曲線と曲面の微分幾何

2025 年 12 月 22 日

1　復習

簡単に曲面論の復習をしてみよう．3 次元 Euclid 空間上にある曲面について, その性質を調べる．まず, 曲面 (片) は

$$\boldsymbol{p}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \tag{1}$$

なるようにかける．(本来なら列ベクトルにする.) ここで, u, v がパラメータで, x, y, z が三階連続微分可能な関数である．これが曲面片となるための条件を式でかけば

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{bmatrix} = 2 \tag{2}$$

ということになる．これはつまり, 曲面の接ベクトル $\boldsymbol{p}_u, \boldsymbol{p}_v$ が互いに一次独立であるということで, これにより接平面が張れることが保証されている．

曲面上の十分近い二点の微小な変位ベクトル $d\boldsymbol{p}$ は

$$d\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_u du + \boldsymbol{p}_v dv \tag{3}$$

として与えられる．直感的には, uv 平面上で u 軸方向に du だけ, v 軸方向に dv だけ進んだ場合, 曲面上の u 曲線, v 曲線の接線方向にそれぞれ $\boldsymbol{p}_u du, \boldsymbol{p}_v dv$ だけ増加する, ということを表す．ゆえに曲面上の微小距離 $ds^2 = d\boldsymbol{p} \cdot d\boldsymbol{p}$ は

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \tag{4}$$

として与えられる．ここで $E = \boldsymbol{p}_u^2, F = \boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{p}_v, G = \boldsymbol{p}_v^2$ である．これを曲面の**第一基本形式**といい, I とかく．

さて, 次に, 曲面上の法線ベクトルを考える．それは次のように与えられる．

$$\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v}{|\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v|} \tag{5}$$

これより, 曲面の**第二基本形式**は以下で定義される．

$$\mathrm{II} = -d\boldsymbol{e} \cdot d\boldsymbol{p} \tag{6}$$

簡単な式変形から, これは次のように書ける．

$$\mathrm{II} = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 \tag{7}$$

ただし, $L = \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{p}_{uu}, M = \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{p}_{uv}, N = \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{p}_{vv}$ である．この二次形式の対称行列はある意味 Hesse 行列に対応しているから, 第二基本形式が曲面の見た目 (形が凸など) を表している．

曲面の第一基本形式と第二基本形式を用いれば, 次のように **Gauss 曲率**が定義できる.

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \tag{8}$$

また, 平均曲率 H は次のように定義できる.

$$H = \frac{1}{2}\frac{EN + GL - 2FM}{EG - F^2} \tag{9}$$

この二つの量は, 実際には, 次のような流れで登場した. 曲面上の曲線 $\boldsymbol{p}(s) = \boldsymbol{p}(u(s), v(s))$ において, その加速度ベクトル $\boldsymbol{p}''(s)$ は, 曲面の接ベクトル (接平面上のベクトル)$\boldsymbol{k_g}$ と, 法線方向のベクトル $\boldsymbol{k_n}$ を用いて次のように分解できた.

$$\boldsymbol{p}''(s) = \boldsymbol{k_g} + \boldsymbol{k_n} \tag{10}$$

ここで, s は曲線の弧長パラメータであり, $\boldsymbol{k_g}, \boldsymbol{k_n}$ はそれぞれ, 測地的曲率ベクトル, 法曲率ベクトルという. このうち, 法曲率ベクトルについて, $\boldsymbol{k_n} = \kappa_n \boldsymbol{e}$ と書いておく. すると, 少し式変形を行って次の式が得られる.

$$\kappa_n = L\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2M\left(\frac{du}{ds}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right) + N\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 \tag{11}$$

つまり, 法曲率 κ_n は曲線 $\boldsymbol{p}(s)$ ではなく, $\boldsymbol{p}'(s)$ で決まる. 法曲率は曲線の方向を変えると変化するが, 接平面上の単位円で接ベクトルを動かすと, それは最大と最小を必ずもつことがわかる. また, 計算によってそれは次の二次方程式の解となっている.

$$(EG - F^2)\lambda^2 - (EN + GL - 2FM)\lambda + LN - M^2 = 0 \tag{12}$$

よって最大, 最小の法曲率 (主曲率) の積および和がそれぞれ, Gauss 曲率及び平均曲率として定義される.

以下に, 具体的な曲面の Gauss 曲率と平均曲率を示す.(計算略)

1. 半径 a の球面

$$\boldsymbol{p}(u, v) = (a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, a\sin u) \tag{13}$$
$$\mathrm{I} = a^2 du^2 + a^2\cos^2 u dv^2 \tag{14}$$
$$\mathrm{II} = a du^2 + a\cos^2 u dv^2 \tag{15}$$
$$K = \frac{1}{a^2}, \quad H = \frac{1}{a} \tag{16}$$

2. 柱面 (ただし, u は xy 平面の曲線 $(x(u), y(u))$ の弧長パラメータ)

$$\boldsymbol{p}(u, v) = (x(u), y(u), v) \tag{17}$$
$$\mathrm{I} = du^2 + dv^2 \tag{18}$$
$$\mathrm{II} = (x''y' - x'y'')du^2 \tag{19}$$
$$K = 0, \quad H = \frac{1}{2}(x''y' - x'y'') \tag{20}$$

3. 輪環面 ($R > r$ で, R がドーナッツの半径, r がドーナッツの断面小円の半径)

$$\boldsymbol{p}(u, v) = ((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u) \tag{21}$$
$$K = \frac{1}{a^2}, \quad H = \frac{1}{a} \tag{22}$$