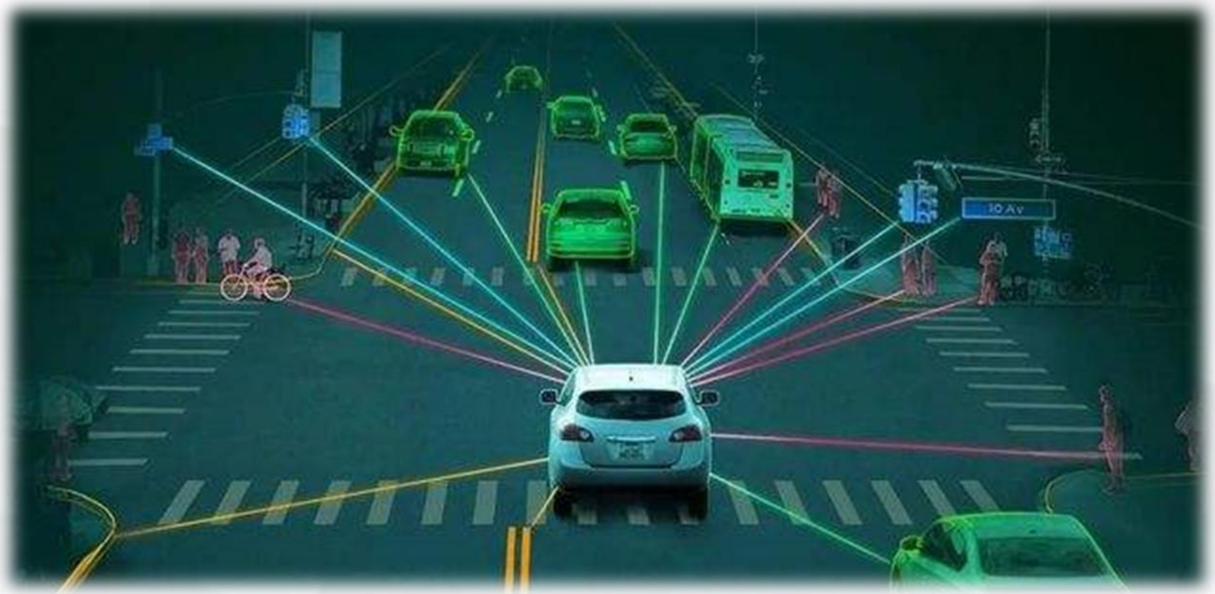
智能驾驶汽车
规划/控制算法系列术语概念解析

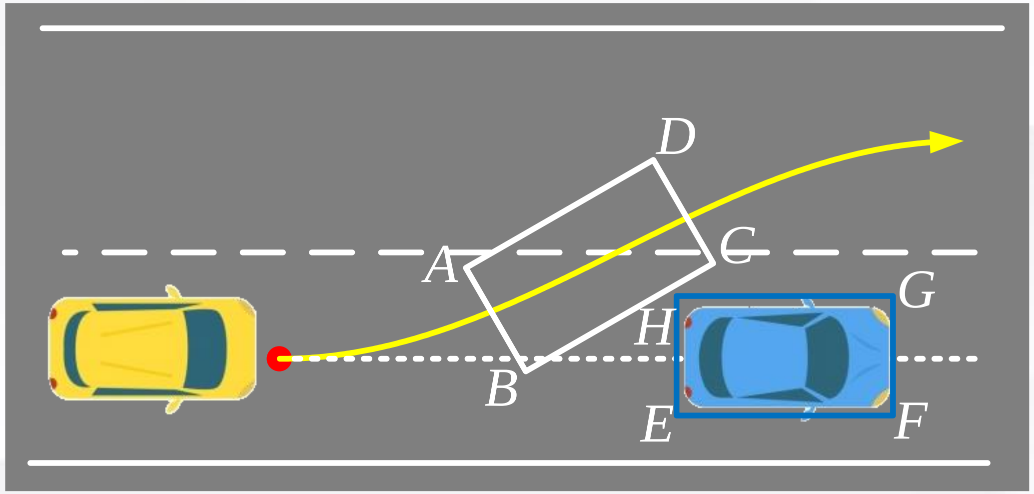
第9节 基于向量叉乘法的车辆碰撞检测

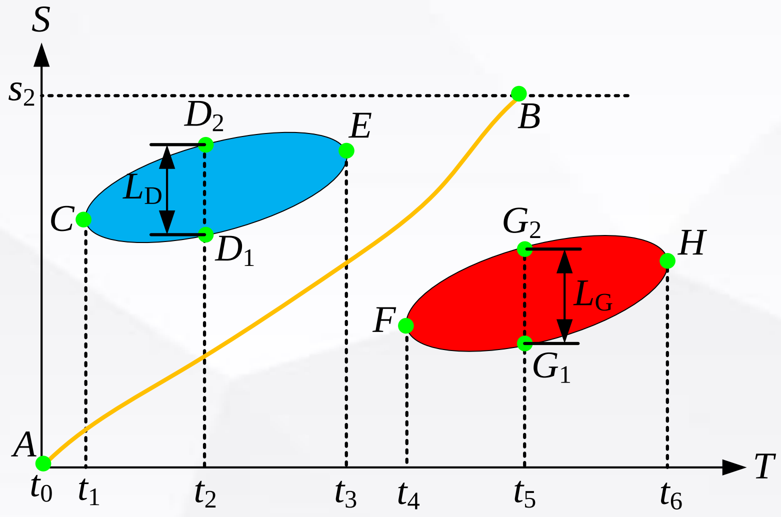
创作者：Ally

时间：2022/12/24



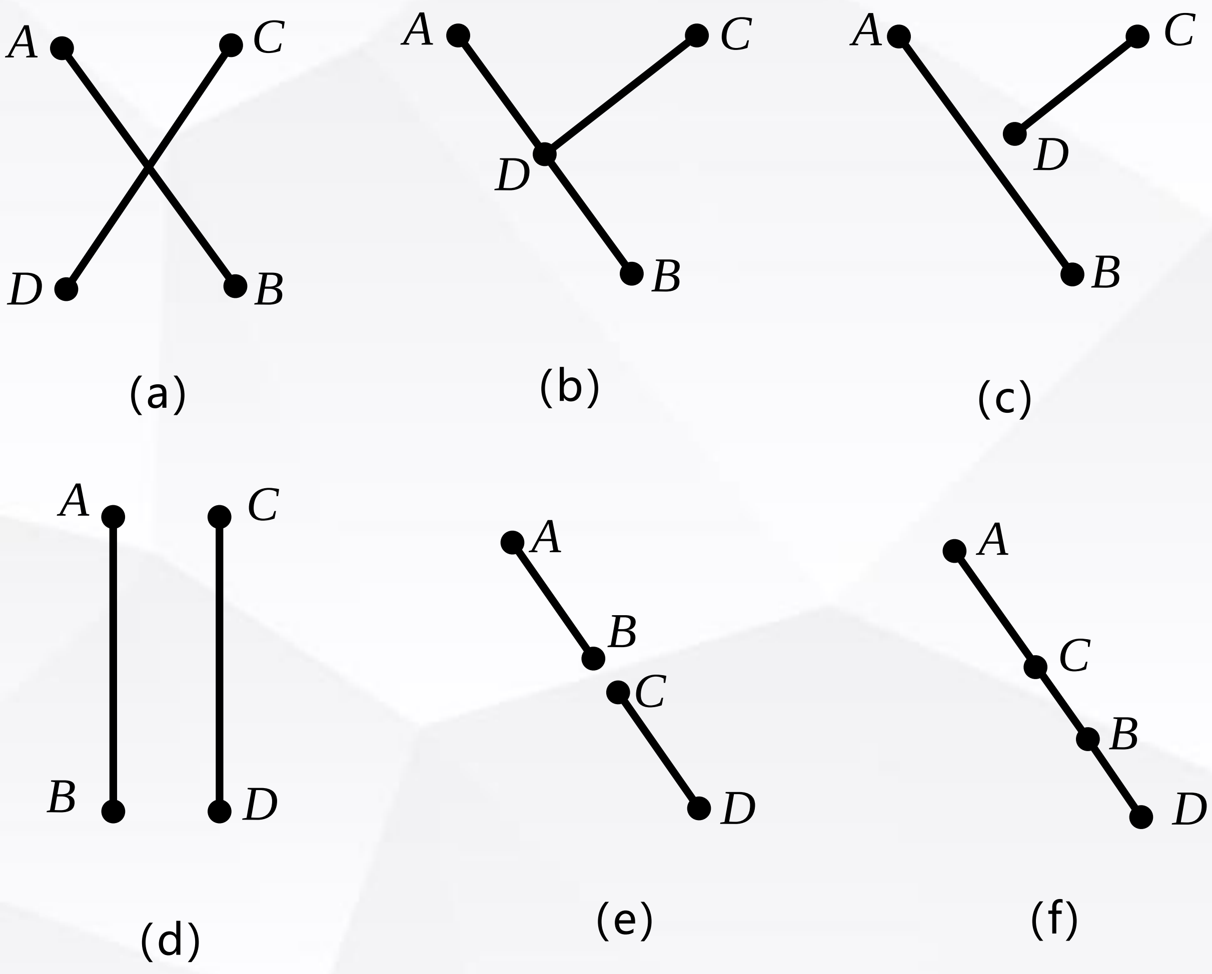
- ◆ 路径规划中，要保证规划的局部路径对应的本车矩形框不与静态障碍物矩形框相交。
- ◆ 速度规划中，要保证ST图中规划的速度曲线不与障碍物形成的封闭多边形相交。
- ◆ 归根到底，碰撞检测可转化为判断平面中两条线段的（相交与否）关系





线段相对位置关系及叉乘原理

- （a）图表示两条线段AB与CD完全交叉；
- （b）图表示线段CD的端点D位于另一条线段AB上，端点D既可在线段AB内，也可在线段AB的某个端点上；
- （c）图表示两条线段不平行，且不相交；
- （d）图表示两条线段平行，但不共线；
- （e）图表示两条线段共线，但不重合；
- （f）图表示两条线段共线，且局部重合。
- 根据向量叉乘原理可知，若$\vec{a}\times\vec{b}>0$，表明向量$\vec{b}$位于向量$\vec{a}$的逆时针方向（旋转角度小于180度）；
- 若$\vec{a}\times\vec{b}<0$，表明向量$\vec{b}$位于向量$\vec{a}$的顺时针方向（旋转角度小于180度）；
- 若$\vec{a}\times\vec{b}=0$，表明两向量平行。



两线段完全交叉的判定

- 我们连接AC和AD，分别得到 $\overrightarrow{AC}$ 和 $\overrightarrow{AD}$ 两个向量。以 作为基准向量，根据向量叉乘原理，有：

$$\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right)<0 \qquad (1)$$

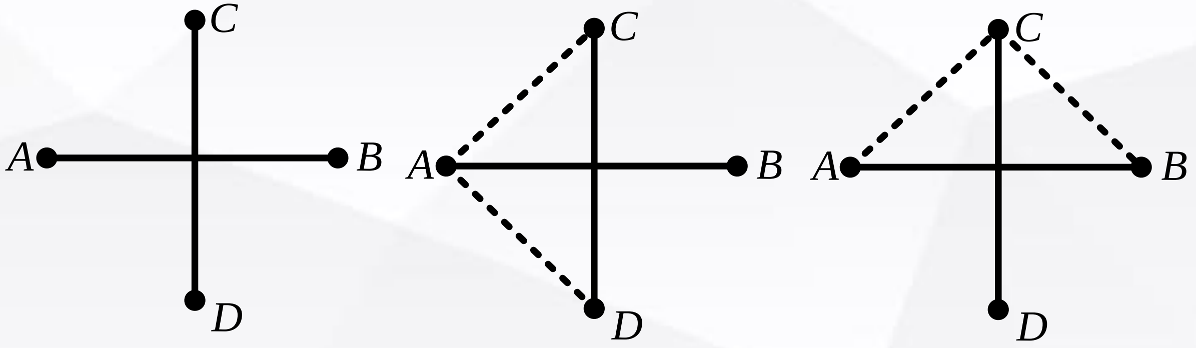
则表明两个叉乘结果异号，因此 $\overrightarrow{AC}$ 和 $\overrightarrow{AD}$ 必然位于 $\overrightarrow{AB}$ 的两侧。

- 同理，连接CA和CB，分别得到 $\overrightarrow{CA}$ 和 $\overrightarrow{CB}$ 两个向量，有：

$$\left(\overrightarrow{CD}\times\overrightarrow{CA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{CD}\times\overrightarrow{CB}\right)<0 \qquad (2)$$

则表明两个叉乘结果异号，因此 $\overrightarrow{CA}$ 和 $\overrightarrow{CB}$ 必然位于 $\overrightarrow{CD}$ 的两侧。

- 显然，当同时满足式(1)和(2)，表明AB和CD两条线段完全交叉。

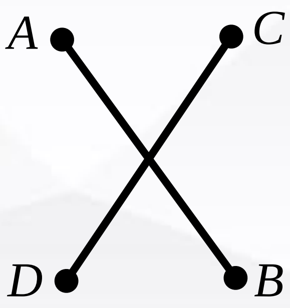


一线段端点位于另一线段上的判定

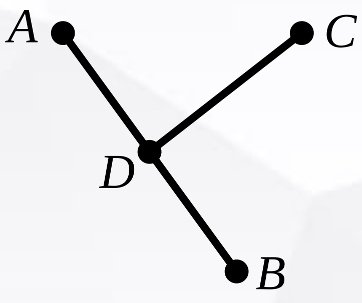
- （b）图可以视为（a）图中的端点D回退到线段AB上，AB两个端点依然位于CD的两侧。不同的是，由于A、B、D三点共线，叉乘满足下式：

$$\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right)=0\Rightarrow\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right)=0 \qquad (3)$$

- 因此，当同时满足式(2)和(3)，可以判定一线段端点位于另一线段上。



(a)

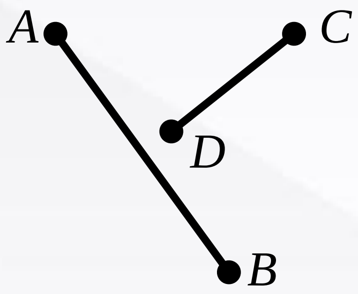


(b)

Ally

两条线段不平行

- 两条线段不平行，且不相交的判定稍复杂，可以采取排除法进行判定，即当不满足其余5种任意一种情况后，可以认为满足不平行且不相交。



(c)

两条线段平行，但不共线

- 根据向量平行的定义，有：

$$\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}\right)=0 \tag{4}$$

- 在两条线段中任选一个端点进行连接（如连接AC），计算$\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{AB}$或 $\overrightarrow{CD}$的叉乘，得到：

$$\left(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}\right)\neq 0,\left(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{CD}\right)\neq 0 \tag{5}$$

- 因此，当同时满足式(4)和(5)，可以判定两线段平行但不共线。

(d)

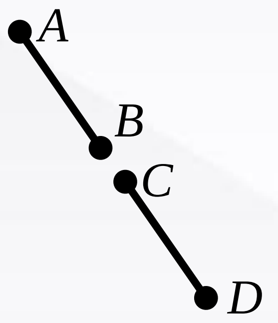
两线段共线，但不重合

- 由平行不共线的结论，修改式(5)，当满足下式后：

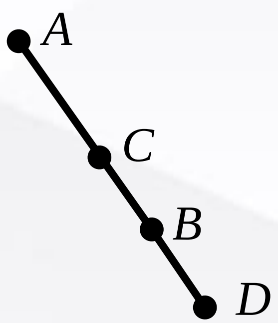
$$\left(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}\right)=0,\left(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{CD}\right)=0 \quad (6)$$

- 可以判定两线段共线，但仍不能判定是否重合。
- 为了区分图（e）和（f），可以将两个线段的坐标和端点符号做如下处理：以线段AB为例，将横坐标较小的坐标命名为A，较大值为B，若横坐标相同，将纵坐标较小的坐标命名为A。同理，坐标值较小的命名为C，坐标值较大的端点命名为D。则当C点的横（纵）坐标大于B点的横（纵）坐标，或者D点的横（纵）坐标小于A点的横（纵）坐标，即满足下列任一不等式后，可以判断两线段共线，但不重合。

$$x_3 > x_2, x_4 < x_1, y_3 > y_2, y_4 < y_1 \quad (7)$$



(e)



(f)

两线段共线且重合

- 当式(7)中四个不等式都不满足时，可以判定两条线段重合。