Studienarbeit: Pfadoptimierung für 2D/3D-Laser-Displays

Aleksandr Mattal

Institut für Informatik

Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

Betreuung: Dr. habil. Christian Perwass,
Prof. Dr.-Ing. Reinhard Koch

Sommersemester 2010

Abstract

Die Firma Raytrix entwickelt professionelle Laser-Displays, sowohl für den Einsatz in der Industrie als auch für Anwendungen im Entertainment-Bereich. Im Gegensatz zu konventionellen Monitoren, die als Raster-Scanner arbeiten, stellen Laser-Displays 2D-und 3D-Grafiken im Vektor-Scanning-Verfahren dar. Dieses Verfahren wird durch eine mechanische Spiegel-Galvanometer-Ablenkeinheit realisiert, deren Limitierung die physikalische Massenträgheit darstellt. Dieses Problem soll in dieser Arbeit durch verschiedene Ansätze von Interpolationen (PH-Kurven) und Pfadoptimierungen gelöst werden. Das Projekt findet in Kooperation mit der Firma Raytrix in Kiel statt und hat direkten Bezug zur praktischen Anwendung.

Contents

1

Einführung

1.1 Problemdarstellung

Man bekommt ein Bild, das man mittels Laser-Displays anzeigen müsste. Das Bild wird durch eine Menge von Punkten dargestellt, die das Laser-Display mit einem Laser durchlaufen soll. Damit muss der Laser jedes Mal alle Punkte im Bild durchlaufen, um das Bild zu zeigen. In diesem Szenarium hat man 2 Hauptprobleme:

(1) Erstens, wenn es zu viele Punkte im Bild gibt, die der Laser durchlaufen soll, zittert das gezeigte Bild. Dies kommt davon, dass das Zeichnen des Bildes viel Zeit in Anspruch nimmt, weil der gesamte Pfad, der durch alle Punkte läuft, zu lang ist. Wenn man den Pfad optimieren (d.h. kürzer machen) könnte, wird das Bild schneller angezeigt und damit könnte das Zittern vermieden werden. Anderseits, wenn die Bilder viele Punkte enthalten, wird der gesamte Pfad fast immer lang sein, auch wenn er optimal ist. Deswegen ist dieses Problem nicht so interessant. Viel interessanter ist ein anderes Problem:

(2) Die Laser sind physikalisch begrenzt im Sinne, dass wenn man mit dem Laser einen Pfad mit zu vielen und ofttreffenden scharfen Ecken durchläuft, muss der Laser seine Geschwindigkeit sehr oft ändern. Dadurch kann der Laser kaputt gehen. Um dies zu vermeiden, hat man folgendes Problem zu lösen: Man sollte den gesamten Pfad, der durch alle Bildpunkte durchgeht, so ausrechnen, dass die Beschleunigung der Kurve möglicherweise ohne viele grosse Schwankungen wäre (die genau diese Ecken im Pfad darstellen und den Laser kaputt machen können). Mit anderen Worten, die Länge der Beschleunigungskurve sollte minimiert werden. Genau dieses Problem habe ich versucht

während der Studienarbeit zu lösen. Da das Anzeigen von verschiedenen Bildern öfters in Echtzeit gemacht wird (z.B. bei Videosequensen), sollte das Optimierungsverfahren auch möglichst schnell sein.

Dafür wurde eine spezielle Anwendung benutzt, nämlich Pythagoräische Hodographen (PH). Man kann sehr schnell die Länge der mit PH konstruierten Kurven (PH-Kurven) ausrechnen. Damit, wenn PH beim Lösen unseres Problems anwendbar wären, würde das Verfahren effizient sein.

Das Ziel meiner Studienarbeit war, mich in das Thema Pythagoräischer Hodographen einzuarbeiten und diese später an dem Hauptproblem anzuwenden.

1.2 Danksagung

Ich würde sehr gerne Prof. Dr.-Ing. Reinhard Koch für die gegebene Möglichkeit bedanken, diese Studienarbeit zu machen. Und besonders bin ich meinem Betreuer Dr. habil. Christian Perwass dankbar, für die Diskussionen meiner Ideen, Kritik und für die Unterstützung während der Studienarbeit.

1.3 Der vorausgesetzte Plan

+ ***LaTex*** *bedeutet, dass der Punkt im LaTex protokolliert wird.*

Mai *(Einführung)*

1) Anschauen des Themas

2) Einarbeitung Geometrische Algebra

3) Einarbeitung Pythagorische Hodografen

4) Einarbeitung Pythagorische Hodografen + LaTex

Hier geht es darum, sich allgemein mit Hilfe bestimmter Literatur (1) (2) in den Bereich geometrischer Algebra einzuarbeiten und entsprechenden Grundlagen anzuwenden, um Pythagorische Hodographen zu definieren und zu zeigen, wofür die nützlich und effizient sind. Das gesamte soll im LaTex protokolliert werden.

Juni *(Pythagorischen Hodographen, Anwendung)*

5) Anwendung Pythagorische Hodografen an dem Hauptproblem + LaTex

Hier wird, basiert auf dem Hauptproblem, die Problemstellung für Pythagorischen Hodographen (PH) formuliert und mittels PH gelöst. Hier entwickelt man eine Herleitung fr nicht standard PH-Kurven (genauer, fr die Kurven, bei denen die 2. Ableitung die pythagorische Bedingung erfllt).

6) Minimierung des Integrals der Beschleunigung der Kurve + LaTex

Hier findet man freie Parameter in PH in der Lösung vom Punkt (5), die man variieren kann und versucht damit bestimmten Wert zu minimieren (nähmlich, die Länge der Ableitung der Kurve).

Juli *(Ergebnisse + Prasentation)*

7) Visualisierung der in Punkten (5) und (6) bekommenen Ergebnisse

8) Endbearbeitung im LaTex, Präsentation der gesamten Ergebnisse

2

Pythagoräische Hodographen (PH): Einführung

Weiter werden alle vektorwertigen Funktionen und deren Werte fettgedruckt dargestellt (Bespiel: $\mathbf{f} : R \to R^3$ oder $\mathbf{f(3)}$). Feste Vektoren werden normal mit dem Pfeil dargestellt (Beispiel: $\vec{a_0}$).

Alle Ausrechnungen, die präsentiert werden, wurden im MATLAB gemacht.

2.1 Problemdarstellung

Es seien folgende 4 Vektoren gegeben:

$$\vec{p_0}, \vec{p_2}, \vec{d_0}, \vec{d_2} \in R^3.$$

Sei $\mathbf{r} : R \to R^3$ eine Funktion, die folgende Gleichungen erfüllen sollte:

$$\mathbf{r(0)} = \vec{p_0}, \mathbf{r(1)} = \vec{p_2},$$

$$\mathbf{r}'(\mathbf{0}) = \vec{d_0}, \mathbf{r}'(\mathbf{1}) = \vec{d_2}.$$

Die Aufgabe ist, $\mathbf{r}$ so zu konstruieren, dass die Länge der Kurve, die diese Funktion beschreibt ($\int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{r}'(\mathbf{t})\| \, dt$), schnell berechenbar wäre. Wir versuchen es mittels Pythagoräischen Hodographen (PH) zu machen. Ferner seien $f_0, f_1, f_2 : R \to R$ Basisfunktionen, die wir später für die Darstellung von PH benutzen werden.

2.2 Spiegelungen (Reflections)

Die Hauptidee der Lösung mit PH-Kurven, ist die Werte der Ableitungsfunktion $\mathbf{r'(t)}$ als eine Spiegelung eines unitären Vektors darzustellen (1). Später (siehe **2.3**) werden wir auch zeigen, warum diese Darstellung so vorteilhaft ist. Aber erstmal zu Spiegelungen (orig.- *Reflections*).

Seien $\vec{x}, \vec{y} \in R^3$. Es existiert ein Vektor $\vec{a} \in R^3$ so, dass wenn man $\vec{x}$ durch $\vec{a}$ spiegelt, man den Vektor $\vec{y}$ kriegt. $\vec{a}$ ist folgend definiert:

$$\vec{a} := ref(\vec{x}, \vec{y}) := \sqrt{\frac{\|\vec{y}\|}{\|\vec{x}\|}} \frac{\hat{x} + \hat{y}}{\|\hat{x} + \hat{y}\|},$$

wobei $\hat{x}, \hat{y}$ die normierte Vektoren $\vec{x}, \vec{y}$ sind.

2.3 PH-Kurven, PH-Vorteil

Pythagoräische Hodographen ist ein umfangreiches Feld in Algebra und da wir die PH nicht direkt benutzen, werden wir die hier auch nicht definieren, sonst müssten wir eine Einführung in Clifford Algebras machen. Für die Zwecke dieser Arbeit reicht es zu sagen, dass PH-Kurven dijenigen Kurven sind, die sich auf PH aufbauen. Sei $\mathbf{a} : R \to R^3$ und $\hat{n}$ ein unitärer Vektor. Dann sind alle Kurven $\mathbf{k} : R \to R^3, t \mapsto \mathbf{a(t)}\hat{n}\mathbf{a(t)}$, die als Spiegelungen definiert sind, PH-Kurven. Generell sind die PH-Kurven viel allgemeiner definiert, aber in unserer Arbeit wir benutzen nur PH-Kurven dieser Art.

Jetzt zeigen wir die Hauptvorteil der Pythagoräischen Hodographen und PH-Kurven: Dafür benutzt man die Eigenschaft, dass bei zwei kollinearen Vektoren $\vec{u}, \vec{v} \in V$ (wobei V ein Vektorraum ist) folgendes gilt: $\vec{u} \wedge \vec{v} = 0$ und somit auch für belibigen Vektor $\vec{v} \in V$:

(a) $\vec{v}\vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{v} \wedge \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{v}$, was ein skalar ist.

Wir stellen die Ableitung der Kurve $\mathbf{r(t)}$ als folgende Spiegelung dar: $\mathbf{r'(t)} = \mathbf{a(t)}\hat{n}\mathbf{a(t)}$, wobei $\mathbf{a(t)}$ ein Vektor und $\hat{n}$ ein unitärer Vektor ist.

(b) Dann gilt :

$$(\mathbf{r'(t)})^2 = (\mathbf{a(t)}\hat{n}\mathbf{a(t)})^2 =$$

$$(\mathbf{a(t)}\hat{n}\mathbf{a(t)})(\mathbf{a(t)}\hat{n}\mathbf{a(t)}) =$$

$$\mathbf{a(t)}\hat{n}(\mathbf{a(t)a(t)})\hat{n}\mathbf{a(t)} =^{(a)}$$

$$(\mathbf{a(t)})^2(\mathbf{a(t)}(\hat{n}\hat{n})\mathbf{a(t)}) =^{(a)}$$

$$(\mathbf{a(t)})^2 1(\mathbf{a(t)a(t)}) =^{(a)} (\mathbf{a(t)})^4.$$

Dann ist auch die Länge der Kurve $\mathbf{r(t)}$ folgenderweise einfach zu berechnen:

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{r}'(\mathbf{t})\| \, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(\mathbf{r}'(\mathbf{t}))^2} dt =^{(b)} \int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{a(t)})^2 dt.$$

2.4 Pre-Image

Jetzt ist nur die Frage, wie man die Funktion $\mathbf{a}$ darstellt. $\mathbf{r}'$ ist von nur 3 Eingabeparameter abhängig: $\vec{d_0}, \vec{d_2}$ und $\vec{\Delta p} := \vec{p_2} - \vec{p_0}$. Der letzte Parameter ist so ausgewählt, weil wenn man $\vec{p_0}$ und $\vec{p_2}$ um eine gleiche Konstante bewegt, wird $\mathbf{r}'(\mathbf{t})$ sich davon nicht ändern (d.h. wenn wir $\vec{d_0}, \vec{d_2}$ fest halten, ändert sich $\mathbf{r}'$ nur dann, wenn $\vec{\Delta p}$ sich ändert):

Erstens, als Basisfunktione nehmen wir Bernsteinpolynome 2.Grades:

$$f_0(t) := (1-t)^2, f_1(t) := 2(1-t)t, f_2(t) := t^2,$$

Dann stellt man a durch diese Basisfunktione dar:

$$\mathbf{a(t)} = f_0(t)\vec{a_0} + f_1(t)\vec{a_1} + f_2(t)\vec{a_2}$$

Hierbei sind f_i's die Basisfunktionen (in diesem Fall so, wie in Problemstellung definiert) und $\vec{a_i}$'s - Vektoren aus R^3. Dann sind die $\vec{a_0}$ und $\vec{a_2}$ einfach auszurechnen:

$$\vec{d_0} = \mathbf{r}'(\mathbf{0}) = \mathbf{a(0)}\hat{n}\mathbf{a(0)} =$$

$$(\sum_{i=0}^{2} f_i(0)\vec{a_i})\hat{n}(\sum_{j=0}^{2} f_j(0)\vec{a_j})$$

und da $f_1(0) = 0 = f_2(0)$ gilt, ist es auch gleich

$$(f_0(0)\vec{a_0})\hat{n}(f_0(0)\vec{a_0}) =^{f_0(0)=1} \vec{a_0}\hat{n}\vec{a_0},$$

$$\vec{a_0} = ref(\hat{n}, \vec{d_0}).$$

Analog ist auch $\vec{d_2} = \mathbf{r}'(\mathbf{1}) = \vec{a_2}\hat{n}\vec{a_2}$ und

$$\vec{a_2} = ref(\hat{n}, \vec{d_2}).$$

2.5 Der Trick

$\vec{a_0}$ und $\vec{a_2}$ haben wir ausgerechnet, f_i sind auch fest. Das einzige, was noch unbekannt bleibt, ist $\vec{a_1}$. Dafür benutzt man folgenden Trick:

Ferner seien

$$\vec{r_{ij}} := \vec{a_i}\hat{n}\vec{a_j}$$

$$\forall i, j \in [2] : f_{ij}(t) := f_i(t)f_j(t), F_{ij} := \int_0^1 f_{ij}(t)dt.$$

Dann ist

$$\vec{\Delta p} = \vec{p_2} - \vec{p_0} = \mathbf{r(1)} - \mathbf{r(0)} =$$

$$\int_0^1 \mathbf{r'(t)}dt = \int_0^1 \mathbf{a(t)}\hat{n}\mathbf{a(t)}dt =$$

$$\int_0^1 ((\sum_{i=0}^2 f_i(t)\vec{a_i})\hat{n}(\sum_{j=0}^2 f_j(t)\vec{a_j}))dt =$$

$$\int_0^1 \sum_{i,j} f_{ij}(t)\vec{r_{ij}}dt =$$

$$\sum_{i,j}((\int_0^1 f_{ij}(t)dt)\vec{r_{ij}}) = \sum_{i,j} F_{ij}\vec{r_{ij}}.$$

(2.5.1) Jetzt sei $\vec{v} := \sum_{i=0}^2 v_i\vec{a_i} \in R^3, v_i \in R$ ein Vektor (ferner sei $v_{ij} := v_iv_j$). Dann beschreibe die Spiegelung von $\hat{n}$ durch $\vec{v}$:

$$\vec{u} = \vec{v}\hat{n}\vec{v} = \sum_{i,j} v_{ij}\vec{r_{ij}} = \sum_{i,j}(v_{ij} - F_{ij})\vec{r_{ij}} + \sum_{i,j} F_{ij}\vec{r_{ij}}.$$

Der zweite Summand entspricht $\vec{\Delta p}$ und wenn man den ersten Summand unabhängig von $\vec{a_1}$ machen könnte (**(2.5.2)** $i = 1$ oder $j = 1 \Rightarrow v_{ij} = F_{ij}$ und somit $v_{ij} - F_{ij} = 0$), dann könnte man mittels $\vec{a_0}, \vec{a_2}, \vec{\Delta p}$ den Vektor $\vec{u}$ ausrechnen. Dann wäre $\vec{v} = ref(\hat{n}, \vec{u})$ und wegen der Darstellung von $\vec{v}$ im (2.5.1), könnte man **(2.5.3)** durch $\vec{a_1} = \frac{\vec{v} - v_0\vec{a_0} - v_2\vec{a_2}}{v_1}$ den unbekannten Vektor $\vec{a_1}$ ausrechnen. Erstens aber, wenn man den (2.5.2) folgt, muss man die v_0, v_1, v_2 ausrechnen **(2.5.4)**:

$$i = 1 \vee j = 1 \Rightarrow v_{ij} = F_{ij}$$

$$v_0 = \frac{v_0v_1}{v_1} = \frac{v_0v_1}{\sqrt{v_1v_1}} = \frac{v_{01}}{\sqrt{v_{11}}} =^{(2.5.2)} \frac{F_{01}}{\sqrt{F_{11}}},$$

$$v_1 = \sqrt{v_1 v_1} = \sqrt{v_{11}} =^{(2.5.2)} \sqrt{F_{11}},$$
$$v_2 = \frac{v_2 v_1}{v_1} = \frac{v_1 v_2}{\sqrt{v_1 v_1}} = \frac{v_{12}}{\sqrt{v_{11}}} =^{(2.5.2)} \frac{F_{12}}{\sqrt{F_{11}}},$$

wobei mit unseren Auswahl der Basisfunktionen gilt **(2.5.5)**:

$$F_{11} = \int_0^1 ((2(1-t)t)^2)dt = \int_0^1 (4t^4 - 8t^3 + 4t^2)dt =$$
$$_0^1|(\frac{4}{5}t^5 - 2t^4 + \frac{4}{3}t^3) = \frac{4}{5} - 2 + \frac{4}{3} = \frac{2}{15}.$$
$$F_{01} = \int_0^1 ((1-t)^3 2t)dt = \int_0^1 (-2t^4 + 6t^3 - 6t^2 + 2t)dt =$$
$$_0^1|(-\frac{2}{5}t^5 + \frac{3}{2}t^4 - 2t^3 + t^2) = -\frac{2}{5} + \frac{3}{2} - 2 + 1 = \frac{1}{10}.$$
$$F_{12} = \int_0^1 (2(1-t)t^3)dt = \int_0^1 (-2t^4 + 2t^3)dt =$$
$$_0^1|(-\frac{2}{5}t^5 + \frac{1}{2}t^4) = -\frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{1}{10}.$$

Aus (2.5.4) und (2.5.5) folgt:

$$v_0 = \sqrt{\frac{3}{40}}, v_1 = \sqrt{\frac{2}{15}}, v_2 = \sqrt{\frac{3}{40}}.$$

Jetzt, wie schon besprochen, rechnet man $\vec{u}$ aus, dann $\vec{v}$ und nach (2.5.3) rechnet man $\vec{a_1}$ aus.

3

Pythagoräische Hodographen (PH): Anwendung

3.1 Problemdarstellung

Es seien folgende 6 Vektoren gegeben:

$$\vec{d_0}, \vec{d_0'}, \vec{d_0''}, \vec{d_2}, \vec{d_2'}, \vec{d_2''} \in R^3.$$

Sei $\mathbf{r} : R \to R^3$ eine Funktion, die folgende Gleichungen erfüllen sollte:

$$\mathbf{r(0)} = \vec{d_0}, \mathbf{r(1)} = \vec{d_2},$$

$$\mathbf{r'(0)} = \vec{d_0'}, \mathbf{r'(1)} = \vec{d_2'},$$

$$\mathbf{r''(0)} = \vec{d_0''}, \mathbf{r''(1)} = \vec{d_2''}.$$

Die Aufgabe ist, $\mathbf{r}$ so zu konstruieren, dass die Beschleunigung der Kurve $(\int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{r''(t)}\| \, dt)$, als pythagoräische Hodograph dargestellt würde. Wir werden es ähnlich machen, wie im ersten Abschnitt über pythagoräischen Hodographen. Da wir aber anstatt 4, 6 Angabewerte bekommen und da jetzt die zweite Ableitung $\mathbf{r''(t)}$ anstatt $\mathbf{r'(t)}$ als pythagoräische Hodograph dargestellt wird, müssen wir die Funktionen, die wir beim ersten Ansatz angewendet haben, ein bisschen ändern:

Ferner seien $f_0, f_1, f_2, f_3 : R \to R$ Bernsteinpolynome 3. Ordnung:

$$f_0(t) = (1-t)^3, f_1(t) = 3(1-t)^2 t, f_2(t) = 3(1-t)t^2, f_3(t) = t^3.$$

$\mathbf{a}$ wird analog wie im Kapitel 2 dargestellt:

$$\mathbf{a(t)} = f_0(t)\vec{a_0} + f_1(t)\vec{a_1} + f_2(t)\vec{a_2} + f_3(t)\vec{a_3}$$

Dann sind die $\vec{a_0}$ und $\vec{a_3}$ wieder einfach auszurechnen:

$$\vec{a_0} = ref(\hat{n}, \vec{d_0'}).$$

$$\vec{a_3} = ref(\hat{n}, \vec{d_3'}).$$

3.2 Der Trick - Erste Ansätze

Jetzt bleiben 2 Vektoren $\vec{a_1}$ und $\vec{a_2}$ (anstatt nur $\vec{a_1}$, wie früher) unbekannt. Damit kann man nicht mehr den Trick so benutzen, wie wir das früher gemacht haben. Seien $\vec{\Delta r'} := \mathbf{r'(1)} - \mathbf{r'(0)}, \vec{\Delta r} := \mathbf{r(1)} - \mathbf{r(0)}$. Früher hatten wir die Werte $\mathbf{r'(0)}, \mathbf{r'(1)}, \vec{\Delta r}$ benutzt. Da es jetzt 2 Werte mehr gibt und die als pyth. Hodograph dargestellte Funktion $\mathbf{r''(t)}$ ist, sollten wir die Werte $\mathbf{r''(0)}, \mathbf{r''(1)}, \vec{\Delta r'}, \vec{\Delta r}$ benutzen.

(a) Man könnte auf die Idee kommen, 4 Eingabewerte $\vec{d_0'}, \vec{d_2'}, \vec{d_0''}, \vec{d_2''}$ zu benutzen, um das Problem wie früher zu lösen und dann versuchen, die $\vec{d_0}$ und $\vec{d_2}$ ins Spiel reinzubringen. Dann ist aber absolut unklar, ob $\mathbf{r''(t)}$ von der Darstellung $\mathbf{a(t)}\hat{n}\mathbf{a(t)}$ bleibt.

(b) Versuche die Matrix V, die jetzt die Grösse 4×4 anstatt 3×3 hat, wieder von v_1, v_2 unabhängig zu machen. Dann kommt man nach kurzem Ausrechnen zum widerspruch:

$$v_0 = \frac{F_{01}}{\sqrt{F_{11}}} =^{F_{11}=F_{22}} \frac{F_{01}}{\sqrt{F_{22}}} \neq \frac{F_{02}}{\sqrt{F_{22}}} = v_0.$$

(c) Man könnte sich auch andere Basisfunktionen anstatt Bernsteinpolynome überlegen. Diesen Versuch haben wir auch erstmal gelassen.

(d) Eine der Ideen war auch, $\vec{\Delta r}$ ähnlich wie $\vec{\Delta r'}$, durch doppelte Integralen der Basisfunktionen zu interpretieren und dadurch die Matrix V doch unabhängig von v_1 und v_2 machen. Wie genau man dies tut, zeigen wir im nächsten Abschnitt.

3.3 Der Trick - Weiterer Ansatz

Ferner für alle $i, j \in [3]$ definiere

$$\vec{r_{ij}} := \vec{a_i}\hat{n}\vec{a_j}$$

$$f_{ij}(t) := f_i(t)f_j(t),$$

$$F_{ij} := \int_0^1 f_{ij}(t)dt,$$

$$G_{ij} := \int_0^1 (\int_0^t f_{ij}(s)ds)dt.$$

Jetzt definieren wir $\vec{\Delta r'}$:

$$\vec{\Delta r'} := \mathbf{r}'(\mathbf{1}) - \mathbf{r}'(\mathbf{0}) =$$

$$\int_0^1 \mathbf{r}''(\mathbf{t})dt = \int_0^1 \mathbf{a}(\mathbf{t})\hat{n}\mathbf{a}(\mathbf{t})dt =$$

$$\int_0^1 ((\sum_{i=0}^{3} f_i(t)\vec{a_i})\hat{n}(\sum_{j=0}^{3} f_j(t)\vec{a_j}))dt =$$

$$\int_0^1 \sum_{i,j} f_{ij}(t)\vec{r_{ij}}dt =$$

$$\sum_{i,j}((\int_0^1 f_{ij}(t)dt)\vec{r_{ij}}) = \sum_{i,j} F_{ij}\vec{r_{ij}}.$$

und $\vec{\Delta r}$:

$$\vec{\Delta r} := \mathbf{r}(\mathbf{1}) - \mathbf{r}(\mathbf{0}) =$$

$$\int_0^1 \mathbf{r}'(\mathbf{t})dt = \int_0^1 (\int_0^t \mathbf{r}''(\mathbf{s})ds + \mathbf{r}'(\mathbf{0}))dt =$$

$$\int_0^1 (\int_0^t \mathbf{a}(\mathbf{s})\hat{n}\mathbf{a}(\mathbf{s})ds + \mathbf{r}'(\mathbf{0}))dt =$$

$$\int_0^1 (\int_0^t ((\sum_{i=0}^{3} f_i(s)\vec{a_i})\hat{n}(\sum_{j=0}^{3} f_j(s)\vec{a_j}))ds + \mathbf{r}'(\mathbf{0}))dt =$$

$$\int_0^1 (\sum_{i,j}((\int_0^t f_{ij}(s)ds)\vec{r_{ij}}) + \mathbf{r}'(\mathbf{0}))dt =$$

$$\int_0^1 (\sum_{i,j}((\int_0^t f_{ij}(s)ds)\vec{r_{ij}}))dt + \int_0^1 (\mathbf{r}'(\mathbf{0}))dt =$$

$$\sum_{i,j}((\int_0^1 (\int_0^t f_{ij}(s)ds)dt)\vec{r_{ij}}) + \mathbf{r}'(\mathbf{0}) =$$

$$\sum_{i,j} G_{ij}\vec{r_{ij}} + \mathbf{r}'(\mathbf{0}).$$

Dann rechnet man alle mögliche F_{ij}, G_{ij}-s. Dadurch bekommt man folgende Werte:

Für die F_{ij}'s:

$$\begin{aligned}
F_{00} &= \frac{1}{7}, F_{01} = \frac{1}{14}, F_{02} = \frac{1}{35}, F_{03} = \frac{1}{140},\\
F_{10} &= \frac{1}{14}, F_{11} = \frac{1}{35}, F_{12} = \frac{1}{140}, F_{13} = \frac{1}{35},\\
F_{20} &= \frac{1}{35}, F_{21} = \frac{1}{140}, F_{22} = \frac{1}{35}, F_{23} = \frac{1}{14},\\
F_{30} &= \frac{1}{140}, F_{31} = \frac{1}{35}, F_{32} = \frac{1}{14}, F_{33} = \frac{1}{7}.
\end{aligned}$$

Und für die G_{ij}'s:

$$\begin{aligned}
G_{00} &= \frac{1}{56}, G_{01} = \frac{1}{56}, G_{02} = \frac{3}{280}, G_{03} = \frac{1}{280},\\
G_{10} &= \frac{1}{56}, G_{11} = \frac{9}{280}, G_{12} = \frac{9}{280}, G_{13} = \frac{1}{56},\\
G_{20} &= \frac{3}{280}, G_{21} = \frac{9}{280}, G_{22} = \frac{3}{56}, G_{23} = \frac{3}{56},\\
G_{30} &= \frac{1}{280}, G_{31} = \frac{1}{56}, G_{32} = \frac{3}{56}, G_{33} = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Man merkt auch, dass die F_{ij}'s Matrix 2 Symmetrieaxen hat, d.h.

(1) $F_{ij} = F_{ji}$ (wie auch $G_{ij} = G_{ji}$) und

(2) $F_{ij} = F_{(3-i)(3-j)}$ weil die Basisfunktionen f_i und $f_{(3-i)}$ im Intervall $(0,1)$ Spiegelungen von einander darstellen und damit ist Integrall beider Funktionen, wie auch Integral von $f_{ij}(t)$ und von $f_{(3-i)(3-j)}$ gleich.

Jetzt sei $\vec{v} := \sum_{i=0}^{3} v_i\vec{a_i} \in R^3, v_i \in R$ ein Vektor (ferner sei $v_{ij} := v_i v_j$). Dann beschreibe die Spiegelung von $\hat{n}$ durch $\vec{v}$:

3.3.1 1. Versuch

$\vec{u} := \vec{v}\hat{n}\vec{v} = \sum_{i,j} v_{ij}\vec{r_{ij}} =$

$$\sum_{i,j}(v_{ij} - F_{ij} - G_{ij})\vec{r_{ij}} + \sum_{i,j} F_{ij}\vec{r_{ij}} + \sum_{i,j} G_{ij}\vec{r_{ij}} =$$

$$\sum_{i,j}(v_{ij} - F_{ij} - G_{ij})\vec{r_{ij}} + (\vec{\Delta r'} + \vec{\Delta r} - \mathbf{r}'(\mathbf{0})),$$

$$f_0(t) = (1-t)^3, f_1(t) = 3(1-t)^2 t, f_2(t) = 3(1-t)t^2, f_3(t) = t^3.$$

Weiterhin versuchen wir die Einträge der Matrix

$$V' := (v'_{ij}) := (v_{ij} - F_{ij} - G_{ij}),$$

die abhängig von $\vec{a_1}$ oder $\vec{a_2}$ sind, auf 0 zu setzen. Da es aber gilt $v_{ij} = v_i v_j = v_{ji}$, sollte diese Eigenschaft durch unseren Trick nicht gestört sein. Setze:

$$i \in \{1,2\} \vee j \in \{1,2\} \Rightarrow v'_{ij} = 0 \Rightarrow v_{ij} = F_{ij} + G_{ij}.$$

Dann gilt aber:

$$0.26 \approx \frac{140(\frac{5}{56})}{\sqrt{2310}} = \frac{v_{01}}{\sqrt{v_{11}}} = v_0 = \frac{v_{02}}{\sqrt{v_{22}}} = \frac{140(\frac{11}{280})}{\sqrt{2730}} \approx 0.105.$$

Widerspruch.

3.3.2 2. Versuch

$\vec{u} := \vec{v}\hat{n}\vec{v} = \sum_{i,j} v_{ij}\vec{r_{ij}} =$

$$\sum_{i,j}(v_{ij} - F_{ij} - cG_{ij})\vec{r_{ij}} + \sum_{i,j} F_{ij}\vec{r_{ij}} + c\sum_{i,j} G_{ij}\vec{r_{ij}} =$$

$$\sum_{i,j}(v_{ij} - F_{ij} - cG_{ij})\vec{r_{ij}} + (\vec{\Delta r}' + c(\vec{\Delta r} - \mathbf{r}'(\mathbf{0}))),$$

wobei $c \in R$ eine beliebige, aber feste Zahl sei.

$$f_0(t) = (1-t)^3, f_1(t) = 3(1-t)^2 t, f_2(t) = 3(1-t)t^2, f_3(t) = t^3.$$

Weiterhin versuchen wir die Einträge der Matrix

$$V' := (v'_{ij}) := (v_{ij} - F_{ij} - cG_{ij}),$$

die abhängig von $\vec{a_1}$ oder $\vec{a_2}$ sind, auf 0 zu setzen. Da es aber gilt $v_{ij} = v_i v_j = v_{ji}$, sollte diese Eigenschaft durch unseren Trick nicht gestört sein. Setze:

$$i \in \{1,2\} \vee j \in \{1,2\} \Rightarrow v'_{ij} = 0 \Rightarrow v_{ij} = F_{ij} + cG_{ij}.$$

Dann gilt:

$$\frac{v_{01}}{\sqrt{v_{11}}} = v_0 = \frac{v_{02}}{\sqrt{v_{22}}},$$

$$v_{01}^2 v_{22} = v_{02}^2 v_{11},$$

$$p_1(c) := v_{01}^2 v_{22} - v_{02}^2 v_{11} = 0,$$

wobei $p_1(c)$ ein kubischer Polynom der Variable c ist

$$p_1(c) = \frac{9}{24500} + \frac{81}{196000}c + \frac{369}{2744000}c^2 + \frac{3}{224000}c^3.$$

Analog berechne einen anderen kubischen Polynom $p_2(c)$:

$$\frac{v_{13}}{\sqrt{v_{11}}} = v_3 = \frac{v_{23}}{\sqrt{v_{22}}},$$

$$v_{13}^2 v_{22} = v_{23}^2 v_{11},$$

$$p_2(c) := v_{13}^2 v_{22} - v_{23}^2 v_{11} = 0.$$

Analog rechne $p_2(c)$ aus:

$$p_2(c) = -\frac{9}{24500} - \frac{27}{39200}c - \frac{9}{21952}c^2 - \frac{33}{439040}c^3.$$

Nach Konstruktion sollte es gelten:

$$p_1(c) = 0 = p_2(c)$$

Dann sollten beide Polynome zumindest eine gleiche Nullstelle haben. Dies ist leider nicht der Fall:

Die Nullstellen von $p_1(c)$ sind:

$$c_1^{(0)} \approx -4.8171, c_1^{(1)} \approx -3.6732, c_1^{(2)} \approx -1.5499.$$

Die Nullstellen von $p_2(c)$ sind:

$$c_2^{(0)} \approx -2.8186, c_2^{(1)} \approx -1.3740, c_2^{(2)} \approx -1.2620.$$

Damit für beliebigen $c \in R$ gilt entweder $p_1(c) \neq 0$ oder $p_2(c) \neq 0$. Widerspruch.

3.3.3 3. Versuch

$\vec{u} := \vec{v}\hat{n}\vec{v} = \sum_{i,j} v_{ij}\vec{r_{ij}} =$

$$\sum_{i,j}(v_{ij} - F_{ij} - cG_{ij})\vec{r_{ij}} + \sum_{i,j} F_{ij}\vec{r_{ij}} + c\sum_{i,j} G_{ij}\vec{r_{ij}} =$$

$$\sum_{i,j}(v_{ij} - F_{ij} - cG_{ij})\vec{r_{ij}} + (\vec{\Delta r}' + c(\vec{\Delta r} - \mathbf{r}'(\mathbf{0}))),$$

wobei $c \in R$ eine beliebige, aber feste Zahl sei.

$$f_0(t) = c_0(1-t)^3, f_1(t) = c_1(1-t)^2 t, f_2(t) = c_2(1-t)t^2, f_3(t) = c_3 t^3,$$

wobei $c_i = p(\mathbf{r}(\mathbf{0}), \mathbf{r}'(\mathbf{0}), \mathbf{r}''(\mathbf{0}), \mathbf{r}(\mathbf{1}), \mathbf{r}'(\mathbf{1}), \mathbf{r}''(\mathbf{1}), i)$ und $p : R^{3\times 6} \times \{0,1,2,3\} \to R$ eine Funktion sei, die die Eingabeparameter in die Koeffizienten der Basisfunktionen abbildet. Da wir im folgenden mit einer fester Eingabe arbeiten werden, sind $c_0, c_1, c_2, c_3 \in R$ feste Zahlen.

Weiterhin versuchen wir die Einträge der Matrix

$$V' := (v'_{ij}) := (v_{ij} - F_{ij} - cG_{ij}),$$

die abhängig von $\vec{a_1}$ oder $\vec{a_2}$ sind, auf 0 zu setzen. Da es aber gilt $v_{ij} = v_i v_j = v_{ji}$, sollte diese Eigenschaft durch unseren Trick nicht gestört sein. Setze:

$$i \in \{1,2\} \vee j \in \{1,2\} \Rightarrow v'_{ij} = 0 \Rightarrow v_{ij} = F_{ij} + cG_{ij}.$$

Hier werden viel mehrere Variablen dazugenommen, als im 2. Versuch - und nach Intuition sollte es ausreichen, um den Trick durchführen zu können. Leider ist es anders.

Wir nehmen erstmal an, dass wir doch die Matrix V' mit 0-Einträgen so konstruieren können, dass es die Eigenschaften der Matrix V nicht widerspricht. Erstmal benutze die Einträge $v'_{01}, v'_{11}, v'_{22}, v'_{23}$, um die v_0, v_1, v_2, v_3 zu definieren:

$$v_0 = \frac{v_{01}}{\sqrt{v_{11}}}, v_1 = \sqrt{v_{11}}, v_2 = \sqrt{v_{22}}, v_3 = \frac{v_{23}}{\sqrt{v_{22}}}.$$

Da V' auch wie V, F, G symmetrisch ist ($v'_{ij} = (v_{ij} - F_{ij} - cG_{ij}) = (v_{ji} - F_{ji} - cG_{ji}) = v'_{ji}$), reicht es, dass folgende 3 Gleichungen immer gelten:

$$^{(1)}v_{02} = v_0 v_2 = \frac{v_{01}\sqrt{v_{22}}}{\sqrt{v_{11}}},$$

$$^{(2)}v_{12} = v_1 v_2 = \sqrt{v_{11}}\sqrt{v_{22}},$$

$$^{(3)}v_{13} = v_1 v_3 = \frac{v_{23}\sqrt{v_{11}}}{\sqrt{v_{22}}}.$$

Aus diesen 3 Gleichungen kann man in jedem Fall $\frac{\sqrt{v_{11}}}{\sqrt{v_{22}}}$ ausdrücken:

$$^{(a)}\frac{\sqrt{v_{11}}}{\sqrt{v_{22}}} =^{(1)} \frac{20c_0c_1 + 5cc_0c_1}{8c_0c_2 + 3cc_0c_2},$$

$$^{(b)}\frac{\sqrt{v_{11}}}{\sqrt{v_{22}}} =^{(2)} \frac{18c_1c_2 + 9cc_1c_2}{24c_2c_2 + 15cc_2c_2},$$

$$^{(c)}\frac{\sqrt{v_{11}}}{\sqrt{v_{22}}} =^{(3)} \frac{8c_1c_3 + 5cc_1c_3}{20c_2c_3 + 15cc_2c_3}.$$

Wir können $(a), (b), (c)$ folgenderweise umformulieren:

$$a_1 := 20c_0c_1 + 5cc_0c_1,$$

$$a_2 := 8c_0c_2 + 3cc_0c_2,$$

$$^{(a)}\frac{\sqrt{v_{11}}}{\sqrt{v_{22}}} = \frac{a_1}{a_2},$$

$$b_1 := 18c_1c_2 + 9cc_1c_2,$$

$$b_2 := 24c_2c_2 + 15cc_2c_2,$$

$$^{(b)}\frac{\sqrt{v_{11}}}{\sqrt{v_{22}}} = \frac{b_1}{b_2},$$

$$c_1 := 8c_1c_3 + 5cc_1c_3,$$

$$c_2 := 20c_2c_3 + 15cc_2c_3,$$

$$^{(c)}\frac{\sqrt{v_{11}}}{\sqrt{v_{22}}} = \frac{c_1}{c_2},$$

Aus diesen Gleichungen kann man 3 Ausdrücke von x hinkriegen:

$$^{(A)}0 =^{(a),(b)} b_1a_2 - b_2a_1,$$

analog kann man die anderen 2 Ausdrucke bekommen. Wenn man alle Klammern aufmacht und alles durch die Variablen c, c_0, c_1, c_2, c_3 aufschreibt, bekommt man folgendes:

$$^{(A)}0 =^{(a),(b)} -6c_0c_1c_2c_2(8c^2 + 49c + 56),$$

$$^{(B)}0 =^{(b),(c)} -6c_1c_2c_2c_3(10c^2 + 35c + 28),$$

$$^{(C)}0 =^{(c),(a)} -12c_0c_1c_2c_3(10c^2 + 56c + 56),$$

Jetzt machen wir ein Paar Annahmen:

$^{(Ann.1)}c \neq 0$ ist klar, diesen Fall haben wir schon früher beobachtet (Kapitel **3.2.b**).

$^{(Ann.2)}c_1, c_2 \neq 0$. Weil wenn $c_1 = 0$, kann man eine äquivalente Lösung von $\mathbf{a(t)}$ konstruieren, wobei $c_1 \neq 0$ und $\vec{a_1} = 0$. In beiden Fällen wird $\mathbf{f_1}(t)\vec{a_1} = 0$ sein. Analog mit $c_2 = 0$.

Dann gilt:

$$0 =^{(A)} 6c_0c_1c_2c_2(8c^2 + 49c + 56) =$$

$$0 =^{(B)} 6c_1c_2c_2c_3(10c^2 + 35c + 28) =$$

$$0 =^{(C)} 12c_0c_1c_2c_3(10c^2 + 56c + 56).$$

Nachdem wir alles durch $6c_1c_2 \neq^{(Ann.2)} 0$ teilen, bekommen wir:

$$0 =^{(A)} c_0c_2(8c^2 + 49c + 56) =$$

$$= 0 =^{(B)} c_2c_3(10c^2 + 35c + 28) =$$

$$= 0 =^{(C)} c_0c_3(10c^2 + 56c + 56).$$

Es gibt folgende 2 Fälle zu betrachten:

Fall 1: $c_0 = 0$ **oder** $c_3 = 0$ Sei denn $c_0 = 0$. Dann wäre

$$\vec{d_0''} = \mathbf{r}''(\mathbf{0}) = \mathbf{a}(\mathbf{0}) = f_0(0)\vec{a_0} + f_1(0)\vec{a_1} + f_2(0)\vec{a_2} + f_3(0)\vec{a_3} =$$

$$=^{f_2(0)=f_3(0)=f_4(0)=0} c_0(1-0)^3\vec{a_0} + 0 + 0 + 0 = 0.$$

$\vec{d_0''}$ ist aber in der Voraussetzung frei wählbar und kann ein beliebiges Wert aus R sein. Widerspruch.

Fall 2: $c_0 \neq 0, c_3 \neq 0$ Dann sollte nach $(B), (C)$ gelten:

$$10c^2 + 35c + 28 =^{c_2,c_3 \neq 0,B} 0 =^{c_0,c_3 \neq 0,C} 10c^2 + 56c + 56,$$

$$21c = -28,$$

$$c = -\frac{4}{3}.$$

Dann kommt man zum Widerspruch, wenn man diese c ins (A) einsätzt:

$$0 =^{(A)} c_0c_2(8c^2 + 49c + 56) \approx 4.8889 \cdot c_0c_2 \neq^{c_0,c_2 \neq 0} 0.$$

Da man in beiden Fällen Widersprüche bekommen hat, gilt es, dass es nicht möglich ist, eine Matrix V' so zu konstruieren, dass alle Eigenschaften der Matrix V gültig bleiben.

4

Ergebnisse und Zukünftige Arbeit

4.1 Ergebnisse

Punkte 1 bis 4 des vorausgesetzten Planes wurden in geplanter Zeit erfüllt und protokolliert. Leider hat der Ansatz, der bei der Anwendung der Pythagoräischen Hodographen im Punkt 5 des Planes benutzt war, nicht funktioniert. Es wurden auch weitere Versuche gemacht, um entstandene Probleme zu lösen. Leider waren die Ansätze auch nicht erfolgreich. Damit konnten die Punkte 6 und 7 des Planes nicht erfüllt sein.

Der Grund, warum es nicht funktioniert hat, war, dass man es nicht vorgesehen hat, dass die Matrix V, die man in der Originalanwendung (**Kapitel 2**) konstruiert, bestimmte Symmetrieeigenschaften erfüllen musste. In der Originalanwendung waren die auch irrelevant. Wenn man aber die Dimension der Matrix erhöht (was auch beim Lösen des Problems aus Kapitel 3 vermutlich funktionieren sollte), muss man auf diese Eigenschaften achten.

Man hat erstmal bewiesen, das der vermutliche Ansatz nicht funktionierte (**Kapitel 3.2.b**). Dann haben wir versucht, den Ansatz genereller zu machen (**Kapitel 3.3**), wobei man mehrere Variablen eingeführt hat, die man frei auswählen konnte. Wir haben damit gehofft, dass durch diese Variablen der Ansatz flexibler wird und die Matrix V dadurch konstruierbar wird. Wir haben 3 Versuche gemacht (**Kapitel 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3**), wobei jeder weiterer Ansatz genereller, als der vorherige war. Für alle 3 hat man bewiesen, dass sie nicht funktionieren.

Damit vermuten wir, dass wenn man die Pythagoräische Hodographen beim Lösen des Problems benutzen will, sollte man anders vorgehen. Weiterhin stellen wir mögliche weitere Ansätze vor, die wir aus zeitlichen Gründen nicht untersuchen konnten.

4.2 Mögliche weitere Ansätze

Hier beschreiben wir mögliche weitere Ansätze, die man versuchen könnte.

1) Basis-Funtionen vertauschen

Wenn man den Ansatz aus **3.3** anguckt, dann gibt es in V-Matrix die Einträge in den Ecken, die in unserem Ansatz irrelevant sind. D.h., die Basisfunktionen f_0, f_3 bauen weniger Abhängigkeiten auf und sind von wenigerer Bedeutung, als f_1, f_2. Es ist möglich, dass durch das Vertauschen der Basisfunktionen man andere Werte für $\vec{a_i}$'s bekommt. Man sollte dabei aber beachten, dass einige Eigenschaften der Basisfunktionen schon am Anfang des Versuches benutzt wurden und auch behalten sein sollten (z.B. dass $f_0(0) = f_1(0) = f_2(0) = 0, f_3(0) = 1$).

2) Bernsteinpolynome höherer Ordnung

Man könnte versuchen, analog zu **3.3** das Problem zu Lösen, indem man mehr Basisfunktionen benutzt, um mehr Freiheitsgraden beim Ausrechnen zu bekommen. Es kann sein, dass es dann möglich ist, die PH-Kurven ohne Widersprüche anzuwenden.

3) Andere Basisfunktionen

Es kann auch sein, dass andere Polynombasisfunktionen für die Polynome 3.Grades bessere Ergebnisse liefern, als Bernsteinpolynome 3.Ordnung.

Literaturverzeichnis

[1] Christian Perwass. **Geometric Algebra with Applications in Engineering**. *Geometry and Computing 4*, Springer, 2009. 3, 6

[2] Pertti Lounesto. **Clifford Algebras and Spinors**. *London Mathematical Society lecture note series 286*, Cambridge Univ. Press, 2001. 3