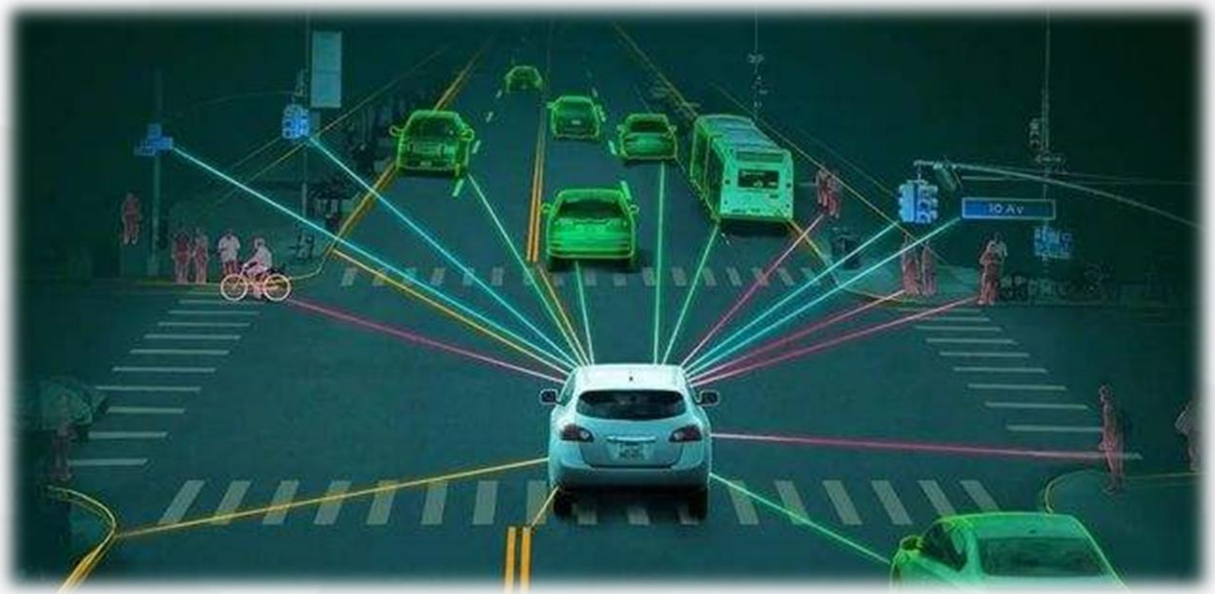
智能驾驶汽车
规划/控制算法系列术语概念解析

第3节 基于三点参数方程的曲率计算方法

创作者：Ally

时间：2022/9/10



3 基于三点参数方程的曲率计算方法

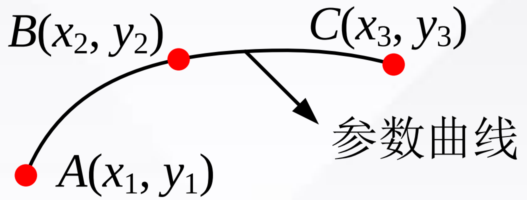
◆ 基于三点求外接圆的曲率是一种最为精确的、基于数学原理的计算方法，接下来我们针对三个离散点建立二次曲线进行拟合的方式近似求解曲率，以拓展读者的数学思维

◆ 我们设经过A、B、C三个相邻离散点的参数曲线方程如下：

$$\begin{cases} x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \\ y(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 \end{cases} \tag{1}$$

◆ 参数曲线的曲率计算公式如下：

$$\kappa = \frac{x''y' - x'y''}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}} = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{\left(a_1^2 + b_1^2\right)^{3/2}} \tag{2}$$



◆ 显然，为求解式（2）参数曲线的曲率，必须首先计算式（1）的6个待定系数。记三个离散点构成的两段矢量的长度分别为：

$$\begin{cases} t_a = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2} \\ t_b = \sqrt{\left(x_3 - x_2\right)^2 + \left(y_3 - y_2\right)^2} \end{cases} \tag{3}$$

3 基于三点参数方程的曲率计算方法

Ally

- 考虑到A、B、C三个相邻离散点一般来说相隔很近，且对应的曲率半径的圆心角变化不大，则弧线段AB的长度可近似等于直线段AB的长度。因此，对于参数方程(1)，自变量t的变化近似满足如下等式：

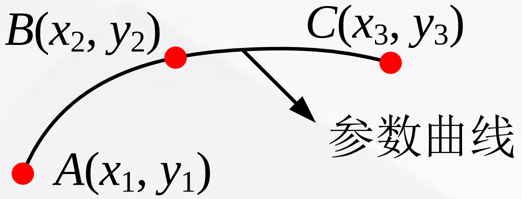
$$\begin{cases}(x,y)\big|_{t=-t_a}=(x_1,y_1)\\(x,y)\big|_{t=0}=(x_2,y_2)\\(x,y)\big|_{t=t_b}=(x_3,y_3)\end{cases}\tag{4}$$

- 将式(4)代入(3)，得到：

$$\begin{cases}x_1=a_0-a_1t_a+a_2t_a^2\\x_2=a_0\\x_3=a_0+a_1t_b+a_2t_b^2\end{cases},\quad\begin{cases}y_1=b_0-b_1t_a+b_2t_a^2\\y_2=b_0\\y_3=b_0+b_1t_b+b_2t_b^2\end{cases}\tag{5}$$

- 将上式改写为矩阵形式：

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-t_a&t_a^2\\1&0&0\\1&t_b&t_b^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-t_a&t_a^2\\1&0&0\\1&t_b&t_b^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_0\\b_1\\b_2\end{bmatrix}\tag{6}$$



- 记：

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},Y=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix},M=\begin{bmatrix}1&-t_a&t_a^2\\1&0&0\\1&t_b&t_b^2\end{bmatrix},A=\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}b_0\\b_1\\b_2\end{bmatrix}\tag{7}$$

- 则求得待定系数矩阵为：

$$\begin{cases}A=M^{-1}X\\B=M^{-1}Y\end{cases}\tag{8}$$

- 最后，将式(8)代入式(2)，便可求得曲率。