高级图像处理课后习题.　　控制工程 2018 冯波. 7220180157.

第二章习题.

1. 设 $g(x,y)$ 为无噪声图像 $f(x,y)$ 被噪声图像 $\eta(x,y)$ 污染后的图像. 即 $g(x,y)=f(x,y)+\eta(x,y)$, 则 M 个图像相加后的均值为 $\bar{g}(x,y)=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}g_i(x,y)$. 试证明下面的结论. 并说明该结论说明了什么问题.

$$\begin{cases} E\{\bar{g}(x,y)\}=f(x,y) \\ \sigma^2_{\bar{g}(x,y)}=\frac{1}{M}\sigma_\eta^2 \end{cases}$$

其中, E代表期望. $\sigma^2_{\bar{g}(x,y)}$, σ_η^2 分别表示 $\bar{g}(x,y)$ 和 $\eta(x,y)$ 的方差.

证明: 噪声 $\eta(x,y)$ 可以视为随机且互不相关的变量. 即可以看作是符合高斯分布的噪声 $\eta_i(x,y)\sim N(\mu,\sigma_\eta^2)$. 且此时 $\mu=0$.

即是 $E\{\eta_i(x,y)\}=0$.

(1). $\bar{g}(x,y)=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}g_i(x,y)=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\{f_i(x,y)+\eta_i(x,y)\}$.

∵ 无噪声图 $f(x,y)$ 始终不变. 则有 $\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}f_i(x,y)=\frac{1}{M}\cdot M\cdot f(x,y)=f(x,y)$.

而对于噪声图 $\eta_i(x,y)$ 有 $E\{\eta_i(x,y)\}=0$. 即是 $\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\eta_i(x,y)=0$

∴ $E\{\bar{g}(x,y)\}=E\{f_i(x,y)\}=f(x,y)$.

(2). 由(1)知, 对于无噪声图 $f(x,y)$ 有 $E\{f_i(x,y)\}=f(x,y)$ 则由方差公式有:

$$\sigma^2_{f_i(x,y)}=E\{[f_i(x,y)-\mu]\}=E\{[f_i(x,y)-f(x,y)]\}.$$

∵ $f_i(x,y)=f(x,y)$. $i=1,2,\cdots,M$. ∴ $\sigma^2_{f_i(x,y)}=E\{[f_i(x,y)-f(x,y)]\}=0$.

∵ 对于两个随机变量和的方差公式为: $Var(aX+bY)=a^2Var(X)+b^2Var(Y)+2ab\,COV(X,Y)$.

且在此处 $f_i(x,y)$ 与 $\eta_i(x,y)$ 是彼此之不相关的. 故协方差 $COV(X,Y)=0$.

$$\sigma^2_{\bar{g}(x,y)}=Var(\bar{g}(x,y))=Var\left(\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\{f_i(x,y)+\eta_i(x,y)\}\right)=\frac{1}{M^2}Var\left(\sum_{i=1}^{M}f_i(x,y)+\sum_{i=1}^{M}\eta_i(x,y)\right)$$

其中 $\sum_{i=1}^{M}f_i(x,y)=Mf(x,y)$ 为与 i 无关的常数. 故

$$\sigma^2_{\bar{g}(x,y)}=\frac{1}{M^2}Var\left(\sum_{i=1}^{M}\eta_i(x,y)\right)=\frac{1}{M^2}\sum_{i,j=1}^{M}COV\{\eta_i(x,y),\eta_j(x,y)\}=\frac{1}{M^2}\sum_{i=1}^{M}Var(\eta_i(x,y))+\sum_{i\neq j}COV\{\eta_i(x,y),\eta_j(x,y)\}$$

∵ $\eta_i(x,y)$ 为随机噪声, 彼此相互之不相关, 则有 $\sum_{i\neq j}COV(\eta_i(x,y),\eta_j(x,y))=0$

$$∴\ \sigma^2_{\bar{g}(x,y)}=\frac{1}{M^2}\sum_{i=1}^{M}Var(\eta_i(x,y))=\frac{1}{M^2}\sum_{i=1}^{M}\sigma_\eta^2=\frac{1}{M^2}\cdot M\sigma_\eta^2=\frac{1}{M}\sigma_\eta^2.$$

该结论说明: 多幅图像求平均值, 可以降低加性噪声!