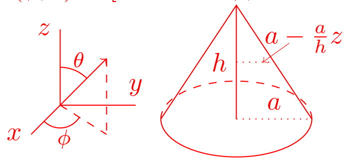
理学同好会　ベクトル解析　テスト 2　解答

以下に解答例を述べる．計算ミス等あったら教えてください．

問 1

I. 球面座標は下図のようにとった．これらはあくまで例であり，別のパラメータを選ぶと別の表式が得られることも注意しておく．

(1) $\boldsymbol{r}(\phi,\theta)=[a\sin\theta\cos\phi, a\sin\theta\sin\phi, a\cos\theta]$



(2) $\boldsymbol{r}(\theta,z)=[\left(a-\frac{a}{h}z\right)\cos\phi, (a-\frac{a}{h}z)\sin\phi, z]\quad(0\le\phi\le 2\pi, 0\le z\le h)$

(3) $\boldsymbol{r}(x,y)=[x,y,f(x,y)]$

(4) $\boldsymbol{r}(u,v)=[a\cosh u\cos v, b\cosh u\sin v, c\sinh u]$

II. 曲面は，$\boldsymbol{r}(\phi,u)=[u\cos\phi, u\sin\phi, \sqrt{a^2-u^2}]$ と書ける．u が長さの変わる半径とイメージできれば，これは一般の回転体でも使えることわかる．

(5) $\boldsymbol{r}_\phi=[-u\sin\phi, u\cos\phi, 0], \boldsymbol{r}_u=[\cos\phi,\sin\phi,\frac{-u}{\sqrt{a^2-u^2}}]$ より

$E=\boldsymbol{r}_\phi^2=u^2, F=\boldsymbol{r}_\phi\cdot\boldsymbol{r}_u=0, G=\boldsymbol{r}_u^2=1+\frac{u^2}{a^2-u^2}=\frac{a^2}{a^2-u^2}$

(6) $dS=\sqrt{EG-F^2}d\phi du=\frac{au}{\sqrt{a^2-u^2}}d\phi du$

(7) $\int_S dS=\int_0^a du\int_0^{2\pi}\frac{au}{\sqrt{a^2-u^2}}d\phi=2\pi a\int_0^a\left\{-\sqrt{a^2-u^2}\right\}' du=2\pi a^2$ で，球全体はこれを二倍する．

(8) 定義より $\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_\phi\times\boldsymbol{r}_u}{|\boldsymbol{r}_\phi\times\boldsymbol{r}_u|}=\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{au}(\boldsymbol{r}_\phi\times\boldsymbol{r}_u)=\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{au}[-\frac{u^2}{\sqrt{a^2-u^2}}\cos\phi, -\frac{u^2}{\sqrt{a^2-u^2}}\sin\phi, -u]$

$=[-\frac{u}{a}\cos\phi, -\frac{u}{a}\sin\phi, -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{a}]$

(9) $\boldsymbol{r}_{\phi\phi}=[-u\cos\phi, -u\sin\phi, 0], \boldsymbol{r}_{\phi u}=[-\sin\phi, -\cos\phi, 0], \boldsymbol{r}_{uu}=\left[0,0,\frac{-a^2}{(a^2-u^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$ より

$L=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{\phi\phi}=\frac{u^2}{a^2}, M=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{\phi u}=0, N=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{uu}=\frac{a}{a^2-u^2}$

(10) $K=\frac{LM-N^2}{EG-F^2}=\frac{1}{a}, H=\frac{1}{2}\frac{GL+EN-2FM}{EG-F^2}=\frac{1+a}{2a^2}$

III. 以下は簡単な証明問題である．

(11) $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{n}$ が平行であることを示せばよい．先ほどの (8) から $\boldsymbol{n}=-\frac{1}{a}\boldsymbol{r}$ となることを示せ．

(12)

$$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x_u&y_u&z_u\\x_v&y_v&z_v\end{vmatrix}=\left[\begin{vmatrix}y_u&z_u\\y_v&z_v\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}x_u&z_u\\x_v&z_v\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}x_u&y_u\\x_v&y_v\end{vmatrix}\right]=\left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]$$

より示される．ここで $-\begin{vmatrix}x_u&z_u\\x_v&z_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}z_u&x_u\\z_v&x_v\end{vmatrix}$ を用いた．

IV. II の手順のように計算する．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_u &= \left[k\cos u\cos v, k\cos u\sin v, \frac{k}{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}} - k\sin u\right] = \left[k\cos u\cos v, k\cos u\sin v, k\left(\frac{1}{\sin u} - \sin u\right)\right] \\
\boldsymbol{r}_v &= [k\sin u\sin v, k\sin u\cos v, 0]
\end{aligned}
$$

だから

$$
\begin{aligned}
E &= \boldsymbol{r}_u^2 = k^2\cos^2 u + \frac{k^2}{\sin^2 u} - 2k^2 + k^2\sin^2 u = \frac{k^2}{\sin^2 u} - k^2 = k^2\frac{\cos^2 u}{\sin^2 u} \\
F &= \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v = 0 \\
G &= \boldsymbol{r}_v^2 = k^2\sin^2 u
\end{aligned}
$$

単位法線ベクトルは

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{n} &= \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{1}{k^2\sqrt{\cos^2 u}}[k^2(\sin^2 u\cos v - \cos v), -k^2(\sin v - \sin^2 u\sin v), k^2\cos u\sin u] \\
&= \frac{1}{k^2\sqrt{\cos^2 u}}[-k^2\cos^2 u\cos v, -k^2\cos^2 u\sin v, k^2\cos u\sin u] \\
&= [-\cos u\cos v, -\cos u\sin v, \sin u]
\end{aligned}
$$

となる.[*1] 曲面の二回微分を求めると

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_{uu} &= \left[-k\sin u\cos v, -k\sin u\sin v, k\left(-\frac{\cos u}{\sin^2 u} - \cos u\right)\right] \\
&= \left[-k\sin u\cos v, -k\sin u\sin v, -k\cos u\left(1 + \frac{1}{\sin^2 u}\right)\right] \\
\boldsymbol{r}_{uv} &= [-k\cos u\sin v, k\cos u\cos v, 0] \\
\boldsymbol{r}_{vv} &= [-k\sin u\cos v, -k\sin u\sin v, 0]
\end{aligned}
$$

だから, 第 2 基本量は

$$
\begin{aligned}
L &= \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{uu} = k\cos u\sin u - k\cos u\left(\sin u + \frac{1}{\sin u}\right) = -k\frac{\cos u}{\sin u} \\
M &= \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{uv} = 0 \\
N &= \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{vv} = k\cos u\sin u
\end{aligned}
$$

これより, Gauss 曲率を求めると

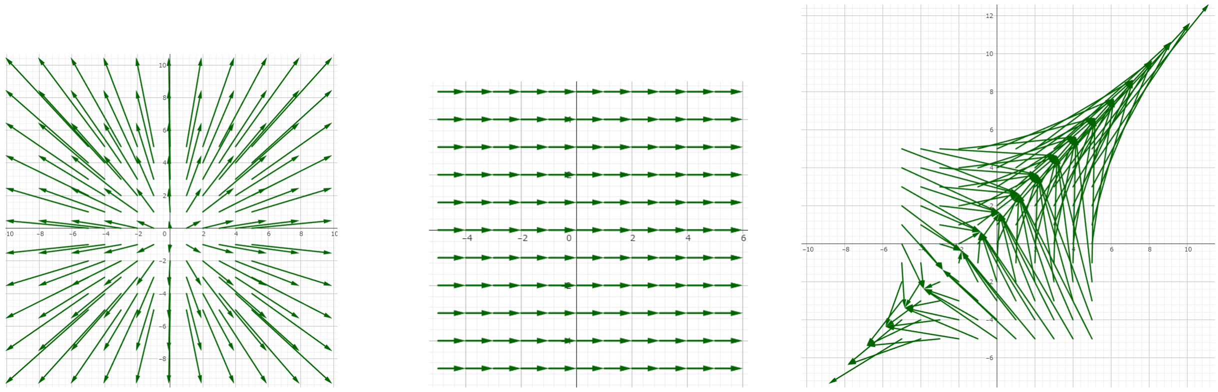
$$
K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{-k^2\cos^2 u}{k^4\cos^2 u} = -\frac{1}{k^2}
$$

となり, 負の一定値であることがわかる．

[*1] 鋭い人なら,u の範囲から $\sqrt{\cos^2 u} = |\cos u|$ とすべきではと思ったかもしれない．この指摘は完全に正しい．本来法線ベクトルは連続的に変化するように取るべきだから, 一方で曲面の内側, もう一方で外側に取るなどは好ましくない．ただ今回の場合はどちらの符号を選んだとしても Gauss 曲率 K の LN の部分で打ち消すから ‘たまたま’ 問題なかっただけである．

問 2

I. 概形は以下のとおりである．図の作成には GeoGebra[*2]を用いた．



(a) $\boldsymbol{v} = [x, y]$　　(b) $\boldsymbol{v} = [1, 0]$　　(c) $\boldsymbol{v} = [y, x]$

図 1 各ベクトル場

II. **(1)** $\mathrm{grad}\ U = [0, mg]$

(2) $\mathrm{grad}\ U = [2, 1]$

(3) $\mathrm{grad}\ U = [0, mg, 0]$

(4) 普通に計算してもよいが，これは電位の式だから $\mathrm{grad}\ V(x, y, z) = -\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r} \quad (\boldsymbol{r} = [x, y, z], r = |\boldsymbol{r}|)$

III. **(5)** $\mathrm{div}\ \boldsymbol{v} = 0, \mathrm{rot}\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$

(6) $\mathrm{div}\ \boldsymbol{v} = 2x + 1, \mathrm{rot}\ \boldsymbol{v} = [1, 0, 1]$

(7) $$\mathrm{div}\ \boldsymbol{v} = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} + \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{y^2+x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \end{vmatrix} = \left[0, 0, -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

IV. 略

[*2] https://www.geogebra.org/graphing?lang=ja

問 3

以下ではベクトル場上で積分を行う.

I. まずは簡単な線積分で練習してみよう. 以下の経路について, 線積分を実行せよ. ただし, $\boldsymbol{F} = [y^2, x + y^2]$ とする.

(1) $\int_{C_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$

(2) $\int_{C_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^4 (4 + y^2)dy = \frac{112}{3}$

(3) $\int_{C_1+C_2} = \int_{C_1} + \int_{C_2} = \frac{112}{3}$

(4) $dy = \frac{1}{2}xdx$ より $\int_{C_3} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^4 \left\{ \frac{x^4}{16}dx + \left(x + \frac{x^4}{16} \right) \frac{x}{2}dx \right\} = \int_0^4 \left(\frac{x^5}{32} + \frac{x^4}{16} + \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{224}{5}$

(5) $y^2 = 4x$ より $dx = \frac{1}{2}ydy$ だから $\int_{C_4} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^4 \left\{ \frac{1}{2}y^3 + \frac{5}{4}y^2 \right\} dy = \frac{320}{4}$

$\boldsymbol{F} = [ax + by, bx + cy]$ のときについて考える. もちろん普通に計算してもよいが, $\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = (ax + by)dx + (bx + cy)dy = d\left(\frac{a}{2}x^2\right) + d(bxy) + d\left(\frac{c}{2}y^2\right) = d\left(\frac{ax^2+2bxy+cy^2}{2}\right)$ より

$\int_{C_1} = 8a, \int_{C_2} = 8(a + 2b + c) - 8a = 8(2b + c)$ であり, $\int_{C_1+C_2} = \int_{C_3} = \int_{C_4} = 8(a + 2b + c)$

II. 積分記号下が $\mathrm{grad}\,(xyz) \cdot d\boldsymbol{r}$ であることより示される.

III. 半径を a とおく.

$$\oint_\Gamma \frac{x^3 - 3xy^2}{(x^2 + y^2)^2} dx = \int_{-a}^a \frac{x^3 - 3x(a^2 - x^2)}{a^4} dx = \int_{-a}^a \frac{1}{a^4}(4x^3 - 3a^2x)dx = 0$$

IV. Gauss の定理を用いる.

(6) $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}dS = \iiint_V (2x + 2y + 2z)dxdydz = \int_{-1}^1 dz \int_{-1}^1 dy \int_{-1}^1 (2x + 2y + 2z)dx = 0$

(7) $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}dS = \iiint 3dxdydz = 3 \cdot 2^2\pi \cdot 5 = 60\pi$

(8) $\boldsymbol{F} = [x^3, y^3, z^3], \boldsymbol{n} = [x, y, z]$ として, $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}dS = 3 \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$

$\displaystyle= 3 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \int_0^1 r^2 \cdot r^2 \sin^2 \theta dr = \frac{12}{5}\pi$

V. **(9)** 質量 m の質点と単位質量の質点を結ぶ直線状に働き, 吸引力だから方向は $-\frac{\boldsymbol{r}}{r}$ で, 大きさは $|\boldsymbol{F}| = F$ となっているから.

(10) S が半径 r の球表面だから

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_S \boldsymbol{F} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r}dS = -\frac{Gm}{r^2} \iint_S dS = -\frac{Gm}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = -4\pi Gm$$

VI. $\arctan x$ の導関数がわかれば解ける.

(11) $\partial_x\theta = -\frac{y}{x^2+y^2}, \partial_y\theta = \frac{x}{x^2+y^2}$

(12) $d\theta = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$

(13) $\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = d\theta$ だから積分 $\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \oint_C d\theta$ は C が原点回りを何 rad 回ったかを表す. これを 2π で割れば, 何回回ったかが求められる. これは arctan が多価関数であることに起因する. 図を描くとイメージしやすい.

以上