

積分 解き方集

Σ 理学愛好会

I はじめに

積分の計算は、難しい。微分は式変形をしなくても、公式を適応するだけで解くことができるが、積分はそうはいかない。自分の計算しやすいように変形する必要があるのだ。うまく公式で扱える範囲に変形するにはある程度知識が必要だ。だが、それ以上に経験がものをいう。そこで、今回は積分の計算力をつけるため、様々なパターンの積分を解いてもらう。ある程度進めていくと、どういう式のときにどういう変形をすればいいかが見えてくるようになる。ぜひその“コツ”をつかんでほしい。

この資料の構成としては、まず始めに積分の感覚をつかむための“基礎の基礎”の問題を載せている。とりあえずそこから取り組んでいったん体をならすことをお勧めする。つぎに“基礎”の問題として、有理関数の積分や置換積分・部分積分の簡単な計算問題を載せている。そのあとは、応用問題として少し難しい積分を載せている。積分問題をパターンで分類して、それぞれの解き方も解説していく。

また今回は、実際にこれまでの資料で扱わなかった特殊な積分を併せて紹介していく。それらも同時に覚えていくことで自分の道具が増えていくことを実感してほしい。

目次

I	はじめに	1
II	不定積分の基礎の基礎	3
i	多項式の積分	3
ii	三角関数の積分	4
iii	指数関数の積分	5
iv	演習問題	5
III	不定積分の基礎	6
i	置換積分の基礎	6
ii	部分積分の基礎	7
iii	有理関数の積分の基礎	8
iv	演習問題	9
v	Coffee Break : $\log x $ の絶対値記号	9
IV	置換積分	10
i	$\sqrt{ax^2 + bx + c}$ の積分	10

II 不定積分の基礎の基礎

ここでは、置換積分や部分積分を用いなくて、単純な変形だけで解ける問題を扱う。基本がわかっていないひとはここから読むべきである。

i 多項式の積分

ここでは多項式の積分について扱う。先に言葉の復習から行う。多項式とは、

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \quad (a_0, \cdots, a_n \text{ は定数 } n > 1)$$

となるような $P(x)$ のことである。また $P(x)$ を x についての多項式ともいう。

さて、多項式の積分であるが、これらは x のべき乗の和であるため個別に積分できて、

$$\int P(x)dx = \int a_0x^n dx + \int a_1x^{n-1} dx + \cdots + \int a_{n-1}x dx + \int a_n dx$$

となる。それぞれの項の積分は簡単に求められる。

i.1 例題

$$\int (4x^3 + 3x^2 + 2x)dx$$

を求めよ。

解答

個別に積分すると、

$$\int (4x^3 + 3x^2 + 2x)dx = \int 4x^3 dx + \int 3x^2 dx + \int 2x dx = x^4 + x^3 + x^2 + C$$

となる。最後の積分定数を忘れないように。

i.2 例題

$$\int (x^2 + 1)^2 dx$$

を求めよ。

解答

展開すれば、個別に積分できるので、

$$\int (x^2 + 1)^2 dx = \int (x^4 + 2x^2 + 1)dx = \int x^4 dx + \int 2x^2 dx + \int dx = \frac{x^5}{5} + \frac{2}{3}x^3 + x + C$$

このように、積の形であっても展開して和に直すことで、個別に積分できる。個別に撃破すれば恐れることはない。

ii 三角関数の積分

次はみんな大好き三角関数の積分である。符号にさえ注意すればそこまで恐れることはない。ただ、三角関数の公式を把握していないと、 $\sin x, \cos x$ はできるかもしれないが、これが $\sin^2 x, \cos^2 x$ となったときに計算できなくなってしまう。曖昧な公式があれば復習をするとよい。

ii.1 例題

次の積分を求めよ。

$$\int (\sin x + \cos x) dx$$

解答

個別に積分してしまえば一発である。

$$\int (\sin x + \cos x) dx = \int \sin x dx + \int \cos x dx = -\cos x + \sin x + C$$

ii.2 例題

次の積分を求めよ。

$$(1) \int \sin^2 \frac{x}{2} dx \quad (2) \int \cos^2 \frac{x}{2} dx$$

解答

これまでのようにすでに和の形になっていないので最初は戸惑いやすい。半角の公式を使ってしまえば和の形に変形できる。

$$\begin{aligned} (1) \int \sin^2 \frac{x}{2} dx &= \int \frac{1 - \cos x}{2} dx = \frac{1}{2} \left(\int dx - \int \cos x dx \right) = \frac{1}{2} (x - \sin x) + C \\ (2) \int \cos^2 \frac{x}{2} dx &= \int \frac{1 + \cos x}{2} dx = \frac{1}{2} \left(\int dx + \int \cos x dx \right) = \frac{1}{2} (x + \sin x) + C \end{aligned}$$

この変形は実は結構よく使う。絶対に覚えておくべき変形である。

iii 指数関数の積分

ここでは指数関数を扱う。微分しても積分しても形が変わらない e^x という特殊な関数をメインで扱う。

iii.1 例題

次の積分を求めよ。

$$(1) \int 2^x dx \quad (2) \int e^{x+1} dx$$

解答

(1) 式をそのまま適応して、

$$\int 2^x dx = \frac{2^x}{\log 2} + C$$

(2) 指数法則 $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$ をもちいて、

$$\int e^{x+1} dx = e \int e^x dx = e^{x+1} + C$$

(2) の問題は普通は置換積分を使うが、指数法則を用いても解くことができるということを知ってほしい。

iv 演習問題

以下の積分を求めよ。

$$(1) \int \sqrt{x}(x^2 + 1) dx$$

$$(2) \int \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx$$

$$(3) \int 2 \cos x dx$$

$$(4) \int \left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}\right) dx$$

$$(5) \int 2^{\log x} dx$$

III 不定積分の基礎

ここでは、置換積分・部分積分、有理関数の積分を主に扱う。置換積分、部分積分をなくしては積分の問題は解くことができない(たまに微分から逆算することもできるが)。有理関数も有理関数の不定積分が必ず求められることから非常に重要になってくる。この重要性については応用問題の際に語るとして、とりあえず簡単な問題から取り組んでいこう。

i 置換積分の基礎

始めに置換積分について扱う。もっとも汎用性が高い変形方法ではないだろうか。一応、置換積分の公式を書いておく。

$$\int f(x)dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

i.1 例題

次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int (2x+1)^3 dx \quad (2) \int \tan x dx \quad (3) \int \cos^2 x dx$$

解答

(1) 展開して各項ごとに積分することもできるが、置換積分を使ったほうが圧倒的に早い。 $t = 2x + 1$ と置くと、 $dt = 2dx$ より、

$$\int \frac{1}{2}t^3 dt = \frac{1}{8}t^4 + C = \frac{1}{8}(2x+1)^4 + C$$

最後に x の式に戻すことを忘れないように。

(2) $\tan x = \sin x / \cos x$ の公式と $(\cos x)' = -\sin x$ を利用し、 $t = \cos x$ と置くと、

$$-\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = -\int \frac{1}{t} dt = -\log |t| + C = -\log |\cos x| + C$$

(3) 半角の公式を使い、 $t = 2x$ と置くことで、

$$\int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}(x + 2 \int \cos t dt) = \frac{1}{2}(x + 2 \sin 2x) + C$$

慣れてくると、(1) や (2) の問題程度ならわざわざ置換しなくても解くことができるようになる。

置換積分のポイントは、 $t = f(x)$ と置いたときに発生する $f'(x)$ をどう処理するかである。例えば例題 (2) では、 $t = \cos x$ と置いているが、これは $dt = -\sin x dx$ の $\sin x$ がちょうど分子にあるからできることなのだ。よって、うまく微分したらうまく重なる場所を探す必要がある。

i.2 例題

$\int x \sin(x^2) dx$ を求めよ。

解答

$t = x^2$ と置くと、 $\frac{1}{2}dt = x dx$ となり、式が簡単になる。 $\frac{1}{2} \int \sin t dt = -\frac{1}{2} \cos t + C = -\frac{1}{2} \cos(x^2) + C$

ii 部分積分の基礎

次は部分積分である。置換積分に比べたら使う機会は少ないかもしれないが、使えないと確実に困る。例えば、今年の京大数学の第一問は部分積分で解く。まず置換積分同様、公式を載せる。

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

式だけでは感覚はつかみにくいだろうから、試しに例題を解いてみよう。

ii.1 例題

次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int x \sin x dx \quad (2) \int x e^x dx \quad (3) \int x \log x dx$$

解答

(1) $f(x) = x, g'(x) = \sin x$ と置くと、

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$$

(2) 前問と同様に $f(x) = x, g'(x) = e^x$ と置くと、

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C = (x-1)e^x + C$$

(3) 今度は $f(x) = \log x, g'(x) = x$ と置くと、

$$\int x \log x dx = \frac{1}{2} x^2 \log x - \int \frac{1}{2} x dx = \frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{1}{4} x^2 + C$$

例題を見ればわかるように、 $xf'(x)$ の積分は、 x を微分することで $f(x)$ の積分に変形できる。ただ、 $f(x)$ の積分が余りにも複雑な場合には、この変形は使わないほうが良いかもしれない。(3) は、 $(\log x)' = \frac{1}{x}$ に気づけば、 x の積分に変形できる。このような積分は後ほど詳しく学ぶ。

ii.2 例題

次の不定積分を求めよ。

$$\int e^x \cos x dx$$

解答

とりあえず、この不定積分を I と置いて計算する。二回部分積分を行うと、

$$I = \int e^x \cos x dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx = e^x \cos x + e^x \sin x - I$$

よって、

$$I = \frac{e^x}{2} (\cos x + \sin x) + C$$

このように部分積分を行うことで、右辺に求めたい積分をつくることで、積分を計算することもできる。

iii 有理関数の積分の基礎

最後に有理関数の積分についてである。先に有理関数の定義を述べておく。 $f(x), g(x)$ をそれぞれ多項式とすると、有理関数 $F(x)$ は次のようになる。

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

一般に、有理関数の積分は常に求められる。下線部の性質はとても重要で、これを用いれば、被積分関数を x に関する有理関数に帰着することが出来れば、その積分は必ず求められることになる。そのため、有理関数の積分を求める練習はしておいたほうが良いだろう。

iii.1 例題

次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int \frac{x+5}{x-2} dx \quad (2) \int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx \quad (3) \int \frac{dx}{x^2-9}$$

解答

(1) $\frac{x+5}{x-2} = 1 + \frac{7}{x-2}$ という風に変形を施せば、

$$\int 1 + \frac{7}{x-2} dx = x + 7 \int \frac{dx}{x-2} = x + 7 \log |x-2| + C$$

(2) 有理関数の積分というよりは、置換積分の練習になってしまうが、

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \log |t| + C = \frac{1}{2} \log(x^2+1) + C$$

(3) そのままでは積分できないので、もちろん変形しなければならない。

$$\int \frac{dx}{x^2-9} = \int \frac{dx}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{6} \left(\int \frac{dx}{x-3} - \int \frac{dx}{x+3} \right) = \frac{1}{6} (\log |x-3| - \log |x+3|) + C = \frac{1}{6} \log \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C$$

このように部分分数分解を行うことで計算できる。

iii.2 例題

次の不定積分を求めよ。

$$\int \frac{2}{x^2-2x-3} dx$$

解答

部分分数分解によって、 $\frac{2}{x^2-2x-3} = \frac{2}{(x-3)(x+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1} \right)$ と変形できるので、

$$\int \frac{2}{x^2-2x-3} dx = \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{1}{2} \log \left| \frac{x-3}{x+1} \right| + C$$

iv 演習問題

次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int (x+2)^{100} dx$$

$$(2) \int \sin^3 x \cos x dx$$

$$(3) \int x \cos x dx$$

$$(4) \int \log x dx$$

$$(5) \int x \sin(x^2) dx$$

$$(6) \int \sqrt{x} \log(x^2) dx$$

※ (6) の問題は、今年の京大数学の問題を一部変えて修正している。

v Coffee Break : $\log |x|$ の絶対値記号

$\frac{1}{x+a}$ の積分が何かと聞かれたら、もちろん $\log |x+a|$ と答えるだろう。では、 $\frac{2x}{x^2+1}$ の場合ならどうか？ $t = x^2 + 1$ と置換すれば求まるがその答えを $\log |x^2 + 1|$ と書いてしまっていないだろうか？ $x^2 + 1$ は最小値が 1 の関数である。すなわち、常に正なわけである。つまり、 $|x^2 + 1|$ は $(x^2 + 1)$ と書くべきなのだ。そもそも、絶対値記号がつくのは、真数条件を満たすようにするためである。常に満たしている $x^2 + 1$ に絶対値をつけるのは、おかしいのである。

ちなみに、複素数まで数を拡張すれば、真数に負の値が入っても問題ない。(例： $\log(-1) = \pi i$)

IV 置換積分

ここでは置換積分を中心に扱っていく。様々な置換の方法、テクニックを紹介する。

i $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ の積分

ひとまず、無理関数の積分から解いてみよう。無理関数の積分といっても様々な形があるが、今回は $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ に絞って扱っていく。

i.1 $\sqrt{a^2 - x^2}$ の積分

まず、 $\sqrt{a^2 - x^2}$ の積分から解く。こういうタイプの積分は、まず根号を外すことを考える。ここで三角関数の公式 $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ を思い出してみよう。右辺がなんとなく $a^2 - x^2$ に似ている。頑張って、 $1 - \sin^2 x$ の形に持ってくれば、 $\sqrt{\cos^2 x} = \cos x$ となり根号が外れて計算しやすくなる。

よって、 $x = a \sin \theta$ の置換を行えばよいことがわかる。 $dx = a \cos \theta d\theta$ であるため、

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} \cdot a \cos \theta d\theta = a^2 \int \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2}(\theta + \frac{1}{2} \sin(2\theta)) + C$$

ここで、 $\theta = \arcsin(\frac{x}{a})$ より、

$$\frac{1}{2}(\theta + \frac{1}{2} \sin(2\theta)) + C = \frac{1}{2}(\arcsin(\frac{x}{a}) + \frac{x}{a^2} \sqrt{a^2 - x^2}) + C$$

最後の式変形は $\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$ を用いた。

i.2 $\sqrt{x^2 + a^2}$ の積分

お次は、 $\sqrt{x^2 + a^2}$ の積分である。これには複数のやり方がある。まず最初に思いつくのが $x = a \tan \theta$ の置換だろう。先ほどの $\sqrt{a^2 - x^2}$ の積分と同様に、三角関数を用いて根号を外せばいい。ただ、この方法は計算量がほかの方法に比べて多くなってしまう。

そこで、 $x = a \sinh \theta$ と置換することで、計算量を抑えることができる。 $\sinh x$ を知らない人がいるかもしれないので説明しておく、これは双曲線関数と呼ばれ、 $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ である。読み方は、「ハイパボリックサイン」である。 $\sin x$ と似た形をしているのは、 $\sin x$ にとっても性質が似通っているからである。もちろん $\cosh x$ もある。こちらは $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ となる。ちょっと考えればわかるように $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$ である。この性質を利用して、

$$\sqrt{1 + \sinh^2 x} = \cosh x$$

となれば、根号を外すことができるのだ！

とりあえず、今言った三つの方法でそれぞれ積分してみる。

まず、 $x = a \tan \theta$ と置換してみる。

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{x^2 + a^2} dx = a^2 \int \frac{1}{\cos \theta} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = a^2 \int \frac{d\theta}{\cos^3 \theta} = \frac{a^2}{4} \left(\log \left(\frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} \right) + \frac{2 \sin \theta}{\cos^2 \theta} \right) + C \\ &= \frac{a^2}{4} \left(\log \left(\frac{1 + \sin(\arctan(\frac{x}{a}))}{1 - \sin(\arctan(\frac{x}{a}))} \right) + \frac{2 \sin(\arctan(\frac{x}{a}))}{\cos^2(\arctan(\frac{x}{a}))} \right) + C \\ &= \frac{a^2}{4} \left(\log \left(\frac{1 + \frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}}}{1 - \frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}}} \right) + \frac{2 \frac{x}{a} (\frac{x^2}{a^2} + 1)}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}} \right) + C \end{aligned}$$

恐ろしい化け物ができているが、整理してあげるときれいな形に収まる。

$$\begin{aligned} I &= \frac{a^2}{4} \left(\log \left(\frac{a^2 + 2x^2 + 2x\sqrt{x^2 + a^2}}{a^2} \right) + \frac{2x}{a} \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} \right) + C \\ &= \frac{a^2}{4} \left(\log \left(\frac{(x + \sqrt{a^2 + x^2})^2}{a^2} \right) + \frac{2x}{a^2} \sqrt{a^2 + x^2} \right) + C \\ &= \frac{a^2}{4} \left(2 \log \left(\frac{(x + \sqrt{a^2 + x^2})}{a} \right) + \frac{2x}{a^2} \sqrt{a^2 + x^2} \right) + C \\ &= \frac{1}{2} \left(a^2 \log \left(\frac{(x + \sqrt{a^2 + x^2})}{a} \right) + x \sqrt{a^2 + x^2} \right) + C \end{aligned}$$

となる。途中に出てきた $\int dx / \cos^3 x$ は後ほど解説する。とても計算が大変になるのがわかる (ついでに言うなら計算するこちらでも大変だった)。

次に、 $x = a \sinh \theta$ と置換する。 $dx = a \cosh \theta d\theta$ であるため、

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + a^2} dx &= a^2 \int \sqrt{\sinh^2 \theta + 1} \cosh \theta d\theta \\ &= a^2 \int \cosh^2 \theta d\theta = a^2 \int \frac{1 + \cosh(2\theta)}{2} d\theta \end{aligned}$$

$2\theta = z$ と置くと、 $dz = 2d\theta$ となるため、

$$= \frac{a^2}{2} \left(\theta + \frac{1}{2} \int \cosh z dz \right) = \frac{a^2}{2} \left(\theta + \frac{1}{2} \sinh(2\theta) \right) + C$$

となる。 $\theta = \sinh^{-1} \frac{x}{a}$ であるため、

$$= \frac{a^2}{2} \left(\sinh^{-1} \frac{x}{a} + \frac{1}{2} \sinh(2 \sinh^{-1} \frac{x}{a}) \right) + C = \frac{a^2}{2} \left(\sinh^{-1} \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} \right) + C$$

ここで、 $\sinh^{-1} x = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$ であるため (自分で確かめよ)、これを代入して、

$$= \frac{a^2}{2} \left(\log \left(\frac{x}{a} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} \right) + \frac{x}{a} \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} \right) + C = \frac{1}{2} \left(a^2 \log \left(\frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{a} \right) + x \sqrt{a^2 + x^2} \right) + C$$

となり、 $a \tan \theta$ で置換した時と同じ結果になっている。 $\sinh^{-1} x$ を求めるのが少し面倒ではあるが、それでも $\tan \theta$ のときよりは明らかに簡単であると思う。