Quu ノート　-微分積分Ⅱ-

責任者 Quu

最終更新 2025/01/10

概要

微分積分学入門についてのノート.

主に, 多変数微分積分, ベクトル解析, 複素解析について扱う.

このノートを読む前に

このノートは, Quu ノート I から引き続き微分積分を学ぶためのノートである．Quu ノート I に書いてあることをあらかた身に着けた方なら特別苦も無く読み進められる程度の難易度になっている．前回の思想である厳密さと計算への応用の両立はそのまま受けつがれている．本ノートでは, 主に I で触れなかった多変数の微分積分について述べ, その後ベクトル解析や複素解析について述べる．そして, 物理への応用として, あの相対性理論についてすこしだけ触れ, 現代数学に欠かせない Lebesgue 積分論についても述べようと思う．こうみると, 微分積分のノートというにはいささか内容が多い．通常微分積分と言ったら, 最初の多変数の微分積分だけを指す．しかしこのノートでは, もっとさまざまな解析学の分野に触れ, それらを大観できる, そんな内容になっているのだ．どちらかといえば, 高木貞二の解析概論に近いものになっているだろう．

それぞれの部の内容について, 簡単に紹介しようと思う．

まず, 第一部では基礎数学について述べる．具体的には, 集合論の基礎, 線形代数のうち, 行列と行列式について, そして, 多変数関数の微分である偏微分と多変数関数の積分である多重積分について述べる．集合論は, これまで学んできた数学よりも抽象度が高く, 厳密性も求められるから初めて学ぶ際は少し戸惑われるだろう．ここはじっくり学んでほしい．直接の応用としては, 後に述べる Lebesgue 積分論にかかわってくる．線形代数は, 正直本ノートではすこしも触れたくなかった話題である．しかし, 多重積分の変数変換において登場するヤコビアンのためには, 行列式の概念が必要であるから, 必要最低限述べた．偏微分と多重積分は, 一変数の場合から単純に拡張しただけであるから, すんなり理解できると思う．

次に, 第二部では, ベクトル解析について述べる．ベクトル解析で扱われる豊富な内容のうち, 重要なものをかいつまんで扱う．ベクトル値関数の微分積分はもちろん, 平面そして空間上の曲線の解析も行う．また, 曲面についても解析を行う．これらの内容は, 微分幾何に通じるもので, 一般相対論でも重要である．その後, 場の概念について扱う．これは物理, 特に電磁気学との関連の深いから, 電磁気学の例を用いて説明する．その後, ベクトル場上の積分定理についても扱う．いわゆる Gauss の定理や Stokes の定理である．総じて, この部における数学は, ほかの部の数学に比べて厳密性を無視した展開となっているから注意してほしい．しかし, 厳密性を多少犠牲にしてでも, 明快に解説できたと思う．

次に, 第三部では, 複素解析について扱う．複素数について簡単な性質を述べたのち, 複素関数を定義する．複素関数に対しても, 実数の場合と同様微分積分が定義できて, とくに微分可能性に対して, 実数よりも少し厳しい条件を付けることで, 実り豊かな結果を得ることができる．複素解析は, それ自身興味深い対象であるが, 直接的な応用としては, 留数定理の存在があるだろう．実数における定積分を, 複素積分に直すことで, 留数と呼ばれる値の和として表すことができるのだ．留数は不定積分を経由しない方法で求めることができるので, 不定積分ができなくても, 定積分の計算をすることができるというわけである．また, Riemann 面を用いて多価関数を扱う方法についても少しだけ述べようと思う．

第四部では, 相対性理論についてすこしだけ扱う．一般相対性理論で扱う数学は高級な Riemann 幾何学であるが, 特殊相対性理論で扱う数学は簡単な微分積分で十分なのであるから, 学ぶための準備は十分できているといえるだろう．まず, 特殊相対性理論について, 入門的に学ぶ．ここで, 相対性理論で用いる諸概念の説明も行う．この時生じるであろうパラドクスについては, つぎのパラドクスの解決で理解していく．その後, 相対性理論を適用した力学を展開するための数学について簡単に学ぶ．ここで, 変分法や, ベクトル, テンソルの座標変換についても簡単に述べる．こうして必要な数学を身に着けたら, いよいよ相対性理論を用いた力学につ

いて考えていく. このとき, 世界一有名な数式とも言ってよい $E = mc^2$ も導出するから楽しみにしていてほしい. また, 前に解決したパラドクスについても, 別の視点から解決することができることを述べる. 最後に, 一般相対性理論について, その内容を覗いてみる.

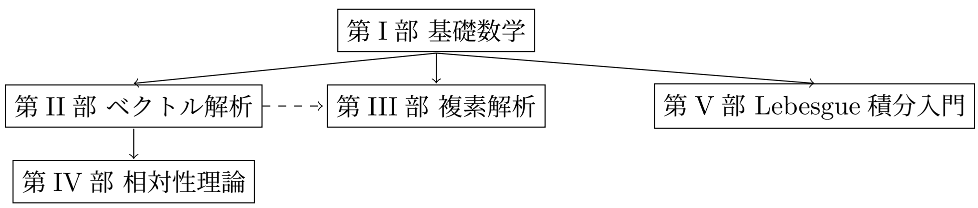
最後に, 第五部では, Lebesgue 積分論について簡単に学ぶ. これまで学んできた積分を Riemann 積分というが, 実は Riemann 積分では様々な制約があった. まず一つ, Riemann 積分では, 関数が連続でない場合, 積分可能であるとは限らない. 実際関数が有界であって原始関数を持っても, その関数が積分可能であるとは限らない例が存在している. 次に, 積分記号と極限の入れ替えのためには, 関数列が一様収束しなければならない. これは I にて学んだことである. 一様収束は, 正直言ってかなり厳しい条件であろう. そんな条件が満たされていないと, 項別に積分できないのは, Riemann 積分の大きな欠点であるし, 制約である. それに対して, Lebesgue 積分では, これらの制約が大幅に緩和される. 例えば, 関数列 $\{f_n\}$ が区間 $[a, b]$ の各点で $\lim f_n = f$ であるとき, すべての n に対して $|f_n(x)| < M$ となる定数 M が存在すれば, $\lim \int f_n(x)dx = \int f(x)dx$ とできるのだ (まさに項別積分!!). 流れとしては, まず考察したい全体の集合に対して, 扱う部分集合の対象として都合の良いものを集めた σ-集合体というものを定義する. この σ 集合体と全体集合を用いて可測空間なるものが作られる. その集合体内に含まれる部分集合はすべて可測集合と呼ばれ, 可測集合であれば, それに対して測度が定義できる. 測度は, 簡単に言えば, ものの長さや立体の体積などを抽象化したもので, 可測空間にこの測度を加えて測度空間を作ることができる. 一方, 全体集合に対して実数を対応させる関数のうち, ある条件をみたすものを可測関数と定義する. 常に正の値を取る可測関数には, 単関数とよばれる関数の単調増加列が存在して, その収束関数として表すことができるという性質がある. このようにして数学の準備を整えることで, ようやく積分が定義できる. 積分を定義し, 基本的な性質について述べた後は, 本命の収束定理について述べていく. これだけの内容を全てしっかり学ぼうとしたら, それだけで一冊できてしまうから, 必要最低限のみ解説してこうと思う.

今回の Quu ノート II は I と比べて書式が変わっているところがあるから, 始めに紹介しておく. まず, 定理の名前等に出てくる海外の人名は, すべて英語にしてある. これは, 専門的な本ではたいてい人名が英語で書かれていること考慮している. また, 句読点を「、」「。」から「,」「.」に変更した. これも, 理工系の本では後者の方を用いられているからそれに合わせた形となる. 各節 (section) 番号の前には § 記号を付けた.

各節ごとに, 基本問題を用意している. これらは是非とも自分で解いてもらいたい. ノートの最後のほうに解答もつけているから, 適宜参照してほしい. I でも述べたように, これを読んで一度ですべてを理解できなくてもよいし, またその必要もない. ただ, 寝転がりながら読んでも理解できるほど簡単な内容でもない. 紙と鉛筆を用意して, しっかりと繰り返し読んで考えることで, 必ず微分積分が理解できるようになるだろう.

これを読んで, 少しでも解析学を大観できたと感じられたら幸いである. □

以下に, 各部の関係を示す図をのせる. 参考にしてほしい. 破線の矢印は, 読んでおくと便利というだけで, 読まなくてもあまり困ることはないだろう.



このノートを書く際に使ったアプリケーション等をあげておく.

1. TEX(正確には LATEX)
2. Tikz (TEX のパッケージ. 作図するときに便利である.)
3. VSCode(テキストエディタ.)
4. PowerPoint(表紙のアイコンを作成するために用いた.)
5. WolflamAlpha(検算で大活躍した.)

なお, 誤植等があれば遠慮なく連絡してほしい. 質問も大歓迎である.

目次

第 I 部
基礎数学

ここでは, 数学をするうえで必要となる最低限の基礎知識を学ぶ. 主に, 集合論基礎, 線形代数のうちベクトル, 行列, 行列式の基礎が含まれる. また, 多変数関数について微分・積分を定義する. いわゆる偏微分, 重積分というもので, これらの概念を習得することは, 数学, 物理, 工学を学ぶ上で重要である.

§1　集合論基礎

集合とその演算, 写像, 濃度について軽く触れ, 実数論についても少し触れる.

1.1　集合とは

集合とは端的に言えば, <u>ものの集まり</u>[*1]である. 実数の集まりでも整数の集まりでもよいし, 関数の集まりでもよい. もっと具体的に, 犬, 猫, 人間, など, ともかく何かを集めた集まりである. ある集合に対して, あるものがその集合に含まれていた場合, そのものを集合の**要素**や**元**という. 集合を構成するものといってもよいだろう. a が集合 A の要素であることを次のように表記し, a は A に属するという.

$$a \in A \text{ または } A \ni a \tag{1.1}$$

また, a が A の要素でないことは $a \notin A$ または $A \not\ni a$ と表記する. 例えば, A が 6 の約数全てであるとき, $1 \in A, 2 \in A$ であるが, $5 \notin A$ である. なお, 集合が集合たるためには, その集める範囲が明確に定義できていなければならない. 例えば, 学校内の美人な学生全体の集まりは, 美人の定義が定まっていないから集合ではないのである. 大きい服すべての集まり, おいしい食べ物全体の集まりなども同様の理由で集合ではない.

集合はものの集まりであるから, その要素の個数について気になるところである. 要素の個数が 0 か自然数で表せる集合を**有限集合**といい, それ以外の集合を**無限集合**という. また, 要素の個数が 0, すなわち要素を何も持たない集合を**空集合**といい, $\varnothing$ とかく. 有限集合としては例えば先ほど例に挙げた 6 の約数全ての集合がある. 無限集合としては, 自然数全体の集合, 実数全体の集合などがある.

様々な集合を考えることができるが, 特別な記号で表せる集合があるから紹介しておこう. これらは一般的に, たいてい断りなく用いられる.

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \text{自然数全体の集合} \\
\mathbb{Z} &= \text{整数全体の集合} \\
\mathbb{Q} &= \text{有理数全体の集合} \\
\mathbb{R} &= \text{実数全体の集合} \\
\mathbb{C} &= \text{複素数全体の集合}
\end{aligned}$$

集合を表す方法として, その要素をすべて書き並べる表し方がある. これを**列記法**または**外延的記法**という. これを用いて, 先ほど例示した 6 の約数全ての集合を表す.

$$A = \{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\} \tag{1.2}$$

もちろん, 元を書き並べる順序をかえても同じ集合である. また, 重複して書かれた要素は一つのものとして考え, 同じ要素を重複して書くようなことはしない. しかし, 要素の数が多くなれば, 要素を全て並べて書くことは困難になることは容易に想像できる. 例えば 100 万以下の自然数すべての集合を列記法でかく作業は途方も

[*1] 素朴な疑問だが, もののあつまりというものはどういうものであろうか. なんだか曖昧な定義である. 例えば, $A \in A$ を満たす A は集合といえるだろうか. この答えは No であって, それは集合を厳密に定める公理系によって示される. これらの研究は公理的集合論という 20 世紀に発展した数学の分野の一つである.

ないだろう．そこで, 集合の要素となる条件 (範囲, 性質) を書いて, それを満たす要素全体として集合を表す方法も存在する．これを**説明法**や**内包的記法**という．これを用いて先ほどの (1.2) を書くと

$$A = \{x \mid x \text{ は } 6 \text{ の約数全体 }\} \tag{1.3}$$

となる．このように, 説明法では集合を要素 x の条件 $P(x)$ を用いて $\{x \mid P(x)\}$ とかく．また, (1.3) は $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ は } 6 \text{ の約数全体 }\}$ とも書かれる．最初の x の前に大前提の $x \in \mathbb{Z}$ を書くのである．このほかにも, 特別な集合の場合は固有の表し方もある．例えば, 閉区間, 開区間の表し方がそうである．

義務教育中に習ったように, 自然数 $\mathbb{N}$ のすべての要素は整数 $\mathbb{Z}$ に含まれている．これは, $\mathbb{N}$ が $\mathbb{Z}$ に '包まれている' ような状態であると理解できる．一般に, 二つの集合 A, B について, A の<u>全ての</u>要素が B の要素であるとき, A は B の**部分集合**であるといい,

$$A \subset B \text{ または } B \supset A \tag{1.4}$$

とかく．この場合, A は B に**包まれている**, または B は A を**包む**という．反対に, $A \subset B$ ではないことを $A \not\subset B$ とかく．明らかに, $A \subset A$ である．また, $A \subset B, B \subset C$ ならば $A \subset C$ であることも, 明らかであろう．$A \subset B$ かつ $A \supset B$ であるとき, $A = B$ とかき, 二つの集合 A, B は**等しい**という．

$A \subset B$ かつ $A \neq B$ であるとき, A は B の**真部分集合**であるといい, これを強調したい時 $A \subsetneq B$ とかく．例えば, $\mathbb{N}$ は $\mathbb{Z}$ の真部分集合である．

集合 A に対して, A の部分集合全体の集合を A の**巾集合**といい, $\mathfrak{P}(A), \mathcal{P}(A), 2^A$ のようにかく．本ノートでは, 最後の記法 2^A を採用することにする．巾集合は, その要素全てが集合である．一般に, どの要素も集合であるような集合を**集合族**という.[*2]

例えば, $A = \{1, 2, 3\}$ のとき $2^A = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ である．空集合が入っていることに疑問が浮かぶ人もいるだろうから説明しておこう．空集合とは, 要素を一つも持たない集合であるから, 論理として「a が A に含まれていない」ならば「a は $\varnothing$ に含まれていない」が任意の集合 A に対して成り立つ．実際, 前半の「」の真偽にかかわらず成り立つから, これは正しいと納得されるだろう.[*3] このときこの命題の対偶[*4]を取れば, 「a が $\varnothing$ に含まれている」ならば「a は A に含まれている」が成り立つ．すなわち, 空集合は任意の集合の部分集合であることがわかる．

[*2] 集合族は, 一般にドイツ文字や花文字で表される慣習がある．

[*3] これは次小節を見ることでより納得がいくはずである．

[*4] 次小節参照.

1.2　記号論理

ここでは集合論を展開するために便利な記号論理について必要最小限に留めて述べる．

一般に, 数学の定理は

$$p \Rightarrow q \quad (p\ \text{ならば}\ q) \tag{1.5}$$

の形をしていることが多い．p をこの定理の**仮定**, q を**結論**という．p, q のように, 真偽の定まる文章を**命題**という．命題によっては, それ自身がある複数の命題によって構成されている場合がある．例えば, $a = 1$ かつ $b = 2$ は $a = 1$ という命題と $b = 2$ という命題が「かつ」によって結合されている．このように, 数学に現れる命題を結合するものは, 次の三種類がある．

$$p \wedge q, \quad p \vee q, \quad p \Rightarrow q$$

$\wedge$ は「かつ」, $\vee$ は「または」, $\Rightarrow$[*5]は「ならば」を表す.[*6] 特に, $p \Rightarrow q \wedge p \Leftarrow q$ であるとき, p と q は**同値**であるといい, $p \Leftrightarrow q$ とかく．

次に, 命題の否定を考える．命題 p に対して, その**否定**は「p でない」となり, これを $\neg p$ とかく．以上で紹介した記号 $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ を論理演算子という．命題の合成命題を否定する際には, 書き方に注意を払う必要がある．例えば, $p \wedge q$ という命題を否定するときに $\neg p \wedge q$ と書いてはいけない．この場合, 「p ではない」かつ q であるという命題になっているからである．正しくは, $\neg(p \wedge q)$ とかく．

ある命題が真である場合や偽である場合に, それを数値で表すことができたら便利である．そこで, 命題が真である場合, その命題の**真理値**は 1 であるといい, 偽のとき, その命題の真理値は 0 であるということにする．例えば, p, q の真理値がそれぞれ $1, 0$ であるとき, $p \wedge q$ の真理値は 1 である．この時重要なのは, $p \wedge q$ の真偽を判断するときに, <u>$p \wedge q$ の命題の意味を解釈することなく, p, q の真偽だけから判断できた</u>ということである．よって, 命題 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ の合成命題 p が与えられたときは, P の真偽に重要なのは論理式の構造と $p_1, p_2, \ldots, p_n$ の真偽だけということになる．

そこで, 各命題 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ の真理値のすべての組み合わせについて P を計算した表を考え, これを P の**真理値表**という．以下に $p \wedge q$ の真理値表を示す．

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

表 1: $p \wedge q$ の真理値表

二つの合成命題 P, Q が与えられたとき, 真理値表において P, Q の真理値表が一致するとき, P と Q は論理的に**同値である**といい, $P \equiv Q$ とかく．試しに, $\neg(p \wedge q)$ と $(\neg p) \vee (\neg q)$ が論理的に同値であることを示してみる．(次ページ)

[*5] $p \Rightarrow q$ はこの命題が真であるとすでに分かっているときによく用いられる．まだこの命題が真であるかがわかっていない場合などは $p \to q$ と書いて区別する．

[*6] $\wedge$ を論理積, $\vee$ を論理和という．

以下の表を見ればわかるように, $\neg(p \wedge q)$ と $(\neg p) \vee (\neg q)$ の真理値はすべて一致している．これより直ちにこれら二つの論理が同値であることがわかる．

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \vee (\neg q)$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

表 2: 真理値表による命題の比較

上記の方法とまったく同様にして, $\neg(p \vee q)$ と $(\neg p) \wedge (\neg q)$ が示されるから, 以下の **De Morgan の法則**が成り立つことがわかる．

$$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q) \tag{1.6}$$
$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q) \tag{1.7}$$

De Morgan の法則は最も基本的な論理演算の法則であるから, しっかり理解しておこう．この二つの式から双対性の概念が見えるがここでは触れない．

De Morgan の法則を用いれば, $\wedge, \vee$ の含まれる合成命題については否定できるが, $\Rightarrow$ が含まれた命題を否定する際はどうすればよいだろうか．一度ここでもっとも簡単な形である $p \Rightarrow q$ について考察してみよう．すぐわかるのは p が真の場合, q が真ならば真, 偽ならば偽であるとなることである．問題は p が偽の場合である．このとき q が成り立っていようがいまいが (仮定がそもそも偽であるから) 真偽には関係のないような気がする．そこでp が偽のときには $p \Rightarrow q$ は偽であると定めることにしよう．このように定めるのは, 例えば「任意の自然数 n に対して $n > 2 \Rightarrow n > \sqrt{5}$」という命題を考える際に便利だからである．普通に考えてみればこの命題はもちろん真なのであるが, これまでの考え方に則ると, $n = 2$ のとき「$2 > 2 \Rightarrow 2 > \sqrt{5}$」が真でなければならない．なぜなら n は任意の自然数だからである．このような場合, 下線部のように定めることで, 任意の自然数に対して命題が真であるようにできるのだ．よって, $p \Rightarrow q$ の真偽は $\neg p \vee q$ の真偽と一致することがわかる．よって, $\neg(p \Rightarrow q) \equiv \neg(\neg p \vee q) \equiv \neg(\neg p) \wedge (\neg q) \equiv p \wedge (\neg q)$ となる．ここで, $\neg(\neg p) \equiv p$ であることを用いた．これは真理値表を用いて簡単に示せる．以上をまとめると

$$\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge (\neg q) \tag{1.8}$$

が得られる．

二つの命題 p, q に対して, $p \Rightarrow q$ が正しくても $q \Rightarrow p$ が正しいとは限らない．例えば, 微分可能であるならば連続であるが, 連続で会っても微分可能ではないのが好例である．$q \Rightarrow p$ を $p \Rightarrow q$ の**逆**といい, $\neg q \Rightarrow \neg p$ を**対偶**という．今述べたように, 命題 $p \Rightarrow q$ が真であっても逆は真であるとは限らないが, 対偶についてはどうだろうか．対偶の論理式を式変形してみると $\neg q \Rightarrow \neg p \equiv \neg(\neg q) \vee (\neg p) \equiv q \vee (\neg p) \equiv p \Rightarrow q$ となる．[*7] すなわち, $p \Rightarrow q$ とその対偶の真偽は一致する．これは, $p \Rightarrow q$ の命題を証明する際には, その対偶を証明してもよいということを示している．

[*7] 何も言わず $p \vee q \equiv q \vee p$ を用いてしまったが, 本来は真理値表で確かめる必要がある．ただ, 直感的に明らかであろう．

最後に, 限定記号について述べておこう．これはこれから多く出てくるからしっかり理解しよう．変数を含む文章で, 変数に値を代入する値と命題になるものを命題関数や述語という．命題も命題関数も含めて単に命題とよぶ．例えば, $p(x) \equiv x$ は 2 と等しい という命題関数を考えてみる．ここに $x = 2$ を代入した命題 $p(2) \equiv 2$ は 2 と等しい は真である．一方 $x = 1$ を代入した命題 $p(1)$ は偽である．

ここで気になってくるのが, ある命題関数を考えたときに, この命題は全ての x について成立しているのか, それともある x について成立しているかであろう．このときの「全ての (任意の)」や「ある (或る)」という言葉を**限定語**という．例えば, 「三角形の内角の和は 180°」という命題は「全ての三角形」に対して成立している．この「全ての」や「ある」を表す記号として, $\forall, \exists$ がある．それぞれ 'For all' または 'For any', 'Exist' に由来する記号で, 前者を全称記号, 後者を存在記号という．これらをまとめて限定記号という．これを用いて, 全ての実数に対しその平方が 0 または正であるという命題は ${}^{\forall}x \in \mathbb{R}[x^2 \geq 0]$ と書ける．また, 実数全体で定義された関数 $f(x)$ に対して, $f(x) = x$ となる実数 x が存在するという命題は ${}^{\exists}x \in \mathbb{R}[f(x) = x]$ と書ける．

限定記号を用いれば, $\varepsilon - N$ 論法による極限の定義を簡単な論理式で書くことができる．試しに, 数列 $\{a_n\}$ が $a_n \to \alpha$ となることを限定記号を用いて書いてみると

$$
{}^{\forall}\varepsilon > 0, {}^{\exists}N > 0, {}^{\forall}n \in \mathbb{N}\, [n > N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon]
$$

となる．この書き方のほうがどの変数が何に依存しているかがすっきりしていて見やすいと思う．

最後に, 全称記号および存在記号付きの命題を否定すると, それらが互いに入れ替わることを証明なしに述べて終わる．

$$
\neg \left({}^{\forall}x \in X\, [p(x)]\right) \equiv {}^{\exists}x \in X\, [\neg p(x)] \tag{1.9}
$$

$$
\neg \left({}^{\exists}x \in X\, [p(x)]\right) \equiv {}^{\forall}x \in X\, [\neg p(x)] \tag{1.10}
$$

しかし, これは直感的には理解しやすい．例えば (1.9) であれば, 任意の x について成り立っていることを否定するのだから, (少なくとも一つは) 成り立たないような x が存在しなければならない．そして, この式に両辺否定を取れば (1.10) がすぐさま導かれる．

1.3 集合の演算

集合に話を戻す．二つの集合 A, B について, その和と積に対応するものを考えよう．それらは以下のように定められる．

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\} \tag{1.11}$$
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} \tag{1.12}$$

集合 $A \cup B$ を A と B の**和集合**といい, $A \cap B$ を A と B の**共通部分**という．定義から明らかに次式が成り立つ．

$$A \subset A \cup B, \quad B \subset A \cup B \tag{1.13}$$
$$A \cap B \subset A, \quad A \cap B \subset B \tag{1.14}$$

しかし, せっかく記号論理を学んだのだから, 上式を証明してみるのもよいだろう．試しに, (1.13) を示してみることにしよう．対称性から, 示すべき命題は, $x \in A \to x \in A \cup B$ で十分である．$x \in A \to x \in A \vee x \in B$ であり, 右辺は和集合の定義そのものだから, 示された．やはり明らかであったが, 簡単な命題でも記号論理の威力が垣間見えるだろう．

二つの集合が共通の要素を一つも持たない場合, 共通部分に含まれる要素は存在しない．この場合, 要素数は 0 であるから空集合である．集合 A, B に対し, $A \cap B = \varnothing$ であるとき, A と B は**交わらない (互いに素である)** という．逆に, $A \cap B \neq \varnothing$ のとき, 二つの集合は交わるという．

集合演算の基本的な性質について述べよう．以下に式を列挙する．

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A \tag{1.15}$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \tag{1.16}$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \tag{1.17}$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \tag{1.18}$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \tag{1.19}$$

(1.15) は**交換法則**, (1.16), (1.17) は**結合法則**, (1.18), (1.19) は**分配法則**である．これらはすべて定義から記号論理を駆使して簡単に証明できる．ここでは, (1.18) のみ証明することにする．

Proof. 示すのは, $x \in A \cup (B \cap C) \leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ である．$x \in A \cup (B \cap C) \leftrightarrow x \in A \vee x \in B \cap C \leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$ であるから, 命題に関する分配法則が成立すればよい．真理値表を書けばわかるように, $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ だから, $x \in A \cup (B \cap C) \leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C \leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ となる．以上より, (1.18) が示された． □

二つの集合 A, B に対して, 差に対応するものを考える．これは以下のように定義する．

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} \tag{1.20}$$

集合 $A - B$ を A と B の**差集合**という．一般に, $A - B \neq B - A$ である．等号が成り立つのは $A = B$ の場合のみである．これは実数の場合と同様であるから理解しやすい．

数学では, ある集合を基礎として, その要素について考察する場合が多い. 例えば, Quu ノート I では実数の集合 $\mathbb{R}$ において, その微分積分等を考察していた. このような, 特定の集合 Ω の要素と部分集合について議論する場合, Ω を**全体集合**という. 全体集合にはよく Ω, U といった記号が用いられる. 全体集合 Ω が与えられたとき, 考察の対象となる集合 $A \subset \Omega$ に対して, $\Omega - A$ を考えることができる. この差集合 $\Omega - A$ を Ω における A の**補集合**といい, A^c とかく.[*8] 任意の $x \in \Omega$ に対して, $x \in A^c \Leftrightarrow x \notin A$ が成立する.

以降, 特別断りがない場合 Ω を全体集合とする. 任意の $A \subset \Omega$ に対して, 以下が成り立つ.

$$(A^c)^c = A \tag{1.21}$$
$$A \cup A^c = \Omega \tag{1.22}$$
$$A \cap A^c = \varnothing \tag{1.23}$$
$$\Omega^c = \varnothing, \quad \varnothing^c = \Omega \tag{1.24}$$
$$A \cup \Omega = \Omega \tag{1.25}$$
$$A \cap \Omega = A \tag{1.26}$$

これらは補集合の定義からすぐさま導かれるから, ここでは述べない. 各自で試されるとよいであろう.

補集合について重要なのは次の De Morgan の法則である.

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \tag{1.27}$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \tag{1.28}$$

これは記号論理で述べた De Morgan の法則の法則 (1.6),(1.7) からすぐさま導かれるから, これも証明は略する. これに加えて, 補集合については, 以下の等式が重要である.

$$A - B = A \cap B^c \tag{1.29}$$

Proof. 前提として, $A, B \subset \Omega$ であることに注意しよう.

$$\begin{aligned} x \in A - B &\leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \\ &\leftrightarrow x \in A \wedge x \in B^c \\ &\leftrightarrow x \in A \cap B^c \end{aligned}$$

以上より, 等式が示された. □

集合の勉強をする際に, そのイメージを持たせるために, よく Venn 図が紹介されている. しかし上で見たように, Venn 図を使おうが使わまいが, 集合の命題は記号論理の演算を用いて機械的に解くことができる. むしろ, 今後扱う命題では図で書くと複雑な場合が多い. そのためこのノートでは Venn 図については一切触れない. 興味がある人は適当な集合論の本を参考にしてみるとよいだろう.

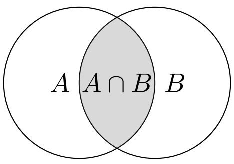
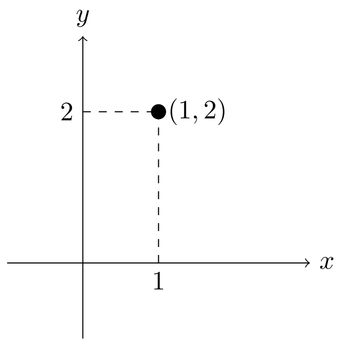


図 1: 共通部分 $A \cap B$ の Venn 図

[*8] c は complement の頭文字.

1.4　直積集合

Quu ノート I において, 実数 $\mathbb{R}$ は数直線ととらえることができると説明した. 同様にして, 二つの数直線を直交させてできる平面についても, この平面上の各点と二つの数直線の値とを対応付けることができるだろう. これは, 関数のグラフを書く時にすでに (直接言及されていないだけで) 学んだことである. この平面の各点は, 二つの集合 $\mathbb{R}, \mathbb{R}$ の各要素を対にしたもの全てを集めた集合といえよう.



一般に, 二つの集合 A, B に対して

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\} \tag{1.30}$$

を A と B の**直積集合**または単に**直積**という. ここで, (a, b) は二つのもの a, b から作られる対となるもので, これを**順序対**という. 順序対は集合と違って, $(a, b) \neq (b, a)$ となる. つまり, 対の順序が違えばそれは違うものとみなす. 二つの順序対 $(a, b), (a', b')$ が等しいのは $a = a', b = b'$ となるときに限るとする.

直積を用いれば, 先ほど例で挙げた平面も $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ と書けるとわかる. ただこの場合, 同一の集合の直積であるから簡単に $\mathbb{R}^2$ と書くことにしよう. この記法は, 任意の集合 A の直積 $A \times A$ についても用いられる. すなわち, $A \times A = A^2$ である.

直積の具体例を挙げよう. 例えば, $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3\}$ とすると, $A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$ であり, $B \times A = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$ である. このように, 一般に直積では交換法則が成り立たない.

直積 $A \times B$ において, A, B どちらか一方が空集合であれば順序対が存在しないので, この場合 $A \times B$ は空集合になる.

今は二つの集合について, それぞれの要素から順序対を作っていた. これを n 個の集合の場合に拡張しよう. n 個の集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ に対して, それらの**直積集合**を

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \cdot, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \cdots, a_n \in A_n\} \tag{1.31}$$

によって定める. $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ は順序対である. n 個の場合でも二つの順序対が等しいのは, 並べられた各要素の値が等しい場合に限るとする. また, $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$ のとき, この直積集合を A^n とかく.

直積は, もっと一般に集合系に対して定義される. しかし, 微分積分を学ぶ上では上記の定義で十分であるからここでは述べない. こちらも, 興味がある人は集合論の本を参考にしてほしい.

1.5　写像

これまで扱ってきた関数は, 主に実数から実数に対応するものだった．例えば, $f(x) = x^3$ は, 全ての実数に対して定義され, 全ての実数に対応しているだろう．ここで議論したいのは, もっと一般に, 二つの集合間の対応である．

二つの集合 X, Y が与えられ, X のどの要素に対しても, それぞれ Y の要素がただ一つ対応しているとき, この対応関係そのものを X から Y への**写像**[*9]と定義する．写像は, 関数や変換とも呼ばれたりするが, 全てまったくの同義語である．[*10] X から Y の写像が f であることは, 次のように書かれる．

$$f : X \to Y \tag{1.32}$$

このとき, X を f の**定義域** (始域)Y を**値域** (終域) という．また, 二つの写像 $f : X \to Y, f' : X' \to Y'$ が**同じ写像である**[*11]とは, $X = X' \wedge Y = Y'$ であって, ${}^\forall x \in X[f(x) = f'(x)]$ であることをいう．このとき, $f = f'$ とかく．

$f : x \to y$ によって, $x \in X$ が $y \in Y$ に対応することを $y = f(x)$ とかく．このとき, y を f による x の**像**という．また, x を f による y の原像という．

これまで扱ってきた関数の中には, $\sin(x^2)$ のように, 関数の中に関数が入っているものがあった．これを合成関数といったわけだが, これを写像の場合にも考えてみる．すなわち, 集合 X, Y, Z と, 二つの写像 $f : X \to Y, g : Y \to Z$ を考え, この合成写像なるものを考えてみよう．写像 $h : X \to Z$ を, $h(x) = g(f(x))$ として定める．この写像の各像は, X の要素を Y に飛ばし, その像を g で Z の要素にとばしたものと一致する．これを**合成写像**といい, $g \circ f$ とかく．

合成写像に関しては, 交換法則は成り立たないが, 結合法則は成り立つ．すなわち

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \tag{1.33}$$

が成り立つ．ただし, f, g, h は, 集合 X, Y, Z, W について, $f : X \to Y, g : Y \to Z, h : Z \to W$ とする．

Proof. $x \in X$ とする．このとき

$$[h \circ (g \circ f)](x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = [(h \circ g) \circ f](x)$$

が成り立つ．したがって等号が成り立つ． □

$f : X \to Y$ を写像とする．$A \subset X$ に対して, $\{f(a) \mid a \in A\}$ を f による A の**像**といい, $f(A)$ とかく．また, $B \subset Y$ に対して, $\{x \in X \mid f(x) \in B\}$ を f による B の**逆像**または**原像**といい, $f^{-1}(B)$ と表す．明らかに, $f(A) \subset Y, f^{-1}(B) \subset X$ である．

例えば, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x^2$[*12]として, $f([0,1]) = [0,1]$ である．一方, $f^{-1}([0,1]) = [-1,1]$ である．すなわち, この場合像と逆像は等しくない．像も逆像も等しい例として, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x^3$ がある．先ほどと同じ部分集合の像を考えると $f([0,1]) = [0,1]$ であるし, $f^{-1}([0,1]) = [0,1]$ である．から, この場合確かに等しい．

[*9] 対応関係自体を定義していないから, この定義は曖昧であるように感じる．この感覚は正常なものだ．実際は, $X \times Y$ の部分集合を対応関係と定義し, そのうち全ての $x \in X$ に対して, $y \in Y$ が一意的に存在するものを写像というのである．

[*10] 関数は, 特に X が数の場合にいうようである．

[*11] $A \subset X$ に対して定義される $g : A \to Y$ が任意の $x \in A$ に対し, $f(x) = g(x)$ であるとき, g を f の A の制限という．このとき $g = f \restriction_A$ とかく．また, f は g の拡張と呼ばれる．

[*12] このように, 写像の像を具体的に $x \mapsto f(x)$ と書くことがある．

像と逆像に関しては以下の公式が成り立つ．ただし，$f:X\to Y$ とし，$A_1,A_2\subset X, B_1,B_2\subset Y$ とする．

$$f(A_1\cup A_2)=f(A_1)\cup f(A_2) \tag{1.34}$$
$$f(A_1\cap A_2)\subset f(A_1)\cap f(A_2) \tag{1.35}$$
$$f^{-1}(B_1\cup B_2)=f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2) \tag{1.36}$$
$$f^{-1}(B_1\cap B_2)=f^{-1}(B_1)\cap f^{-1}(B_2) \tag{1.37}$$
$$A_1\subset f^{-1}(f(A_1)) \tag{1.38}$$
$$f(f^{-1}(B_1))\subset B_1 \tag{1.39}$$
$$f(A_1)-f(A_2)\subset f(A_1-A_2) \tag{1.40}$$
$$f^{-1}(B_1)-f^{-1}(B_2)=f^{-1}(B_1-B_2) \tag{1.41}$$

これも像と逆像の定義から導出できるから，各自で証明してほしい．ここでは，(1.34) と (1.38) のみ証明しよう．

(1.34) の証明．

$$f(A_1\cup A_2)=\{f(a)\mid a\in A_1\cup A_2\}=\{f(a)\mid a\in A_1\vee a\in A_2\}$$

であるから，$y\in f(A_1\cup A_2)$ のとき，$y=f(a)$ となる $a\in A_1$ または $a\in A_2$ が存在する．このときそれぞれ $y\in f(A_1), y\in f(A_2)$ となるので $y\in f(A_1\cup A_2)\to y\in f(A_1)\cup f(A_2)$ となる．一方，$y\in f(A_1)\cup f(A_2)$ のとき，$y\in f(A_1)$ または $y\in f(A_2)$ だからそれぞれ $y=f(a)$ となる $a\in A_1$ もしくは $a\in A_2$ が存在する．よって，$y\in f(A_1\cup A_2)$ となるので，$y\in f(A_1)\cup f(A_2)\to y\in f(A_1\cup A_2)$ である．従って，$f(A_1\cup A_2)=f(A_1)\cup f(A_2)$ が示された． □

(1.38) の証明．$a\in A_1$ とする．このとき，像の定義より $f(a)\in f(A_1)$ が成り立つ．一方逆像の定義から

$$f^{-1}(f(A_1))=\{x\in X\mid f(x)\in f(A_1)\}$$

であるから，(集合の | より右の条件を満たすことより)$a\in f^{-1}(f(A_1))$ である．よって，$A_1\subset f^{-1}(f(A_1))$ □

(1.38) の証明において重要なのは，$a\in X$ としたときに $f(a)\in f(A_1)$ であっても，$a\in A_1$ とは限らないという点である．例を挙げると，$f(x)=x^2$ のとき $f([0,1])=[0,1]$ であったが，$x=-1\in[-1,0]$ であっても，$f(x)=(-1)^2=1\in[0,1]$ が成り立っている．すなわち，$f(x)\in f([0,1])$ となる x は $[-1,0]$ 内にも存在している．

一般の写像に関する性質は以上でほとんどであるが，これだと (1.38) のような包含関係しか得られない．できる限り $=$ であってほしいのが心情だろう．そこで，写像の中でもとくに “都合の良い” ものを考えよう．

写像 $f:X\to Y$ について，次のように定める．

1. $f(X)=Y$ であるとき，f は**全射**または**上への写像**であるという．
2. $x_1,x_2\in X$ について，$x_1\neq x_2$ ならば $f(x_1)\neq f(x_2)$ であるとき，f は**単射**または **1 対 1 写像**であるという．
3. f が全射かつ単射であるとき，f は**全単射**であるという．

写像 f が全単射であれば，(1.34) から (1.41) のうち $\subset$ であるものは等号が成り立つようになる．全単射である写像の例として，一次関数 $f(x)=ax+b\quad(a\neq 0)$ がある．これが全単射であることは容易に確かめられるから，これも各自で確かめてみるとよいだろう．

任意の集合 $X_1 \subset X_2$ に対し, X_1 の各要素 x に対して, $i(x) = x$ となる写像 $i : X_1 \to X_2$ を**包含写像**という．特に, $X_1 = X_2 = X$ であるとき, **恒等写像**という．恒等写像はよく id_X と書かれる．恒等写像は全単射である．これも明らかである．

写像 $f : X \to Y$ が全単射のとき, どの $y \in Y$ に対しても $y = f(x)$ となる $x \in X$ が一意に定まるはずである．そこで, $y \in Y$ に対して, $y = f(x)$ を満たす $x \in X$ を対応させることで, Y から X への写像が定まる．この写像を $f^{-1} : Y \to X$ とかき, f の**逆写像**という．先ほど定義した逆像と言葉が似ているが, 異なる概念であるから気を付けてほしい．

逆写像に関する基本的な定理には, 以下のものがある．

$f : X \to Y, \quad g : Y \to X$ を写像とする．このとき $g \circ f = \mathrm{id}_X$ であれば, f は単射で g は全射である．特に, $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ であれば, f, g はともに全単射で g は f の逆写像である．

Proof. $g \circ f = \mathrm{id}_X$ であるとする．このとき, $x_1, x_2 \in X$ について $f(x_1) = f(x_2)$ であるとする．このとき写像の定義から $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ である．ところで, $g(f(x)) = (g \circ f)(x) = \mathrm{id}_X(x) = x$ であるから, $x_1 = x_2$ である．すなわち, $f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2$ だから, 対偶を取れば $x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)$ となって, f の単射性が示された．次に, g が全射であることを示す．$x \in X$ とする．このとき, $y = f(x)$ と置くと, $g(y) = g(f(x)) = x$ である．すなわち, X の任意の要素に対して, 対応元 $y \in Y$ が存在するから, g は全射である．まったく同様にして, $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ であれば, f は全射で g は単射である．従って, f, g は全単射である．g が f^{-1} なのは逆写像の定義から明らかであろう． □

実は, 上の定理において $g \circ f$ が単射であれば f は単射であり, $g \circ f$ が全射であれば, g も全射である．[*13] これは上の証明をすこし変えるだけだから, 読者への演習問題としよう．

集合の列 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ を考えよう．これらは, 各添え字 $1, 2, \cdots, n$ に対して, 集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ が対応している状態であるから, 添え字の集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ からある集合族への一つの写像 A が与えられていると考えられる．このように, ある空でない添え字の集合 Λ からある集合族への写像 A のことを, Λ 上の**集合系**といい,

$$(A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda), \quad (A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \tag{1.42}$$

とかく．実用上は, 集合系も集合族も拘泥せず同じ集合の集合と考えてもよい．そのため, (1.42) は以下のようにも書かれる．

$$\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \tag{1.43}$$

集合系に対して, 和集合と共通部分を以下のように定める．

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x \mid {}^\exists \lambda \in \Lambda, x \in A_\lambda\} \tag{1.44}$$

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x \mid {}^\forall \lambda \in \Lambda, x \in A_\lambda\} \tag{1.45}$$

[*13] このとき, $f : X \to Y, g : Y \to Z$ であっても成り立つ．

(1.44) および (1.45) はそれぞれ $\bigcup\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}, \bigcap\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ と書かれることもある．また, $\Lambda = \{1, 2, \cdots, n\}$ のときは, $\bigcup_{k=1}^{n}, \bigcap_{k=1}^{n}$ の記号を用いることもある．とくに, $\Lambda = \mathbb{N}$ であれば,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

とかいてもよい.

集合系の各集合 A_λ が集合 X の部分集合であるとき, この集合系を X の**部分集合系**という．$\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を X の部分集合系とする．このとき, 次の **De Morgan の法則**が成り立つ.

$$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda)^c \tag{1.46}$$

$$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda)^c \tag{1.47}$$

(1.47) は (1.46) からすぐでるから, (1.46) のみ示す.

Proof.

$$x \in \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c \leftrightarrow \neg[{}^\exists\lambda \in \Lambda, x \in A_\lambda] \leftrightarrow {}^\forall\lambda \in \Lambda, x \notin A_\lambda \leftrightarrow {}^\forall\lambda \in \Lambda, x \in (A_\lambda)^c \leftrightarrow \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda)^c$$

より等号が成り立つ. □

最後に, 集合系の極限にあたるものを定義しよう．$\mathbb{N}$ を添え字の集合系とする集合系 $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ に対して,

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \tag{1.48}$$

を**上極限集合**という．上極限集合は, 無限個の A_n に属す要素全てを集めた集合である．また,

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \tag{1.49}$$

を**下極限集合**という．下極限集合は, 有限個の A_k だけ除いて, それ以外を全て集めた集合である.

まず基本的なのは, 次の包含関係である.

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n \tag{1.50}$$

本によってはこの関係を明らかと書くようである．しかし, 私個人がこれを単に ‘明らか’ とするのは納得がいかないから, 証明を与える.

Proof. すぐにわかることとして, $\bigcap_{n=k-1}^{\infty} A_n \subset \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$ がある．したがって, 各 $i \in \mathbb{N}$ について,

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcup_{k=i}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$$

が成り立つ．実際, i が大きくなることで生じる和集合の ‘漏れ’ は, すべて $k \geq i$ 以降の $\bigcap_k A_n$ に含まれている．また, $\displaystyle\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \subset A_k$ であることもすぐわかる．したがって,

$$\bigcup_{k=i}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{k=i}^{\infty} A_k \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{k=i}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \subset \bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{k=i}^{\infty} A_k = \limsup_{n\to\infty} A_n$$

であり, 左辺は $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{k=i}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n$ だから, $\displaystyle\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$. □

(1.50) において, 特に等式が成り立つ場合, これを**極限集合**といって,

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n \tag{1.51}$$

とかく．これらの概念は Lebesgue 積分論において重要である．

1.6　濃度

集合の個数と写像の関係について考えてみたい．例えば, $\{1,2,3\}$ と $\{p,i,e\}$ という集合は, 個数が等しい．このとき, 二つの集合間に全単射が存在している．例えば, $1 \mapsto p, 2 \mapsto i, 3 \mapsto e$ とすれば, これは明らかに全単射である．このように有限集合で個数が等しいときは全単射が存在している．逆に, 二つの有限集合間に全単射が存在すれば, それらの要素数は等しいともいえるだろう．問題は無限集合である．無限集合と有限集合の要素数が違うのはすぐわかるが, 無限集合同士ではどうだろうか．そもそも要素数が無限である場合, 要素数の比較などできるのだろうか．このような疑問を解消するために, 集合の濃度というものを考えてみよう．二つの集合 A, B の**濃度が等しい**とは, A から B への全単射が存在することである．このとき, $A \sim B$ とかく．これは有限集合で考えていた集合の要素数の比較を拡張したものと考えてもよいだろう．実際先ほどみたように, 有限集合で要素数が等しいときは, 全単射が存在するから, 濃度も等しいし, その逆も成り立っている．この濃度を用いて, 自然数の集合 $\mathbb{N}$ と偶数全体の集合 E を比較してみよう．これは簡単で, 写像 $f : \mathbb{N} \to E, n \mapsto 2n$ を考えると, この写像は全単射であるから, $\mathbb{N} \sim E$ が成り立つ．しかし, この結果は直感に反しているように感じているだろう．厳密性を欠いた表現をすれば, この結果は「自然数と偶数の '個数' が等しい」ということを意味しているのだから．面白い例はほかにもある．例えば, $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$ が成立する．これも直感に反しているようだが, 全単射は構成できてしまう．この全単射については, 演習問題で考えてもらうことにしよう．

集合 A, B, C について, 以下が成り立つ．

(1) $A \sim A$
(2) $A \sim B$ ならば $B \sim A$
(3) $A \sim B$ かつ $B \sim C$ ならば $A \sim C$

Proof. 以下それぞれ証明を述べる．どれも示すことは, 全単射の存在である．

(1) 恒等写像 id_A を考えればよい．
(2) 仮定より $A \to B$ の全単射が存在して, 全単射の逆写像を考えればこれは $B \to A$ の全単射である．
(3) $A \to B$ の全単射と $B \to C$ の全単射の合成写像を考えれば, これは全単射である．

□

二つの全単射の合成写像が全単射であることは直感的に明らかであるが, 厳密に証明をしておこう．より強い主張である以下の補題を示そう．

写像 $f : X \to Y, g : Y \to Z$ について, 以下が成立する．

(i) f, g ともに単射であれば $g \circ f$ も単射．
(ii) f, g ともに全射であれば $g \circ f$ も全射．

Proof. 以下に証明を述べる．

(i) $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$ とする．$y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$ と置くと, f の単射性から $y_1 \neq y_2$ である．また, g の単射性から $g(y_1) \neq g(y_2)$ である．従って, $(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(y_1) \neq g(y_2) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2)$ だから, $g \circ f$ は単射．
(ii) 示すことは, $(g \circ f)(X) = Z$ である．f, g は全射であるから $f(X) = Y, g(Y) = Z$ が成立する．すなわ

ち, 任意の $z \in Z$ に対し, $z = g(y)$ となる $y \in Y$ および $y = f(x)$ となる $x \in X$ が存在する. よって, $z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) \in (g \circ f)(X)$ が成り立つ. これより $Z \subset (g \circ f)(X)$ であり, 写像の定義より $Z \supset (g \circ f)(X)$ だから $Z = (g \circ f)(X)$, よって $g \circ f$ は全射.

□

全射の証明は, 以前述べた全射を示す証明とすこしやり方が違うように見えるだろう. 実際にはどちらのスタイルで証明してもらっても構わない. 個人的には, 今回の証明のほうがわかりやすい気がする. なおこの補題より, 全単射同士の合成写像が全単射であることは明らかであろう.

全ての集合の濃度は互いに等しいとは限らない. この事実は重要である. 例えば以下が成り立つ.

$$\mathbb{N} \nsim \mathbb{R}$$

これは Cantor によって示された. 彼の有名な**対角線論法**と呼ばれるアイデアを見てみよう.

Proof. 背理法[*14]で示す. $\mathbb{N} \sim \mathbb{R}$ であれば, 全単射 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ が存在する. このとき (すべての) 実数 $f(n)$ について, 10 進法による無限小数展開を行うと, $f(n) = a_{n0}.a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nn}\cdots$ となる. ただし, 各 $a_{nm} \quad (m = 1, 2, ...)$ が 0 から 9 までの整数,$a_{0n} \in \mathbb{Z}$ で, 整数や有限小数は小数部分に 0 を続けるとする. 例を挙げる. 例えば,3.1415... なら $a_{n0} = 3, a_{n1} = 1, a_{n2} = 4, ...$ となる. 2.4 なら $a_{n0} = 2, a_{n1} = 4, a_{n2} = a_{n3} = \cdots = 0$ である. $n = 1$ から書き並べると以下のようになる.

$$\begin{aligned} f(1) &= a_{10}.\boldsymbol{a_{11}}a_{12}a_{13}\cdots \\ f(2) &= a_{20}.a_{21}\boldsymbol{a_{22}}a_{23}\cdots \\ f(3) &= a_{30}.a_{31}a_{32}\boldsymbol{a_{33}}\cdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

小数部分の太字を見てほしい. この対角の数字を用いて, 新たな無限小数を作る. 具体的には, 各 a_{nn} について

$$b_n = \begin{cases} 1 & (a_{nn}\text{は偶数}) \\ 2 & (a_{nn}\text{は奇数}) \end{cases}$$

である b_n を用いて, 無限小数 $b = 0.b_{11}b_{22}b_{33}\cdots$ をつくる. 重要なのは, 必ず $b_n \neq a_{nn}$ となることである. この b は明らかに $b \in \mathbb{R}$ であるが, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $f(n) \neq b$ である. なぜなら, どの n についても小数第 n 位の数字が b と異なるからである. これは, f が全単射 (全射) であることに矛盾する. □

自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ と濃度が等しい集合を**可算集合**という. また, 有限集合と可算集合を合わせて**高々可算集合**という.

集合の濃度を表す記号等を導入しておこう. 集合 A に対して, A の**濃度**を $|A|$ または $\mathrm{card}A$ を書く. 集合の濃度とは, 濃度が等しい集合を集めた組のことである. 要素数 n の有限集合の濃度は n とかく. また, 可算集合の濃度は $\aleph_0$(アレフ・ゼロ) とかき, $\mathbb{R}$ の濃度は $2^{\aleph_0}$ とかく. 例えば, $|\varnothing| = 0, |\mathbb{Z}| = \aleph_0$ である.

[*14] 証明すべき命題を否定した命題をもとに論理を導き, 矛盾を見つけることで元の命題を示す方法.

我々が次に望むのは, 濃度を大小で比較できるようになることだろう. 集合 A, B について, A から B への単射が存在するが, B から A への単射が存在しないとき, A は B より**濃度が小さい**, または, B は A より**濃度が大きい**という. B から A への単射が存在したときは何も言えないのか, と疑問に思うかもしれない. 実は, **Bernstein の定理**によって, A から B への単射と B から A への単射が存在するとき, 濃度が等しいことが濃度が等しいことが保障される. 証明はここでは述べないから, 興味がある人は調べてみるとよい.

最も重要なのは, 有理数の集合 $\mathbb{Q}$ が可算集合であることである. そのためにはまず, 二つの補題を示さなければならない.

> 集合 A, B が $A \subset B$ であれば, A から B への単射が存在する.

Proof. 包含写像 $i : A \to B$ を考えると, これは明らかに単射であるから, 示された. □

> $\mathbb{Z}^2$ は可算集合である.

Proof. $\mathbb{Z} = \{(m, n) \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ は, 平面 $\mathbb{R}^2$ 上の格子点の集合であるから, 下図のように対応をつけることで, $\mathbb{Z}^2 = \{a_1, a_2, \cdots, a_n \cdots\}$ とできる. したがって, $\mathbb{Z}^2$ は可算集合である. □

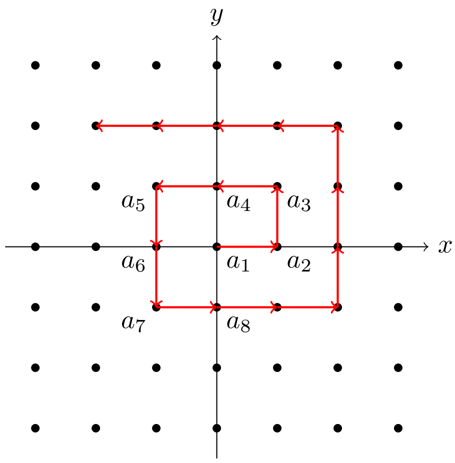


図 2: $a_1 = (0, 0)$ として, 反時計回りに対応付けていく.

準備が整ったので, $\mathbb{Q}$ が可算集合であることを示そう.

Proof. まず, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ より, $\mathbb{N}$ から $\mathbb{Q}$ への単射が存在する. 次に, $r \in \mathbb{Q}$ は, 既約分数として $r = p/q$ $(p \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N})$ の形にかける (整数 n については, $q = 1$ として, $x = x/1$ とかく). このとき,

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}^2, \frac{p}{q} \mapsto (p, q)$$

は単射であるから, $\mathbb{Z}^2$ が可算であるので $\mathbb{Z}^2$ から $\mathbb{N}$ への全単射が存在する. 以上より, $\mathbb{Q}$ から $\mathbb{N}$ への単射が存在するから, Bernstein の定理より $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$ である. □

最後に, 可算集合の部分集合は高々可算集合であることを示そう.

Proof. 可算集合を A とする. $B \subset A$ は有限集合か無限集合である. 有限集合であれば, それは高々可算集合であるから, B は無限集合であるとする. 仮定より, 全単射 $f : A \to \mathbb{N}$ が存在する. よって, $f(B) = N \subset \mathbb{N}$ と置くと, $B \sim N$ である. B が無限集合であるから, N も無限集合である. したがって, 自然数の無限部分集合 N が可算であることを示せばよい. 写像 $g : N \to \mathbb{N}$ を考える. $g(n)$ は集合 $\{m \in N \mid m \leq n\}$ の要素数とする. このとき, g は全単射である.

1. 単射の証明.
   $n_1, n_2 \in N, n_1 \neq n_2$ とする. 対称性から $n_1 < n_2$ と仮定してもよい. このとき, $m \leq n_1$ をみたす $m \in N$ は $m \leq n_2$ も満たし, 後者の場合は $m = n_2$ も条件を満たすから, $g(n_1) < g(n_2)$. したがって, $g(n_1) \neq g(n_2)$ だから g は単射.
2. 全射の証明.
   $n \in \mathbb{N}$ とする. N は無限部分集合であるから, $n = g(k)$ となる $k \in N$ は存在する. (N の要素にはいくらでも大きい値がある.) すなわち, $n \in g(N)$ であるから, $\mathbb{N} \subset f(N)$. よって, g は全射.

これより, N から $\mathbb{N}$ への全単射が存在するから, $N \sim \mathbb{N}$. ゆえに, $B \sim \mathbb{N}$ □

1.7 実数の連続性

ここでは, 実数の連続性について述べようと思う. 実数の性質を学ぶことは, 微分積分を行う上で大切だから, 少し難しいかもしれないが学んでいこう.

全ての数を A, B の二組に分けて, A に属する各数を B に属する各数よりも小さくできたとしよう. ただしこのとき A, B は空集合ではないとする. このような組み分け (A, B) を Dedekind の**切断** (Dedekind cut) といい, A を下組, B を上組という.

ある数 s について, s より小さい数全てを A, s よりも大きい数全てを B に入れるとする. (A, B) が切断であるためには, s も A または B に入っていなければならない. s が A に含まれるとき, A に最大値が存在し, B に最小値は存在しない.[*15] 逆に, s を B に入れれば, A に最大値は存在せず, B の最小値は存在する. このように, 任意の s について, それを境界とする切断を作ることができるが, この逆, すなわち次の定理が成り立つ.

Dedekind の定理

実数の切断は, 下組と上組との境界として, 一つの数を確定する.

これが**実数の連続性**である. 今後の論理の展開は, この定理が成り立つものとして, すなわち公理として認めて行う.

大小の順序があるところ[*16]には切断ができるが, この切断は次の三つの種類がある.

1. 下組に最大値が存在し, 上組に最小値が存在する. (leap)
2. 下組に最大値が存在せず, 上組にも最小値が存在しない. (gap)
3. 下組もしくは上組どちらかに端 (最大値または最小値) が存在し, もう一方には端が存在しない. (連続)

Dedekind の定理の主張とは, 実数の切断が 3 の切断に限られるということである.

例えば, 自然数の切断を考えてみよう. このとき, 切断の下組と上組には必ず最大値および最小値が含まれている. すなわち, 自然数の切断は 1 のみである. 逆に, 有理数の切断は 1 のようにできない. しかし, 2 のようにはできる. 例えば, $s = \sqrt{2}$ と取れば, $s \notin \mathbb{Q}$ であるから s は下組にも上組にも含まれないからである. もちろん, 3 の切断もできる. これには有理数を s と取ればよい.

次に, 最大値および最小値についてもう少し深掘りしよう. Quu ノート I では, 数列の有界について述べていた. 有界は一般の実数の部分集合についても定義できる. 集合 A に属する任意の数 a に対して, $a \leq M$ とできる実数 M が存在するとき, A は**上に有界**であるといい, この時の M を**上界**という. 同様に, $a \geq m$ とできる実数 m が存在するとき, A は**下に有界**であるといい, この時の m を**下界**という. 上にも下にも有界であるとき, A は**有界**という.

上界および下界は一つに定まらない. なぜなら, 上界が一つ存在すれば, それよりも大きい数も当然上界であるからである. 下界についても同様である. そこで, 上界のうち最小値と下界のうち最大値について考えてみる. 実は, A に最小値または最大値が存在しなくても, 上界の最小値または下界の最大値は存在する. この, 上界のうち最小である数を, A の**上限**といい, $\sup A$ とかく. また, 下界のうち最大である数を, A の**下限**といい,

[*15] 例えば, $s = 1$ と考えると, $b \in B$ は $b > 1$ である. 最小値が存在すると仮定し, それを b と置くと, $b' = (b+1)/2$ は, $b > b' > 1$ であり $b \in B$ となる. これは b が B の最小値であることに矛盾する.

[*16] この集合を順序集合という. もちろん実数も順序集合である.

$\inf A$ とかく.

$a = \sup A$ であることと次の二つが同時に成り立つことは同値である.

1. ${}^\forall x \in A\,[x \leq a]$
2. ${}^\forall r < a, {}^\exists x > r\,[x \in A]$

1 は a が A の上界であることを意味しており, 2 で a より小さいどの数も上界になりえないこと[*17]を意味しているから, これは納得であろう. 同様に, $a = \inf A$ であることと次の二つが成り立つことも同値である.

1. ${}^\forall x \in A\,[x \geq a]$
2. ${}^\forall r > a, {}^\exists x < r\,[x \in A]$

例を挙げてみよう. 例えば, $[-1, 1]$ は最大値 1, 最小値 -1 である. 一方 $(-1, 1]$ は最大値 1 だが, 最小値は存在しない. しかし, 下限は存在して, それは -1 である. -1 は $(-1, 1]$ の下界であり, どの $r > -1$ についても $r > x > -1$ となる数が存在して, $x \in (-1, 1]$ であるから, 確かに存在している.

なお, 上記の条件式は, 次のように書き換えることもできる. まず $a = \sup A$ については

1. ${}^\forall x \in A\,[x \leq a]$
2. ${}^\forall \varepsilon > 0, {}^\exists x \in A\,[a - \varepsilon < x]$

であり, $a = \inf A$ については

1. ${}^\forall x \in A\,[x \geq a]$
2. ${}^\forall \varepsilon > 0, {}^\exists x \in A\,[x < a + \varepsilon]$

となる.[*18]

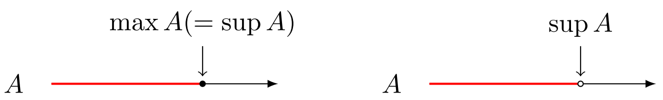


図 3: 最大と上限の違い

左の例では, 最大が存在しており, それは上限でもある. 一方右では最大は存在しない. しかし, 上限は存在する.

---

*17 r は a より小さいが, そのとき r よりも大きい x が存在してその x が A に含まれていれば, r は上界でないのである.

*18 それぞれ $r = a - \varepsilon, r = a + \varepsilon$ と置けばよい.

上限と下限で重要なのは, 次の定理である.

Weierstrass の定理

実数の部分集合 A が上方 (または下方に) 有界ならば A の上限 (または下限) が存在する.

これが先ほどのべた「上界の最小値... は存在する」の根拠, むしろそのものである.

Proof. ここでは上限の存在のみ証明する.[*19] A が上に有界であるとき, その上界全てを Y, それ以外を X とすると, 切断 (X, Y) を作ることができる. なぜなら, X に属する数はそのどの数も A の上界になりえない数であり, 必ず上界より小さいからである. Dedekind の定理によれば, この切断 (X, Y) によって一つの実数 s が確定する. s は X または Y のどちらかに必ず属している. ここで $s \in X$ であるとしよう. このとき, s は A の上界になりえないから, $y > s$ となる $y \in A$ が存在するはずである. このとき, $y > t > s$ となる t を考えると, s が X の最大値であることから, $t \in Y$ である. しかし, $y > t$ であるから, t は A の上界になりえず矛盾が生じる. したがって, $s \in Y$ であり, このとき s は Y の最小値であるから, A の上限は存在し, それは s である. □

なお, 一般の順序集合にも上限および下限が定義できるが, そのとき必ずそれらが存在するとは限らないことも付記しておく.

Weierstrass の定理を用いれば, Quu ノート I で述べた単調で有界な数列が必ず収束する[*20] ことに, 厳密な証明を与えることができる.

(広義の) 単調で有界な数列は必ず収束する.

Proof. 数列 $\{a_n\}$ が単調増加で, 上に有界であるとする. このとき, 任意の n について $a_n < M$ となる M が存在する. このとき集合 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n \cdots\}$ は上に有界であるから, Weierstrass の定理よりこの上限は存在する. この上限を α と置くと, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある a_N が存在して, $\alpha - \varepsilon < a_N$ である. 式を変形すると, $\alpha - a_N < \varepsilon$ となる. ここで, $n > N$ となる n について, $a_n > a_N$ であるから, $\alpha - a_N < \alpha - a_n$ である. 以上より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N > 0$ が存在して, $\alpha - a_n = |\alpha - a_n| < \varepsilon$ となるから, この数列は収束して, その極限値は上限 α である. 数列が広義単調増加であっても, 全て等号が成り立つ場合を除けば同様に証明できる. すべて等号が成り立つ場合は, その値を α とすれば, 極限の定義よりそれは極限値である. よって結局, 広義の単調増加で有界な数列は収束する. 単調減少についてもまったく同様に示せる. □

この定理を用いることで, 様々な命題を示すことができる.

Archimedes の公理

任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して, $x < n$ を満たす $n \in \mathbb{N}$ が存在する.

Proof. 背理法で示そう. 仮にある $x \in \mathbb{R}$ について, $x < n$ となる自然数 n が存在しないとしよう. 自然数 $\mathbb{N}$ を数列 $\{n\}$ と考えれば, これは単調増加な数列である. また, 背理法の仮定より, $x \geq n$ である. したがってこ

[*19] 下限の存在の証明は, 例えば解析概論 p.5 を参照してほしい. ただ, その証明自体は上限の場合とほとんど同じである.

[*20] 以後, この定理を用いる際に限り, 単に上に (下に) 有界であり単調増加 (単調減少) な数列であっても "単調で有界な数列" ということがあるから注意してほしい.

の数列は単調で有界な数列であるから, 収束して, その値は上限 x である．よって, $x-n<\varepsilon$ が任意の $\varepsilon>0$ で成立する．ここで $\varepsilon=1$ とすると, $x<n+1$ となるが, $n+1\in\mathbb{N}$ であるから, 始めの仮定に矛盾する． □

Archimedes の公理から我々がよく知る, $1/n\to 0\quad(n\to\infty)$ が導かれる．普段我々はなんの断りもなしにこの命題を認めていたのだった.

> 任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して, $m-1\le x<m$ を満たす $m\in\mathbb{Z}$ が唯一存在する.

Proof. まず $x\ge 0$ の場合を示す．Archimedes の公理より $x<n$ を満たす $n\in\mathbb{N}$ が存在する．このとき集合 M を次のようにおく.

$$M=\{l\in\mathbb{N}\mid x<l\le m\}$$

$m\in M$ であるから, M は空でない．また, M は無限集合ではない．よって, M の最小要素 m をとれば, $m-1\le x<m$ とできる．$x<0$ のときは, $-x>0$ だから, $m-1\le -x<m$ となる m が存在する．よって, $-m+1\ge x>-m$ であるから, 等号が成り立たない場合は $m\to -m+1$, 等号が成り立つ場合は $-m\to -m+1$ を命題の表式に代入すれば成り立つことがわかる.

なお, これが唯一であることは $m_1<m<m_2$ であるような整数 m_1,m_2 については成り立たないことを示せばよい．$m_1\le m-1\le x<m\le m_2+1$ であるから, どちらも元の命題の式を満たさない. □

この命題の式を変形すれば, $m\le x<m+1$ が成り立つことがわかる．このときの m は $m=[x]$ と書かれる．この記号 [ ] をガウス記号という.

Archimedes の公理と上の定理より, 次の非常に重要な命題が導かれる.

> **有理数の稠密性**
>
> 任意の $x,y\in\mathbb{R}$ $(x<y)$ に対して, $x<r<y$ を満たす有理数 r が存在する.

Proof. $y-x>0$ であるから, Archimedes の公理より, $\frac{1}{y-x}<n$ を満たす自然数 n が存在する．よって $y-x>1/n$ である．また, 上記定理より, $m-1\le nx<m$ を満たす $m\in\mathbb{Z}$ も存在する．したがって

$$x<\frac{m}{n}=\frac{m-1}{n}+\frac{1}{n}<x+(y-x)=y$$

ところで, $m/n\in\mathbb{Q}$ であるから, $r=m/n$ が求める有理数である. □

有理数の稠密性*21 を用いれば, 無理数の稠密性もすぐに示すことができる．これは簡単であるから演習問題に回すことにする.

---

*21 ちゅうみつと読む．稠密とは簡単に言えば, 実数 x,y の間にいくらでもその数が存在することをいう．一般の稠密は, 次のように定義される (位相空間に関する多少の知識が必要)．$(X,\mathcal{O})$ を位相空間とし, $A\subset X$ とするとき, A が X で稠密であるとは, A の閉包 A^a が $A^a=X$ を満たすことをいう．つまり, 有理数 $\mathbb{Q}$ の閉包は実数 $\mathbb{R}$ を包むのである.

今度は, 単調で有界な数列が収束することから, 切断とは別に実数を確定させる方法を考える.

区間縮小法

閉区間 $I_n = [a_n, b_n]$ $(n = 1, 2, \cdots)$ において

1. 各区間 I_n がその前の区間 I_{n-1} に含まれる.
2. n を十分大きくすれば, 各区間の幅 $b_n - a_n$ は十分小さくできる.

とすれば, これら各区間に共通なただ一つの点が存在し, それは $\lim a_n = \lim b_n$ である.

Proof. 始めの仮定 1 は, a_n が広義単調増加であり, b_n が広義単調減少な数列であることを意味する. さらに, $a_n \leq b_n$ ということでもある. したがって, $a_n \leq b_1, a_1 \leq b_n$ であるから, $\{a_n\}, \{b_n\}$ は単調で有界な数列である. よって, 極限 $\lim a_n = \alpha, \lim b_n = \beta$ は存在する. したがって, $\alpha \leq \beta$ が成り立つ. なぜなら, $\alpha > \beta$ であるとすれば $\alpha - a_n < \varepsilon/2, b_n - \beta < \varepsilon/2$ とできるから, $0 < \alpha - \beta < a_n - b_n + \varepsilon$ となる. $\varepsilon = \alpha - \beta$ と置けば,$0 < a_n - b_n$ すなわち $a_n > b_n$ となり矛盾する.

さて, 仮定 2 から, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $b_n - a_n < \varepsilon$ とできるような n が存在する.

$$a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_n$$

だから, $\varepsilon > b_n - a_n \geq b_n - \alpha \geq \beta - \alpha \geq 0$ となる. ε は任意であるから, $\beta = \alpha$ である. 任意の n について, $a_n \leq \alpha \leq b_n$ であるから, α は各 I_n に含まれる.

仮に, $\alpha \neq \alpha'$ である α' が各区間で共通であるとしよう. このとき, $a_n \leq \alpha' \leq b_n$ が任意の n に成り立つ. したがって, $0 \leq \alpha' - a_n \leq b_n - a_n$ であるから, $0 \leq \alpha' - a_n < \varepsilon$ である. これは $\lim a_n = \alpha'$ を意味するが, 仮定 $\alpha \neq \alpha'$ に矛盾する. したがって, 各区間に共通する点は唯一で, それは α である. □

最後に, 区間縮小法のみを仮定して Dedekind の定理を導いてみよう.

Proof. 切断 (A, B) を考える. A に属する数 a と B に属する数 b を考える. このとき, 区間 $I_0 = [a, b]$ の中間 $\frac{a+b}{2}$ は A か B のどちらかに属する. 仮に, A に属するならば, $a_1 = \frac{a+b}{2}, b_1 = b$ と置き, B に属するなら $a_1 = a, b_1 = \frac{a+b}{2}$ と置く. こうして新たな区間 $I_1 = [a_1, b_1]$ ができる. I_1 は I の右半分か左半分であり, その幅は $\frac{b-a}{2}$ である. 次に, I_1 の中間 $\frac{a_1+b_1}{2}$ についても同様に考え, $\frac{a_1+b_1}{2}$ が A に属するならば, $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}, b_2 = b_1$ と置き, B に属するなら $a_2 = a_1, b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$ と置く. このようにしてできる区間 $I_2 = [a_2, b_2]$ も, I_1 の右半分か左半分であり, 幅は $\frac{b-a}{4}$ である. この操作を繰り返せば, 区間の列 I_n ができ, 各区間はその前の区間に含まれ, 区間の幅 $\frac{b-a}{2^n}$ は n が十分大きいときに十分小さくできるから, これは区間縮小法の条件を満たしている. よって, これら区間に共通なただ一つの点が存在する.

共通な点を s と置くことにする. $s \in A$ であれば, それは A の最大である. なぜなら, 最大でないとき $s' \in A$ が存在して $s < s'$ であり, $b_n \to s$ であるから, $b_n < s + \varepsilon$ で, $\varepsilon = s' - s$ と取れば, $s < b_n < s'$ とできる. しかし, $b_n \in B$ であるから, $s' \in B$ でなければならず, 矛盾である. このとき, B には最小が存在しない. 仮に最小値 m が存在していれば, $s < m$ であるが, 先ほどと同様 $\varepsilon = m - s$ と取れば, $s < b_n < m$ とできてしまう. $b_n \in B$ であるから, これは m が B の最小であることに矛盾する. 以上より, s が A も属していれば, A には最大が存在し, B に最小は存在しない. まったく同様にして, s が B に属するときも, A には最大が存在せず, B に最小は存在することが示される. すなわち, 切断 (A, B) が与えられれば, 一つの数 s が確定できたことになり, Dedekind の定理が示された. □

以上の結果をまとめよう．我々は, Dedekind の定理を公理として, 実数の連続性に関する基本的な定理を導出してきた．そして最後には, 逆に区間縮小法から Dedekind の定理を導くことも行った．ここからわかるのは, 以上で述べた四つの定理は互いに同等であるということである．すなわち, これらの定理のうちどれか一つを公理として認めれば, それ以外の定理は導くことができる．

$$
\begin{tikzcd}
& \text{有界な単調数列の収束} \arrow[dl] & \\
\text{区間縮小法} \arrow[dr] & & \text{Weierstrass の定理} \arrow[ul] \\
& \text{Dedekind の定理} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

図 4: 基本的な定理の関係

本によっては, 有界な単調数列の収束を公理としているものや, Weierstrass の定理を公理としているものがある．この理由は公理として選ばれなかったものは, 公理として選んだものから導かれるからである．

なお, 以上の実数の性質は, このノートを含め, 断りなく使われることがあることに注意しておこう．

基本問題 $\boxed{\mathbf{1}}$ 以下の問いに答えよ。

問 1

次にうち, 正しい主張には○, 間違っているものには×をつけよ.

1. $A \in 2^A$ が成り立つ.
2. $\{\varnothing\} = \varnothing$ である.
3. 関数 $f(x) = \sin x$ は, $\mathbb{R}$ の範囲で全単射である.
4. 命題 ${}^\forall x \in X, {}^\exists y \in Y\,[P(x,y)]$ と命題 ${}^\exists y \in Y, {}^\forall x \in X\,[P(x,y)]$ は互いに同値である.

問 2

$p \leftrightarrow q$ を $\rightarrow, \leftarrow, \wedge$ を用いずに表せ.

問 3

要素数が n である有限集合 A の巾集合の要素数を求めよ.

問 4

数列 $\{a_n\}$ が有界である, を論理記号を用いて表せ.

問 5

公式 (1.35) と (1.41) を示せ.

問 6

$\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$ を示せ.

問 7

Archimedes の公理は次のように書けることを証明せよ.

二つの実数 $a, b > 0$ に対して, $na < b$ となる自然数 n が存在する.

問 8

無理数の稠密性, すなわち, どんな二つの実数の間にも無理数が存在することを示せ.

問 9

数列の上極限, 下極限を次のように定義する.

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right) \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} a_n\right) \tag{1.52}$$

このとき, $\limsup a_n = \inf\limits_{k\in\mathbb{N}}\left(\sup\limits_{n\geq k} a_n\right)$, $\quad \liminf a_n = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}}\left(\inf\limits_{n\geq k} a_n\right)$ となることを示せ.
ただし, $\sup\limits_{P(n)} a_n$, $\inf\limits_{P(n)} a_n$ とは, それぞれ $\{a_n \mid P(n)\}$ の上限, 下限を表す.

§2　行列と行列式

ベクトルのイメージとその和・差について．内積についても述べる．外積はベクトル解析のときに述べる．続いて, 行列についてその定義を述べ, 和・差・積について述べる．転置行列と逆行列についても述べる．行列式は, 一般の定義を述べ, その後 2×2 と 3×3 について計算方法を述べる．余因子展開についてその計算方法を述べる．

2.1　ベクトル

まずは, ベクトルについて簡単な説明をしよう．基本的に平面の場合のみ説明するが, 空間の場合でも本質的な部分は同じである．

ベクトルとは, ‘向き’ と ‘大きさ’ を持った量である．その最も身近な例は, 力学における速度, 力などだろう．これらはこれまで扱ってきた単なる数値 (**スカラー**) とは違う量である．このベクトルを図に示すと, 以下のようになる．

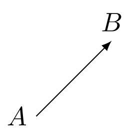


図 5: ベクトルのイメージ

このベクトルは $\overrightarrow{AB}$ と書かれる．始点 A から終点 B までを結ぶ矢印というわけである．正確に言うと, これはベクトルではないのだが, ひとまずのイメージはこの程度でよい．以後ベクトルは上記のような表記ではなく, 太字表記 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \ldots$ を主に用いる．

ベクトルのうち, 大きさが 0 のベクトルを特別に**零ベクトル**と呼び, $\mathbf{0}$ と表記する．このベクトルは向きを持たないがこれもベクトルとみなす．

次に考えたいのは, ベクトルの演算であろう．具体的には, 四則演算について考えてみたい．ただ残念なことに, ベクトル同士の和・差・積については定義されているが, 商については定義されていないので, ここでは和・差・積のみ考える．

ベクトル同士の和は, 恐らく中学の理科で習ったであろう平行四辺形の法則をそのまま使う．すなわち以下の図のようになる．このとき, 通常の数の演算のように交換法則と結合法則が成り立つ．これは図を描いてみ

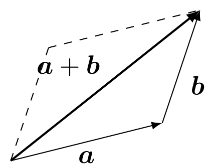


図 6: ベクトルの和

ればすぐわかるだろうから, ここでは詳しく述べない．また, 明らかに $\boldsymbol{a} + \mathbf{0} = \boldsymbol{a}$ である．

ベクトル $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$ に対し, その**逆ベクトル**を $-\boldsymbol{a} = \overrightarrow{BA}$ と定義する．つまり, $\boldsymbol{a}$ と向きが反対のベクトルが $-\boldsymbol{a}$ である．

これより, ベクトルの差が定義できる．すなわち, $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ と定義することにする．$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ であるので, $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ に $\boldsymbol{b}$ を加えると $\boldsymbol{a}$ となる．つまり, $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{b}$ の終点を始点として, $\boldsymbol{a}$ の終点を終点とするベクトルということになる．

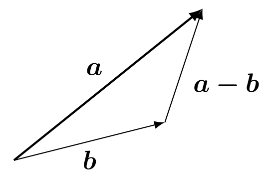


図 7: ベクトルの差

ベクトルの積については, 先にベクトルとスカラーの積について考えてみる．まず, $c>0$ である実数 c に対して, $c\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{a}$ の大きさが c 倍で, 向きが同じベクトルと定義する．$c<0$ の場合は, 大きさは c 倍であるが, 向きが $\boldsymbol{a}$ と反対である．$c=0$ の場合は $c\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ である．また, $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ であれば, c の値にかかわらず $\boldsymbol{0}$ となる．

このとき, 次が成り立つ．

$$c(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=c\boldsymbol{a}+c\boldsymbol{b} \tag{2.1}$$

$$(c+d)\boldsymbol{a}=c\boldsymbol{a}+d\boldsymbol{a} \tag{2.2}$$

$$(cd)\boldsymbol{a}=c(d\boldsymbol{a}) \tag{2.3}$$

単なる拡大または縮小であるから, 当然といえば当然である．

ベクトル $\boldsymbol{a}$ の大きさを $|\boldsymbol{a}|$ と書くことにする．さて, ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**内積** (または**スカラー積**) は次のように定義される．

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta \tag{2.4}$$

θ は二つのベクトルのなす角度である．これは, 二つのベクトルからスカラーを作る操作であり, ベクトルの積に相当する．ベクトルの積には内積とは別に外積というものもあるが, これはベクトル解析の部に任せることにして, ここでは内積の性質を見ていこう．

まず, 次が成り立つ．

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} \tag{2.5}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} \tag{2.6}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2 \tag{2.7}$$

このうち, (2.5) と (2.7) は定義からすぐわかる．問題は (2.6) である．これを証明するには**ベクトルの成分表示**を使うのが簡単である．

ベクトル $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$ を xy 平面上で考える．このとき, $A(x_A,y_A),B(x_B,y_B)$ と置くとき, x_B-x_A,y_B-y_A を $\boldsymbol{a}$ の**成分**といい,

$$\boldsymbol{a}=(x_B-x_A,y_B-y_A) \tag{2.8}$$

とかく．また, この (2.8) を**ベクトルの成分表示**という．これよりベクトルの大きさは $\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$ とかける．これは三平方の定理からすぐわかる．また, ベクトルの和, 差はそれぞれ対応する成分同士で行い, スカラー倍は各成分をそれぞれスカラー倍すればよい．

これを用いて, (2.4) をベクトルの各成分で表してみよう．$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y),\boldsymbol{b}=(b_x,b_y)$ とする．このとき $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2},\quad |\boldsymbol{b}|=\sqrt{b_x^2+b_y^2},\quad |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(a_x-b_x)^2+(a_y-b_y)^2}$ である．

また, $\cos\theta$ については, 下図 8 より余弦定理を用いて,

$$\cos\theta = \frac{|\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2}{2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$$

と書けるから, (2.4) は

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \frac{1}{2}\left(|\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2\right) = \frac{1}{2}\left\{a_x^2 + a_y^2 + b_x^2 + b_y^2 - (a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2\right\}$$

となり, これを計算すると

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y \tag{2.9}$$

この表式は内積の計算をしばしば簡単にする．これを用いれば, (2.6) は, $\boldsymbol{c} = (c_x, c_y)$ として,

$$(\text{左辺}) = \boldsymbol{a}\cdot(b_x + c_x, b_y + c_y) = a_x(b_x + c_x) + a_y(b_y + c_y) = (a_x b_x + a_y b_y) + (a_x c_x + a_x c_y) = (\text{右辺})$$

と簡単に証明にできる．

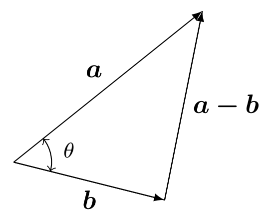


図 8: ベクトルと三角形

先ほどのベクトルの成分表示からわかるように, ベクトル $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$ は, A, B の絶対位置にはよらず, 相対位置 (二つの点の位置関係) にのみ依存している．また, 本来のベクトルの定義では, ベクトルは '向き' と '大きさ' を持つ量として定義されている．すなわち, 同じ向きと大きさを持つベクトルであれば, <u>その二つのベクトルがどの位置にあろうとも同一視しなければならない.</u>

一方, 特定の点に作用するベクトルを**束縛ベクトル**[*22]という．束縛ベクトルには, 例えばモーメントや, 次に説明する位置ベクトルなどがある．

xy 平面上の点 $P(x, y)$ について, P の**位置ベクトル**を $\boldsymbol{r} = (x, y)$ と定義する．xy 平面上の全ての点に対して, 対応する位置ベクトルは存在し, 逆に全てのベクトルは xy 平面上のある点の位置ベクトルになっている．この位置ベクトルは, 力学でも用いるし, このあとのベクトル解析でもひんぱんに用いる．

次は, ベクトルについて平行と垂直を考えてみよう．二つのベクトルが**平行**であるとは, それらのベクトルの向きが同じが反対であることをいう．すなわち,

$$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b} \Leftrightarrow {}^{\exists}k \in \mathbb{R}\,[\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}] \tag{2.10}$$

である．また, 二つのベクトルが**垂直**であるとは, 二つのベクトルのなす角度が $\frac{\pi}{2}$ であることをいう．つまり, $\cos\theta = 0$ であるから,

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0 \tag{2.11}$$

となる．つまり, 二つのベクトルが垂直であるかどうかを調べるためには, 内積が 0 であるかどうかをみればよいのである．

[*22] 逆に, 今までの始点が固定されていないベクトルは**自由ベクトル**という．

ベクトルで重要なのは次の二つの不等式である.

$$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \qquad (\text{schwarz の不等式}) \tag{2.12}$$

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \qquad (\text{三角不等式}) \tag{2.13}$$

(2.12) は, $\cos\theta$ の値域から明らかである. よって, (2.13) について示す.

Proof. 左辺を二乗すると, (2.7) より

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} \leq |\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| = (|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|)^2$$

となるから, 両辺 $\sqrt{\ }$ を取ればよい.[*23] なお, 途中の不等式は, やはり $\cos\theta$ の値域から変形した. □

最後に, 基本ベクトルについて述べよう. まず, 大きさが 1 であるベクトルのことを**単位ベクトル**という. ベクトル $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ に対して, $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|$ は単位ベクトルとなる. このように, ベクトルの大きさを 1 にすることを**正規化する**という. 単位ベクトルは, ベクトルの '向き' のみ抽出したものといえるだろう.

単位ベクトルのうち, 次のベクトルを考える.

$$\boldsymbol{i} = (1,0), \quad \boldsymbol{j} = (0,1) \tag{2.14}$$

このベクトルをそれぞれ, x 方向, y 方向の**基本ベクトル**という. 基本ベクトルは明らかに単位ベクトルである. 基本ベクトルを用いれば, 任意のベクトルはこれらの**線形結合**で表せる. すなわち, 任意のベクトル $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y)$ は次のように書ける.

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} \tag{2.15}$$

これは, 基本ベクトルが**線形独立**であることともかかわってくるのだが, ここでは述べない.

以上が, 平面のベクトルに関する基本的な内容である. 通常の線形代数では, 直線の (ベクトル) 方程式なども範囲に含まれるのだが, ここではあくまで微分積分がメインなので, あまり深く立ち入らないことにする. なお, 以上の議論は空間ベクトルの場合もほとんどそのまま適用される. ただし, 成分表示などは 2 つから 3 つ増えることに注意. また, 基本ベクトルは $\boldsymbol{i} = (1,0,0), \boldsymbol{j} = (0,1,0), \boldsymbol{k} = (0,0,1)$ の 3 つとなる.

補足として, ここでは行ベクトル (横ベクトル) として扱ったが, 線形代数の教科書では基本的に列ベクトル (縦ベクトル) で書く場合が多いようである. これはおそらく次にやる行列の積が念頭にあるのだろう. 私はあまり線形代数に詳しくないので厳密なことはよくわからないが, とりあえず今は列ベクトルで書こうが行ベクトルで書こうが気にしなくてよいのではないだろうか.

[*23] 両辺のルートの中身が正であるから, このようにしてもよい.

2.2　行列

ここでは行列について述べる．行列は, 複数のベクトルを縦または横に並べて作ることができる, 複数の数の集まりである．ただ, ベクトルが物理量を表すのに対し, 行列は単なる数の集まりである．この違いを意識するには相対論の部を読んでみるとよいから, ここではそこまで深く考えず行列の定義と演算法について扱う．

まず, mn 個の数 $a_{ij}(i=1,2,\ldots,m, j=1,2,\ldots,n)$ を次のように並べ, かっこで囲んだものを考える．

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

これを, m **行** n **列の行列**, または単に行列という．行列の横の並びを行, 縦の並びを列という．また, 第 i 行と第 j 列が交わる要素 a_{ij} を, この行列 A の (i,j) **成分**という．

特に, $1\times n$ 行列は, n 次元行ベクトルであり, $m\times 1$ 行列は, m 次元列ベクトルである．これまで扱ってきた平面のベクトルは 1×2 行列だったというわけである．

行列は, 基本的に大文字で表される．ただし, やはりベクトルは特別に太字の記号のままとする．全ての成分が 0 である行列は, **零行列**といい, O とかく．

二つの行列について, 行の数と列の数がともに等しいときは, それらは同じ型という．二つの行列が同じ型であれば, それらが等しい行列であるかどうかを考えることができる．二つの行列が等しいとは, それぞれの (i,j) 成分がすべて等しいことをいう．

行列の中で, $m=n$, つまり行の数と列数が一致しているものを m 次の**正方行列**という． 正方行列 $A=(a_{ij})$[*24] について, a_{kk} の成分を**対角成分**という．対角成分以外がすべて 0 である行列を**対角行列**という．特に, 対角行列の対角成分が全て 1 である行列を**単位行列**といい, E と表す．

ベクトルと同様, 行列にも和・差・積が定義できる．ただし和・差は同じ型の行列間においてのみ定義され, $(a_{ij})\pm(b_{ij})=(a_{ij}\pm b_{ij})$ となる．つまり, 各成分同士を足す (引く) だけである．当然このときも交換法則と結合法則が成り立つ．

行列の差の特別な場合として, $O-A$ を $-A$ と書くことにする．この行列は, A の各成分が -1 倍されたものである．ベクトルと同様に, スカラーと行列の積は $k(a_{ij})=(ka_{ij})$ と定義される．よって, $(-1)A=-A$ ということになる．ベクトルと同じく, 次の関係が成り立つ．

$$c(A+B)=cA+cB \tag{2.17}$$

$$(c+d)A=cA+dA \tag{2.18}$$

$$(cd)A=c(dA) \tag{2.19}$$

これも, 簡単な計算からすぐわかるだろうから証明は省略する．

[*24] (2.16) の書き方は場所を取るから, このように表記している．

行列の積を考える前に, ベクトルの内積を行列を用いて表すことを考えてみる. 簡単な場合として, 二次元の場合で考えよう. 行ベクトル $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}$ と, 列ベクトル $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ について, これらの積を次のように定める.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

これはまさに内積である. 以前, 行列は複数のベクトルを並べて作れると述べた. これに則って, $m \times l$ の行列と $l \times n$ の行列の積を次のように定める.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ml} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{ln} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum a_{1k} b_{k1} & \sum a_{1k} b_{k2} & \cdots & \sum a_{1k} b_{kn} \\ \sum a_{2k} b_{k1} & \sum a_{2k} b_{k2} & \cdots & \sum a_{2k} b_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum a_{mk} b_{k1} & \sum a_{mk} b_{k2} & \cdots & \sum a_{mk} b_{kn} \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

ただし, 和の記号 $\sum$ は $k = 1$ から $k = l$ までの和を取ることを意味する.

計算例をいくつか挙げよう.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 0 + 5 \times 1 & 2 \times 3 + 5 \times -1 \\ -3 \times 0 + 1 \times 1 & -3 \times 3 + 1 \times -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 1 \times 0 & 1 \times 1 + 1 \times 5 & 1 \times 3 + 1 \times 0 \\ 5 \times 2 + 0 \times 0 & 5 \times 1 + 0 \times 5 & 5 \times 3 + 0 \times 0 \\ 1 \times 2 + 4 \times 0 & 1 \times 1 + 4 \times 5 & 1 \times 3 + 4 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 10 & 5 & 15 \\ 2 & 21 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 4 & 3 \times 0 & 3 \times 5 \\ -2 \times 4 & -2 \times 0 & -2 \times 5 \\ 1 \times 4 & 1 \times 0 & 1 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 15 \\ -8 & 0 & -10 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

行列の積は, まず覚えずらい上に, 計算ミスが多発しやすい. 何回か練習することをお勧めする. また, 積の計算の際には, 次のように '補助線' を引くと計算しやすい.

$$\left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 5 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ 5 & 0 \\ 1 & 4 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 25 & 0 \end{pmatrix}$$

上記の計算を見ればわかるように, 行列の積 AB は, A の列の数と B の行の数が一致するときのみ定義される. また, 行列の積は可換ではない. すなわち, 一般には $AB = BA$ は成立しない. しかし, それでも分配法則と結合法則は成り立つ. ただし, どれも和と積が計算できる場合である.

$$(A + B)C = AC + BC \tag{2.21}$$

$$C(A + B) = CA + CB \tag{2.22}$$

$$(AB)C = A(BC) \tag{2.23}$$

最初の式だけ証明をしておこう. それ以外も同様にできる.

Proof. $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij})$ と置く. このとき,

$$(A+B)C = (a_{ij}+b_{ij})C = \left(\sum_{k=1}^{l} (a_{ik} + b_{ik}) c_{kj} \right) = \left(\sum a_{ik} c_{kj} + \sum b_{ik} c_{kj} \right) = \left(\sum a_{ik} c_{kj} \right) + \left(\sum b_{ik} c_{kj} \right) = AB+BC$$

が成り立つ. □

任意の行列について, 対応する単位行列との積は必ず元の行列となる.

$$AE = A, \quad EA = A \tag{2.24}$$

ここでいう '対応する' とは, A と列の数もしくは行の数が等しいという意味である.

Proof. $A = (a_{ij})$ と置く. ここで次の記号を導入する.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{2.25}$$

これを **Kronecker のデルタ**という. これを用いれば, $E = (\delta_{ij})$ と書ける. これより

$$\begin{aligned} AE &= \left(\sum_{k=1}^{l} a_{ik}\delta_{kj}\right) = (a_{ij}\delta_{jj}) = (a_{ij}) = A \\ EA &= \left(\sum_{k=1}^{l} \delta_{ik}a_{kj}\right) = (\delta_{ii}a_{ij}) = (a_{ij}) = A \end{aligned}$$

となる. □

任意の行列に対し, $AO = O, OB = O$ が成り立つ. これは明らかである. しかし, $A \neq O, B \neq O$ であっても $AB = O$ が成立することがある. 例えば

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である. このような A, B を**零因子**という.

行列の行と列を入れ替えることで, 新たな行列を作ることができる. この操作を**転置する**といい, A を転置した行列を ${}^tA$ とかき, A の**転置行列**という.

例えば

$${}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad {}^t\begin{pmatrix} 5 & -3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad {}^tE = E$$

転置については, 次の性質が成り立つ.

$${}^t({}^tA) = A \tag{2.26}$$

$${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA \tag{2.27}$$

(2.26) は明らかであるから, (2.27) の証明を述べよう.

Proof. $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ と置く.

$${}^t(AB) = {}^t\left(\sum a_{ik}b_{kj}\right) = \left(\sum a_{jk}b_{ki}\right)$$

であり, ${}^tA = (a_{ji}), {}^tB = (b_{ji})$ であるから

$${}^tB\,{}^tA = \left(\sum a_{jk}b_{ki}\right) = {}^t(AB)$$

よって等式が示された. □

行列に対して, その逆数にあたるものを定義しよう. n 次の正方行列 A に対して

$$AX = XA = E \tag{2.28}$$

となる行列 X が存在するとき, A を**正則行列**といい, X を A の**逆行列**という. ある正方行列に対して, その逆行列が必ず存在するわけではないが, 存在するとすればそれは唯一である. 実際 X, X' ともに A の逆行列であれば

$$X = XE = X(AY) = (XA)Y = EY = Y$$

となる. そこで, A の逆行列を A^{-1} と表すことにする. 実は, $AX = E$(もしくは $XA = E$) であれば A は正則で, $X = A^{-1}$ である. これに今回重点を置いていないから, この証明は省略する. 適当な線形代数の本をあたってほしい.

重要なのは, 次の性質である.

$$(A^{-1})^{-1} = A \tag{2.29}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \tag{2.30}$$

ただし, A, B は正則行列である.

Proof. 仮定より, A, B は正則行列であって, 同じ型である.

1. (2.29) の証明.
   A が正則であるから, $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ となる A^{-1} が存在する. したがって, A^{-1} は正則である. また, A^{-1} の逆行列は A である. よって $(A^{-1})^{-1} = A$ である.
2. (2.29) の証明.
   $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$ であり, 同様に $(B^{-1}A^{-1})(AB) = E$ が成り立つ. したがって,$B^{-1}A^{-1}$ は AB の逆行列である.

□

一般の正方行列の逆行列を求める方法についてはまた後で述べるとして, ここでは 2 次の正方行列の逆行列の公式を提示する.

2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が正則である必要十分条件は, $ad - bc \neq 0$ であり, このとき

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

が成り立つ.

(2.31) が本当に逆行列になっているかは実際に行列の積を求めてみればわかる.

行列は, 連立一次方程式の解を求める際に用いることができる. しかし, それは微分積分の範囲ではないのでここでは述べない. これも適当な本をあたってほしい.

最後に, 線形変換について少しだけ述べておこう．ここではベクトルの成分表示として列ベクトルを用いることにする．

ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ との間に, 次の関係が成り立っていたとしよう．

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{2.32}$$

これをベクトル $\boldsymbol{x}$ から $\boldsymbol{x}'$ への写像と捉えて, **線形変換**という．このときの行列 A を**線形変換行列**という．

線形変換と線形変換行列は異なるものであり, 線形変換を行列で表現したものが線形変換行列である．実は一般の線形変換の定義は少し違う．線形変換は次の二つの性質[*25]を持つベクトルからベクトルへの写像と定義される．

$$f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) \tag{2.33}$$

$$f(c\boldsymbol{x}) = cf(\boldsymbol{x}) \tag{2.34}$$

しかし, (2.32) の変換は上記の二つの性質を満たすから, これを線形変換といっても何の問題もないのである．さらに, 全ての線形変換は (2.32) の表式で表されることも証明される．すなわち, 全ての線形変換には対応する線形変換行列が存在して, その変換を行列で表すことが可能なのである．この証明は演習問題としよう．

線形変換には様々なものが考えられるが, 中でも重要なのが次の回転を表す行列である．

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{2.35}$$

xy 平面上のすべての点について, 位置ベクトルが存在することは以前述べた．この線形変換によって, 位置ベクトルを θ だけ原点回りに反時計回りに回転させることができる．すなわち, xy 平面上の点を回転させることが可能になるのである．

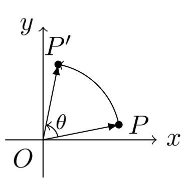
Proof. まず, $\boldsymbol{x} = ^t(x, y) = ^t(r\cos\theta_0, r\sin\theta_0)$ と表しておく．このとき, $\boldsymbol{x}' = ^t(r\cos(\theta+\theta_0), r\sin(\theta+\theta_0))$ である．$\boldsymbol{x}'$ の各成分を加法定理を用いて変形すると

$$x' = r\cos\theta\cos\theta_0 - r\sin\theta\sin\theta_0 = x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$y' = r\sin\theta\cos\theta_0 + r\cos\theta\sin\theta_0 = x\sin\theta + y\cos\theta$$

よって

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

したがって (2.35) が求める行列である． □



[*25] この性質を線形性という．

2.3 行列式

ここでは行列式を扱う．行列式は, 歴史的には連立一次方程式を求める際に使われたのが初出とされる．それは 17 世紀のことであった．そこから行列式は幾何学的な応用や, ヤコビ行列式の表式など様々なものに応用されている．

さっそくであるが, 行列式の定義を述べようと思う．まず, n 個の要素からなる $P=\{1,2,\cdots,n\}$ という集合を考える．この要素に対して, 全単射の写像 $\sigma:P\to P$ を考える．これは, P の要素 $1,2,\cdots,n$[*26]を並べ替える操作と考えることができ, この写像を**置換**という．特に, 2 個の文字だけを入れ替え, $n-2$ 個の文字は動かさないものを**互換**という．任意の置換は, いくつかの互換を繰り返すことで行うことができる．しかも, 任意の置換の互換の回数が奇数回であるか偶数回であるかは, 与えられた置換によって決まり, 互換の順序によらない.[*27] よって, 置換 σ が偶数回の互換で表せるとき, **偶置換**といい, 奇数回の互換で表せるとき, **奇置換**という．

偶置換であるか奇置換であるかを区別するために, 次のように置換 σ に符号をつけることにする．

$$\operatorname{sign}\sigma=\begin{cases}+1 & (\sigma\text{は偶置換})\\ -1 & (\sigma\text{は奇置換})\end{cases} \tag{2.36}$$

例えば, 置換 σ が恒等写像であるときは, 0 回の互換で行うことができるから, これは偶置換である．また, $n=4$ として,

$$\sigma(k)=\begin{cases}3 & (k=1)\\ 1 & (k=2)\\ 4 & (k=3)\\ 2 & (k=4)\end{cases}$$

という置換を考えれば, $(3,1,4,2)\to(1,3,4,2)\to(1,2,4,3)\to(1,2,3,4)$ のように置換されるから, これは奇置換である．[*28]

これより, n 次の正方行列 A の**行列式**は以下のように定められる．

$$|A|=\det A=\sum_{\sigma}\operatorname{sign}\sigma\cdot a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)} \tag{2.37}$$

ただし, $\sum\limits_{\sigma}$ は考えられる置換 σ 全てに対して和を取る記号である．また行列式は次のようにも書かれる．

$$\det A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} \tag{2.38}$$

ためしに, $n=2$ の場合を (2.37) を用いて計算してみよう．考えられる置換は $\sigma:(1,2),\sigma':(2,1)$ であるから

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\operatorname{sign}\sigma\cdot a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}+\operatorname{sign}\sigma'\cdot a_{1\sigma'(1)}a_{2\sigma'(2)}=+a_{11}a_{22}+(-1)a_{12}a_{21}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

と計算される．

[*26] この $1,2,\cdots,n$ は順序対 $(1,2,\cdots,n)$ と考えるとわかりやすい．
[*27] 証明は斎藤正彦の線型代数入門 pp.76-77 が詳しい．
[*28] これは, 置換された状態から逆にもとの $(1,2,3,4)$ に戻す互換を考えている．このように, $(1,2,3,4)$ から置換するまでの互換の回数で考えても, 置換されたものから元に戻すための互換の回数で考えてもよい．

同様に 3 次の場合でも次のようになる.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

これは, **サラスの方法**という方法を用いることで計算することができる. この図において, 赤線を通る文字の積

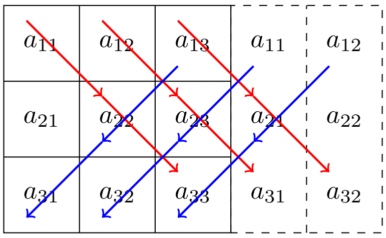


図 9: サラスの方法

は +, 青線を通る文字の積は − の符号をつけてすべて足し合わせればよい. これは 2 次の場合でも同様にできるが, 4 次以上の場合はできない.

通常, 4 次以上の行列式は式変形を繰り返すことで次数の小さい行列式で表し, 計算していくことで求める. まずは, 行列式の基本的な性質についてみていこう. 基本的なのは, 次の二つである.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{k1}+a'_{k1} & a_{k2}+a'_{k2} & \cdots & a_{kn}+a'_{kn} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hdotsfor{4} \\ a'_{k1} & a'_{k2} & \cdots & a'_{kn} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2.39}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hdotsfor{4} \\ ca_{k1} & ca_{k2} & \cdots & ca_{kn} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2.40}$$

これらは, 行列式の列に関する**多重線形性**という. 証明は定義 (2.37) から明らかであろう. また, これらの性質は行に関しても言える. それを保証するのが, 次の転置行列に関する定理である.

> 正方行列 A について $|A| = |{}^tA|$

Proof. $A = (a_{ij}), {}^tA = (b_{ij})$ とおく. このとき, $b_{ij} = a_{ji}$ に注意する.

$$|{}^tA| = \sum_{\sigma} \operatorname{sign}\sigma \cdot b_{1\sigma(1)}b_{2\sigma(2)}\cdots b_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma} \operatorname{sign}\sigma \cdot a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n}$$

であり, $\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(n)$ の順番を $1, 2, \cdots, n$ となるように掛ける順番を変える. このとき, σ は全単射だから, 逆写像 σ^{-1} が存在して, しかも全ての σ について和を取る場合と全ての σ^{-1} について和を取る場合とで取りうる置換は変わらず, $\operatorname{sign}\sigma = \operatorname{sign}\sigma^{-1}$ であるから. 次のようになる.

$$\sum_{\sigma^{-1}} \operatorname{sign}\sigma^{-1} \cdot a_{1\sigma^{-1}(1)}a_{2\sigma^{-1}(2)}\cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} = \sum_{\sigma} \operatorname{sign}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)} = |A|$$

以上より $|A| = |{}^tA|$ が示された. □

次の公式は, 証明は簡単であるが, 行列式の計算で重宝する.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2.41}$$

Proof. 左辺において, $\sigma(1) = 1$ 以外の場合の置換の和は全て 0 である. $\sigma(1) = 1$ の場合, $\sigma(i) \quad (i = 2, 3, \ldots, n)$ の選び方は自由であるから

$$(\text{左辺}) = \sum \operatorname{sign}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = a_{11} \sum_{\sigma|\sigma(1)=1} \operatorname{sign}\sigma \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = (\text{右辺})$$

したがって等式が成り立つ. □

当然 (2.41) は行についても成り立つ.

行列式には多重線形性とは別に, もうひとつ重要な性質がある. 行列式の 2 つの行または 2 つの列を交換すると, 符号が変わる. これを行 (または列の) **交代性**という. この証明は簡単だから演習問題とする.

行列式について述べるからには, 次の定理について触れなければならないだろう.

二つの n 次正方行列 A, B について $|AB| = |A||B|$

Proof. $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ とおく. このとき $AB = (\sum a_{ik}b_{kj})$ である.

$$\begin{aligned} |AB| &= \sum_\sigma \operatorname{sign}\sigma \cdot \left(\sum_{k_1} a_{1k_1} b_{k_1\sigma(1)}\right) \left(\sum_{k_2} a_{2k_2} b_{k_2\sigma(2)}\right) \cdots \left(\sum_{k_n} a_{nk_n} b_{k_n\sigma(n)}\right) \\ &= \sum_\sigma \operatorname{sign}\sigma \cdot \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_n} a_{1k_1} b_{k_1\sigma(1)} a_{2k_2} b_{k_2\sigma(2)} \cdots a_{nk_n} b_{k_n\sigma(n)} \end{aligned}$$

ところで, 数字 $k_1\sigma(1), k_2\sigma(2), \ldots, k_n\sigma(n)$ を並べ替えたものは, 和を取った時に打ち消しあう. したがって, $\sum$ 内の $k_1, k_2, \ldots, k_n$ は全て異なる値を取っていなければならない. [*29] すなわち, $\sum\limits_{k_1,k_2,\ldots,k_n}$ はある置換 k の取りうる全ての和 $\sum\limits_k$ と考えてよい. よって

$$\sum_\sigma \sum_k \operatorname{sign}\sigma \cdot a_{1k_1} b_{k_1\sigma(1)} a_{2k_2} b_{k_2\sigma(2)} \cdots a_{nk_n} b_{k_n\sigma(n)} = \sum_k a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n} \left(\sum_\sigma b_{k_1\sigma(1)} b_{k_2\sigma(2)} \cdots b_{k_n\sigma(n)}\right)$$

右辺の ( ) 内は, $|B|$ の行を並び変えたものである. このとき, 置換 k が偶置換であるか奇置換であるかによって, ( ) の符号が変わる (行の交代性). これより

$$\sum_k a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n} \operatorname{sign} k |B| = |B| \sum_k \operatorname{sign} k \cdot a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n} = |A||B|$$

以上より $|AB| = |A||B|$ が示された. □

[*29] σ の各値はそれぞれ互いに違う. 仮に $k_i = k_j (i \neq j)$ であるとき, $\sigma(i)$ と $\sigma(j)$ だけ値を入れ替えた置換も存在するから, このときちょうど打ち消しあってしまう.

行列式を用いて, 二つの平面ベクトルが作る面の面積を求めることができる.[*30] 二つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角度をなす角度を θ とすると, 作られる面は平行四辺形であるから, $S = ||\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta|$ となる. 絶対値記号は都合が悪いから, 両辺を二乗すると, $S^2 = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\sin^2\theta = |\boldsymbol{a}^2||\boldsymbol{b}^2|(1-\cos^2\theta)$ となる. ここで, $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y), \boldsymbol{b} = (b_x, b_y)$ と置くと

$$\begin{aligned} S^2 &= (a_x^2 + a_y^2)(b_x^2 + b_y^2)\left(1 - \frac{(a_x b_x + a_y b_y)^2}{(a_x^2 + a_y^2)(b_x^2 + b_y^2)}\right) = (a_x^2 + a_y^2)(b_x^2 + b_y^2) - (a_x b_x + a_y b_y)^2 \\ &= a_x^2 b_y^2 + a_y^2 b_x^2 - 2a_x a_y b_x b_y = (a_x b_y - a_y b_x)^2 \end{aligned}$$

となるから, 求める面積は

$$S = |a_x b_y - a_y b_x| = \left|\det\begin{pmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{pmatrix}\right| \tag{2.42}$$

となる. つまり, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の二つのベクトルがなす面の面積は, 二つのベクトルの成分を横に並べてできる行列の行列式の絶対値に等しい.

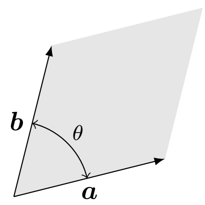


図 10: 二つのベクトルがなす面

[*30] これはベクトル解析で述べる外積を用いればより一般に求められる.

2.4　余因子展開

最後に, 余因子展開について述べよう.

§3　偏微分

多変数関数をまず具体例で挙げ, その後偏微分について解説する. 二変数テイラー展開及び積分記号下の微分まで述べる.

§4　多重積分

多重積分についてまず二重積分についてその定義を話す．かんたんな計算ののちに三重積分も述べる．その後, 変数変換について, 一次変換の場合について厳密な証明を行い, それ以外は感覚的なものにとどめる．

第 II 部
ベクトル解析

ベクトル解析は, 理工系の学生にとって馴染み深いものと聞く. たいていの物理科と電気科の学生は, 電磁気学にて顔を合わせることになるだろう. よく電磁気学は, ベクトル解析をふんだんに用いるから難しいと言われているが, 少なくともベクトル解析単体で見ればそこまで難しいものではない. そして何よりベクトル解析は楽しいものである. ここでは, まずベクトルについての基礎知識について述べた後, ベクトル値関数についてその微分積分を定義する. その後, 空間上の曲線および曲面の解析についてすこし述べ, ベクトル解析の顔ともいえる微分演算子について述べる. 電磁気学ではよく用いられる Gauss の発散定理および Stokes の定理についても扱う.

§5　ベクトルの性質と演算

数学基礎で述べたことと多少重複するが, 内積, 外積およびそれらの性質を述べる. スカラー三重積とベクトル三重積も述べる.

§6　ベクトル値関数とその微分

ベクトル値関数について述べたのち，それらの微分積分を定義する．ただし，積分は定義のみで深く触れない．

§7　曲線の解析

曲線について解析する．平面曲線について述べて, 空間曲線でも議論する．Frenet-Serret の公式まで.

§8　曲面論入門

曲面について解析する．基本量を導出し，Gauss 曲率と平均曲率を紹介する．

§9 微分演算子

ベクトル場とスカラー場について説明する．その後各微分演算子について述べる．

§10　線積分と面積分

線積分と面積分について定義を述べる．Gauss の定理と Stokes の定理について述べ, 電磁気学への応用をしてみる．

第 III 部
複素解析

複素解析は, 数学の中で最も美しい理論の一つと言われる. 複素関数 (複素数から複素数へ対応させる関数) に対して, 正則という概念が定義できる. 正則性とはかんたんに言えば微分可能性のことなのであるが, 驚くべきことにこの正則性を満たせば, それらを微分した関数も正則性を保つのである. これらの性質を含め, 正則関数の解析の基本となるのは Cauchy の積分定理である. ここでは, 複素数についてその基本的な性質を述べ, 複素関数および複素微分について定義し, 複素平面上での積分を述べる. その後, Cauchy の積分定理をはじめとする, 正則関数に関する多くの定理を証明する. その中には実積分の計算に対してたいへん有効な留数定理もある. この理論の美しさをじっくり味わってほしい.

§11　複素数

複素数についてその基礎知識を述べる．複素平面上の領域も．De Moivre の定理まで述べる．

§12　複素関数とその微分

複素関数について定義し，その性質について簡単に述べる．Cauchy-Riemann の方程式も述べる．初等関数についても述べる．

§13　複素線積分

かんたんな線積分の計算をして, Cauchy の積分定理を述べる．Cauchy の積分公式や Goursat の定理などの多数定理を述べる．最大値の原理については証明させる？

§14　級数

複素数列について, その収束等を定義し, 複素級数についても定義する．ベキ級数や Taylor 展開, Maclaurin 展開についても述べる．Laurent 展開を重点的に扱う. 特異点とその分類も述べる.Picard の大定理は入れない．無限遠点の Laurent 展開も述べる.

§15 留数定理

留数について定義を述べて, 留数定理を示す. その後, 実積分の計算を行う. 無限遠での留数についても述べる.

§16　解析接続

解析接続について簡単な例を挙げ, 一致の定理を証明して, 解析接続の一意性について説明する.

§17　Riemann 面

余裕があれば, 多価関数と Riemann 面についてすこしだけ述べる.

第 IV 部
相対性理論

相対性理論... それはかの天才物理学者 Einstein が作り上げた物理学の中で最も美しい理論である．理科や宇宙が好きな小学生であればほとんどの人があこがれていたものであると思うし, それ以外の人でも, 相対性理論から導かれる不思議な世界 (双子のパラドクスなど) について聞いたことがある人も多いと思う．相対性理論が美しいといわれるその所以は, たった一つの物理的要請に真摯に従って計算することで, 重力場の基礎方程式 (いわゆる, Einstein 方程式) までたどり着けるところであろう．その要請とは, 「物理学の法則は, 座標系に依存しない形式に書かれなければならない」という, 実に自然な, 当然ともいえる要請である．この要請から, さまざまな相対性理論の世界が開けることには, ただただ驚嘆するばかりである．

相対性理論は, 一般に非常に難しいといわれている．確かに, 相対性理論, 特に一般相対性理論を真に理解するには, 数学の Riemann 幾何学について熟知していないといけないだろう．しかし, 特殊相対性理論に限って言えば, かんたんな力学の知識さえあれば (一部を除いて) 理解することができる．また, 一般相対性理論に関しても, 重力場の方程式を導くだけであれば必要な Riemann 幾何学の知識も特別難しいものではないのである．

ここでは, 特殊相対性理論について, よく子供向けの科学本などに載っている事象を中心に数学的に理解していく．また, 一般相対性理論についても軽く触れる．

§18　特殊相対論入門

Galilei 変換についてと慣性系について述べる．光速度不変の原理について, 実験結果から述べ, Lorentz 変換を導出する．Minkowski 時空上の距離, 世界間隔について説明する．このとき Lorentz 変換に対して不変であることを述べる．固有時間などについても述べる．

§19　パラドクスの解決

パラドクスをここで解決する．双子のパラドクスと時計のパラドクス

§20　数学的準備

ベクトルやテンソルについて, かんたんに定義する.

§21　相対論的力学

相対論上で力学を展開する．$E = mc^2$ の導出や変分原理についても扱う．双子のパラドクスを変分原理を用いて解決する．

§22　一般相対論への展望

Riemann 幾何学の ds^2 を紹介して, 等価原理について $\Gamma = 0$ であることを紹介する.

第 V 部
Lebesgue 積分入門

積分好きなら一度は聞いたことがあるのが, この Lebesgue 積分である. Lebesgue 積分は, 単なる数学の枠を飛び越えて, 物理学や工学で必須の Fourier 解析や, 偏微分方程式, また確率論などのいたるところに顔を出す非常に重要な概念である. それにもかかわらず, この Lebesgue 積分はなかなかに難しく, 習得にも時間がかかる. これは Lebesgue 積分が素朴な Riemann 積分と違って内容がいささか抽象的であることが原因であるように思える. さらに, 集合論に関する知識も必要であり, 学ぶための敷居が高い. そこでここでは, Lebesgue 積分論のうち, 特に重要であるものを選択して系統的に学べるよう, 構成を工夫した. 端的に言えば, 極限と積分の順序交換ができる単調収束定理へ最短経路で学べるようになっているのである. なおこの Lebesgue 積分は, Riemann 積分と対照的に, しばしばグラフを横に切る積分であると説明される. 実際まちがってはないが, 実際に Lebesgue 積分を学んでいると, 横に切っているというイメージはあまりないので注意してほしい.

§23　可測空間

集合体, σ-集合体の定義を述べ, 可測空間を定義する．部分集合族から生成される σ-集合体や可測分割等も述べる．

§24　測度

集合関数の定義および測度の定義を述べる．様々な測度の例を述べる．測度の基本的な性質についても示す．μ-零集合についても触れ，完備測度空間を定義する．完備測度への測度の拡張が存在し，しかもそれが一意であることを述べる．

§25　可測関数

可測関数の定義, 基本的性質を述べる. 単関数を定義し, 任意の正なる可測関数に対して, 収束する単関数の単調増加列が存在することを示す. ほとんど到る所 (almost everywhere) についても触れる.

§26　積分

積分を定義し，諸性質を述べる．関数が連続であれば，Riemann 積分と Lebesgue 測度に対する積分 (Lebesgue 積分) が一致することも述べる．

§27　収束定理

Lebesgue の有界収束定理を証明する．適用例などをみてその威力を体感する．

第 VI 部

終わりに

索引