第七讲作业

崔华坤

二、Bundle Adjustment

2.1 文献阅读

1. 为何说 BA is slow 不对？

答：因为没有考虑到 J 和 H 矩阵的稀疏性，即只存在位姿与路标点的相互关系，而位姿与位姿之间，及路标点与路标点之前没有约束关系，因此对应的矩阵块是对角矩阵，这样可以先进行边缘化，将矩阵求解分解成先求只有位姿的矩阵方程，再求路标点方程。

2. BA 中需要注意参数化的地方有：3D 路标点、旋转。

3D 路标点可以表示成非齐次和齐次，若用非齐次表示，当点距离很远时，此时的 X,Y,Z 值都很大，此时的代价函数会变得很单调，步长将变得很大；若用齐次表示，则可令 W=0，这里没有理解齐次的作用？

旋转的参数化方式：可以用欧拉角，但存在约束和万向锁问题；可以用四元数；也可以用旋转矩阵，进行局部扰动。

3. H 的稀疏性可以实现 BA 实时，在 07 年的 PTAM 上实现。

2.2 BAL-dataset

误差项为：

$$\mathrm{e}(\xi, f, k_1, k_2, P_w) = P_{uv} - KP_{cd} = P_{uv} - Kr(P_{cn}) \tag{1}$$

$$\text{其中，} P_c = exp(\xi^\wedge) P_w$$

其中，P_{uv}为像素坐标系，K 为相机内参矩阵，$r(\cdot)$为畸变校正变换，P_{cd}为畸变校正后的归一化的相机坐标系，P_{cn}为归一化的相机坐标系，P_c为相机坐标系，P_w为世界坐标系。

值得说明的是，这里的整体 Jicobian 为 2×12，为：

$$\mathrm{J} = \left[J_{\delta\xi}^{2\times6}, J_f^{2\times1}, J_{k_1}^{2\times1}, J_{k_2}^{2\times1}, J_{P_w}^{2\times3}\right]$$

下面我们分别讨论：

1. 对于第一项$J_{\delta\xi}^{2\times6}$，根据链式法则：

$$\frac{\partial \mathrm{e}}{\partial \delta\xi} = \frac{\partial \mathrm{e}}{\partial P_c} \cdot \frac{\partial P_c}{\partial \delta\xi} \tag{2}$$

将(1)式详细展开：

$$\mathrm{e} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_x & 0 & c_x \\ 0 & f_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{x_c}{z_c}(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4) \\ -\frac{y_c}{z_c}(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4) \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

可化简为：

$$e_x = u + \frac{f x_c}{z_c}(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4) \tag{4}$$

$$e_y = v + \frac{f y_c}{z_c}(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4)$$

其中，$r^2 = \left(\frac{x_c}{z_c}\right)^2 + \left(\frac{y_c}{z_c}\right)^2$，$c_x = c_y = 0$

注意 BAL 数据集中的从相机坐标系到归一化的投影模型多了一个负号，这是因为假设的像平面不在相机光心和 3D 物体之间，而是在另外一侧。

对(4)进行求导：

$$\frac{\partial e_x}{\partial x_c} = \frac{f}{z_c}(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4) + \frac{2 f x_c^2}{z_c^3}(k_1 + 2 k_2 r^2)$$

$$\frac{\partial e_x}{\partial y_c} = \frac{2 f x_c y_c}{z_c^3}(k_1 + 2 k_2 r^2)$$

$$\frac{\partial e_x}{\partial z_c} = -\frac{f x_c}{z_c^2}(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4) - \frac{2 f x_c r^2}{z_c^2}(k_1 + 2 k_2 r^2)$$

$$\frac{\partial e_y}{\partial x_c} = \frac{2 f x_c y_c}{z_c^3}(k_1 + 2 k_2 r^2)$$

$$\frac{\partial e_y}{\partial y_c} = \frac{f}{z_c}(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4) + \frac{2 f y_c^2}{z_c^3}(k_1 + 2 k_2 r^2)$$

$$\frac{\partial e_y}{\partial z_c} = -\frac{f y_c}{z_c^2}(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4) - \frac{2 f y_c r^2}{z_c^2}(k_1 + 2 k_2 r^2)$$

对于公式(2)的第二部分：参考《十四讲》4.3.5

$$\frac{\partial P_c}{\partial \delta\xi} = \begin{bmatrix} I & -P_c^{\wedge} \end{bmatrix}$$

注意$\frac{\partial P_c}{\partial \delta\xi}$若 se3 的旋转在前，平移在后，需要将前三列和后三列互换。

2. 下面讨论$J_f^{2\times 1}$：

根据公式(4)可计算出：

$$\frac{\partial \mathrm{e}}{\partial f}=\begin{bmatrix}\frac{x_c}{z_c}(1+k_1r^2+k_2r^4)\\ \frac{y_c}{z_c}(1+k_1r^2+k_2r^4)\end{bmatrix}$$

3. 下面讨论$J_{k_1}^{2\times1},J_{k_2}^{2\times1}$：

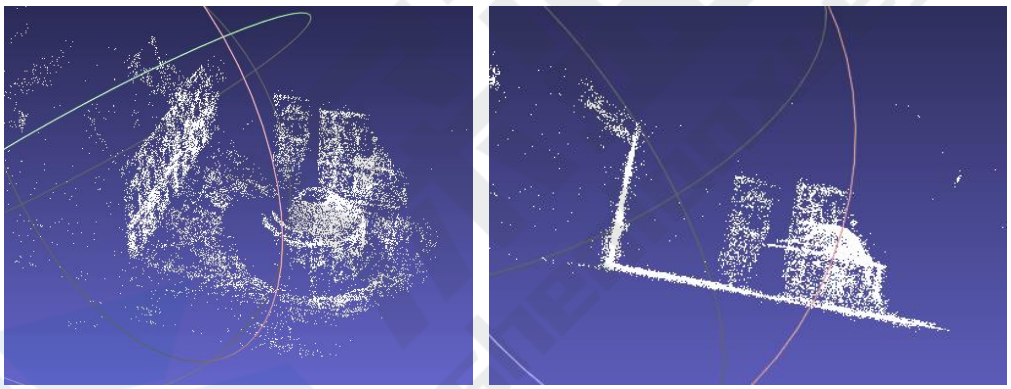
根据公式(4)可计算出：

$$\frac{\partial \mathrm{e}}{\partial k}=\begin{bmatrix}\frac{fx_c}{z_c}r^2 & \frac{fx_c}{z_c}r^4\\ \frac{fy_c}{z_c}r^2 & \frac{fy_c}{z_c}r^4\end{bmatrix}$$

4. 下面讨论$J_{P_w}^{2\times3}$：参考《十四讲》7.47

$$\frac{\partial \mathrm{e}}{\partial P_c}\cdot\frac{\partial P_c}{\partial P_w}=\frac{\partial \mathrm{e}}{\partial P_c}R$$

因其他 BAL 数据显示有问题，点都堆积在一起，但是下面数据没问题，因此仍是用下面数据测试：



三、直接法的 Bundle Adjustment

3.1 数学模型

1. 任意一点P_w投影在任意一图像中的误差项可写为：

$$\mathrm{e}(P_w,\xi)=I(P_w)-I_i\left(\frac{1}{z_c}Kexp(\xi^\wedge)P_w\right) \tag{5}$$

其中，第一项通过 3D 点集 points.txt 获得，第二项需要根据 16 个像素的位置关系，计算不同位置的灰度值。

2. 每个误差项 error 关联两个优化变量，分别为：P_w,ξ。

3. error 关于各变量的雅可比矩阵为：

$$J_{P_w} = \frac{\partial \mathrm{e}}{\partial P_w} = \frac{\partial\left[I(P_w) - I_i\left(\frac{1}{z_c} K exp(\xi^\wedge) P_w\right)\right]}{\partial P_w} \tag{6}$$

令：

$$P_{uv} = \frac{1}{z_c} K exp(\xi^\wedge) P_w$$

$$P_c = exp(\xi^\wedge) P_w$$

则(6)式可整理为：

$$J_{P_w} = -\frac{\partial I_i}{\partial P_{uv}} \frac{\partial P_{uv}}{\partial P_c} \frac{\partial P_c}{\partial P_w}$$

其中，

$$\frac{\partial I_i}{\partial P_{uv}} = \begin{bmatrix} \big(I_i(u+1,v) - I_i(u-1,v)\big)/2 \\ \big(I_i(u,v+1) - I_i(u,v-1)\big)/2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial P_{uv}}{\partial P_c} = \begin{bmatrix} \frac{f_x}{z_c} & 0 & -\frac{f_x x_c}{{z_c}^2} \\ 0 & \frac{f_y}{z_c} & -\frac{f_y y_c}{{z_c}^2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial P_c}{\partial P_w} = R$$

第二项 Jacobian 为：

$$J_{\delta\xi} = \frac{\partial \mathrm{e}}{\partial \delta\xi} = \lim_{\delta\xi \to 0} \frac{\mathrm{e}(\xi \oplus \delta\xi) - e}{\delta\xi}$$

其中，

$$\mathrm{e}(\xi \oplus \delta\xi) - e = I(P_w) - I_i\left(\frac{1}{z_c} K exp(\delta\xi^\wedge) exp(\xi^\wedge) P_w\right) - e$$

$$= I(P_w) - I_i\left(\frac{1}{z_c} K exp(\xi^\wedge) P_w + \frac{1}{z_c} K \delta\xi^\wedge exp(\xi^\wedge) P_w\right) - e \tag{7}$$

同样，令：

$$P_{uv} = \frac{1}{z_c} K exp(\xi^\wedge) P_w$$

$$P_c = exp(\xi^\wedge) P_w$$

则，(7)式可整理为：

$$\mathrm{e}(\xi \oplus \delta\xi) - e = -\frac{\partial I_i}{\partial P_{uv}} \frac{\partial P_{uv}}{\partial P_c} \frac{\partial P_c}{\partial \delta\xi} \delta\xi$$

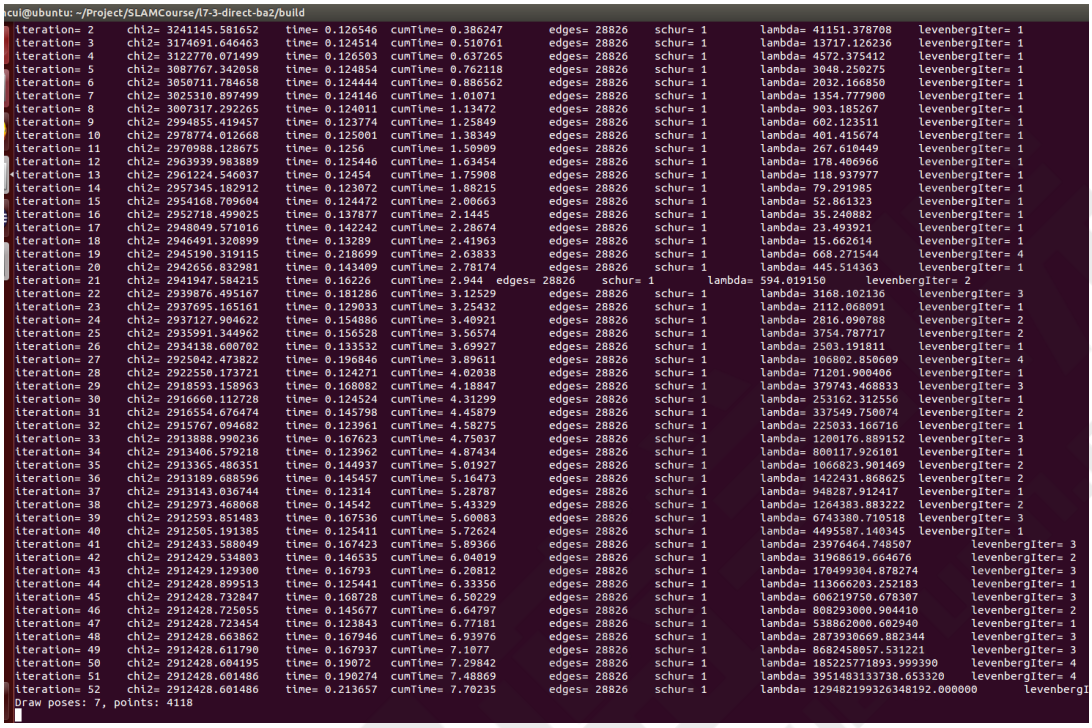
则：

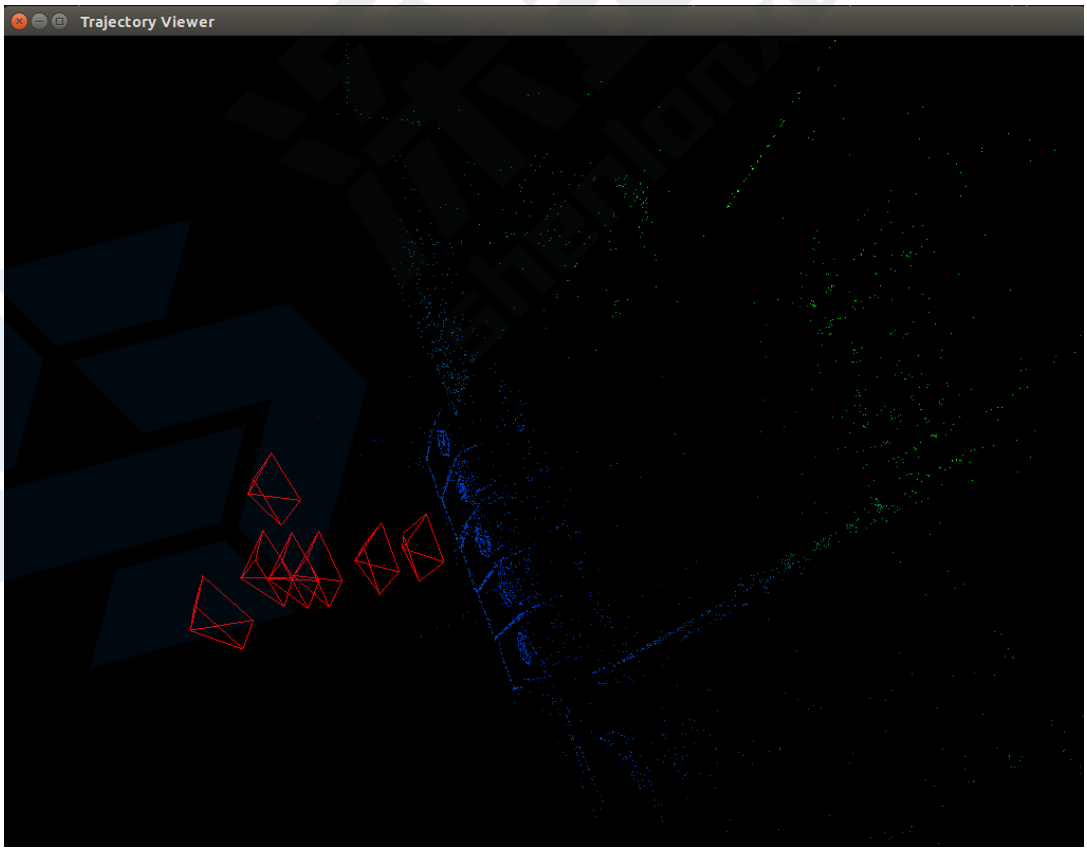
$$J_{\delta\xi} = \lim_{\delta\xi \to 0} \frac{\mathrm{e}(\xi \oplus \delta\xi) - e}{\delta\xi} = -\frac{\partial I_i}{\partial P_{uv}} \frac{\partial P_{uv}}{\partial P_c} \frac{\partial P_c}{\partial \delta\xi}$$

其中，前两项上面已给出，最后一项为：

$$\frac{\partial P_c}{\partial \delta \xi} = \begin{bmatrix} I & -P_c^{\wedge} \end{bmatrix}$$

3.2 实现





1. 能否不要以$[x,y,z]^T$的形式来参数化每个点？

答：逆深度参数化，6-D

$$P_w = (x_c \quad y_c \quad z_c \quad \theta \quad \phi \quad \rho)$$

$$P_w = \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} + \frac{1}{\rho} m(\theta, \phi)$$

其中，$[x_c, y_c, z_c]^T$为第一次观察到该 3D 路标点的相机的光心在世界坐标系下的位置，(θ, ϕ)表示相机光轴到该 3D 路标点的旋转角度，ρ为相机光心到该 3D 路标点的距离的倒数，另有：

$$m(\theta, \phi) = (\cos\phi \sin\theta, -\sin\phi, \cos\phi \cos\theta)^T$$

2. 取比 4×4 更大还是更小的 patch 好？

答：取小一点更好，因为不同视角下，即使看到同一个 3D 点，看到的周围的灰度值也不同，尤其对于一些边缘点，因此缩小 patch 会更容易匹配成功。

3. 直接法与特征点法在 BA 阶段有何不同？

答：直接法中 Jacobian 需要考虑灰度梯度，而特征点不用；直接法中需要考虑 patch 块，比如 4×4，即 16 个 error 项，而特征点法只考虑重投影误差，即 2 个 error 项。

4. Huber 的阈值如何设置？

答：假设误差项是高斯分布的，则误差项的平方服从卡方分布，然后确定误差项的自由度，以及置信度，根据自由度和置信度查找卡方分布表就能知道阈值是多少，一般置信度假设 0.95。

自由度对于 4×4 的 patch，其 error 维度为 16，因此自由度为 16。

卡方分布表 [编辑]

p-value = 1- p_CDF.

χ2越大，p-value越小，则可信度越高。通常用p=0.05作为阈值，即95%的可信度。

常用的χ2与p-value表如下:

自由度k \ P value （概率）	0.95	0.90	0.80	0.70	0.50	0.30	0.20	0.10	0.05	0.01	0.001
1	0.004	0.02	0.06	0.15	0.46	1.07	1.64	2.71	3.84	6.64	10.83
2	0.10	0.21	0.45	0.71	1.39	2.41	3.22	4.60	5.99	9.21	13.82
3	0.35	0.58	1.01	1.42	2.37	3.66	4.64	6.25	7.82	11.34	16.27
4	0.71	1.06	1.65	2.20	3.36	4.88	5.99	7.78	9.49	13.28	18.47
5	1.14	1.61	2.34	3.00	4.35	6.06	7.29	9.24	11.07	15.09	20.52
6	1.63	2.20	3.07	3.83	5.35	7.23	8.56	10.64	12.59	16.81	22.46
7	2.17	2.83	3.82	4.67	6.35	8.38	9.80	12.02	14.07	18.48	24.32
8	2.73	3.49	4.59	5.53	7.34	9.52	11.03	13.36	15.51	20.09	26.12
9	3.32	4.17	5.38	6.39	8.34	10.66	12.24	14.68	16.92	21.67	27.88
10	3.94	4.86	6.18	7.27	9.34	11.78	13.44	15.99	18.31	23.21	29.59