线性代数笔记

依田耻

September 8, 2017

目录

1 向量

1.1 向量的定义

数域 F 上的 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 构成的有序数组，称为数域 F 上的一个 n 元向量（简称为 n 维向量）记作

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

如上的形式，称为行向量。写做列的形式，则称为列向量

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

或使用符号 T

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$$

记 $a \in F^n$。

1.2 向量的运算

设 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$,$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in F^n, k \in F$, 则:

1.2.1 相等

$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, 当且仅当，$a_i = b_i (i = 1, 2, \cdots, n)$

1.2.2 加法

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)$

1.2.3 数乘

$k\boldsymbol{a} = (ka_1, ka_2, \cdots, ka_n)$

1.3 线性相关性

1.3.1 线性表示

设 $a_i \in F^n, k_i \in F(i = 1, 2, \cdots, n)$, 则

$$\sum_{i=1}^{m} k_i \boldsymbol{a}_i = k_1 \boldsymbol{a}_1 + k_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + k_m \boldsymbol{a}_m$$

称为向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 在 F 上的一个线性组合。如果

$$\sum_{i=1}^{m} k_i \boldsymbol{a}_i = b$$

, 则称 b 可由 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 线性表示。

1.3.2 线性相关性

如 $a_i \in F^n, \exists k_i \in F(i = 1, 2, \cdots, n), k_i$ 不全为 0，使得

$$\sum_{i=1}^{m} k_i \boldsymbol{a}_i = 0$$

成立，则称 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 线性相关，反之则称 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 线性无关。

1.3.3 线性相关性的判定

$a_1, a_2, \cdots, a_n(n \geq 2$ 线性相关的充要条件是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中至少有一个向量可由其余 n-1 个向量线性表示。

1.3.4 向量组等价

如 $b_1, b_2, \cdots, b_t$ 中每个向量可由 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 线性表示，就称前者可被后者线性表示，如果后者也可被前者线性表示，则称这两个向量组是等价的。

1.4 向量组的秩

如果 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中存在 r 个线性无关的向量，其其中任意一个向量可由这 r 个向量线性表示，则称 r 为这个向量组的秩，记作 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} = r$

1.4.1 利用秩判断向量组数量

假设 $b_1, b_2, \cdots, b_t$ 可由 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 线性表示，且 $b_1, b_2, \cdots, b_t$ 线性无关，则 t≤s.

上面这条定理的逆定理，可以用来判断线性相关性。

又可推得，设秩 $\{a_1, a_2, \cdots, a_s\} = p$, 秩 $\{b_1, b_2, \cdots, b_t\} = r$, 如 $b_1, b_2, \cdots, b_t$ 可由向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 线性表示，则 $r \leq p$

所以我们立即可得，等价向量组的秩相等。

1.5 极大线性无关组

秩为 r 的向量组中含有 r 个向量的线性无关组，称为该向量组的极大线性无关组。

2 向量空间与线性变换

2.1 基和关于基的坐标

设有序向量组 $B = \boldsymbol{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n} \subset R^n$, 如果 B 线性无关，则 $\forall \boldsymbol{\alpha} \in R^n$ 均可由 B 线性表示。

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{\beta_i}$$

就称 B 是 R^n 的一组基，有序数组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 称为是向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 关于基 B 的坐标。记作

$$\boldsymbol{\alpha_B} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

设 $B = \boldsymbol{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n}$ 是 R^n 的一组基，且

$$\begin{cases} \boldsymbol{\eta_1} = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \boldsymbol{\alpha_{i1}} \\ \boldsymbol{\eta_2} = \sum_{i=1}^{n} a_{i2} \boldsymbol{\alpha_{i2}} \\ \cdots \\ \boldsymbol{\eta_n} = \sum_{i=1}^{n} a_{in} \boldsymbol{\alpha_{in}} \end{cases}$$

则 $\boldsymbol{\eta_1}, \boldsymbol{\eta_2}, \cdots, \boldsymbol{\eta_n}$ 线性无关的充要条件是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

设 $B_1 = \boldsymbol{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n}, B_2 = \boldsymbol{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n}$ 是 R^n 上的两组基，则他们的关系可以表示为

$$(\boldsymbol{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n}) = (\boldsymbol{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n}) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称右边的矩阵为 A，A 称为 B_1 到 B_2 的过渡矩阵。

设 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 B_1, B_2 下的坐标风别为

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

则

$$\boldsymbol{Ay = x, y = A^{-1}x}$$

所以我们也可以得到，直角坐标系下的逆时针旋转 θ 角的公式

$$(\boldsymbol{\varepsilon_1', \varepsilon_2'}) = (\boldsymbol{\varepsilon_1', \varepsilon_2'}) \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

2.2 向量的内积

在三维空间中 $\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \, |\boldsymbol{b}| \, cos \, \langle \boldsymbol{a, b} \rangle$ 将其推广到 n 维空间，我们可以得到

设 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n), \boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in R^n$, 则我们规定 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积为

$$(\boldsymbol{\alpha, \beta}) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

2.2.1 内积的性质

借助内积，我们可以定义向量的长度 $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$ 和角度 $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = arccos\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|}$ 同时我们称满足 $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = 0$ 的 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 是互相正交的。

同时明显，向量的内积满足

$$|(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})| \leq |\boldsymbol{\alpha}|\,|\boldsymbol{\beta}|$$

和三角不等式

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

2.3 标准正交基

设 $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha_n} \in R^n$，若

$$(\boldsymbol{\alpha_i}, \boldsymbol{\alpha_j}) = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \cdots, n$$

则称 $\{\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha_n}\}$ 是 R^n 的一组标准正交基。

2.4 施密特正交化方法

施密特正交化方法是指在 R^n 空间中将一组线性无关的向量 $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha_n}$ 构造出一组标准正交向量组。其步骤如下:

令 $\boldsymbol{\beta_1} = \boldsymbol{\alpha_1}$

然后我们递推的使用施密特正交化方法:

假设当前已求出一个或两两正交的非零向量 $\boldsymbol{\beta_1}, \boldsymbol{\beta_2}, \cdots, \boldsymbol{\beta_{j-1}}$

为了使 $\boldsymbol{\beta_j}$ 和 $\boldsymbol{\beta_i}(i = 1, 2, \cdots, j-1)$ 正交，我们规定:

$$k_{ij} = -\frac{(\boldsymbol{\alpha_j}, \boldsymbol{\beta_i})}{(\boldsymbol{\alpha_i}, \boldsymbol{\alpha_i})}, i = 1, 2, \cdots, j-1$$

然后再令

$$\boldsymbol{\beta_j} = \boldsymbol{\alpha_j} - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(\boldsymbol{\alpha_j}, \boldsymbol{\beta_i})}{(\boldsymbol{\alpha_i}, \boldsymbol{\alpha_i})} \boldsymbol{\beta_i}$$

再令

$$\boldsymbol{\eta_j} = \frac{\mathbf{1}}{|\boldsymbol{\beta_j}|}\boldsymbol{\beta_j}, j = 1, 2, \cdots, n$$

然后我们就构造出了标准正交向量组 $\boldsymbol{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n}$ $\blacksquare$

2.5 * 线性空间的定义

数域 F 上的线性空间 V 是一个非空集合，V 对 V 上的加法和数乘是封闭的，即运算的结果依然属于 V，并满足一下 8 条规则：

1. $\boldsymbol{\alpha + \beta = \beta + \alpha}$
2. $\boldsymbol{(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)}$
3. $\exists \theta \in V,$ 使得$\boldsymbol{\alpha + \theta = \alpha}, \theta$被称为加法的零向量
4. $\forall v \in V, \exists w \in V,$ 使得$v + w = 0,$ w 称为 v 的加法逆元
5. $\boldsymbol{1\alpha = \alpha}$
6. $k(l\boldsymbol{\alpha}) = (kl)\boldsymbol{\alpha}$
7. $(k + l)\boldsymbol{\alpha} = k\boldsymbol{\alpha} + l\boldsymbol{\alpha}$
8. $k(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = k\boldsymbol{\alpha} + k\boldsymbol{\beta}$

2.6 * 线性子空间

如果线性空间 V(F) 的非空子集合 W 对 V 定义的两种线性运算封闭则称 W 是 V 的线性子空间。

由单个的零向量或者 V 本身组成的线性空间，都是 V 的线性子空间，称这两种线性子空间为平凡子空间，其余的称为非平凡子空间。

设 S 是 V(F) 的一个非空子集合，则 S 中一切向量组的所有线性组合组成的集合

$$W = \{\sum_{i=1}^{m} k_i \boldsymbol{\alpha_i} | \boldsymbol{\alpha_i} \in S, k_i \in F\}$$

是 V 中包含 S 的最小的子空间。

我们称 S 生成了 W，当 S 为有限子集 $(\boldsymbol{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n})$ 时，记 W=L$(\boldsymbol{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n})$

设 W_1, W_2 是 V(F) 的两个子空间，$W_1 = (\boldsymbol{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n}), W_2 = (\boldsymbol{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n})$, 则 $W_1 = W_2$ 的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n}$ 和 $\boldsymbol{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n}$ 可以互相线性表示。

设 W_1, W_2 是 V(F) 的两个子空间，则 V 的子集合

$$W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{\alpha} | \boldsymbol{\alpha} \in W_1, \text{且} \boldsymbol{\alpha} \in W_2\}$$

$$W_1 + W_2 = \{\boldsymbol{\alpha_1} + \boldsymbol{\alpha_2} | \boldsymbol{\alpha_1} \in W_1, \boldsymbol{\alpha_2} \in W_2\}$$

分别称为两个子空间的交与和，可以证明，两个子空间的交与和依然是 V(F) 的子空间。如果 $W_1 + W_2 = \{\theta\}$，则称 $W_1 + W_2$ 为直和，记做 $W_1 \oplus W_2$

设向量 $\boldsymbol{\alpha} \in R^n$,W 是 R^n 的一个子空间，如果 $\forall \gamma \in W, \boldsymbol{(\alpha, \gamma) = 0}$, 就称 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 W 正交，记作 $\boldsymbol{\alpha} \perp W$。

设 V 和 W 是 R^n 的两个子空间，如 $\forall \boldsymbol{v \in V, w \in W, (v, w) = 0}$，则称 V 和 W 正交，记作 $V \perp W$

R^n 中与子空间 V 正交的全体向量构成的子空间 W，称为 V 的正交补，记作 $W = V_\perp$.

例如，**Ax=0** 的解空间 N(A) 是由与 A 的行向量都正交的全部向量构成的。

2.7 * 线性空间的维数

如果线性空间 V(F) 中存在线性无关的向量组 $B = \boldsymbol{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n}$, 且 $\forall \alpha \in V$ 都可由 B 线性表示为

$$\boldsymbol{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{\alpha_i}$$

则称 V 是 n 维向量空间，记作 dim V=n，如果 V(F) 中有无限个线性无关的向量，就说 V 是无限维向量空间。B 是 V 的一个基，$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 关于 B 的坐标。

3 行列式

3.1 行列式的定义

$$D=\begin{vmatrix}x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n}\\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn}\end{vmatrix}$$

, 是一个值，其值为：

$$D=\sum_{k=1}^{n} a_{jk}A_{jk}$$

$$A_{lk}=(-1)^{k+l}M_{kl}$$

其中，M_{kl} 是 D 去掉第 k 行第 l 列全部元素后，按原顺序排成的 n-1 阶行列式，也就是说，行列式的定义是递归的。
为了使递归终止，我们归定，当 n=1 时，$D=a_{11}$

3.2 行列式的性质

由于行列式的行与列可以互换，所以下面只讨论行的性质。

3.2.1 行列式的行与列交换，其值不变

即

$$\begin{vmatrix}x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n}\\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1}\\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{nn}\end{vmatrix}$$

例题：计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ x & x & y\cdots & 0 & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \\ y & 0 & \cdots & 0 & 0 & x & \end{vmatrix}$

解：行列互换后，按第一行展开得：$D_n = x^n + (-1)^(1+n)(y)^n(n > 2)$ $\blacksquare$

3.2.2 线性性质

1.

$$k\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ kx_{i1} & kx_{i2} & \cdots & kxin \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

2.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+bi1 & a_{i2}+bi2 & \cdots & a_{in}+bin \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由以上性质，我们立即可得，某行元素为 0 的元素全部为 0，且任何两行元素全相等或成比例，则行列式为 0.

3.2.3 倍加变换

对行列式做倍加变换,其值不变即
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1}+a_{j1} & ka_{i2}+a_{j2} & \cdots & ka_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

3.2.4 行列式的两行对换，行列式值反号

重复使用线性变换和倍加性质，就可以得到

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

4 矩阵

4.1 矩阵的定义

数域 F 中中 $m\times n$ 个数排成 m 行 n 列的数表，并用圆括号括起来的数表，叫做矩阵，如下所示：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为数域 F 上的 $m\times n$ 矩阵，常常记作 A 或 A_{mn}。

当 F 为实数的时候，A 称为实矩阵，当 F 为复数的时候，A 称为复矩阵。

同时 A 也可以看做 m 个 b 维行向量或者 n 个 m 维列向量组成的。

对于行与列数相同的矩阵，称为方阵。我们可以计算他们的行列式，记做 $|A|$, 或 $detA$.

4.1.1 奇异矩阵

当 detA=0 时，称 A 为奇异矩阵。反之，则称为非奇异矩阵。

4.1.2 单位矩阵

主对角元素全 1，其余均为 0 的 n 阶方阵，称为 n 阶单位矩阵，或简称为单位矩阵，记作 I_n 或 I 或 E。

4.1.3 对角矩阵

非主对角元素的所以元素均为 0 的 n 阶矩阵称为 n 阶对角矩阵,记作 Λ ,或记作 diag($vectanan$);

4.1.4 三角矩阵

对 n 阶矩阵 A, 当 $i>j$ $a_{ij}=0$ 的矩阵称为上三角矩阵。当 $i<j$ $a_{ij}=0$ 的矩阵称为下三角矩阵。

4.2 矩阵的运算

4.2.1 相等

如果两个矩阵 A 和 B 的行数和列数分别相等，且各对应元素也相等。就称 A 和 B 相等，记作 $A = B$

4.2.2 加法

若 A，B 的行数与列数分别相等，规定

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

且称 A+B 为 A 与 B 之和。

4.2.3 数量乘法

设 $k \in F, A \in F^{m\times n}$ 则

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

并称这个距阵为 k 与 A 的数量乘积。
通过数乘，我们可以定义矩阵的减法:

$$A - B = A + (-1) \times B$$

4.2.4 乘法

设 A 是一个 $m\times n$ 的矩阵，B 是一个 $n\times s$ 的矩阵，既：

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix} B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns}\end{pmatrix}$$

则 A 与 B 的乘积 AB（记作 C）是一个 $m\times s$ 矩阵，且

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

值得注意的是，如果 A 的列数和 B 的行数不相等的话，那么 AB 没有意义。同时，由于与常见的实数乘法不同，这个地方有几点需要注意的
然后我们规定，k 个 A 的连乘积称为 A 的 k 次幂，记为 A^k

1. 乘法不满足交换率
2. $AB=0\nRightarrow A=0\|B=0$
3. 不满足消去率。即当 $A\neq 0$ 时，$AB=AC\nRightarrow B=c$
   但是，如果 $detA\neq 0$ 时，则 $AB=AC\Rightarrow B=c$ 成立。

同时矩阵的乘法还有很重要的性质：设 A,B 是两个 n 阶矩阵，则 AB 的行列式与 A 的行列式和 B 的行列式的积相等，即：

$$|AB|=|A|\,|B|$$

例题：$A^2+2A-B=0$,B 是 n 阶矩阵，且 $|B|\neq 0$。求证:$2AX=BX+C$, 对任意 n 阶矩阵 C，都有唯一的解矩阵 X

证：$\because A^2+2A-B=0$

$\therefore A^2+2A=B$

又 $\because 2AX=BX+C, \therefore A^2X+C=0$

$\therefore X = -(A^2)^{-1}C$

$\because |B| \neq 0, \therefore |A| \neq 0$

$\therefore$ 对任意 n 阶矩阵 C，都有唯一的解矩阵 X ∎

4.3 矩阵的变换

4.3.1 转置

把一个 $m \times n$ 矩阵 A 的行列互换得到的一个 $n \times m$ 矩阵称为 A 的转置矩阵，记作 A^T 或 A' 值得注意的是，$(AB)^T = B^T A^T$, 而不是 $A^T B^T$. 这一点一看会比较颠覆常识，但是矩阵的乘法就常常会出现这种情况。虽然严格的证明是可行的，但是更为简易的理解是，将矩阵看作是映射，也就是我们常说的函数，即 AB 可以看做将 x 先映射到 A 所在的空间，再映射到 B 所在的空间。如果这样想的话，那么很多事情就迎刃而解了。
同时我们将 $A^T = A$ 的矩阵，称为对称矩阵。将 $A^T = -A$ 的矩阵称为反对称矩阵。

4.3.2 初等变换

我们称以下几种变换为初等变换

1. 以非 0 常数 C 乘以矩阵的某一行，简称为倍乘变换

2. 以矩阵的某一行乘以常数 c 加到另外一行，简称为倍加变换

3. 将矩阵的某两行对换位置，称为对称变换

同时，我们将单位矩阵做一次初等变换所得的矩阵，称为初等矩阵，我们记初等倍换矩阵为 $E_i(c)$，称初等倍加矩阵为 $E_{ij}(c)$ 称初等对换矩阵为 E_{ij}

所以我们可得：

1. $E_i(c)$A，表示 A 的第 i 行乘 c

2. $E_{ij}(c)$A，表示 A 的第 i 行乘 c 后加到第 j 行

3. E_{ij}A 表示 A 的第 i 行和第 j 行互换

同时如果把 A 放到初等矩阵的前面的话，那么即是对列进行操作，而不是对行。

4.3.3 逆距阵

对于 n 阶方阵 A，如果存在 n 阶方阵 B，使得

$$AB = BA = I$$

那么我们称 A 可逆，并称 B 是 A 的逆矩阵，记 $A^{-1} = B$. 不难证明，一个可逆矩阵的逆矩阵是唯一的。同时若 B 是 A 的逆矩阵，那么 A 也是 B 的逆矩阵。
逆矩阵有如下性质

1. $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$

2. $det(A^{-1}) = \frac{1}{detA}$

3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, 这一条类似于乘法。

逆矩阵的求法 想起行列式中代数余子式的定义，我们称

$$cofA = (A_{ij})_{n\times n}$$

，其中 A_{ij} 是代数余子式并称 cofA 的转置矩阵是 A 的伴随矩阵，记作 adjA 或 A^*

$$A* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

又因为 $AA^* = |A|I$ 所以 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$ 由以上定义可知，A 可逆的充要条件是 $detA \neq 0$

用初等变换求逆矩阵的办法

可逆矩阵可以经过若干次初等变换化为单位矩阵。换句话说，即可逆矩阵可以化为若干个矩阵的乘积。

如对可逆矩阵 A，我们经过若干次初等变换（分别记为 $P_1, P_2, \cdots, P_s$), 后化为了单位矩阵，即：

$$AP_1P_2\cdots P_s = I$$

那么

$$A^{-1} = IP_sP_{s-1}\cdots P_1$$

值得注意的是，我们只可以做初等行变换来求逆矩阵，不可言做任何的列变换。不过反过来说，这也降低了计算量。

例题: 设 A,B 是两个三阶矩阵, 满足 $A^2-2B^2-AB=-2BA+A-B+I$, $A-B=\begin{pmatrix}1 & & \\ 1 & 1 & \\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, 求 A

解：由题，对第一个多项式因式分解得 $(A+2B-I)(A-B)=I$

$\therefore A=\frac{1}{3}\{(A-B)^{-1}+I-2(A-B)\}$

对 $\begin{pmatrix}1 & & \\ 1 & 1 & \\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ 求逆得 $\begin{pmatrix}1 & & \\ -1 & 1 & \\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ 代入上式得

$A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & & \\ -3 & 0 & \\ 0 & -3 & 0\end{pmatrix}$ $\blacksquare$

4.4 分块矩阵

把一个 $m\times n$ 的矩阵 A，在行的方向分成 s 块，在列的方向分成 t 块，称为 A 的 $stimest$ 分块矩阵，记作 $A=(A_{kl})_{s\times t}$, 其中 $A_{kl}(k=1,2,\cdots,s;l=1,2,\cdots,t)$ 称为 A 的子块，他们可以是各种类型的小矩阵。常见的分块矩阵有 2×2 分块矩阵，按行分块矩阵，按列分块矩阵，对角块矩阵等等。

4.4.1 分块矩阵的加法

设 $A=(A_{kl})_{s\times t}, B=(B_{kl})_{s\times t}$ 如果 A_{kl} 和 B_{kl} 是相同类型的话，那么:

$$A+B=(A_{kl}+B_{kl})_{s\times t}$$

4.4.2 分块矩阵的数量乘法

设 $A=(A_{kl})_{s\times t}$ λ 是一个数，则

$$\lambda A=(\lambda A_{kl})_{s\times t}$$

4.4.3 分块矩阵的乘法

设 $A\in F^{m\times n},B\in F^{m\times n},A=(A_{kl})_{r\times t},B=(B_{kl})_{s\times t}$, 且 A 的列分块法与 B 的行分块法完全相同，则:

$$AB=C\overset{\text{记作}}{=}(C_{kl})_{r\times t}\ C_{kl}=\sum_{i=1}^{s}A_{ki}B_{il}$$

易得，分块后的矩阵乘法和不分块的矩阵乘法是等价的。

4.4.4 分块矩阵的转置

$$A^T=(B_{lk})_{t\times s}$$

$$B_{lk}=A_{kl}^T,l=1,2,\cdots,t;k=1,2,\cdots,s$$

例如 $A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\end{pmatrix}$ 则 $A^T=\begin{pmatrix}A_{11}^T&A_{21}^T\\A_{12}^T&A_{22}^T\\A_{13}^T&A_{23}^T\end{pmatrix}$

4.4.5 可逆分块矩阵的逆矩阵

例题：设 A=$\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}&\mathbf{0}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}$，其中 B，D 皆可逆，求证 A 可逆且求其逆

解:

$\because |A|=|B|\,|D|=\mathbf{0}\therefore$ A 可逆

设$A^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}&\boldsymbol{Y}\\\boldsymbol{Z}&\boldsymbol{T}\end{pmatrix}$,其中 X 与 B，T 与 D 分别是同阶方阵

$\therefore\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}&\mathbf{0}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}&\boldsymbol{Y}\\\boldsymbol{Z}&\boldsymbol{T}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{BX}&\boldsymbol{BY}\\\boldsymbol{CX}+\boldsymbol{DZ}&\boldsymbol{CY}+\boldsymbol{DT}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I_1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\boldsymbol{T_2}\end{pmatrix}$

$$\therefore \begin{cases} BX = I_1 \\ BY = 0 \\ CX + DZ = 0 \\ CY + DT = I_2 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} Y &= B^{-1}0 = 0 \\ Z &= -D^{-1}CB^{-1} \\ T &= D^{-1} \end{cases}$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B^{-1}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{-D^{-1}CB^{-1}} & \boldsymbol{D^{-1}} \end{pmatrix} \qquad \blacksquare$$

4.5 矩阵的秩

对于矩阵 A，把 A 的行（列）向量组的秩称为 A 的行（列）秩。我们可以证明矩阵的行秩和列秩是相等的，我们将其称为矩阵 A 的秩，记为 r(A)

关于矩阵 A 的秩的求法，通过初等变换将 A 变为阶梯型矩阵后，非 0 行的个数就是矩阵 A 的秩。

我们可以证明，对于 n 阶方阵 A，r(A)=n 的充要条件是 A 是非奇异矩阵。

4.5.1 关于矩阵的秩的一些性质

1. $r(A+B) \le r(A) + r(B)$
2. $r(AB) \le min(r(A), r(B))$
3. 设 $A \in F^{m\times n}, P \in F^{m\times m}, Q \in F^{n\times n}$ 则 $r(A) = r(PA) = r(AQ) = r(PAQ)$

例题：求 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 的秩，并写出行向量组的一个最大线性无关组。

解：$\because \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\therefore$ 这个矩阵的秩是 4

然后观察行向量组，可以发现第 1 行减第 5 行即得第三行，又因为矩阵的秩为 4，所以行秩也为 4，所以其余 4 行就是这个向量组的一个最大线性无关组。 $\blacksquare$

4.5.2 相抵标准形

若矩阵 A 经过初等变换得到 B（或：若存在可逆矩阵 P 和 Q，使得 PAQ=B）, 就称 A 相抵于 B，记为 $A \cong B$
我们容易证明矩阵的相抵关系有如下性质：

1. $A \cong A$
2. $A \cong B \Leftarrow B \cong A$
3. $A \cong B, B \cong C \Leftarrow A \cong C$

同时，如果 $A \in F^{m \times n}$，且 r(A)=r, 则一定存在可逆的 m 阶和 n 阶矩阵 P 和 Q，使得：

$$PAQ = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I_r} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} = U$$

我们将 U 称为 A 的标准相抵型，同时由定义，我们立即可得，秩相同的同型矩阵的标准相抵型是相同的。

4.6 正交矩阵

设 $A \in R^{n \times n}$ 如果 $A^T A = I$，就称 A 是正交矩阵。

如果 A 是正交矩阵的话，那么 A 的列向量是 $R^{n \times n}$ 上的一组标准正交基。

同时，正交矩阵有个非常重要的性质那就是，若列向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 在 A 作用下变换为 $\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay}$, 则向量的内积，长度和向量间的夹角都保持不变。

同时，如果 A，B 都是正交矩阵的话，那么

1. $detA = 1\text{或} - 1$
2. $A^{-1} = A^T$
3. A^T 也是正交矩阵
4. AB 也是正交矩阵。

4.7 矩阵的特征值

设 A 是复数域 C 上的 n 阶矩阵，如果存在 $\lambda \in C$ 和非零的 n 维向量 x，使得

$$\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{x}$$

则称 λ 是矩阵 A 的特征值，x 是 A 属于 $\boldsymbol{x}$ 特征向量。

根据定义，满足 $det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0$ 的 λ 都是 A 的特征值。$det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ 称为 A 的特征方程，$(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ 称为 A 的特征矩阵。

4.7.1 特征值和特征向量的性质

若 $\boldsymbol{x_1}$ 和 $\boldsymbol{x_2}$ 都是 A 的对应于 λ 的特征向量，则 $k_1\boldsymbol{x_1} + k_2\boldsymbol{x_2}$ 也是 A 的属于 λ 的特征向量。

设 n 阶矩阵 A 有 n 个特征值，则：

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}, \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = detA$$

若 λ 是矩阵 A 的特征值，$\boldsymbol{x}$ 是 A 的属于 λ 的特征向量，则

1. kλ 是 kA 的特征值
2. λ^m 是 A^m 的特征值
3. 当 A 可逆时，λ^{-1} 是 A^{-1} 的特征值。

且 x 仍是 kA,A^m,A^{-1} 的对应于 kλ，λ^m，λ^{-1} 的特征值。

例题：设 A 是三阶方阵，有一个特征值为 2，其对应的特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, 有另一特征值-1，其对应的特征向量为 $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, 求 $A \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

解：$\because \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$又 \because A\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}=2, A\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}=-1$$

$$\therefore A\begin{pmatrix}3\\4\\-6\end{pmatrix}=-A\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}-2A\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\2\\0\end{pmatrix}$$ ∎

4.8 相似矩阵

对于矩阵 A 和 B，若存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$，就称 A 相似于 B，记作 $A\sim B$

对于相似关系，也明显有 3 条性质：

1. $A\sim A$
2. $A\sim B \Leftarrow B\sim A$
3. $A\sim B, B\sim C \Leftarrow A\sim C$

同时相似矩阵有如下性质:

1. $P^{-1}(k_1A_1+k_2A_2)P=k_1P^{-1}A_1P+k_2P^{-1}A_2P$
2. $P^{-1}(A_1A_2)P=(P^{-1}A_1P)(P^{-1}A_2P)$
3. $A\sim B, \Leftarrow A^m\sim B^m$
4. 相似矩阵的特征值相同。

例题：$\alpha_1=(2,-1,3)^T, \alpha_2=(4,-2,5)^T, \alpha_3=(2,-1,2)^T$, 求一组不全为 0 的数，$k_1,k_2,k_3$ 使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$

$$解：A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}2&4&2\\-1&-2&-1\\3&5&-2\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\0&-1&-1\end{pmatrix}$$

所以 $k_1=1, k_2=-1, k_3=1$ ∎

4.9 矩阵对角化

4.9.1 矩阵可对角化的条件

矩阵可对角化的充要条件条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量。

4.9.2 特征向量线性无关的条件

矩阵 A 的属于不同特征值的特征向量线性无关

4.9.3 实对称矩阵的对角化

实对称矩阵一定可对角化，其特征值全为实数，而且实对称矩阵对应于不同特征值的特征向量是正交的，而且对于任何一个实对称矩阵 A，存在正交矩阵 T，使得 $T^{-1}AT$ 为对角阵

那么我们该怎么样求 T 呢？首先由 $\prod_{i=1}^{m}(\lambda-\lambda_i)^{r_i}$ 得到全部互异的特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$，由于 A 可对角化，所以 r_i 重特征值 λ_i 对应 r_i 个线性无关的特征向量 $x_{i_1},\cdots,x_{i_{r_i}}$, 利用施密特正交化方法得到 $x_{i_1},\cdots,x_{i_{r_i}}$ 个互相正交的单位向量 $y_{i_1},\cdots,y_{i_{r_i}}$，将其排成 n 阶矩阵，就是所求的正交矩阵 T

例题：设 $A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{pmatrix}$, 求正交矩阵 T，使 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵。

解：

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-2\\2&\lambda+2&-4\\-2&-4&\lambda+2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-2(\lambda-2)&(\lambda+3)(\lambda-2)/2\\0&\lambda-2&\lambda-2\\-2&-4&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+7)$$

得 $\lambda_1=2(\text{二重}),\lambda_2=-7$

对于 $\lambda_1=2$, 由定义可知：

$$\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

得线性无关的特征向量 $x_1=(2,-1,0)^T,x_2=(2,0,1)^T$, 使用施密特正交化方法得：

$$y_1=\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},-\frac{\sqrt{5}}{5},0\right)^T$$
$$y_2=\left(\frac{2\sqrt{5}}{15},\frac{4\sqrt{5}}{15},\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^T$$

对于 $\lambda_2 = -7$ 同理可得 $y_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, 所以可得正交矩阵:

$$T = (y_1, y_2, y_3) = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} & 0 \\ \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{\sqrt{5}}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$\blacksquare$

4.10 二次型

4.10.1 二次型的定义及其矩阵表示

n 元变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + a_{nn}x_n^2$$

当系数属于 F 时，称为 F 上的一个 n 元二次型，简称二次型。

其中，将 x_ix_j 展开后，可以得到

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x^T A x$$

我们称 A 为二次型 f 所对应的矩阵。

4.10.2 标准二次型及其矩阵表示

我们将 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} d_i y_i^2$，即只含平方项而不含混合项的二次型称为标准二次型。

而标准二次型的矩阵表示明显就是对角矩阵了嘛。

4.10.3 标准二次形的求法

对于对角矩阵的求法，就像之前说的那样，把正交矩阵 Q 求出来，然后 QAQ^T 就是我们要的正交矩阵了。而且满足变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Qy}$, 而且其对角线上的值就是 A 的 n 个特征值。也就是说，我们

并不需要求出正交矩阵 Q（如果需要的话，Q 的求法是前面说过了的），只需要求出 A 的 n 个特征值就好了。因为 A 是实对称矩阵，是一定可以对角化的。

例题：将 $3x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_3$ 化做标准二次型，并写出所用的正交变换。

解：其矩阵表示为 $\begin{pmatrix} 3 & & 2 \\ & 2 & \\ 2 & & 3 \end{pmatrix}$

求得其特征值为 $\lambda_1 = 1\lambda_2 = 2\lambda_3 = 5$

由定义可求得其对应的特征向量分别为 $x_1 = (1,0,-1)^T x_2 = (0,1,0)^T, x_3 = (1,0,1)^T$

单位化得 $e_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}) e_2 = (0,1,0)^T, e_3 = ((\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$ 将其排列起来，就是我们所要的 Q

所以可作变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

所以所求标准二次型为 $y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2$ ∎

4.10.4 合同矩阵

对于两个矩阵 A 和 B，如果存在可逆矩阵 C 使得 $C^TAC = B$，就称 A 和同于 B，记作 $A \simeq B$. 明显，合同关系也具有反身性，对称性和传递性。

4.10.5 正定二次型和正定矩阵

如果对于任意的非零向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, 恒有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \boldsymbol{x^T A x} > 0$$

就称 $\boldsymbol{x^T A x}$ 为正定二次型，称 A 为正定矩阵。

明显，为了判断一个二次型是否是正定二次型，我们只需要将其化为标准型就容易判断了。就二次型的标准型来判断二次型的正定性，有以下结论。

若 A 是 n 阶实对称矩阵，则下列命题等价：

1. A 是正定矩阵

2. $A \simeq I$

3. $\exists P, P^{-1}, A = P^TP$

4. A的 n 个特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$,均大于 0

然后我们可以得到：如果 $\boldsymbol{x^T A x}$ 是正定二次型，那么：

1. $a_{ii} > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$

2. $|A| > 0$

5 线性方程组

线性方程组就是是各个方程关于未知量均为一次的方程组

5.1 克拉莫法则

设线性非齐次方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$

其系数行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$

则方程组有唯一解 $x_j = \frac{D_j}{D}$

其中 D_j 是用常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 替换掉 D 中第 j 列所形成的行列式。

然后我们立即可得，当 b=0 时，若 $D \neq 0$，则方程组只有 0 解。

5.2 高斯消元法

对于 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ 叫做它的系数矩阵 $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$ 叫做其增广矩阵。

对增广矩阵进行操作，将其化为阶梯型矩阵。其对应的线性方程组，与原方程组同解。如果产生矛盾方程而无解的方程组叫做不相容方程组，有解的则叫做相容方程组。同时，还有可能产生无穷多个解的情况。

5.3 齐次线性方程有解的条件

设 A 是 $m \times n$ 矩阵，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax = 0}$ 有非 0 解的充要条件是 $r(A) < n$ ，当 A 为 n 阶矩阵时，还可以叙述为 $|A| = 0$

5.4 齐次线性方程组的解的结构

若 $\boldsymbol{x_1, x_2}$ 是 $\boldsymbol{Ax = 0}$ 的解，则 $k_1\boldsymbol{x_1} + k_2\boldsymbol{x_2}$ 也是其解，K_1, k_2 为任意常数。

5.4.1 基础解系

设 $\boldsymbol{x_1, x_2, \cdots, x_p}$ 是 $\boldsymbol{Ax = 0}$ 的解向量，如果 $\boldsymbol{x_1, x_2, \cdots, x_p}$ 线性无关，且 $\boldsymbol{Ax = 0}$ 的任一解向量均可由 $\boldsymbol{x_1, x_2, \cdots, x_p}$ 线性表示，则称 $\boldsymbol{x_1, x_2, \cdots, x_p}$ 是 $\boldsymbol{Ax = 0}$ 的一个基础解系。基础解系一般不是唯一的。

5.4.2 基础解系的解向量的数量

若 A 是 $m \times n$ 矩阵，若 $r(A) = r < n$，则 $\boldsymbol{Ax = 0}$ 有基础解系，且基础解系含 n-r 个解向量。$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{p} k_i\boldsymbol{x_i}$ 称为 $\boldsymbol{Ax = 0}$ 的通解。

5.5 非齐次线性方程有解的条件

对于非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax = b}$, 下列命题等价：

1. $\boldsymbol{Ax = 0}$ 有解
2. $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示。
3. 曾广矩阵 (A,b) 的秩等于系数矩阵 A 的秩。

推论 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解的充要条件是:

$$r((\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}))=r(\boldsymbol{A})=\text{A 的列数}$$

5.6 非齐次线性方程解的结构

若 $\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，则 $k_1\boldsymbol{x_1}+k_2\boldsymbol{x_2}$ 一般不是其解，$\boldsymbol{x_1}-\boldsymbol{x_2}$ 是对应齐次线性方程的解。

若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解，则其一般解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x_0}+\overline{\boldsymbol{x}}$$

x_0 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解，而 $\overline{x}$ 是对应齐次线性方程组的一般解。

例题：求当 λ 为何值时，$\begin{cases}x_1+x_3=\lambda\\ 4x_1+x_2+2x_3=\lambda+2\\ 6x_1+x_2+4x_3=3+2\lambda\end{cases}$ 有解。且求出一般解

解：明显当 $\lambda=1$ 时，有特解，特解为 $(1,-1,0)$

接下来对齐次线性方程求一般解：其系数矩阵为 $\begin{pmatrix}1&0&1\\4&1&2\\6&1&4\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\2&1&0\end{pmatrix}$

所以其系数矩阵的秩为 2，所以其一般解系的解的个数为 1，解得为 $(1,-2,-1)$

所以当 $\lambda=1$ 时有解，而且其一般解为 $\boldsymbol{x}=k(1,-2,-1)+(1,-1,0)$

注：如果从非齐次线性方程有解的条件入手的化，就不好做。 ∎