自动驾驶汽车
预测-决策-规划-控制实战入门

5.3 基于二次规划算法平滑ST曲线

创作者：Ally

时间：2021/11/21

学习课程大纲目录

Ally

1 运用二次规划平滑ST曲线的缘由

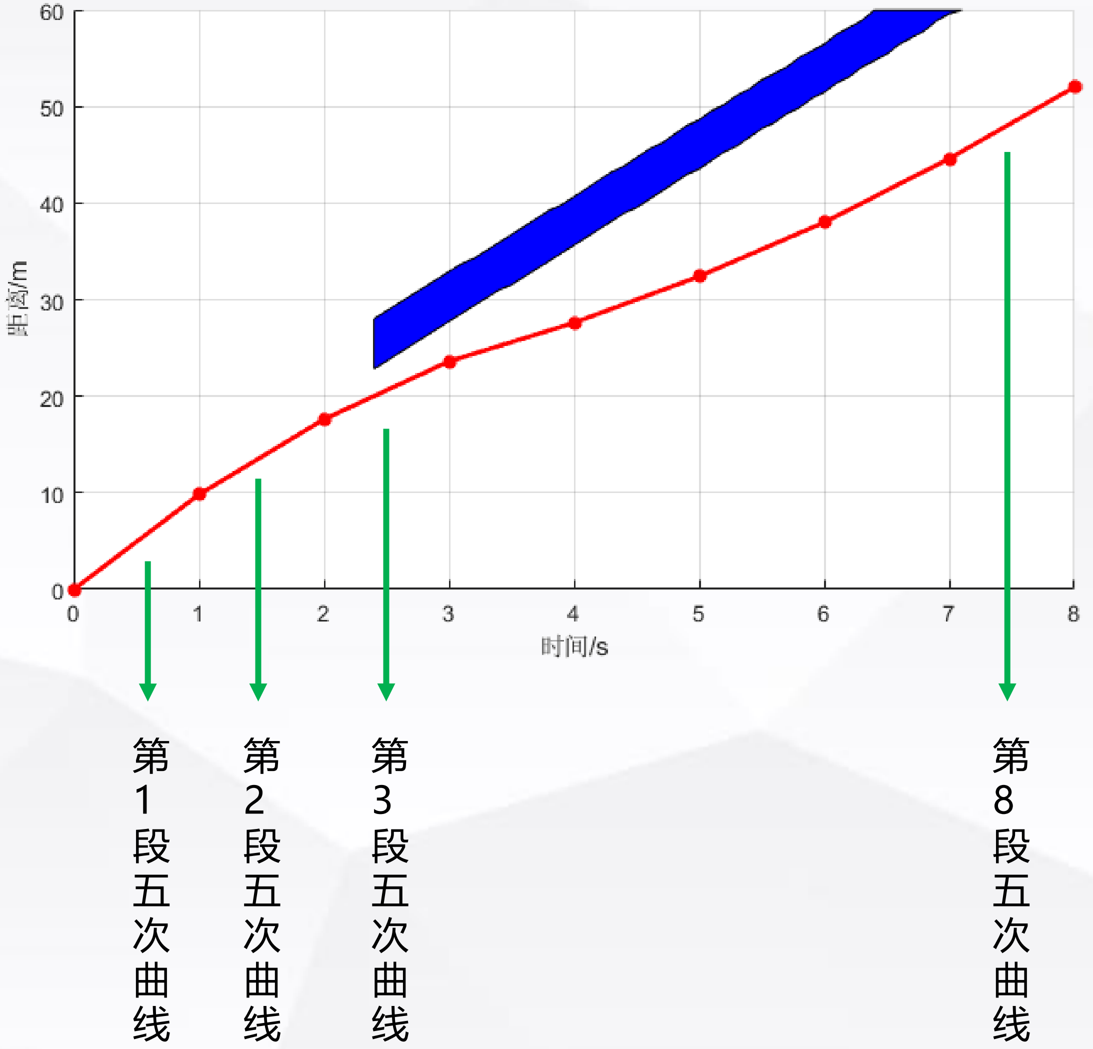
- 动态规划得到的ST曲线，在所设定的栅格化颗粒度下是最优的；但随着时间和距离的离散化颗粒度越小，此“最优”已不再满足真正的最优；
- DP的颗粒度较大，生成的ST曲线的导函数曲线不连续、不可导，无法直接应用；
- 二次规划则可以解决上述问题，定义平滑后的ST曲线是由8段5次多项式曲线前后连接而成，每一段的多项式曲线表达式如下：

$$s_i = a_{i,0} + a_{i,1}t + a_{i,2}t^2 + a_{i,3}t^3 + a_{i,4}t^4 + a_{i,5}t^5$$

$$v_i = a_{i,1} + 2a_{i,2}t + 3a_{i,3}t^2 + 4a_{i,4}t^3 + 5a_{i,5}t^4$$

$$acc_i = 2a_{i,2} + 6a_{i,3}t + 12a_{i,4}t^2 + 20a_{i,5}t^3$$

$$jerk_i = 6a_{i,3} + 24a_{i,4}t + 60a_{i,5}t^2$$



2 ST曲线平滑问题转为二次规划为问题

◆ 定义加速度、加加速度、位置误差优化代价函数：

$$cost = \sum_{i=1}^{8}\left[\omega_1\int_{t=0}^{1} acc_i^2(t) + \omega_2\int_{t=0}^{1} jerk_i^2(t) + \omega_3\int_{t=0}^{1}\left(s_{i,t} - s_{DP,t}\right)^2\right]$$

- w1,、w2、w3分别是三个优化目标函数的权重系数；
- $S_{DP,t}$ 是对应Si的时刻，且基于DP得到的ST曲线的位置。

◆ 问题归结为：如何8段多项式曲线，使得在满足等式约束、不等式约束等前提下，代价函数值最小，可以转化为二次规划(Quadratic Programming)问题：

$$cost = \min \frac{1}{2}x^T Hx + f^T x$$

$$st\ LB \le x \le UB$$

$$A_{eq}x = B_{eq}$$

$$Ax \le B$$

- x是8段五次曲线的系数，维度为8×6=48;
- LB和UB为系数的上下限；维度为48;
- Aeq和Beq是等式约束矩阵，维度视等式个数确定；
- A、B是不等式约束矩阵，维度视不等式个数确定。

3 构造二次规划的代价函数

◆ 加速度项

$$acc_i^2 = \left(2a_{i,2} + 6a_{i,3}t + 12a_{i,4}t^2 + 20a_{i,5}t^3\right)^2$$

$$= \begin{bmatrix} a_{i,0} & a_{i,1} & a_{i,2} & a_{i,3} & a_{i,4} & a_{i,5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 6t \\ 12t^2 \\ 20t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 6t & 12t^2 & 20t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{i,0} \\ a_{i,1} \\ a_{i,2} \\ a_{i,3} \\ a_{i,4} \\ a_{i,5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{i,0} & a_{i,1} & a_{i,2} & a_{i,3} & a_{i,4} & a_{i,5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 12t & 24t^2 & 40t^3 \\ 0 & 0 & 12t & 36t^2 & 72t^3 & 120t^4 \\ 0 & 0 & 24t^2 & 72t^3 & 144t^4 & 240t^5 \\ 0 & 0 & 40t^3 & 120t^4 & 240t^5 & 400t^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{i,0} \\ a_{i,1} \\ a_{i,2} \\ a_{i,3} \\ a_{i,4} \\ a_{i,5} \end{bmatrix}$$

$$\int_0^1 acc_i^2 \mathrm{dt} = \begin{bmatrix} a_{i,0} & a_{i,1} & a_{i,2} & a_{i,3} & a_{i,4} & a_{i,5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4t & 6t^2 & 8t^3 & 10t^4 \\ 0 & 0 & 6t^2 & 12t^3 & 18t^4 & 24t^5 \\ 0 & 0 & 8t^3 & 18t^4 & \frac{144}{5}t^5 & 40t^6 \\ 0 & 0 & 10t^4 & 24t^5 & 40t^6 & \frac{400}{7}t^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{i,0} \\ a_{i,1} \\ a_{i,2} \\ a_{i,3} \\ a_{i,4} \\ a_{i,5} \end{bmatrix} = x^T H_1 x$$

Ally

◆ 加加速度项

$$jerk_i^2=\left(6a_{i,3}+24a_{i,4}t+60a_{i,5}t^2\right)^2$$

$$=\begin{bmatrix}a_{i,0} & a_{i,1} & a_{i,2} & a_{i,3} & a_{i,4} & a_{i,5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\6\\24t\\60t^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 6 & 24t & 60t^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{i,0}\\a_{i,1}\\a_{i,2}\\a_{i,3}\\a_{i,4}\\a_{i,5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{i,0} & a_{i,1} & a_{i,2} & a_{i,3} & a_{i,4} & a_{i,5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&36&144t&360t^2\\0&0&0&144t&576t^2&1440t^3\\0&0&0&360t^2&1440t^3&3600t^4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{i,0}\\a_{i,1}\\a_{i,2}\\a_{i,3}\\a_{i,4}\\a_{i,5}\end{bmatrix}$$

$$\int_0^1 jerk_i^2\mathrm{d}t=\begin{bmatrix}a_{i,0} & a_{i,1} & a_{i,2} & a_{i,3} & a_{i,4} & a_{i,5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&36t&72t^2&120t^3\\0&0&0&72t^2&192t^3&360t^4\\0&0&0&120t^3&360t^4&720t^5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{i,0}\\a_{i,1}\\a_{i,2}\\a_{i,3}\\a_{i,4}\\a_{i,5}\end{bmatrix}=x^TH_2x$$

3 构造二次规划的代价函数

Ally

- 与DP的ST曲线的误差项

去掉常数项

$$\left(s_{i,t}-s_{DP,t}\right)^2=s_{i,t}^2-2s_{i,t}s_{DP,t}+s_{DP,t}^2$$

$$\left(s_{i,t}-s_{DP,t}\right)^2=s_{i,t}^2-2s_{i,t}s_{DP,t}=\begin{bmatrix}a_{i,0} & a_{i,1} & a_{i,2} & a_{i,3} & a_{i,4} & a_{i,5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ t\\ t^2\\ t^3\\ t^4\\ t^5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & t & t^2 & t^3 & t^4 & t^5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{i,0}\\ a_{i,1}\\ a_{i,2}\\ a_{i,3}\\ a_{i,4}\\ a_{i,5}\end{bmatrix}-2s_{DP,t}\begin{bmatrix}1 & t & t^2 & t^3 & t^4 & t^5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{i,0}\\ a_{i,1}\\ a_{i,2}\\ a_{i,3}\\ a_{i,4}\\ a_{i,5}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a_{i,0} & a_{i,1} & a_{i,2} & a_{i,3} & a_{i,4} & a_{i,5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & t & t^2 & t^3 & t^4 & t^5\\ t & t^2 & t^3 & t^4 & t^5 & t^6\\ t^2 & t^3 & t^4 & t^5 & t^6 & t^7\\ t^3 & t^4 & t^5 & t^6 & t^7 & t^8\\ t^4 & t^5 & t^6 & t^7 & t^8 & t^9\\ t^5 & t^6 & t^7 & t^8 & t^9 & t^{10}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{i,0}\\ a_{i,1}\\ a_{i,2}\\ a_{i,3}\\ a_{i,4}\\ a_{i,5}\end{bmatrix}-2s_{DP,t}\begin{bmatrix}1 & t & t^2 & t^3 & t^4 & t^5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{i,0}\\ a_{i,1}\\ a_{i,2}\\ a_{i,3}\\ a_{i,4}\\ a_{i,5}\end{bmatrix}=x^TH_3x+f^Tx$$

4 构造二次规划的等式约束和不等式

Ally

◆ 邻接连接点的位置、速度、加速度等式约束

$$\begin{cases} s_i(t) = s_{i+1}(0) \\ v_i(t) = v_{i+1}(0) \\ acc_i(t) = acc_{i+1}(0) \end{cases}$$

◆ ST曲线起点:位置、速度、加速度约束

$$\begin{cases} s_1(0) = s_0 \\ v_1(0) = v_0 \\ acc_1(0) = acc_0 \end{cases}$$

◆ 位置、速度、加速度不等式约束

$$\begin{cases} s_i(t) \le s_{ub}, s_i(t) \ge s_{lb} \\ v_i(t) \le v_{ub}, v_i(t) \ge v_{lb} \\ acc_i(t) \le acc_{ub}, acc_i(t) \ge acc_{lb} \end{cases}$$

5 Matlab的二次规划求解器(quadprog)介绍

Ally

- Quadprog是matlab二次规划求解器，拥有较强的计算能力，且能支持代码生成。
- 常见的调用形式：x = quadprog(H,f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0,options)
- 其他注意事项:
  - 深刻理解ST曲线的平滑求解本质上就是求8段五次多项式曲线的系数，一共48个未知参数;
  - 在运用quadprog构造二次项半正定矩阵H时，需要将H的数值乘上2，以与求解器内部的1/2平衡;
  - “与DP的ST曲线的误差项”会产生一次项f矩阵，需要在对应的位置加上。