関数の展開とオイラーの公式

0.1　はじめに

今回は関数の展開とオイラーの公式について、順を追って学ぶ。とはいえ今回は多くの定理が出てくるので、途中で何をやっているのかを見失ってしまうかもしれない。そこで、全体の論理的筋道をまとめておく。

$$\boxed{\text{ロールの定理} \to \text{平均値の定理} \to \text{テイラーの定理} \to \text{テイラー展開} \to \text{オイラーの公式}}$$

若干大まかすぎるかもしれないが、大体の目安くらいに思ってくれたらいい。

0.2　ロールの定理

関数 $f(x)$ が $a \leq x \leq b$ で連続で、$a < x < b$ のすべての点で微分可能であり、$f(a) = f(b)$ であれば、少なくとも一点 $c(a < c < b)$ において、$f'(c) = 0$ となる。これを、**ロールの定理**[*1]という。

ロールの定理を証明する。連続関数は区間 $a \leq x \leq b$ で最大値 M 最小値 m をとる。もし、$M = m$ ならば、この関数は一定の値 $M = m$ を取り続けるから、区間内のすべての点で $f'(x) = 0$。よって定理は成り立つ。以後、$m < M$ とする。$f(a) = f(b)$ であるから、m と M の両方が端点での関数値となることはない。点 $c(a < c < b)$ で最大値 $f(c) = M$ とする。この最大値は $x = c$ の近くでは極大値[*2]であるから、$f'(c) = 0$ である。$x = c$ で $f(c) = m$ の場合も同様に証明される。（証明終わり）

0.3　平均値の定理

ロールの定理の特別な場合を考えてみよう。$f(a) = f(b) = 0$ のとき、ゼロ点の間には傾きが 0 となる点が少なくとも一つはある。

関数 $f(x)$ が $a \leq x \leq b$ で連続で、$a < x < b$ で微分可能ならば、ある点 $c(a < c < b)$ が存在して、

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad (a < c < b) \tag{1}$$

が成り立つ。これを**平均値の定理**という。この定理は直線 AB と同じ傾きを持つ接線が弧 AB 上に存在することを示している。

平均値の定理を証明する。いま

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) - f(x)$$

とおく。この $g(x)$ は $a \leq x \leq b$ で連続で、$a < x < b$ で微分可能である。また明らかに $g(a) = g(b)(= 0)$。よってロールの定理を使えば、$g'(c) = 0(a < c < b)$, すなわち、

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

が成り立つ。(証明終わり)

[*1] 図を書くとわかりやすい

[*2] ある関数 $f(x)$ で $f(a)$ を 点 a の近くで最大値であるときには、$f(x)$ は $f(a)$ で極大になるといい、$f(a)$ を極大値という。a の近くで最小値の場合も同様に、極小、極小値といい、極大値と極小値を併せて極値という。

0.4　コーシーの平均値の定理

コーシーは次のように平均値の定理を一般化した。関数 $f(x), g(x)$ は $a \leq x \leq b$ で連続で、区間内で微分可能とする。さらに、この区間内でつねに $g'(x) \neq 0$ とする。平均値の定理より、

$$g(b) - g(a) = (b-a)g'(c_1) \qquad (a < c_1 < b)$$

仮定により、$g'(c_1) \neq 0$ であるため、$g(b) - g(a) \neq 0$ である。そこで、

$$\lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

とおき、関数、

$$F(x) = f(x) + \lambda g(x)$$

をつくる。$F(a) = F(b)$ であるため、ロールの定理が適応できる。よって、ある点 $x = c$ が存在して、

$$F'(c) = f'(c) + \lambda g'(c) = 0 \qquad (a < c < b)$$

この等式から、

$$\lambda = -\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

よって、

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (a < c < b)$$

これを、**コーシーの平均値の定理**という[*3]。

0.5　不定形の極限値の計算

極限値の計算において、極限が

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, \infty \cdot 0, 0^0$$

などになる場合には、何らかの工夫を行う必要がある。ここではコーシーの平均値の定理の応用として、不定形に対する一つの計算方法を紹介する。

x が a に収束するとき、$\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が b に収束するならば、$\frac{f(x)}{g(x)}$ もまた同じ極限値に収束する。なぜならば、コーシーの平均値の定理より $f(a) = g(a) = 0$ とすると、a より大きい x に対して

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (a < c < x)$$

$x \to a$ とすれば $c \to a$ である。a より小さな x についても同様。よって、

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} \tag{2}$$

これを、**ド・ロピタルの法則**[*4]という。

例 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

[*3] $g(x) = x$ のときが平均値の定理

[*4] この法則を用いると、指数関数 e^x は x のどんな正のべきよりも早く増加し、反対に対数関数 $\log x$ は x のどんな正のべきよりもゆっくり増加することがわかる。この二つは覚えておいて一生後悔しない。

0.6　テイラーの定理

平均値の定理 $f(b) = f(a) + (b-a)f'(c) \quad (a < c < b)$ をさらに一般化することを考えよう。

関数 $f(x)$ が $a \leq x \leq b$ で n 解まで連続な導関数を持ち、$a < x < b$ で n+1 階微分可能ならば、ある点 $c(a < c < b)$ が存在して、

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{1}{2!}f^{''}(a)(b-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(b-a)^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)(b-a)^{n+1} \quad (3)$$

これを**テイラーの定理**という。[*5]

テイラーの定理の証明。いま、K をある定数として、関数

$$g(x) = -f(b) + f(x) + f'(x)(b-x) + \frac{1}{2!}f^{''}(x)(b-x)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x)(b-x)^n + K(b-x)^{n+1}$$

をつくる。ただし、定数 K は、

$$K = \frac{1}{(b-a)^{n+1}}[f(b) - \{f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{1}{2!}f^{''}(a)(b-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(b-a)^n\}]$$

この関数 $g(x)$ は $a \leq x \leq b$ で連続で $a < x < b$ で微分可能である。そして、明らかに $g(b) = g(a) = 0$ である。ロールの定理を適応して、

$$g'(c) = 0 \quad (a < c < b)$$

が成り立つ。ところが、

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) + \{-f'(x) + f''(x)(b-x)\} + \{-f''(x)(b-x) + \frac{1}{2!}f^{'''}(x)(b-x)^2\} + \cdots \\ &+ \{-\frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(x)(b-x)^{n-1} + \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(x)(b-x)^n\} - (n+1)K(b-x)^n \\ &= \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(x)(b-x)^n - (n+1)K(b-x)^n \end{aligned}$$

であるから、$g'(c) = 0$ によって、定数 K は

$$K = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

と書ける。この K を $g(a) = 0$ を表す式[*6]に代入すれば、テイラーの定理が得られる。（証明終わり）

[*5] n=0 で平均値の定理である

[*6] 証明中の一番最初の式 (このページの上から数えて二番目) で $x = a$ とおく

0.7 テイラー展開とマクローリン展開

テイラーの定理から様々な表式が得られる。(3) 式で $c = a + \theta(b-a)(<\theta<1)$ と書き、$b = x$ と置けば、

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))(x-a)^{n+1} \tag{4}$$

となる。これを関数 $f(x)$ の点 a における**テイラー展開**という。

テイラー展開の特別な場合として、$a = 0$ のとき、

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1} \tag{5}$$

これを関数 $f(x)$ の**マクローリン展開**という。

以下よく知られるマクローリン展開である。($0 < \theta < 1$ とする)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}, \qquad R_{n+1} = e^{\theta x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \tag{6}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n+1}, \qquad R_{2n+1} = (-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\cos\theta \tag{7}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+2}, \qquad R_{2n+2} = (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\theta \tag{8}$$

0.8 オイラーの公式

さていよいよ、今年の愛好会最後の節、オイラーの公式に入る。人類の至宝とも称された公式は実は簡単な式なのである。

まず、先ほどのマクローリン展開した関数を使う。

(6) 式に $x = ix$ を形式的に代入すると、

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} + \frac{ix^3}{3!} + \cdots + \frac{(ix)^n}{n!} + R_{n+1}, R_{n+1} = e^{\theta ix}\frac{(ix)^{n+1}}{(n+1)!} \tag{9}$$

ここで、$i \times (7)$ 式 +(8) 式を計算する。

$$\cos x + i\sin x = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \cdots \tag{10}$$

よくよく見てみると、(9) 式と (10) 式の右辺は同じ形*7である。よって、

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \tag{11}$$

が成り立つ。これは**オイラーの公式**と呼ばれ、抜群に役立つ公式なので覚えていて損はない。

この公式を用いると、加法定理 $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ も楽に証明できる。

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) &= e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}\cdot e^{i\beta} \\ &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) \\ &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)\end{aligned}$$

*7 厳密に証明するのは面倒なのでしない。多分無限級数に関する知識必。

$\sin(\alpha+\beta)$ は虚部を表すので、変形した式の虚部を取ればよい。$\cos(\alpha+\beta)$ も同様である。

問題

$\boxed{\text{ド・モワブルの公式 } (\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx \text{ を証明せよ}}$

解答

$(\cos x + i\sin x)^n = (e^{ix})^n = e^{i(xn)} = \cos nx + i\sin nx$

オイラーの等式

先ほどのオイラーの公式で $x = \pi$ とすると、次の式を得られる。

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \tag{12}$$

これは**オイラーの等式**と呼ばれ、世界で最も美しい等式と言われている。[*8]

[*8] これをタトゥーにして入れてる人もいるくらいらしい

0.9　終わりに

以上で 1 年生の愛好会の内容は終わりである。二年生になったら「代数学」を学ぶ (予定) である。代数学はまったくわからないので次の担当に丸投げである。まぁ困ったら式を積分してしまおう。すこしはすっきりするかもしれない。

冗談はさておき、次に微積分を学ぶときは**偏微分**というものから入る。すこしネタバレしてしまうと、二変数以上の関数に対して、片方の変数を固定させるなどして導関数を求めたりする。[*9]正直そこまで難しくない (はず)。偏微分が出来れば、定積分も簡単になるかも (!?)

何がともあれ、こうして無事に活動が終えられたことに感謝したい。

うおお

おつかれさま！

終わり[*10]

[*9] 偏導関数という

[*10] メモ：制作時間 (3h35m), つかれた。正月なのに…。