写像ってなんすか

「写像」... 某論破王の影響で言葉事態は知っている人が多いかもしれない。ただ、その意味について考えたことはあるだろうか？おそらくほとんどの人は「写像」の意味を知らないと思う。そこで今回はこの「写像」について学んでみよう。~~それいけ某論破王を論破しよう!!~~

i　対応ってなんすか

数学では、集合と並んで基本的な概念として**対応**というものがある。その定義を述べると、

> A, B を二つの集合とし、ある規則 Γ によって A の各元 a にたいしてそれぞれ一つずつ B の部分集合 $\Gamma(a)$ が定められるとする。そのとき、その規則 $\Gamma(a)$ のことを A から B の**対応**という。

さらに、A の元 a にたいして定まる B の部分集合 $\Gamma(a)$ を、Γ による a の像という。また、A, B をそれぞれ対応 Γ の始域（定義域)、終域という。またこのとき、B の部分集合のうち同じものがあってもよいし、部分集合が空集合であるような元が存在してもよい。つまり、$\Gamma(a) = \Gamma(a') \quad (a \neq a')$ であってもよいし、$\Gamma(a) = \phi$ であるような a があってもよい。ちなみに、Γ が A から B の対応であることを $\Gamma : A \to B$ と表す。

とはいえ、これだけ聞いてもイメージしにくいので現実世界に置き換えて考えてみよう。たとえば、トマラーに友達といった時を考えてみる。このとき、自分と知り合いを含めた客 (Customer) は、お店に対してメニュー (Menu) から '料理を選ぶ' はずだ。この '料理を選ぶ' ことこそがまさに対応である。客の集合 C の各元はメニューの集合 M の元から料理を一つでも複数でも選ぶ。その選んだ品物の集合は M の部分集合になっているはずだ。このとき、客ごとに選んだ料理の品はかぶってもいいし、かぶらなくてもいい。もちろん一つも料理を頼まず水だけ頼む客もいるだろう（ほんとはよくない)。

ii　写像ってなんすか

さて、ここから本題の写像について考える。とはいえ写像は対応がとある性質を持つ場合のものであるため、ほとんど対応と同じみたいなものである。その性質とは、

> A の任意の元 a に対して、$f : A \to B$ である対応 f の $f(a)$ が B のただ一つの元からなる集合。

である。つまり**写像**とは<u>A のどんな元に対しても B の元を一つに対応させる</u>規則のことである。

先ほどの対応との違いは対応先が一つでしかないところである。そのため対応を説明する際の例は写像でもある。ほかにも我々になじみのある $f(x) = x^2$ は、ある実数の集合 $\mathbb{R}$ の元 x に対して実数の集合の元 x^2 が対応しているので写像である。なお、$f(x) = x^2$ のように終域が数字である場合は関数といい、それ以外の場合は写像ということが多い。

反対に、写像ではない例として逆三角関数がある。例えば、$\arcsin x$ は $-1 \leq x \leq 1$ の実数 x に対して無限個の値が存在する。（ただ実際は主値を取っている。$\arcsin x$ なら $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$）

写像 $f : A \to B$ によって A の元 a に B の元 b が対応するとき、b を f による a の**像**といい、$b = f(a)$ と表す。このとき、a を f による b の**原像**または**逆像**といい、$a = f^{-1}(b)$ と表す。

中学生でもわかることだが、関数 $f(x) = 4x^2$ と関数 $g(x) = (2x)^2$ は $\mathbb{R}$ のどんな元 x についても $f(x) = g(x)$ が成り立つ。同じように、$f : A \to B$ である写像 f と $g : A \to B$ である写像 g が、A のどんな元 a についても常に $f(a) = g(a)$ となるとき、写像として**等しい**といい $f = g$ と表す。もちろん等しくないときは $f \neq g$ で表す。

問題

A, B がそれぞれ m 個,n 個の元からなる有限集合のとき、A から B への対応は全部でいくつあるか。また、写像はいくつあるか。ヒント：まずは A の一つの元について考えてみよう。

解答

まず A の集合の元の一つ a_1 について考えてみよう。このとき A から B の対応は 2^n 個ある。なぜなら、a_1 に対して B の一つの元に対応する場合は ${}_nC_1$ 個、二つの元に対応する場合は ${}_nC_2$ 個、三つの元に対応する場合は ${}_nC_3$ 個...n 個の元に対応する場合は ${}_nC_n$ 個あり、一つの元も対応しない場合も合わせると

$$1 +_n C_1 +_n C_2 + \cdots +_n C_n = 2^n$$

となるからである。（この計算は基礎数学 1 問題集の step up 464 等を参照するといい。）同様に写像についても考える。写像の場合は、一つの元 a_1 に対して B の元が一つ対応するわけだから、その数は B の元の数と同じになる。よって n 個。

次に、A のすべての元について考える。対応は a_1 のときは 2^n 個あり、元は $a_1, a_2, \cdots, a_m$ とあるわけだから、$2^n \times 2^n \times \cdots \times 2^n = (2^n)^m = 2^{mn}$ となり、答えは 2^{mn} 個となる。同様に、写像も $n \times n \times \cdots \times n = n^m$ となるため、n^m 個となる。

対応は 2^{mn} 個, 写像は n^m 個

iii　合成写像ってなんすか

三つの集合 A, B, C があるときに、A から C までの写像を B を経由して考えることができる。つまり、$f : A \to B \quad g : B \to C$ とすると A から C までの写像は $a \in A$ として $g(f(a))$ となる。これを f, g の**合成**または **合成写像** といい $g \circ f$ と表す。

問 5.1

二つの写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x + 2, g(x) = x^2 + 1$ で与える。合成写像 $f \circ g, \quad g \circ f$ $f \circ f, \quad g \circ g$ を式で表せ。

解答

$$f \circ g = (x^2 + 1) + 2 = x^2 + 3 \qquad g \circ f = (x + 2)^2 + 1 = x^2 + 4x + 5$$
$$f \circ f = (x + 2) + 2 = x + 4 \qquad g \circ g = (x^2 + 1)^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 2$$

次に合成写像の**結合法則**について

写像 $f : X \to Y, \quad g : Y \to Z, \quad h : Z \to W$ の合成について、等式

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

が成り立つ。

■証明　各元 $x \in X$ に対して、

$$[h \circ (g \circ f)](x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = [(h \circ g) \circ f](x)$$

が成り立つ。□

iv　像ってなんすか

$f : A \to B$ を写像とする。A の部分集合 A' に対して、B の部分集合 $\{f(a) \mid a \in A'\}$ を f による A' の**像**といい、$f(A')$ と表す。B の部分集合 B' に対して、A の部分集合 $\{a \in A \mid f(a) \in B'\}$ を f による B' の**原像**または**逆像**といい、$A' = f^{-1}(B')$ と表す

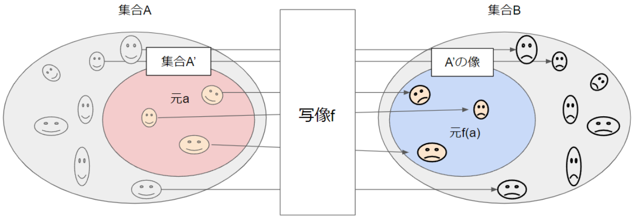

図 1　像のイメージ図

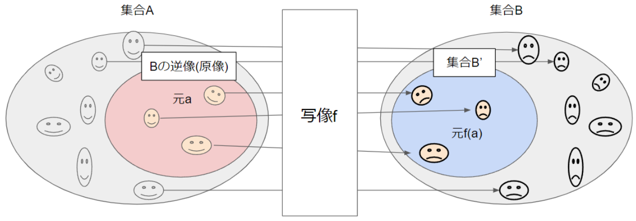

図 2　逆像のイメージ図

$f : A \to B$ を写像とする。A の部分集合 A_1, A_2 および B の部分集合 B_1, B_2 に対して、次式が成り立つ。

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2) \qquad |A_1 \text{ と } A_2 \text{ の和集合の像は } A_1 \text{ の像と } A_2 \text{ の像の和集合} \tag{1}$$

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2) \qquad |A_1 \text{ の像と } A_2 \text{ の像の共通部分は } A_1 \text{ と } A_2 \text{ の共通部分の像を\textbf{含む}} \tag{2}$$

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \qquad | \tag{3}$$

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \qquad | \tag{4}$$

$$A_1 \subset f^{-1}(f(A_1)) \qquad |A_1 \text{ の像の逆像は } A_1 \text{ を\textbf{含む}} \tag{5}$$

$$f(f^{-1}(B_1)) \subset B_1 \qquad | \tag{6}$$

$$f(A_1) - f(A_2) \subset f(A_1 - A_2) \qquad |\text{※差集合 } A - B \text{ は } A \text{ \textbf{に含まれて} } B \text{ \textbf{に含まれない}元の集合} \tag{7}$$

$$f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 - B_2) \qquad | \tag{8}$$

図でイメージするとなんとなくのイメージはつかみやすいかもしれない。

とはいえ、ただ式を並べただけでは「なんかそういうデータってあるんすか？」と言われてしまうので、簡単に証明もしておこう。

■証明　まずは、(1) を証明する。

左辺の $f(A_1 \cup A_2)$ は、$\{b \in B \mid b = f(a)$ となる元 $a \in A_1 \cup A_2$ が存在する $\}$ と書ける。なぜなら、f は $A \to B$ の写像だからこの集合の元は必ず B の元となるはずであり、さらに写像の定義[*1]とかっこの中身から $b = f(a)\quad(a \in A_1 \cup A_2)$ を満たす a が存在することが条件であるからである。

ここで下線部の条件は $A_1 \cup A_2$ から

$\{b \in B \mid b = f(a_1)$ となる元 $a_1 \in A_1$ または $b = f(a_2)$ となる元 $a_2 \in A_2$ が存在する $\}$

と言い換えられる。次に下線部のところに着目するとこれは $b \in f(A_1)$ と書き換えられる。[*2]「または...」以降も同様に書き換えると、$\{b \in B \mid b \in f(A_1)$ または $b \in f(A_2)\}$ となる。これはまさに右辺の式そのものとなる。□

[*1] A のどんな元も B の元を一つに対応させる規則
[*2] このページの一行目を参照

(1) の証明を式で書くと次のようになる。

$$
\begin{aligned}
f(A_1 \cup A_2) &= \{b \in B \mid b = f(a) \text{ となる元 } a \in A_1 \cup A_2 \text{ が存在する }\} \\
&= \{b \in B \mid b = f(a_1) \text{ となる元 } a_1 \in A_1 \text{ または } b = f(a_2) \text{ となる元 } a_2 \in A_2 \text{ が存在する }\} \\
&= \{b \in B \mid b \in f(A_1) \text{ または } b \in f(A_2)\} \\
&= f(A_1) \cup f(A_2).
\end{aligned}
$$

通してみてみると意外とあっけない。

次に (2) を証明する。こちらも (1) と同様に $f(A_1 \cap A_2)$ は $\{b \in B \mid b = f(a) \text{ となる元 } a \in A_1 \cap A_2 \text{ が存在する }\}$ と書ける。この次がポイントでこの集合は
$\{b \in B \mid b = f(a_1) \text{ となる元 } a_1 \in A_1 \text{ および } b = f(a_2) \text{ となる元 } a_2 \in A_2 \text{ が存在する }\}$
に**含まれている**といえる。
なぜなら、この条件「$b = f(a_1)$ となる $a_1 \in A_1$ および $b = f(a_2)$ となる $a_2 \in A_2$ が存在する」は A_1 **に含まれる元**の条件と A_2 **に含まれる元**の条件であるのに対し、最初の条件は $A_1 \cap A_2$ に含まれる元の条件となっており、元が含まれる元の集合は明らかに前者のほうが大きいためである。おそらく何言ってるかわからないと思うので例を出すと、A_1 と A_2 の対称差[*3]の元は、始めの条件の適応外であるが後の条件の範囲内である。

さらにこの条件は (1) 同様、$\{b \in B \mid b \in f(A_1) \text{ かつ } b \in f(A_2)\}$ と書き換えられるので、右辺の式そのものとなる。□

これも、式で書くと次のようになる。

$$
\begin{aligned}
f(A_1 \cap A_2) &= \{b \in B \mid b = f(a) \text{ となる元 } a \in A_1 \cap A_2 \text{ が存在する }\} \\
&\subset \{b \in B \mid b = f(a_1) \text{ となる元 } a_1 \in A_1 \text{ および } b = f(a_2) \text{ となる元 } a_2 \in A_2 \text{ が存在する }\} \\
&= \{b \in B \mid b \in f(A_1) \text{ かつ } b \in f(A_2)\} \\
&= f(A_1) \cap f(A_2).
\end{aligned}
$$
$$\therefore f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2).$$

(1) に比べて難しかったと思う。「なぜなら...」のところは図を書いてみると分かりやすいかもしれない。

次は (3) を証明する。

(4) は省略する。演習問題で解く。

[*3] A_1 のみの元の集合と A_2 のみの元の集合の和集合