# 1.3 Weierstraß Normalform
# 1.4 Explizit Formulas for the Group Law

Luca Leon Happel

31 Mai 2021

# Erinnerung

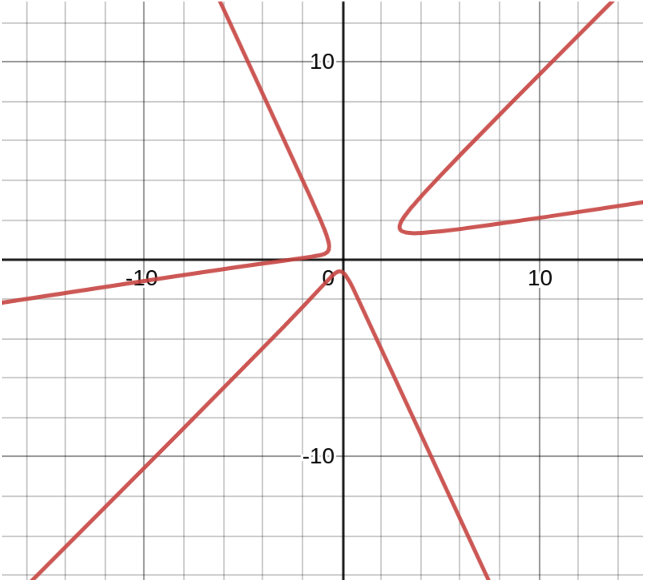
**Mordell's Theorem**
Wenn eine nicht singuläre rationale kubische Kurve in der Ebene einen rationalen Punkt hat, so ist die Gruppe der rationalen Punkte endlich erzeugt.
Möchten wir beweisen!

# vereinfachen

Um dies beweisen zu können, müssen wir unsere Ausgangssituation vereinfachen!

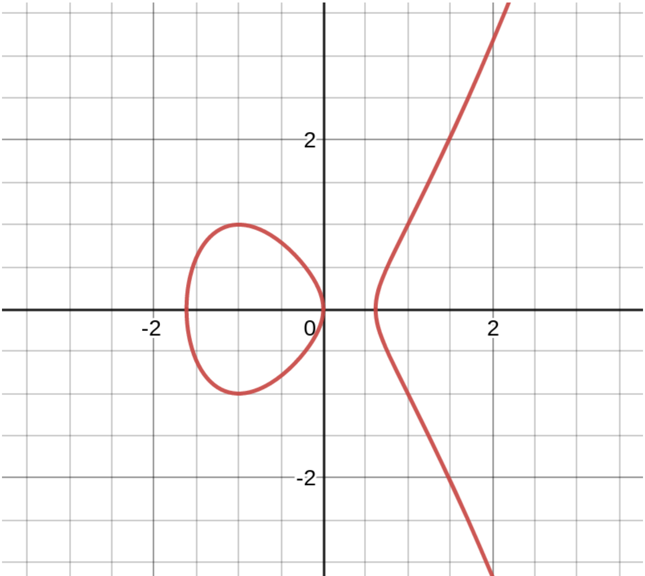
# Kubische Kurve

Figure: $C : ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + ex^2 + fxy + gy^2 + hx + iy + j = 0$



# allgemeine Weierstraß Normalform

Figure: $C : P = 0 \to C' : y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$



# Weierstraß Normalform

Es gibt die klassische Weierstraß Normalform

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$$

und die allgemeine Weierstraß Normalform

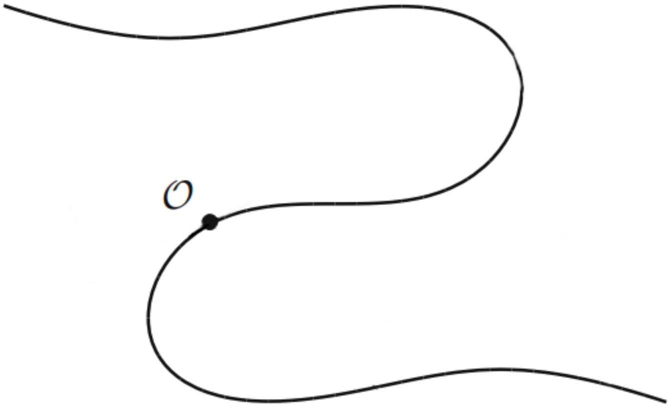
$$y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

wobei die Koeffizienten jeweils rational sind. Wir werden die allgemeine betrachten. Die WNF erlaubt uns, einfacher mit elliptischen Kurven umzugehen, da jede elliptische Kurve birational äquivalent zu einer WNF ist.

# Konstruktion der Weierstraß Normalform - Schritt 1

Sei $C$ eine kubische Kurve im Projektiven Raum mit $\mathcal{O}$, einem rationalen Punkt auf $C$. Verändere/wähle Achsen so, dass wir eine einfachere Form erhalten.

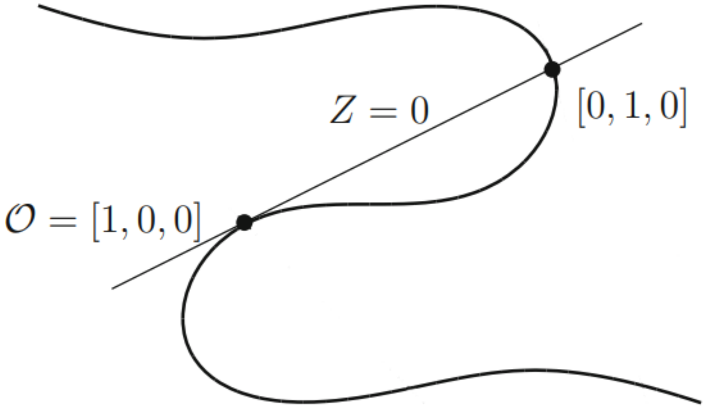
# Konstruktion der Weierstraß Normalform - Schritt 1



# Konstruktion der Weierstraß Normalform - Schritt 2

Wir nehmen die Tangente von $\mathcal{O}$ und verwenden sie als unser $Z = 0$, also unsere $Z$-Achse.

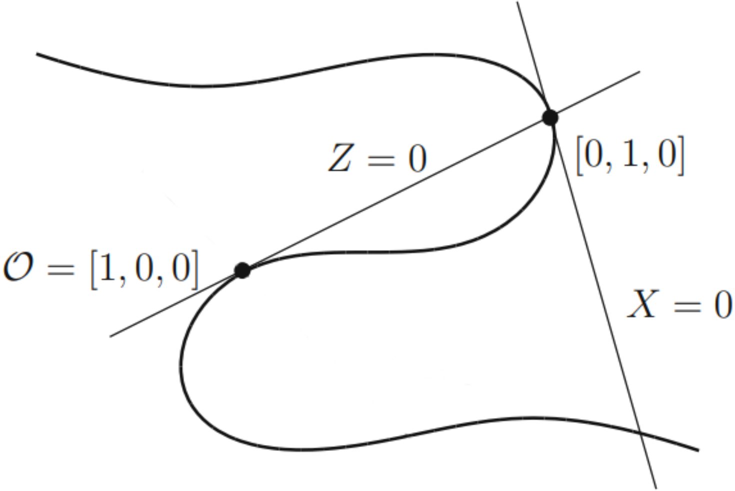
# Konstruktion der Weierstraß Normalform - Schritt 2



# Konstruktion der Weierstraß Normalform - Schritt 3

Diese Tangente schneidet die Kurve an einer weiteren Stelle $(0 : 1 : 0)$ und die Tangente an dieser Stelle wird unsere $X$-Achse. Wenn $\mathcal{O}$ ein Wendepunkt (point of inflection) ist, können wir eine beliebige Gerade wählen, welche nicht durch $\mathcal{O}$ geht.

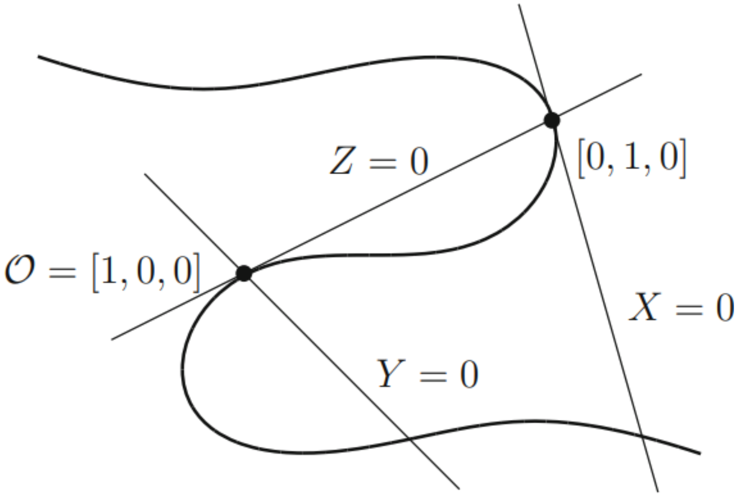
# Konstruktion der Weierstraß Normalform - Schritt 3



# Konstruktion der Weierstraß Normalform - Schritt 4

Zuletzt wählen wir noch eine beliebige Gerade, welche durch $\mathcal{O}$ geht als unsere $Y$-Achse

# Konstruktion der Weierstraß Normalform - Schritt 4



# Konstruktion der Weierstraß Normalform - Schritt 5

$$\underbrace{x = \frac{X}{Z}, \quad y = \frac{Y}{Z}}_{\text{Projektive Transformation}}$$

Neue Form der Gleichung:

$$xy^2 + (ax + b)y = cx^2 + dx + e$$

Auf beiden Seiten mit $x$ multiplizieren:

$$(xy)^2 + (ax + b)xy = cx^3 + dx^2 + ex$$

# Konstruktion der Weierstraß Normalform - Schritt 6

Benenne $xy$ in $y$ um:

$$y^2 + (ax + b)y = cx^3 + dx^2 + ex$$

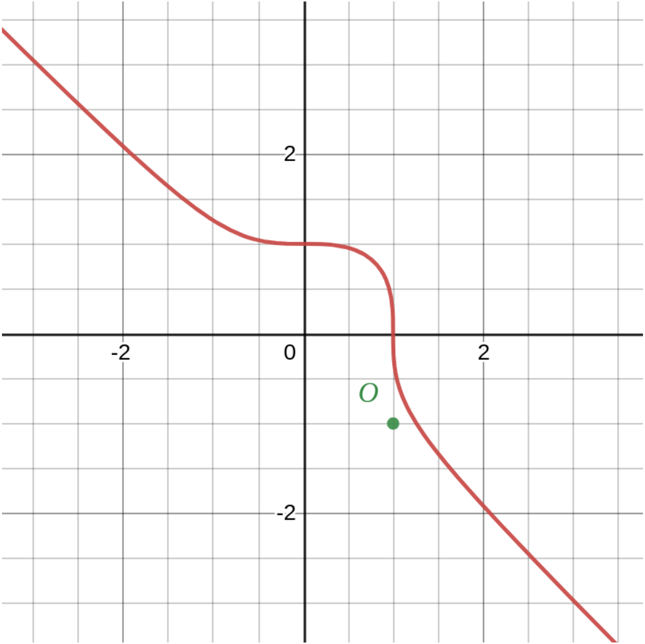
Benenne $\left(y - \frac{ax+b}{2}\right)$ in $y$ (lineare Transformation) um, was effektiv durch quadratische Ergänzung unser Resultat:

$$y^2 = \text{kubische Funktion in } x$$

# Beispiel

Betrachten wir das Beispiel $u^3 + v^3 = \alpha$ für $\alpha \in \mathbb{Q}$

# Beispiel



# Beispiel - Schritt 1

Zuerst projektivieren wir und erhalten $U^3 + V^3 = \alpha W^3$. Wir können leicht sehen, dass $\mathcal{O} = (1 : -1 : 0)$ eine Lösung ist. Weil $\mathcal{O}$ ein inflection point ist, können wir $X = 0$ fast frei wählen (wir dürfen die $X$-Achse nur nicht gleich der $Y$- oder der $Z$- Achse wählen). Schlussendlich erhalten wir

$$x = \frac{12\alpha}{u+v}, \quad y = 36\alpha\frac{u-v}{u+v}$$

# Beispiel - Schritt 2

Durch Umformungen erkennen wir, dass $x, y$ die Weierstraß Normalform $y^2 = x^3 - 432\alpha^2$ erfüllen. Explizit können wir dies nachprüfen, indem wir $u, v$ einsetzen und ausmultiplizieren. So erhalten wir

$$-\frac{1728\alpha^3}{(u+v)^3} + \frac{1296\alpha^2 (u-v)^2}{(u+v)^2} + 432\alpha^2$$

# Beispiel - Schritt 3

Ausmultiplizieren ergibt:

$$-\frac{1728\alpha^3}{u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3} + \frac{1296\alpha^2 u^2}{u^2 + 2uv + v^2}$$

$$-\frac{2592\alpha^2 uv}{u^2 + 2uv + v^2} + \frac{1296\alpha^2 v^2}{u^2 + 2uv + v^2} + 432\alpha^2$$

Wir können dies nun vereinfachen:

$$\frac{1728\alpha^2 \left(-\alpha + u^3 + v^3\right)}{u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3}$$

Wir sehen also, dass wenn $y^2 = x^3 - 432\alpha^2$ eine Lösung hat, so hat auch $u^3 + v^3 = \alpha$ eine Lösung.

# Beispiel - Schritt 4

Wir können den Prozess auch rückwärts gehen und $u, v$ durch $x, y$ darstellen, indem wir $u = \frac{36\alpha+y}{6x}$ und $v = \frac{36\alpha-y}{6x}$ verwenden.
Wenn wir rationale Lösungen für $y^2 = x^3 - 432\alpha^2$ haben, so haben wir auch rationale Lösungen für $u^3 + v^3 = \alpha$ und umgekehrt auch.
Es gibt nur endlich viele Ausnahmen (z.B. wenn $u = -v$) aber diese sind schnell zu finden.

# Theorem von Mordell(1922)

Sei $C$ eine nicht-singuläre kubische Kurve, dann gibt es eine endliche Menge von rationalen Punkten, so dass alle anderen rationalen Punkte duch wiederholtes Geraden ziehen und schneiden erhalten werden können.

# Existenz

Es gibt leider noch keine Methode die in endlich vielen Schritten feststellt, ob eine über $\mathbb{Q}$ definierte kubische Kurve $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ einen rationalen Punkt besitzt. Es gibt kein Analogon von Hasse's Therorem für kubische Kurven.

# Annahme

Um dieses schwierige Problem zu Umgehen werden wir von nun an annehmen das unsere kubische Kurve $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ einen rationalen Punkt hat, den wir $\mathcal{O}$ nennen.

# Verknüpfung II

Wenn wir zwei rationale Punkte auf einer über $\mathbb{Q}$ definierten kubischen Kurve $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ haben, sagen wir $P$ und $Q$. Dann sieht $*$ aus wie eine Verknüpfung auf der Menger aller rationalen Punkte auf $C$, die ein Paar $(P, Q)$ zum Punkt $P * Q$ schickt. Was für eine algebraische Struktur liefert uns diese Verknüpfung?

# Gruppe

Eine Gruppe? Leider nicht, da man leicht sieht, dass es kein neutrales Element gibt.
Aber durch ausprobieren, können wir die Menge der rationalen Punkte zu einer kommutativen Gruppe machen, wobei das neutrale Element gegeben ist durch $\mathcal{O}$.

# Addition

Die Addition dieser Gruppe ist gegeben durch

$$P + Q = \mathcal{O} * (P * Q) = Q + P$$

Müssen also nur noch verifizieren, dass die Addition den Gruppenaxiomen genügt.

# Neutrales Element

$$P + \mathcal{O} = P$$

# Inverse

$$Q + (-Q) = \mathcal{O}$$

# Assoziativ

$$(P + Q) + R = P + (Q + R)$$

um dies zu zeigen, reicht es zu zeigen, dass

$$(P + Q) * R = P * (Q + R)$$

# Assoziativ

# Assoziativ

Jeder der Punkte

$$\mathcal{O}, P, Q, R, P * Q, P + Q, Q * R, Q + R \quad (***)$$

liegt auf einer gestrichelten oder einer der durchgezogenen Geraden. Wenn der Schnittpunkt der gestrichelten Gerade durch $P + Q$ und $R$ und der durchgezogenen Gerade durch $P$ und $Q + R$ auf der kubischen Kurve liegt, haben wir gezeigt, dass

$$(P + Q) * R = P * (Q + R)$$

# Bezout's Theorem

Der Schnitt $X \cap Y$ von zwei allgemeinen Kurven $X, Y \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ von Grad $m, n \geq 1$ besteht aus mn Punkten. In unserem Fall also 9 Punkten

# Lemma

Wir wollen folgendes Lemma benutzen:

*Seien $C, C_1$ und $C_2$ kubische Kurven.Angenommen $C$ geht durch 8 der 9 Schnittpunkte von $C_1$ und $C_2$. Dann geht $C$ auch durch den 9. Schnittpunkt.*

# Beweis I

Um eine kubische Kurve $C$ zu definieren brauchen wir 10 Koeffizienten, wobei das multiplizieren dieser Koefizienten mit einer Einheit die gleiche Kurve liefert. Können uns also die Menge aller kubischen Kurve als 9-dimensional vorstellen. Wenn wir jetzt fordern, dass die kubischen Kurven durch einen gegebenen Punkt gehen, stellt dies eine lineare Bedingung an die Koeffizienten des kubischen Polynoms. Die Menge aller kubischen Kurve die durch einen gegebenen Punkt gehen ist also nur noch 8-dimensional. Induktiv erreichen wir, dass die Familie aller kubischen Kurven die durch die 8 Schnittpunkte $P_1, \ldots, P_8$ von $C_1$ und $C_2$ gehen 1-dimensional ist.

# Beweis II

Seien $F_1(x, y) = 0$ und $F_2(x, y) = 0$ die kubischen Gleichung von $C_1$ und $C_2$. Dann ist für jede Wahl von $\lambda_1$ und $\lambda_2$, die Linearkombination $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2$ ist eine kubische Kurve, die durch $P_1, \ldots, P_8$ geht. Da die Familie solcher kubischen Kurven 1-dimensional ist, muss $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2$ diese Familie sein. Insbesondere ist die kubische Kurve $C$ gegeben durch die Gleichung $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 = 0$ für geeignetes $\lambda_1$ und $\lambda_2$.

# Beweis III

Da $P_9$ auf $C_1$ und $C_2$ liegt, verschwinden $F_1(x, y)$ und $F_2(x, y)$ beide in $P_9$. Daraus folgt, dass auch $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2$ in $P_9$ verschwindet, also liegt $P_9$ auch in $C$.

# Assoziativ

Wir haben 9 Punkte, nämlich die genannten 8 Punkte und den Schnittpunkt der gestrichelten und durchgezogenen Gerade. Wir haben also zwei (degenerierte) kubische Kurven die durch 9 Punkte gehen, da eine Gerade durch eine lineare Gleichung gegeben ist und die Multiplikation von drei linearen Gleichungen eine kubische Gleichung ist. Die Lösungsmenge dieser ist einfach die Vereinigung der drei Geraden.

# Assoziativ

Sei $C_1$ die Vereinigung der drei gestrichelten Geraden und $C_2$ die Vereinigung der drei durchgezogenen Geraden. Per Konstruktion gehen die zwei kubischen Kurven durch die 9 Punkte. Die originale kubische Kurve $C$ geht durch die 8 Punkte gegeben in $(***)$ und somit nach Lemma auch durch den Neunten. Damit haben wir gezeigt

$$(P + Q) * R = P * (Q + R)$$

# Mordell's Theorem

Haben also folgende Umformulierung von Mordell's Theorem:

> Mordell's Theorem. *Wenn eine nicht-singuläre rationale kubische Kurve einen rationalen Punkt hat, dann ist die Gruppe der rationalen Punkte endlich erzeugt.*

Diese Version ist natürlich deutlich besser, da wir nun elementare Gruppentheorie benutzen können für den Beweis.

# Bemerkungen I

Die Wahl von $\mathcal{O}$ ist bei allen Betrachtungen nicht von Bedeutung. Wenn wir ein anderes $\mathcal{O}'$ als neutrales Element wählen, dann bekommen wir eine Gruppe mit der selben Struktur. Denn die Abbildung

$$P \to P + \mathcal{O}'$$

ist ein Isomorphismus von der Gruppe $(C, \mathcal{O}, +)$ zu der Gruppe $(C, \mathcal{O}', +')$, wobei die neue Addition gegeben ist durch

$$P +' Q = P + Q - \mathcal{O}'$$

# Bemerkungen II

Wenn die Gerade durch $P$ und $Q$ tangent zur Kurve in $P$ ist, dann muss der dritte Schnittpunkt, als $P$ interpretiert werden. Und wenn du die Tangente als Gerade durch $P$ und $P$ deutest, ist der dritte Schnittpunkt $Q$. Wenn $P$ ein Inflektionspunkt von $C$ ist, dann trifft die Tangente in $P$ die Kurve dreimal in $P$. In diesem Fall ist der dritte Schnittpunkt für die Gerade durch $P$ und $P$ wieder $P$. In anderen Worten, wenn $P$ ein Inflektionspunkt ist, dann $P * P = P$.