1. 第 2 章讲了经典控制理论，第 3 章讲了现代控制理论，它们分别有在什么章节知识中用到吗？具体在车辆控制上有什么应用？

经典：PID， ACC

现代：LQR， Traj Tracking

2. 第二章纵向的油门刹车标定表能否讲解一下如何建立：

理想的测试地点是平坦的长直路，且两边没有高大的建筑物遮挡。保证定位精度，这样标定的准确度才够。

标定的主要目的就是为了找到油门，速度，加速度之间的一个对应关系。

https://zhuanlan.zhihu.com/p/350205427

1) 确定能够使车辆启动的最小油门值 12%，并确定该油门能达到最大速度。
2) 确定车子能够达到的最大速度 5.5m/s（20km/h）时，油门值是多少，如 30%？
3) 对 12%～30%进行分档，如果标定速度较快，则以 1%作为递增，速度较慢，则以 2%作为递增。如按照 2%进行递增，分别记录油门值设定为 12%、14%、16%……30%时，能达到的最大速度，单位为 m/s。
4) 设定刹车值，刹车值可从 13%或者 15%等开始，以 15、17、20、22、25、27、30、33、35、37、40、45、50、55……80 进行设定，上限设定看刹车实际情况，档 30%就能很快刹停，那只要到 35 左右就可以。
5) 分别记录上述值。比方说油门 12%，能达到最大速度为 2m/s，油门 22%达到我们限制的最大速度 5.5m/s，记录表格形式

3. 工程中纯跟踪和斯坦利一般能最高运行速度是多少？

其实一般城市道路可以 cover，具体表现还要和实际调节有关。i.e., 10~15m/s

4. 需要限制转向的角速度吗

需要，结合实际车辆的硬件限制加特定 buffer

5. 角度的方向、范围，怎么运算和限制？

一般限制在[-pi,pi), Principal Value

6. 拉氏变换的式子 f(s)怎么变成离散化的式子 f(n)，如：f(s)=(s-d)/(a*s*s+b*s+c)怎么变成 f(n)、f(n-1)这样的离散表达式。

$$F(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s-d}{as^2+bs+c}$$

$$\Rightarrow \quad Y(s)(as^2+bs+c)=U(s)(s-d)$$

$$\boxed{a\ddot{y}+b\dot{y}+cy=\dot{u}-du}$$

$G(s)$	$H(q)$ or the coefficients in $H(q)$
$\frac{(s+c)}{(s+a)(s+b)}$, $a \neq b$	$b_1=\frac{e^{-bh}-e^{-ah}+(1-e^{-bh})c/b-(1-e^{-ah})c/a}{a-b}$ $b_2=\frac{c}{ab}e^{-(a+b)h}+\frac{b-c}{b(a-b)}e^{-ah}+\frac{c-a}{a(a-b)}e^{-bh}$ $a_1=-e^{-ah}-e^{-bh}$ $\quad a_2=e^{-(a+b)h}$
$\frac{\omega_0^2}{s^2+2\zeta\omega_0 s+\omega_0^2}$	$b_1=1-\alpha\left(\beta+\frac{\zeta\omega_0}{\omega}\gamma\right)$ $\quad \omega=\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$ $\quad \zeta<1$ $b_2=\alpha^2+\alpha\left(\frac{\zeta\omega_0}{\omega}\gamma-\beta\right)$ $\quad \alpha=e^{-\zeta\omega_0 h}$ $a_1=-2\alpha\beta$ $\quad \beta=\cos(\omega h)$ $a_2=\alpha^2$ $\quad \gamma=\sin(\omega h)$
$\frac{s}{s^2+2\zeta\omega_0 s+\omega_0^2}$	$b_1=\frac{1}{\omega}e^{-\zeta\omega_0 h}\sin(\omega h)$ $\quad b_2=-b_1$ $a_1=-2e^{-\zeta\omega_0 h}\cos(\omega h)$ $\quad a_2=e^{-2\zeta\omega_0 h}$ $\omega=\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$
$\frac{a^2}{s^2+a^2}$	$b_1=1-\cos ah$ $\quad b_2=1-\cos ah$ $a_1=-2\cos ah$ $\quad a_2=1$

7. 第四章的黎卡提方程怎么求解矩阵 P?

1) 选择 Q、R 参数矩阵
2) 求解 Riccati 方程 A^TP+PA-PBR^{-1}B^TP+Q=0 得到矩阵 P
3) 计算增益 K=R^{-1}B^TP 得到反馈控制量 u=-kx

8. LQR 中矩阵 P 在离散情况下是怎么求解的，如果他是迭代的那他的初值是什么?

设计步骤

- 确定迭代范围N
- 设置迭代初始值$P_N = Q$
- $t = N, \cdots, 1$从后向前循环迭代求解离散时间的代数RIccati方程

$$P_{t-1} = Q + A^T P_t A - A^T P_t B(R + B^T P_{t+1} B)^{-1} B^T P_t A$$

- $t = 0, \cdots, N$循环计算反馈系数$K_t = (R + B^T P_{t+1} B)^{-1} B^T P_{t+1} A$并得到控制量

$$u_t = -K_t x_t$$

9. 第四章的 preview 控制中，为什么要加入道路模型，直接选车辆前方的点进行误差计算，然后再用标准的 LQR 会有什么样的问题?

目的：提高 future 信息量，也更加准确。
会带来的问题：转弯 delay，大 curvature 的路出现 error 偏大的问题。

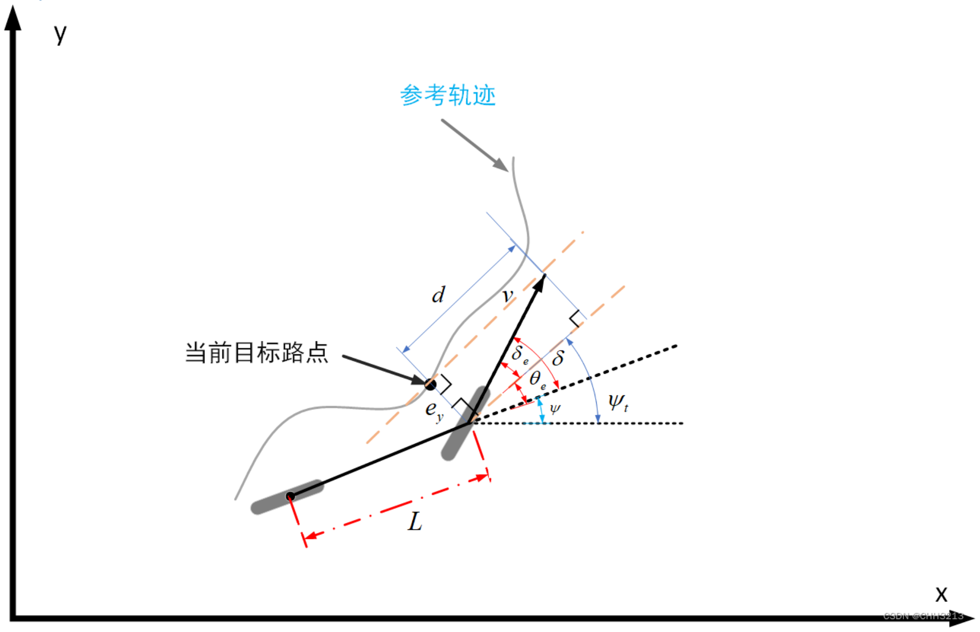
10. 第四章中误差状态方程的右边还有一项关于参考路径的航向角速率，但是 LQR 控制器中并没有考虑他对状态量的影响，那应该如何解决呢

增加前馈

11. 第四章课件中关于横向运动方程的推导过程中很多物理量都是矢量，但是在公式表达上只进行了标量的加减运算，是否应该提前规定物理量的正方向之后在进行标量的加减运算呢

coordinate transformation

12. 请问 stanley 控制中，横向误差变化率的公式怎么推导



横向误差的变化率为

$$\dot{e}_y = -v\sin\delta_e$$

带负号是因为在控制下，横向误差会越来越小，因此横向偏差变化率会有负号。

由几何关系可得：

$$\sin\delta_e = \frac{e_y}{\sqrt{d(t)^2 + e_y^2}}$$

$$\sin\delta_e = \frac{ke_y}{\sqrt{v^2 + (ke_y)^2}}$$

$$\dot{e}_y = \frac{-kve_y}{\sqrt{v^2 + (ke_y)^2}} = \frac{-ke_y}{\sqrt{1 + \left(\frac{ke_y}{v}\right)^2}}$$

当横向跟踪误差 ey 很小时，上式改写为:

$$\dot{e}_y \approx -ke_y$$

积分上式（一阶线性微分方程的求解），得：

$$e_y(t) = e_y(0) \times e^{-kt}$$

所以当 t → ∞ 时，横向误差以指数形式收敛于 0，参数 k 决定了收敛速度。

13. MPC 的 terminal cost 遵循的 lyapunov 方程是怎么构建的， Learning-based MPC 是如何把时间当成一个 variable 来更新 terminal cost 和 constrain 的 safe set。
https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/2212/2212.00361.pdf

终端集在 MPC 理论中有着重要作用，但在实际工程应用中很多时候没有被采用。我认为这也是导致国内网上资料较少的原因之一。之所以应用较少，是因为当 MPC 的模型和参数设置合理时，大多数情况下不会出现失稳的情况，而且会有不错的表现。
https://zhuanlan.zhihu.com/p/506347060
example： https://github.com/SailorBrandon/MPC-for-Quadrotors/blob/9c60221b052ea10942d0039b1183f16d06b6d2f4/terminal_set.py

终端集有三条重要的性质是控制不变性（control invariant），约束容许性（constraint admissible）和李雅普诺夫递减性（lyapunov decrease）。

而这个算法构造控制不变集（control invariant set）的方法核心其实就是每前进一步时，通过求解线性规划（LP）问题检查下一步的所有状态 X(k+1)组成的集合是不是前一步所有状态 X(k)组成集合的子集。如果不是，那么取所有这两步状态集合的交集（通过添加约束）作为当前状态集合，然后用这个集合往后接着推，检查再下一步的所有状态的集合。直到找到连续两步中，后一步的所有状态 X(k+1) 组成的集合完全包含于前一步所有状态组成的集合，则前一步所有状态 X(k) 组成的集合为控制不变集.

生成终端集具体算法如下：

Algorithm 1: Estimate Set $\mathbb{X}_f$

Result: $Hx \leq h$ representing $\mathbb{X}_f$

Initialization:

$A_K := A - BK$

$K :=$ LQR optimal gain

$K_{\text{aug}} :=$ [K; I]

Set $k := 0$

Iteration:

For all $i = 1, 2, .., s$

$$x_i^* := \begin{cases} \underset{x}{\operatorname{argmax}} \ f_i(K_{\text{aug}} A_K^{k+1} x) \\ \text{s.t. } f_j(KA^t x) \leq 0 \ \ \forall j \in \{1, 2, .., s\}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \forall t \in \{0, 1, .., k\} \end{cases}$$

end

if $\mathrm{f}_i(K_{\text{aug}} A_K^{k+1} x) \leq 0 \ \forall i \in \{1, 2, .., s\}$ **then**

$$\mathbb{X}_f := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(K_{\text{aug}} A_K^t x) \leq 0 \forall j \in \{1, 2, .., s\}, \ \forall t \in \{0, 1, .., k\}\}$$

else

set k := k + 1 and continue

其中f_i表示第i个线性约束函数，即$H_i x$。H是包含了所有终端线性不等式约束函数的矩阵，它的行数等于约束的个数，列数等于状态变量的个数。终端集X_f为线性不等式约束$Hx \leq h$下的集合。可以看出，每个线性不等式约束相当于状态空间中的一个超平面。又由于X_f为紧集，最后形成X_f的形状是用多个超平面围出来的一个高维度多面体 (Polyhedron)。多面体中的所有点（状态x）满足终端集性质。

李雅普诺夫递减性证明：

考虑 LTI 系统状态空间方程:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

和二次状态代价函数:

$$l(x,u) = \frac{1}{2}(x^TQx + u^TRu)$$

其中（A，B）可控，Q，R正定。对于此系统考虑无限阶段 (infinite horizon) 的无约束 (uc) 优化问题:

$$\mathbb{P}_{\infty}^{\mathrm{uc}}(x) : \min_u \sum_{k=0}^{\infty} \ell(x(k), u(k))$$

根据离散代数黎卡提方程（DARE），具体推导过程请参考第二章:

$$P = A_K^TPA_K + Q_K > 0$$

其中$P > 0$正定。$A_K = A + BK$（有些资料写的是$A - BK$, 是因为这里取K的时候将前边的负号也算上了），$Q_K = Q + K^TRK$:

$$x_{k+1} = (A + BK)x_k = A_Kx_k$$

$$l(x_k) = \frac{1}{2}x_k^T(Q + K^TRK)x_k = \frac{1}{2}x_k^TQ_Kx_k$$

此时输入$u = Kx$为状态反馈。K为无约束 LQR 控制增益矩阵:

$$K = -\left(B^\top PB + R\right)^{-1}B^\top PA^\top$$

求解上述 DARE 方程，将P作为终端代价函数的二次型矩阵:

$$V_f(x) = \frac{1}{2}x^TPx$$

当 MPC 控制状态进入终端集后，MPC 的终端代价函数V_f和 LQR 代价函数相同。二者都会找到V_f作为代价函数的最优解，所以 MPC 控制输入会和无约束 LQR 控制输入相同，即$u = Kx$。

对于任意对于终端集中任意状态x_k, 下一步的终端代价$V_f(x_{k+1})$为:

$$V_f(x_{k+1}) = V_f(A_Kx_k) = \frac{1}{2}x_K^T(A_K^TPA_K)x_k = \frac{1}{2}x_K^T(P - Q_K)x_k$$

所以满足李雅普诺夫递减性:

$$V_f(x_{k+1}) = \frac{1}{2}x_K^T(P - Q_K)x_k = V_f(x_k) - l(x_k)$$