

# 二時間で学ぶ Riemann 幾何の初歩

理学同好会

2025 年 11 月 29 日

## 1 復習など

詳しくは以前送ったベクトル解析のノート参照。ここでは必要な最低限の要点のみ復習する。まずは基本的な用語についてザックリ復習する。

**(幾何) ベクトル** 単純に言えば, 向きと方向を持つ量。通常矢印で表現される。

**関数** あるものに対してある実数を対応させる写像。

**曲面片** 3 次元 Euclid 空間上で, 二つのパラメータをもつ位置ベクトル関数があったとき, その関数の各成分から作られる Jacobi 行列の階数が 2 ならば, この位置ベクトルが表す点全体を曲面片という。

**曲面** 曲面片の和集合 (可算和でなくてよい。)

さて, ベクトル解析での内容と重複するが, 簡単に曲面論の復習をしてみよう。我々は 3 次元 Euclid 空間上にある曲面について, その性質を調べていたのだった。まず, 曲面 (片) は

$$\mathbf{p}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad (1)$$

なるようにかける。(本来なら列ベクトルにするのが一般的だが, ここではこだわらない。) ここで,  $u, v$  がパラメータで,  $x, y, z$  が三階連続微分可能な関数である。先ほどの曲面片となるための条件を式でかけば

$$\text{rank} \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{bmatrix} = 2 \quad (2)$$

ということになる。これはつまり, 曲面の接ベクトルが互いに一次独立であるということで, これにより接平面が張れることが保証されている。

以下は, 簡単な復習のために少し厳密性を犠牲にしていることを断っておく。まず曲面上の十分近い二点の微小な変位ベクトル  $d\mathbf{p}$  は

$$d\mathbf{p} = \mathbf{p}_u du + \mathbf{p}_v dv \quad (3)$$

として与えられる。これは多変数関数の全微分と同じ形なので理解しやすいだろう。直感的には,  $uv$  平面上で  $u$  軸方向に  $du$  だけ,  $v$  軸方向に  $dv$  だけ進んだ場合, 曲面上の  $u$  曲線,  $v$  曲線の接線方向にそれぞれ  $\mathbf{p}_u du, \mathbf{p}_v dv$  だけ増加すると想像するとわかりやすい。ゆえに曲面上の微小距離  $ds^2$  は

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 \quad (4)$$

として与えられる。ここで  $E = \mathbf{p}_u^2, F = \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v, G = \mathbf{p}_v^2$  である。これを曲面の**第一基本形式**という。

さて、次に、曲面上の法線ベクトルを考える。それは次のように与えられる。

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v}{|\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v|} \quad (5)$$

これより、曲面の**第二基本形式**は以下で与えられる。

$$\text{II} = -d\mathbf{e} \cdot d\mathbf{p} \quad (6)$$

簡単な式変形から、これは次のように書ける。

$$\text{II} = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 \quad (7)$$

ただし、 $L = \mathbf{e} \cdot \mathbf{p}_{uu}$ ,  $M = \mathbf{e} \cdot \mathbf{p}_{uv}$ ,  $N = \mathbf{e} \cdot \mathbf{p}_{vv}$  である。この二次形式の対称行列はある種 Hesse 行列に対応しているから、Hessian を計算すれば、曲面が凸かどうか分かる。

曲面の第一基本形式と第二基本形式を用いれば、次のように **Gauss 曲率**が定義できる。

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad (8)$$

実はこの Gauss 曲率は内在的な量、つまり第一基本形式のみから決まる。(Theorema egregium, 最も素晴らしい定理)

## 2 曲面上の Riemann 計量

これまでの議論は、あくまで Euclid 空間上に曲面があって、そのうえで解析していた。つまり“曲面の外”がある場合であった。そこで次に考えたいのは、この“外”の空間をとっぱらって、曲面そのものだけを見たときに、曲面の性質をどう調べるかということである。つまり、曲面が Euclid 空間上にあることをいったん忘れて、曲面そのものを考えたい。しかし、曲面の外がないということは曲面を位置ベクトルで書けないということであって、これまでのやり方があまり通用しなそうにも思える。なぜなら、位置ベクトルは Euclid 空間に付随しているものであって、曲面そのものに付随しているわけではないからである。

逆に、曲面に付随しているものとして考えると、まず思いつくのは接ベクトルがある。接ベクトルは曲面に張り付いているので、外の空間がなくても定義できそうである。そこで思い切って曲面の代わりに、以下の第一基本形式が与えられたとして、曲面の性質を調べることにしよう。

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \quad (9)$$

ただし、 $u, v$  はあるパラメータで、第一基本形式は  $uv$  平面上のある領域  $D$  内で定義されているものとする。また、第一基本形式は (二次形式の意味で) 正値形式であるとする。このようにして与えられた  $ds^2$  を領域  $D$  上の **Riemann 計量** (Riemann metric) という。なお

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \quad (10)$$

とすれば、 $ds^2 = g_{ij}du^i du^j$  とも書ける。ただし、 $u^1 = u, u^2 = v$  であり、上下で同じ添え字が出た場合は、1 から 2 までの和をとるものとする。(Einstein の縮約) これは後からまた示すように、“接ベクトル”の内積を定義したことになる。先ほどの位置ベクトルを使った議論における  $E, F, G$  の定義をみればなんとなくわかる。

しかし、このままでは何を考えていいのかよくわからない。 $u, v$  というパラメータが曲面の何を表しているかが不明瞭だし、そもそも、式中の  $du, dv$  の記号をはっきり定義しないまま使ってきているのがよくない。そこでまずこれらの正体をはっきりと示そう。

### 3 接ベクトル場

$du, dv$  の正体を探るには、まず接ベクトルについて改めて定式化する必要がある。そのための手がかりとして、曲面上の曲線を考え、その速度ベクトルを考えてみることにする。

さりとて“曲線”と言ってしまったが、まず曲面上の曲線とはどのようなものなのだろうか。まずは曲面上の曲線について考えてみよう。曲面を  $M$  として、次の写像を考えてみる。

$$c: [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow M \quad (\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0) \quad (11)$$

これは、パラメータ ( $t$  とかいておく) を一つ決めると、曲面  $M$  上の一点が決まる写像である。その一点を  $c(t)$  と書くことにする。これだけだと、 $t$  の値に対してとびとびの点  $c(t)$  を取りうる可能性もある (むしろそれが一般的) であるが、ここでは常識的な、点が“連続的”に変化しているものとする。そうすると、 $c$  の像は連続的な点の集まりだから曲線といえなくもない。

ではつぎにこの曲線  $c$  の速度ベクトルなるものを考えたい。速度といえば微分であるから、この曲線を微分することを考えたい。しかし、一般の写像の場合の微分は定義していない。実際微分の定義を形式的に当てはめようとする

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{c(t + \Delta t) - c(t)}{\Delta t}$$

を計算することになるが、分子は  $M$  の点であって、これらの加法は一般に定義されていないのだから、微分しようにも undefined というわけである。

そこで、 $M$  の点を数としてみなせれば、微分が計算できて都合がよいということがわかる。曲面上の点を数値で表すということは、曲面に座標を導入するということであるが、最初に述べた通り今はあくまで曲面は Euclid 空間にはおかない前提であるから、通常の座標軸のように設定するわけにもいかない。そこで、曲面の外側で座標軸を設置するのではなく、曲面の表面に座標を張ればよいということがわかる。しかし、現実の曲面を想像すればわかるように、曲面上に座標格子を広げようにも、それだけで曲面全体を覆うことはできないし、逆に軸同士などがぶつかってしまうこともある。例えば球であれば、球面上のある点から座標軸を伸ばしていくと一周して元の場所に戻ってしまい軸それ自身とぶつかってしまう。しかし、曲面上のある点と、そのごくごく小さいその周囲 (これを**近傍**という) だけであれば、座標軸がぶつかることはないだろう。また、曲面上の各点に対してその近傍を考えることで、近傍全体の和集合が曲面を包んでいることもわかる。

これを数学的に定義するには位相空間に関する知識がいるから深追いしない。今では単に曲面の局所的な部分で座標を張っていると考えればよい。これを局所座標という。なお、このような座標が張れる集合を**多様体**という。曲面はこの多様体のうち、座標軸が二本の二次元多様体と呼ばれるものにあたるのである。

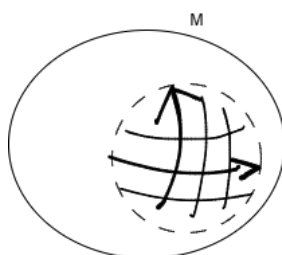


図1 局所座標

さて、局所座標を定義したことにより曲線の速度ベクトルが定義できるようになった。まず、 $M$  の点  $p$  の局所座標を  $(u, v)$  とかくことにしよう。つまり、 $p \in M$  を  $p = (u, v)$  のように書くのであって、これが式 (9) 中の  $u, v$  の正体である。これより、曲線は  $c(t) = (u(t), v(t))$  と書ける。これより、 $t = 0$  における速度ベクトルは

$$\left. \frac{dc}{dt} \right|_{t=0} = \left( \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0}, \left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} \right) \quad (12)$$

として定義される... と言いたいところだが、実はそうではない。こう定義してしまうと、局所座標系  $(u, v)$  の取り方によって速度ベクトルが変わってしまうのである。速度ベクトルないしこれから定義する接ベクトルは、曲面上の点のみに依存するのであって、局所座標系にまで依存されると困ってしまう。

しかし、微分を使うというアイデア自体は間違っていないはずだから、ここも思い切って、次のように考えてみることにしよう。

#### 速度ベクトルの定義

曲線  $c$  の  $t = 0$  における**速度ベクトル**  $v_c$  は、曲線  $c$  に沿った**方向微分そのもの**と考える。すなわち、ある点  $p = c(0)$  周りで定義された (微分可能性などを持っている) 任意の関数  $f$  に対して

$$v_c(f) = \left. \frac{df(c(t))}{dt} \right|_{t=0} \quad (13)$$

を返す関数  $v_c : \{ \text{関数} \} \rightarrow \mathbb{R}$  である。

さらに、方向微分そのものをより抽象的にしよう。すなわち、方向微分とは微分演算が持つ「線形性」と「Leibniz 則」のみを仮定した、点  $p$  周りで定義された関数から実数への関数と考えるのである。そのようにすることで、ある点  $p$  における方向微分全体がベクトル空間となる。(もちろん方向微分同士の加法などは、自然な意味での加法ととる)

点  $p$  における方向微分全体を  $D_p(M)$  と書くことにする。しかし、 $D_p(M)$  を定義しておいてはなんだが、方向微分全体はあまりにも範囲が広すぎる。実際に我々が必要なのは接ベクトルであったから、方向微分全体の部分空間だけ知っていれば十分であろう。では、接ベクトル場はどのように定義するだろうか。通常の曲面論から類推すると、これは  $u$  軸、 $v$  軸に沿った速度ベクトルであるとわかる。座標軸は二本あるから、接ベクトルとして (線形独立なものは) 二つとれるだろう。 $u$  軸、 $v$  軸に沿った点  $p$  における接ベクトルをそれぞれ

$$\left( \frac{\partial}{\partial u} \right)_p, \quad \left( \frac{\partial}{\partial v} \right)_p \quad (14)$$

とかこう。この二つのベクトルによって張られる  $D_p(M)$  の部分空間を  $T_p(M)$  と書き、点  $p$  における**接ベクトル空間**という。簡単に言えば、この接ベクトル空間が曲面  $M$  の接平面にあたる。 $T_p(M)$  の元を  $p$  における接ベクトルという。そして、 $M$  上の各点でそれぞれ (局所座標が通じる限り)  $u$  軸、 $v$  軸に沿った接ベクトルが定義できるから、それらを集めて  $\frac{\partial}{\partial u} = \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial u} \right)_p \right\}_{p \in U}$  のようにかく。  $U$  は  $M$  上で局所座標  $(u, v)$  が張られている範囲。そしてこれを**接ベクトル場**という。以下簡単に書くため、接ベクトル場をそれぞれ  $\partial_u, \partial_v$  とかくこともある。

なお、速度ベクトル  $v_c$  は接ベクトル、つまり、 $\left( \frac{\partial}{\partial u} \right)_p, \left( \frac{\partial}{\partial v} \right)_p$  の線形結合で書ける。これは連鎖律の公式を使えばよい。

## 4 微分形式

次に,  $du, dv$  の正体に迫っていこう. そのためにはまず, 接ベクトル空間  $T_p(M)$  の双対空間を定義しなければならない. 接ベクトル空間の元に対してある実数を返す線形写像  $\omega : T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$  は考えられるが, このような関数すべてを集めたものを  $T_p^*(M)$  とかく. この集合は, 自然な加法などに対してまたベクトル空間となるから, これを**双対空間**という. なお, 双対空間自体は任意のベクトル空間に対して考えることができる.

ではこの双対空間  $T_p^*(M)$  の基底はどのようなものだろうか. 基底の取り方自体はいろいろあるだろうが, ここでは一つの指針として, 次の性質を満たすものを考えたい.

$$\omega_i \left( \frac{\partial}{\partial u_j} \right)_p = \delta_{ij}, \quad (i, j = 1, 2) \quad (15)$$

ただし,  $u^1 = u, u^2 = v$  として解釈する. 正確には接ベクトルの外側にもう一度  $\omega$  の引数としてのかけが必要であるが, 表記が複雑になるだけなので省略している. このようにして定義された関数  $\omega_1, \omega_2$  は  $T_p^*(M)$  の基底となっていることが確かめられる. このような基底を**双対基底**という. この双対基底をそれぞれ  $du, dv$  とかくことにする. そしてこの  $du, dv$  の一次結合,  $T_p^*(M)$  の元を**一次微分形式** (1-form) という.

こうして, 一応一次微分形式自体は定義できたのであるが, これからの議論では二次微分形式まで使う必要がある. ところが, 二次微分形式 (一般に  $k$  次形式) は一次微分形式とは少し勝手が違うので, ここでは単純に次のように書いたもの

$$f du \wedge dv \quad (16)$$

を二次微分形式と呼ぶことにしよう. つまり, 適当な関数と  $du \wedge dv$  をかけたものを二次微分形式と呼ぶのである. 式中の  $\wedge$  は一次微分形式 (の基底)  $du, dv$  をかけたもので, 外積 (wedge 積) とよぶ. 外積については次の規則を約束しておく.

$$du \wedge du = dv \wedge dv = 0, \quad du \wedge dv = -dv \wedge du \quad (17)$$

なお, いまは  $u, v$  の二つしか変数がないから二次微分形式までしか考えないのであって,  $n$  個変数があれば  $n$  次微分形式まで考えられる. また, 通常関数は 0 次微分形式と解釈する.

### 外微分

微分形式には, **外微分** (がいびぶん) と呼ばれる新たな演算を導入することができる. 外微分を  $d$  と書くことにすると

0 次微分形式  $f$  には

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv \quad (18)$$

1 次微分形式  $\phi = f du + g dv$  には

$$d\phi = df \wedge du + f ddu + dg \wedge dv + g ddv \quad (19)$$

2 次微分形式  $\psi = f du \wedge dv$  には

$$d\psi = df \wedge du \wedge dv \quad (20)$$

と定義する. つまり, 外微分は微分形式の次数を一次だけあげる. ところで,  $d\psi$  は計算すると  $d\psi = 0$  となることがわかる. これは当然の結果で, 3 次以降の微分形式は (変数の数が足りないから) 0 になるのである.

もう一つ注意しなければならないのは、 $dd\theta = 0$  が常に成り立つということである。  $\theta$  が 1-form か 2-form なら当然であるし、0-form(関数)であっても、簡単な計算で確かめられる。

したがって、式 (18)~(20) は、以下のように言い換えられる。

外微分

0 次微分形式  $f$  には

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv \quad (21)$$

1 次微分形式  $\phi = f du + g dv$  には

$$d\phi = df \wedge du + dg \wedge dv \quad (22)$$

2 次微分形式  $\psi = f du \wedge dv$  には

$$d\psi = 0 \quad (23)$$

逆に、一次微分形式が  $d\phi = 0$  なら、 $\phi = dh$  なる関数  $h$  が存在するか？ という疑問も生まれる。これは、 $f, g$  がある長方形領域で連続微分可能であれば、存在することが知られており、Poincare の補助定理とよばれる。

## 外微分形式による微分幾何

Riemann 幾何の本題に入る前に、今までのベクトル解析的な曲面論を微分形式を用いて軽く展開してみよう。ひとまず、曲面の周りに、いったんどこかに取っ払っていた Euclid 空間を設置する。こうすれば位置ベクトルによって、馴染みの  $\mathbf{p}(u, v)$  で曲面がかけられる。

まず、接ベクトルとして、 $\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v$  の代わりに、正規直交基底として  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  を取り直す。実際、Gram-Schmit の正規直交化をつかえば、このような基底は取れる。(ただし、いつもこの方法で基底を取ってあるとは限らない。) 次に  $\mathbf{e}_3$  を  $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$  として定義する。このようにして、 $\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v, \mathbf{e}$  の代わりに、正規直交標構を用いることが可能になった。これによれば、曲面上の任意の接ベクトル  $d\mathbf{p} = (dx, dy, dz)$  を

$$d\mathbf{p} = \theta^1 \mathbf{e}_1 + \theta^2 \mathbf{e}_2 \quad (24)$$

と書ける。ただし、 $\theta^1, \theta^2$  は一次微分形式。あるいは、Einstein の縮約より  $d\mathbf{p} = \theta^i \mathbf{e}_i$  と書いてもよいだろう。また、 $dd\mathbf{p} = \mathbf{0}$  であるから

$$\mathbf{0} = d(\theta^i \mathbf{e}_i) = d\theta^i \mathbf{e}_i - \theta^i \wedge d\mathbf{e}_i \quad (25)$$

が得られる。ところが、 $d\mathbf{e}_i$  はやはり空間のベクトルであるから、 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  の線形結合で書けるはずである。これを

$$d\mathbf{e}_i = \omega_i^\mu \mathbf{e}_\mu \quad (i = 1 \sim 3) \quad (26)$$

とかいておく。  $\omega_i^j(i, j = 1 \sim 3)$  は一次微分形式である。ただし、 $\mu$  に関する和は 1 ~ 3 までの和としてとる。(以下このノートでは、アルファベットによる添え字は 1 ~ 2, ギリシャ文字による添え字は 1 ~ 3 までを表すことにする。) したがって

$$\mathbf{0} = d\theta^i \mathbf{e}_i - \theta^i \wedge \omega_i^\mu \mathbf{e}_\mu \quad (27)$$

とかけるから、 $\mathbf{e}_i$  の線形独立性より

$$d\theta^i = \theta^j \wedge \omega_j^i, \quad (i = 1, 2) \quad (28)$$

$$0 = \theta^j \wedge \omega_j^3 \quad (29)$$

が得られる。(28)を**第一構造式**という。

ところで、 $\omega_i^3$  は、 $du, dv$  の一次結合であって、 $\theta^1, \theta^2$  も  $du, dv$  の一次結合であった。ゆえに、 $\omega_i^3$  を  $\theta^1, \theta^2$  の一次結合と書くこともできる。また、 $d(e_i \cdot e_j) = 0$  より、 $\omega_0^0 = \omega_1^1 = \omega_2^2 = 0$  であり、 $\omega_i^j = -\omega_j^i$  であることもわかる。そこで、

$$\omega_j^3 = b_{jk}\theta^k, \quad (j = 1, 2) \quad (30)$$

のようにかくことにすれば、式 (29) より

$$0 = (b_{12} - b_{21})\theta^1 \wedge \theta^2 \quad (31)$$

が得られる。ゆえに、 $B = (b_{ij})$  は対称行列であることがわかる。

つぎに、 $dde_i = 0$  より、何か式がえられるか考えてみる。まず、 $d\omega_i^\mu = \omega_i^\nu \wedge \omega_\nu^\mu$  が得られるから、 $i, \mu = 1, 2$  の時で考えてみよう。 $\mu$  の代わりに、 $k$  と書くことにする。

$$\begin{aligned} d\omega_i^k &= \omega_i^\nu \wedge \omega_\nu^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k + \omega_i^3 \wedge \omega_3^k \\ &= \omega_i^j \wedge \omega_j^k - b_{it}b_{ks}\theta^t \wedge \theta^s \\ &= \omega_i^j \wedge \omega_j^k + \frac{1}{2} \{b_{it}b_{ks} - b_{is}b_{kt}\} \theta^s \wedge \theta^t \end{aligned}$$

このように変形したのは、 $\omega_i^k$  が添え字に対して反対称的であるから、右辺も反対称的な形に合わせるためである。したがって、 $i = 2, k = 1$  の場合を調べれば十分である。したがって

$$d\omega_2^1 = (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})\theta^1 \wedge \theta^2 \quad (32)$$

が得られた。ところで、 $\theta^1 \wedge \theta^2$  の前の係数は  $\det B$  であるから、なにか特別な意味がありそうである。実際あって、実は Gauss 曲率になっている。<sup>\*1</sup>

したがって、次の**第二構造式**が得られた。

$$d\omega_2^1 = K\theta^1 \wedge \theta^2 \quad (33)$$

---

<sup>\*1</sup> 証明はここでは略すが、次のように考える。まず、 $du, dv$  から  $\theta^1, \theta^2$  への線形変換の行列  $A$  を考えておく。これは少し計算すればわかるように、正則である。少々面倒な計算をすると、 $S = (L_{ij})$  が、 $S = {}^TABA$  と書けるとわかるから、 $\det B = \det S / \det({}^TAA)$  となる。ここで、 $S$  は、第二基本形式を二次形式と見た時の対応する行列である。さらに、 ${}^TAA$  は第一基本形式の対応する行列になっているから、Gauss 曲率の定義より  $\det B = K$  となる。



## 5 曲面の構造方程式

さて、ここからは再び外の空間は忘れて、Riemann 計量のみから曲面の性質を調べることにしよう。

まず、 $ds^2 = \theta^1\theta^1 + \theta^2\theta^2$  と、 $D$  上一次独立な微分形式  $\theta^1, \theta^2$  で書き表せるかを考えてみる。これができれば、あとは先ほどの計算と同様に、曲面について色々調べることができそうである。これには、 $\theta^i = a_j^i du^j$  とまず書いておいて、 $\theta^1\theta^1 + \theta^2\theta^2$  を計算して、式 (9) と見比べればよい。そうすれば、

$$a_1^1 = \sqrt{E}, \quad a_1^2 = 0, \quad a_2^1 = \frac{F}{\sqrt{E}}, \quad a_2^2 = \sqrt{\frac{EG - F^2}{E}} \quad (34)$$

と置くことで実現できることがわかる。ただし、以下は必ずしも上記式のようにおいてるわけではないことに注意しておく。

次に、曲面の構造式を導入したい。そのためには、

$$d\theta^i = \theta^j \wedge \omega_j^i \quad (35)$$

なる  $\omega_2^1 = -\omega_1^2$  を求めればよい。  $\omega_2^1 = b_1\theta^1 + b_2\theta^2$  とおいて、

$$d\theta^1 = b_1\theta^2 \wedge \theta^1, \quad d\theta^2 = b_2\theta^1 \wedge \theta^2 \quad (36)$$

を満たすような  $b_1, b_2$  をとればよい。これは一意に定まるから、第一構造式が成り立つような一次微分形式の交代行列

$$\omega = \begin{bmatrix} 0 & \omega_2^1 \\ \omega_1^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

が一意に定まることが分かった。これを**接続形式**という。また、第二構造式

$$d\omega_2^1 = K\theta^1 \wedge \theta^2 \quad (38)$$

より Gauss 曲率  $K$  を定義する。

以上で、第一構造式と第二構造式が作れたから、これによって曲面の解析が可能になった。これ以上になると、おそらく時間がないだろうからひとまずこの辺で話を区切る。

## 6 Riemann 計量が内積を定義するとは?

最後に, Riemann 計量が内積を定義しているとはどういうことかについて簡単に触れておく. まず, Riemann 計量  $ds^2$  を  $ds^2 = \theta^1\theta^1 + \theta^2\theta^2$  と書いておく. このとき,  $\theta^1, \theta^2$  に対応する双対なベクトル場  $e_1, e_2$  が存在するはずである. この接ベクトルが大きさ 1 で, たがいに直交するように内積を定めることにする. 実はこの内積は,  $e_1, e_2$  の選び方, つまり,  $\theta^1, \theta^2$  によらないことが証明される. つまり, この内積は Riemann 計量  $ds^2$  のみによって決まる. このようにして, 接ベクトル空間に内積が定義された.

内積があれば, 接ベクトルの大きさが測れ, したがって, 曲線の長さを定義することができる. 曲線の長さだとかいうのは, 内積があって初めて測れるものであって, 内積がない空間では長さを図る尺度がないので, そもそも定義できないのである.

なお, 第一基本形式の各係数は, 以下のように書けることが知られている.

$$E = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle, \quad F = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle, \quad G = \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle \quad (39)$$

ただし,  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  は先ほど定義した内積を表す. こちらのほうが,  $E, F, G$  を与えたら  $u, v$  軸に沿った接ベクトル (基底) の内積が与えられているようで, “内積が定義された” 実感がわきやすい.