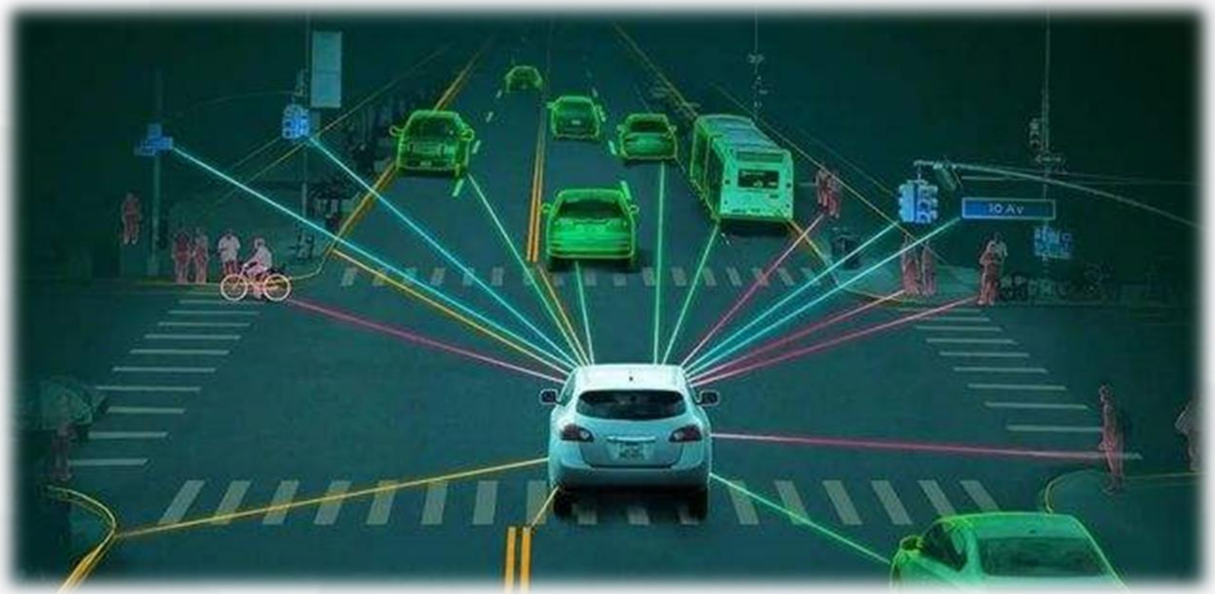
智能驾驶汽车
规划/控制算法系列术语概念解析

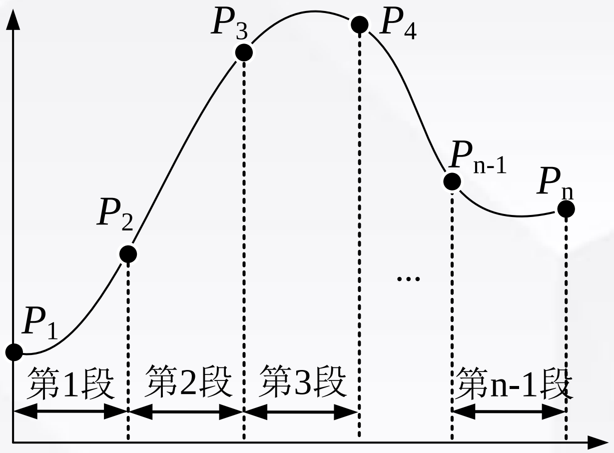
第6节 基于三次样条插值的路径规划算法



创作者：Ally

时间：2022/9/24

6.1 三次样条曲线模型



- 设有n个离散点 ，我们希望用一条光滑的曲线依次经过这n个离散点。若用一条高阶多项式曲线进行插值，会出现端点振荡的龙格现象。
- n个离散点对应有n-1个区间段，也就是说我们的目标转化为求解n-1段三次曲线:

$$y_i = f_i(x) = a_{i,0} + a_{i,1}x + a_{i,2}x^2 + a_{i,3}x^3$$

- 每段三次曲线有4个待定系数，那么n-1段三次曲线总共有4(n-1)个待定系数，故需要构造4(n-1)个独立方程才能获得唯一解。

Ally

邻接点函数值相等

- 每一段三次曲线的首末两个点函数值等于离散点的函数值

$$\begin{cases} f_i(x_i)=y_i \\ f_i(x_{i+1})=y_{i+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_i(x_i)=a_{i,0}+a_{i,1}x_i+a_{i,2}x_i^{\ 2}+a_{i,3}x_i^{\ 3}=y_i \\ f_i(x_{i+1})=a_{i,0}+a_{i,1}x_{i+1}+a_{i,2}x_{i+1}^{\ \ 2}+a_{i,3}x_{i+1}^{\ \ 3}=y_{i+1} \end{cases}$$

- 改用矩阵表达

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i & x_i^2 & x_i^3 \\ 1 & x_{i+1} & x_{i+1}^2 & x_{i+1}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{i,0} \\ a_{i,1} \\ a_{i,2} \\ a_{i,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \end{bmatrix}$$

- 根据邻接点的函数值相等这一等式约束可以构造2(n-1)个边界条件。

邻接点一阶导相等

- 为了保证曲线在邻接点的导数连续，需要保证邻接点的一阶导相等：

$$f_i'(x_{i+1})=f_{i+1}{}'(x_{i+1})$$

$$\Rightarrow a_{i,1}+2a_{i,2}x_{i+1}+3a_{i,3}x_{i+1}^2=a_{i+1,1}+2a_{i+1,2}x_{i+1}+3a_{i+1,3}x_{i+1}^2$$

- 改用矩阵表达：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2x_{i+1} & 3x_{i+1}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{i,0} \\ a_{i,1} \\ a_{i,2} \\ a_{i,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2x_{i+1} & 3x_{i+1}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{i+1,0} \\ a_{i+1,1} \\ a_{i+1,2} \\ a_{i+1,3} \end{bmatrix}$$

- 根据邻接点的一阶导相等这一等式约束可以构造(n-2)个边界条件。

Ally

邻接点二阶导相等

◆ 为了保证曲率连续，邻接点的二阶导也需要相等

$$f_i''(x_{i+1}) = f_{i+1}''(x_{i+1})$$
$$\Rightarrow 2a_{i,2} + 6a_{i,3}x_{i+1} = 2a_{i+1,2} + 6a_{i+1,3}x_{i+1}$$

◆ 改用矩阵表达

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 6x_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{i,0} \\ a_{i,1} \\ a_{i,2} \\ a_{i,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 6x_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{i+1,0} \\ a_{i+1,1} \\ a_{i+1,2} \\ a_{i+1,3} \end{bmatrix}$$

◆ 根据邻接点的二阶导相等这一等式约束可以构造(n-2)个边界条件

端点边界条件

◆ 端点边界条件分为自然边界、固定边界、扭结边界

◆ 自然边界，指定端点的二阶导数为0：

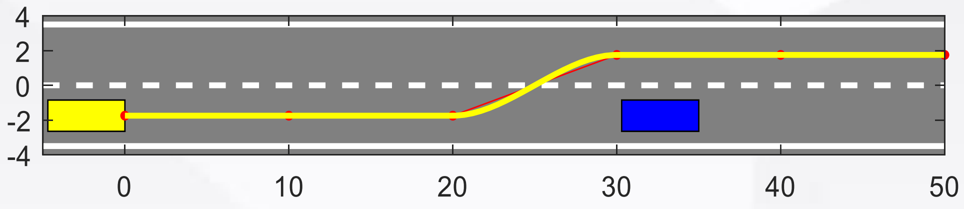
$$f_1''(x_1) = f_{n-1}''(x_n) = 0$$
$$\Rightarrow 2a_{1,2} + 6a_{1,3}x_1 = 2a_{n-1,2} + 6a_{n-1,3}x_n = 0$$

◆ 改用矩阵表达：

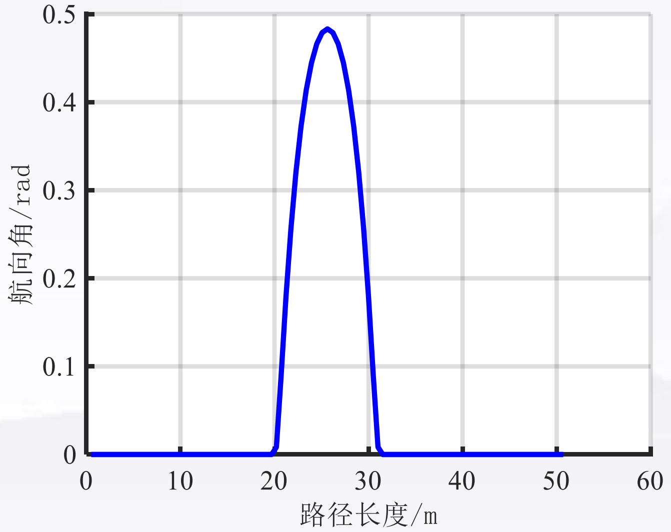
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 6x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,0} \\ a_{1,1} \\ a_{1,2} \\ a_{1,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 6x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1,0} \\ a_{n-1,1} \\ a_{n-1,2} \\ a_{n-1,3} \end{bmatrix} = 0$$

◆ 根据端点条件这一等式约束可以构造2个边界条件。

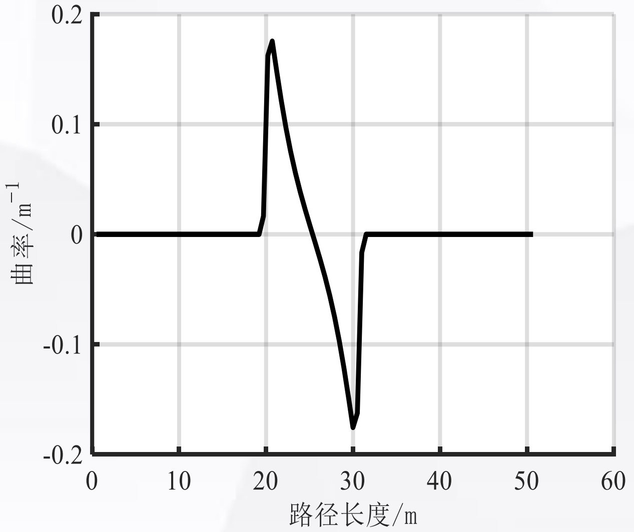
- 设A(0,-1.75)，B(10,-1.75) ， C(20,-1.75) ， D(30,1.75) ， E(40,1.75) ， F(50,1.75) 一共6个离散点
- MATLAB的分段三次 Hermite 插值多项式库函数pchip，该函数可以直接计算分段三次样条，返回每一段多项式的4个系数，然后根据此系数调用ppval库函数，生成一系列的插值点，从而得到三次样条曲线。



仿真场景图



航向角



曲率