

愛好会模擬テスト 微積分 2

—— テストを始める前に ——

テスト時間は 30 分であり、テスト開始の合図があるまで取り組まないこと。

今回は模擬試験であるため、点数は気にしなくてもよい。

テスト範囲は、「不定積分」「定積分」「広義積分」「数値積分」「関数の展開」「オイラーの等式」である。一部の公式をこの枠の下に書いておく。自由に参考にせよ。

問題は 大問 1 から 大問 6 まで存在する。大問 1 は 1 問 2 点 (5. だけ 3 点)、大問 6 は 1 問 4 点である。残りはすべて 1 問 3 点である。

持ち物は、鉛筆またはシャーペン、消しゴム、定規、答えを書く用の紙、計算用紙のみとする。

公式集

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \int f(g(t))g'(t)dt & / \int f'(x)g(x)dx &= f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx \\ f(x) &= \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt & / \int_a^b f(x) &= F(b) - F(a) \\ \int_a^b f(x)dx &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(g(t))g'(t)dt & / \int_a^b f'(x)g(x)dx &= [f(x)g(x)]_a^b - \int f(x)g'(x)dx \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx & / \int_a^b f(x)dx &= \lim_{\epsilon_1 \rightarrow +0} \int_a^{c-\epsilon_1} f(x)dx + \lim_{\epsilon_2 \rightarrow +0} \int_{c+\epsilon_2}^b f(x)dx \\ \int_a^b f(x)dx &\doteq \frac{h}{2} \{f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \cdots + 2f(a+(n-1)h) + f(b)\} \\ \int_a^b f(x)dx &\doteq \frac{h}{3} \{f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + \cdots + 2f(a+(2m-2)h) + 4f(a+(2m-1)h) + f(b)\} \\ f'(c) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (a < c < b) & / \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f'(a)}{g'(a)} \end{aligned}$$

マクローリン展開

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

次のページから問題です。

大問 1

以下の不定積分、定積分を求めよ。ただし、 a, b は定数とする。

$$(1) \int \frac{dx}{\tan \theta}$$

$$(2) \int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2 - 9}$$

$$(3) \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$(4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin x}} dx$$

$$(5) \int_0^{\pi} \frac{dx}{a - \cos x} \quad (a > 1)$$

大問 2

以下の関数をマクローリン展開せよ。

$$(1) e^x$$

$$(2) \sin x$$

大問 3

以下を証明せよ。

(1) $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$ は $s > 0$ のとき確定した値を持つ。 $\Gamma(s)$ はガンマ関数と呼ばれる。このとき次のことを示せ。

$$1. \Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad 2. \Gamma(n+1) = n! \quad (n \in \mathbb{N})$$

(2) $y^2 = 4ax$ と $x^2 = 4ay$ ($a > 0$) の面積を S とすると、

$$S = \frac{16}{3} a^2$$

となることを示せ。

(3) $\lim_{x \rightarrow +0} x^n \log x$ は (n が正の整数) であるとき極限値が 0 となる。このことを示せ。

大問 4

定積分 $\int_4^8 \frac{dx}{x}$ について、以下の問いに答えよ。

(1) 定積分の値をこたえよ。

(2) $n = 3$ の台形公式を使い、定積分の値をこたえよ。

(3) $n = 3$ のシンプソンの公式を使い、定積分の値をこたえよ。

(まだ続きます。)

大問 5

次の文章はのびたくんとドラえもんの会話である。これを読んで後の問に答えよ。

のびたくんとドラえもんの会話 1

のびた : どらえもん、助けてよ～！

ドラえもん : どうしたんだい、のびたくん？

のびた : 実はね、昨日ジャイアンたちと遊んでいたら、ジャイアンを怒らせちゃって…。

ドラえもん : それは大変だね…。でも明日になったら機嫌はもとに戻るんじゃない？

のびた : それがね、明日までにこの問題を解けて言われちゃったんだよ～。解けなきゃぶっ飛ばすっていつてるんだよ～！

ドラえもん : それはまずいね。そいで、どんな問題なんだい？

のびた : えっとね…。定積分の問題なんだけど、 $a > 0$ だとして、

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

っていうのなんだけど…。

ドラえもん : なるほどね、こういう時は…! (ポケットをまさぐる音)

(効果音) $x = a \sin t$ と置いて置換する～!(某青だぬき風に)

のびた : おお！さすがあ、ドラえもん！こんどどらやき買って帰るよ！(つづく)

(1) 下線部のドラえもんのヒントをもとに

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

を求めよ。

のびたくんとドラえもんの会話 2

のびた : どらえもん！今度はもっとむずかしいもんだいがだされたよお～。

ドラえもん : … 今度はなんだい？

のびた : 今度はね、 $\frac{1}{e}$ の近似値を求めろっていうんだよ！

ドラえもん : へえ～、それじゃあマクローリン展開しちゃえばいいんじゃない？

のびた : あ、確かに。ごめんもういいかも。

ドラえもん : おい、どら焼きは？

のびた : もう用ないからいいよ。あっち行ってて。

(2) 下線部のドラえもんのヒントをもとに e の近似値を途中式を記述して求めよ。

大問 6

以下の不定積分

$$I = \int \sin x \sin 2x \sin 3x dx$$

を次の “手順” で解いた。 $(\alpha) \sim (\delta)$ に当てはまる数式や数字をかけ。

手順

三角関数の加法定理から、 $\sin x \sin 2x = \boxed{(\alpha)}$ である。よって \sin の和で表すと

$$\sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{4} (\boxed{(\beta)})$$

であることを用いて、

$$I = \frac{1}{4} \int \boxed{(\gamma)} dx$$

となる。よって、

$$\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx = \boxed{\delta}$$

問題はこれで終わりです。見直しをしておきましょう。

点数 /60