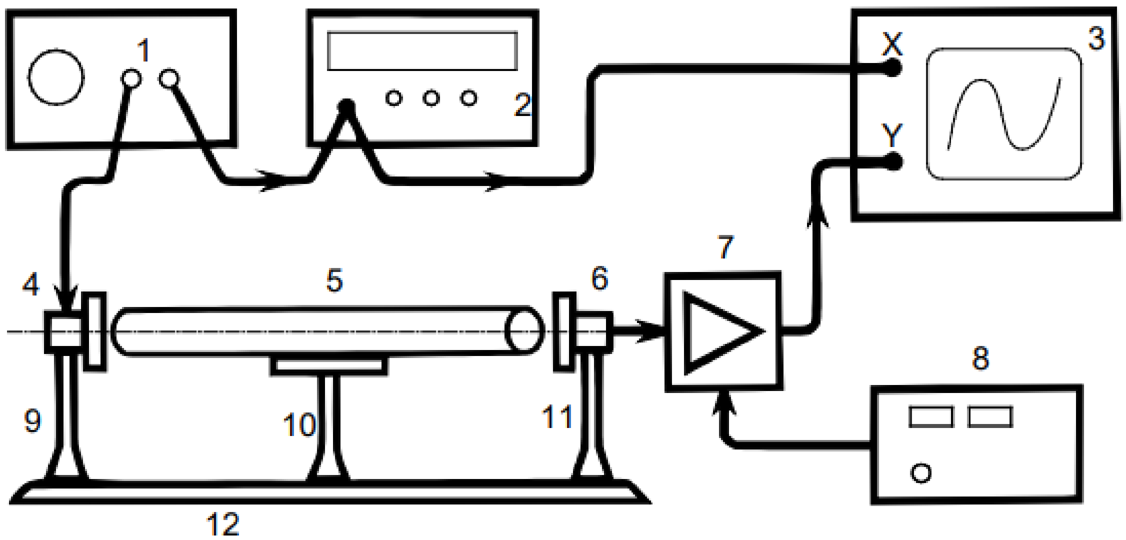
В работе используются: генератор звуковых частот, осциллограф, частотомер, электромагнитный излучатель и приемник колебаний, набор стержней из различных материалов.

Схема экспериментальной установки приведена на рис. 1. Исследуемый стержень 5 размещается на стойке 10. Возбуждение и приём колебаний в стержне осуществляются электромагнитными преобразователями 4 и 6, расположенными рядом с торцами стержня. Крепления 9, 11 электромагнитов дают возможность регулировать их расположение по высоте, а также перемещать вправо-влево по столу 12.

Электромагнит 4 служит для возбуждения упругих механических продольных колебаний в стержне. На него с генератора звуковой частоты 1 подаётся сигнал синусоидальной формы: протекающий в катушке электромагнита ток создаёт пропорциональное ему магнитное поле, вызывающее периодическое воздействие заданной частоты на торец стержня (к торцам стержней из немагнитных материалов прикреплены тонкие стальные шайбы). Рядом с другим торцом стержня находится аналогичный электромагнитный датчик 6, который служит для преобразования механических колебаний в электрические.

Сигнал с выхода генератора поступает на частотомер 2 и на вход канала X осциллографа 3. ЭДС, возбуждаемая в регистрирующем электромагните 6, пропорциональная амплитуде колебаний торца стержня, усиливается усилителем 7 и подаётся на вход канала У осциллографа.

Изменяя частоту генератора и наблюдая за амплитудой сигнала с регистрирующего датчика, можно определить частоту акустического резонанса в стержне. Наблюдения в режиме X—У позволяют сравнить сигналы генератора и датчика, а также облегчает поиск резонанса при слабом сигнале.



4. Измерения и обработка данных

4.1 Измерение плотности образцов

Для начала определим плотность материалов. Используя штангенциркуль и микрометр определим геометрические параметры цилиндрических образцов, а при помощи весов определим массу.

	l, мм	σ_l, мм	d, мм	σ_d, мм	m, гр	σ_m, гр
Медь	4.01	0.05	12.11	0.001	40.968	0.001
Сталь	4.00	0.05	12.45	0.001	35.128	0.001
Дюраль	4.01	0.05	12.29	0.001	12.174	0.001

Для вычисления плотности воспользуемся формулой:

$$\rho = \frac{4m}{\pi d^2 \cdot l}, \tag{15}$$

Относительной погрешностью можно пренебречь, учитывая это, погрешность плотности:

$$\varepsilon_\rho = \frac{\Delta\rho}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2}, \tag{16}$$

Результаты:

	ρ, кг/м^3	Δ_ρ, кг/м^3	ϵ_ρ, %
Медь	8869,97	88.7	1
Сталь	7213,81	72.1	1
Дюраль	2559,15	25.6	1

4.2 Измерение резонансных частот стержней

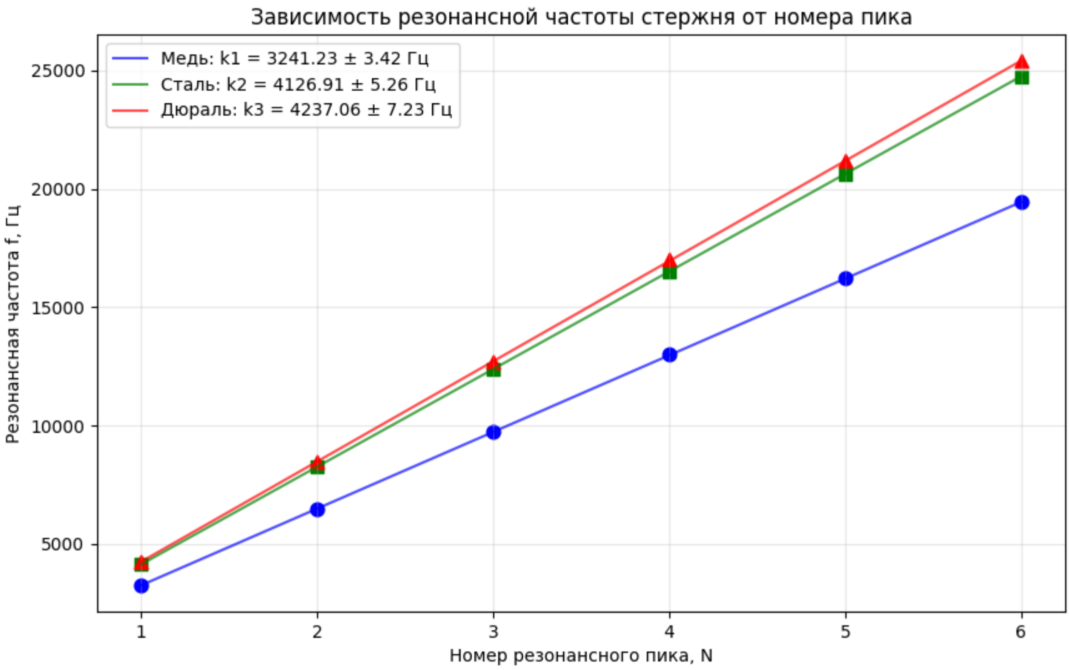
Будем измерять частоту генератора в пределах расчётных значений резонансных частот. Оценить их можно по формуле:

$$f_1 = \frac{u}{2L}, \tag{17}$$

Результаты измерения резонансных частот представлены в таблице 1 (погрешность 0.001 кГц).

	Медь	Сталь	Дюраль
n	f_n кГц		
1	3.248	4.125	4.235
2	6.488	8.247	8.456
3	9.735	12.381	12.700
4	12.993	16.500	17.000
5	16.213	20.633	21.180
6	19.450	24.758	25.400

Результаты измерений представим в виде графика, убедимся что получается прямая и найдем угловой коэффициент:



Результаты занесём в таблицу:

	Медь	Сталь	Дюраль
f_1, Гц	3241.23	4126.91	4237.06
σ_{f_1}, Гц	3.42	5.26	7.23

4.3 Расчёт скорости продольных волн в тонком стержне

Рассчитаем скорость волны в тонких стержнях используя формулу (16), результаты внесём в таблицу:

	Медь	Сталь	Дюраль
u, м/с	3889.48	4952.29	5084.47
σ_u, м/с	7.78	9.91	12.20
ϵ_u, %	0.20	0.21	0.24

4.4 Расчет модуля Юнга

Из формулы (2) выразим модуль Юнга:

$$E = \rho \cdot u^2$$

Результаты в таблице:

	Медь	Сталь	Дюраль
E, Гпа	134	177	66
σ_E, Гпа	7	9	3
ϵ_E, %	5	5	5
$E_{табл}$, Гпа	129	190	70

4.5 Добротность стержней

Определим добротность стержней. Для этого определим частоты вблизи резонанса, при которых амплитуда сигнала достигает $\frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$. Добротность определим по формуле (14).

	Медь	Сталь	Дюраль
Δf, Гц	5	2	2
Q	649.6	2062.5	2352.8
ΔQ	13.0	103.1	117.6

5. Вывод

В данной работе мы экспериментально показали, что отношение частоты к номеру гармоники остается постоянным. Мы также вычислили значения скорости продольных волн в тонких стержнях, провели расчёты модуля Юнга для стали, меди и дюраля, убедились в том, что они совпадают с табличными.

Медь: E = 134 ± 7 Гпа.

Сталь: E = 177 ± 9 Гпа.

Дюраль: E = 66 ± 3 Гпа.

Также в работе была рассчитана добротность стержней, было доказано, что $Q \sim 10^2 \div 10^3$. Оценить совпадение значений добротности с табличными не получилось по причине неимения табличных данных.