ADINIZ SOYADINIZ: NUMARANIZ:

Ankara Üniversitesi Bilgisayar Mühendisliği Bölümü
BLM-3067 17.11.2021
Algoritmalar Arasınav
Süre: 90 dakika

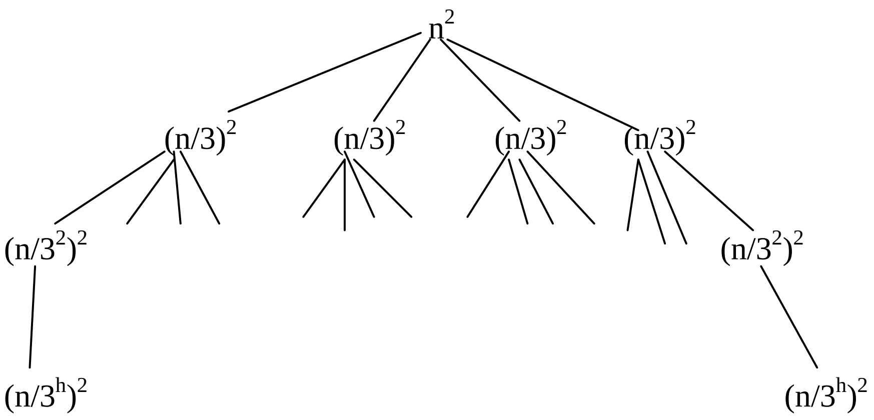
Soru 1. (20 puan) Aşağıdaki rekürensleri master teoremi yöntemiyle asimptotik olarak çözünüz: (T(1)=θ(1) dir)

a) $T(n)=5T(n/2)+n^2 lg^3 n$, n>1
b) $T(n)=9T(n/3)+n^2 lg\, n$, n>1
c) $T(n)=7T(n/3)+n^2$, n>1
d) $T(n)=4T(\sqrt{n})+lg^2 n$ n>1

Çözüm. a) a=5, b=2, $log_2 5>2$ master teoremin 1. Durumu var cevap $T(n)=\theta(n^{log_2 5})$
b)a=9 b=3 $log_3 9=2$ master teorem 2. Durum $T(n)=\theta(n^2 log^2 n)$
c)a=7, b=3 $log_3 7<2$ master teorem 3. Durum $T(n)=\theta(n^2)$
d)$n=2^k$ olsun. $T(2^k)=4T(2^{k/2})+k^2$ ve $S(k)=4S(k/2)+k^2$ master teoremden $S(k)=k^2 lgk$ buradan da $T(2^k)= k^2 lgk$ Yani $T(n)=lg^2 n lg(lgn)$

Soru 2. (20 puan) Aşağıdaki a), b) ve c) rekürenslerini özyinelemeli ağaç yöntemiyle çözünüz (Bu 3 rekürens için T(1)=1 dir)

a) $T(n)=4T(n/3)+n^2$, n>1



$h=log_3 n$

$T(n)=n^2+4(n/3)^2+4^2(n/3^2)^2+\ldots 4^h(n/3^h)^2=n^2+4(n/3)^2(1+4/9+\ldots(4/9)^{h-1})=$

$=n^2+4n^2/9[(1-4^h/9^h)(1-4/9)=n^2+4n^2/5.[1-n^{log_3 4}/n^2]=n^2+4n^2/5-4n^{log_3 4}/5=\theta(n^2)$

b) $T(n)=9T(n/2)+n^3$, n>1

n^3

$(n/2)^3$… … $(n/2)^3$

$(n/2^h)^3$… $(n/2^h)^3$

h=lgn

$T(n)=n^3+9(n/2)^3+\ldots 9^h(n/2^h)^3=n^3+9n^3/8(1+9/8+\ldots(9/8)^{h-1})=n^3+9n^3/8[(1-9^h/8^h)/(1-9/8)=$
$n^3-9n^3(1-n^{lg9}/n^3)=-8n^3+9n^{lg9}=\theta(n^{lg9})$

c) $T(n)=5T(n/5)+n$, n>1

Çözüm. Ağaçtaki tüm seviyelerde düğümler toplamı n olur, buna göre cevap $T(n)=\theta(nlgn)$ olur

d) $T(n)=T(4n/5)+T(n/5)+n$, n>2 rekürensini yerine koyma yöntemi ile çözünüz. (Tahmin olarak $T(n)=O(nlgn)$ kullanınız) (Bu rekürens için $T(2)=1$ verilmiştir)

Çözüm. $T(n)<=cnlgn$ her $n>=n_0$ olacak biçimde c>0 ve n_0 sabitlerinin var olduğunu ispatlayalım.
n=2 için $T(2)<=2clg2$ buradan da $1<=2c$ yani her $c>=1/2$ için sağlanır.
Her $1<=k<n$ için doğru olsun.
Özel durumda $T(4n/5)<=c.4n/5.lg(4n/5)$
$T(n/5)<=cn/5.lg(n/5)$

Buradan da $T(n)=T(4n/5)+T(n/5)+n<= c.4n/5.lg(4n/5)+cn/5.lg(n/5)+n<=c4n/5.lgn+cn/5.lgn+n-c.4n/5lg5-cn/5lg5<=cnlgn$ olması için
$n<=cnlg5$ olmalıdır yani $c>=1/lg5$ için doğrudur.

Soru 3. Aşağıda sözde kodu verilen algoritmanın girişi n elemanlı bir A pozitf tam sayılar dizisi ve n pozitif tam sayısıdır.

```
Algoritma (A, n)
   S←0
   for i←1 to n
       for j←1 to n
           S←S+A[i]*A[j]
   return S
```

a) **(5 puan)** Bu algoritmanın işlem süresini n cinsinden θ kavramı ile ifade ediniz.
b) **(15 puan)** Bu algoritma ile aynı sonucu veren ve θ(n) işlem zamanında çalışan bir algoritmanın sözde kodunu yazınız.

Çözüm. a) iki tane iç içe for döngüsü vardır $\theta(n^2)$
b)bu algoritma $(A(1)+A(2)+\ldots+A(n))^2$ yi buluyor. Aşağıdaki kod aynı sonucu verir

```
Algoritma (A, n)
   S←0
   for i←1 to n
         S←S+A[i]
   return S*S
```

Soru 4. (20 puan) 17, 23, 36, 11, 10, 9, 20, 5, 15, 12 dizisine dizinin son elemanını (12 yi) pivot seçerek Quicksort algoritmasının Partition fonksiyonunu adım adım uygulayınız.

Çözüm.
17,23,36,11,10,9,20,5,15,12
11,23,36,17,10,9,20,5,15,12
11,10,36,17,23,9,20,5,15,12
11,10,9,17,23,36,20,5,15,12
11,10,9,5,23,36,20,17,15,12
11,10,9,5,23,12,20,17,15,36

Soru 5. (**20 puan)** 2n elemanlı A dizisinin elemanları aşağıdaki gibidir:
$a_1, a_2, \ldots a_n, b_1, b_2\ldots b_n$
Burada n sayısı 2 nin bir kuvvetidir.
A dizisi dışında başka bir dizi kullanmadan bu diziyi $a_1, b_1, a_2, b_2,\ldots a_n, b_n$ dizisine dönüştüren, böl-yönet yöntemi ile tasarlanmış ve O(n log n) işlem zamanında çalışabilen bir algoritma tasarlayınız ve sözde kodunu yazınız.

Çözüm. Özyinemeli olarak diziyi 2 ye bölüyoruz (2 eleman kalana kadar) ve sol parçanın ikinci yarısı ile sağ parçanın ilk yarısının yerlerini değiştiriyoruz.

Örnek A dizisi böyle olsun 1,2,3,4,5,6,7,8

1,2,3,4 ve 5,6,7,8
1,2,5,6 3,4,7,8
1,2 ve 5,6 3,4 ve 7, 8
1,5 2,6 3,7 4,8

```
Dizi_karma(A,left,right)
 if (left > right)then return
 if (right - left = 1)then return
 mid1 = (left + right) / 2  // tam sayılarda bölme yapılıyor
 temp = mid1 + 1
 mid2 = (left + mid1) / 2   // tam sayıalrda bölme yapılıyor
```

```
    for i = mid2 + 1 to mid1
        A[i]↔A[temp]
        temp+1
    Dizi_karma(A, left, mid1)
    Dizi_karma(A, mid1+1, right)
```

İlk çağrı Dizi_karma(A,1,2n)

```
Mid1=(1+8)/2=4
Temp=5
Mid2=(1+4)/2=2
i=3,4 A[3] ile A[5]  1,2,5,4,3,6,7,8
i=4   A[4] ile A[6]  1,2,5,6,3,4,7,8
1,2,5,6                  3,4,7,8
Mid1=(1+4)/2=2           mid1=(5+8)/2=6
Temp=3                   temp=7
Mid2=(1+2)/2=1           mid2=(5+6)/2=5
For i=2 to 2             for i=6 to 6
2 ile 5                  4 ile 7
1,5,2,6                  3,7,4,8
1,5   2,6                3,7   4,8
Ama indexler farkı 1 dir durur.
```