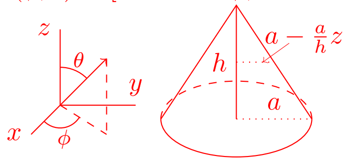
理学同好会　ベクトル解析　テスト 2　解答

以下に解答例を述べる．計算ミス等あったら教えてください．

問 1

I. 球面座標は下図のようにとった．これらはあくまで例であり，別のパラメータを選ぶと別の表式が得られることも注意しておく．

(1) $\boldsymbol{r}(\phi,\theta)=[a\sin\theta\cos\phi, a\sin\theta\sin\phi, a\cos\theta]$



(2) $\boldsymbol{r}(\theta,z)=[\left(a-\frac{a}{h}z\right)\cos\phi, (a-\frac{a}{h}z)\sin\phi, z] \quad (0\le\phi\le 2\pi, 0\le z\le h)$

(3) $\boldsymbol{r}(x,y)=[x,y,f(x,y)]$

(4) $\boldsymbol{r}(u,v)=[a\cosh u\cos v, b\cosh u\sin v, c\sinh u]$

II. 曲面は，$\boldsymbol{r}(\phi,u)=[u\cos\phi, u\sin\phi, \sqrt{a^2-u^2}]$ と書ける．u が長さの変わる半径とイメージできれば，これは一般の回転体でも使えることとわかる．[*1]

(5) $\boldsymbol{r}_\phi=[-u\sin\phi, u\cos\phi, 0], \boldsymbol{r}_u=[\cos\phi,\sin\phi,\frac{-u}{\sqrt{a^2-u^2}}]$ より
$E=\boldsymbol{r}_\phi^2=u^2, F=\boldsymbol{r}_\phi\cdot\boldsymbol{r}_u=0, G=\boldsymbol{r}_u^2=1+\frac{u^2}{a^2-u^2}=\frac{a^2}{a^2-u^2}$

(6) $dS=\sqrt{EG-F^2}d\phi du=\frac{au}{\sqrt{a^2-u^2}}d\phi du$

(7) $\int_S dS=\int_0^a du\int_0^{2\pi}\frac{au}{\sqrt{a^2-u^2}}d\phi=2\pi a\int_0^a\left\{-\sqrt{a^2-u^2}\right\}' du=2\pi a^2$ で，球全体はこれを二倍する．

(8) 定義より $\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_\phi\times\boldsymbol{r}_u}{|\boldsymbol{r}_\phi\times\boldsymbol{r}_u|}=\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{au}(\boldsymbol{r}_\phi\times\boldsymbol{r}_u)=\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{au}[-\frac{u^2}{\sqrt{a^2-u^2}}\cos\phi, -\frac{u^2}{\sqrt{a^2-u^2}}\sin\phi, -u]$
$=[-\frac{u}{a}\cos\phi, -\frac{u}{a}\sin\phi, -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{a}]$

(9) $\boldsymbol{r}_{\phi\phi}=[-u\cos\phi, -u\sin\phi, 0], \boldsymbol{r}_{\phi u}=[-\sin\phi, -\cos\phi, 0], \boldsymbol{r}_{uu}=\left[0, 0, \frac{-a^2}{(a^2-u^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$ より
$L=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{\phi\phi}=\frac{u^2}{a^2}, M=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{\phi u}=0, N=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{uu}=\frac{a}{a^2-u^2}$

(10) $K=\frac{LM-N^2}{EG-F^2}=\frac{1}{a}, H=\frac{1}{2}\frac{GL+EN-2FM}{EG-F^2}=\frac{1+a}{2a^2}$

III. 以下は簡単な証明問題である．

(11) $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{n}$ が平行であることを示せばよい．先ほどの (8) から $\boldsymbol{n}=-\frac{1}{a}\boldsymbol{r}$ となることを示せ．

(12)

$$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\end{vmatrix}=\left[\begin{vmatrix}y_u & z_u\\ y_v & z_v\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}x_u & z_u\\ x_v & z_v\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}x_u & y_u\\ x_v & y_v\end{vmatrix}\right]=\left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]$$

より示される．ここで $-\begin{vmatrix}x_u & z_u\\ x_v & z_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}z_u & x_u\\ z_v & x_v\end{vmatrix}$ を用いた．

[*1] 一般に，曲線 $z=f(u)$ を z 軸回りに回転させてできる回転面は $\boldsymbol{r}(\phi,u)=[u\cos\phi, u\sin\phi, f(u)]$ と書ける．

IV. II の手順のように計算する.

$$\boldsymbol{r}_u = \left[k\cos u\cos v, k\cos u\sin v, \frac{k}{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}} - k\sin u\right] = \left[k\cos u\cos v, k\cos u\sin v, k\left(\frac{1}{\sin u} - \sin u\right)\right]$$
$$\boldsymbol{r}_v = [k\sin u\sin v, k\sin u\cos v, 0]$$

だから

$$\begin{aligned} E &= \boldsymbol{r}_u^2 = k^2\cos^2 u + \frac{k^2}{\sin^2 u} - 2k^2 + k^2\sin^2 u = \frac{k^2}{\sin^2 u} - k^2 = k^2\frac{\cos^2 u}{\sin^2 u} \\ F &= \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v = 0 \\ G &= \boldsymbol{r}_v^2 = k^2\sin^2 u \end{aligned}$$

単位法線ベクトルは

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n} &= \frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{1}{k^2\sqrt{\cos^2 u}}[k^2(\sin^2 u\cos v - \cos v), -k^2(\sin v - \sin^2 u\sin v), k^2\cos u\sin u] \\ &= \frac{1}{k^2\sqrt{\cos^2 u}}[-k^2\cos^2 u\cos v, -k^2\cos^2 u\sin v, k^2\cos u\sin u] \\ &= [-\cos u\cos v, -\cos u\sin v, \sin u] \end{aligned}$$

となる.[*2] 曲面の二回微分を求めると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{uu} &= \left[-k\sin u\cos v, -k\sin u\sin v, k\left(-\frac{\cos u}{\sin^2 u} - \cos u\right)\right] \\ &= \left[-k\sin u\cos v, -k\sin u\sin v, -k\cos u\left(1 + \frac{1}{\sin^2 u}\right)\right] \\ \boldsymbol{r}_{uv} &= [-k\cos u\sin v, k\cos u\cos v, 0] \\ \boldsymbol{r}_{vv} &= [-k\sin u\cos v, -k\sin u\sin v, 0] \end{aligned}$$

だから, 第 2 基本量は

$$\begin{aligned} L &= \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{uu} = k\cos u\sin u - k\cos u\left(\sin u + \frac{1}{\sin u}\right) = -k\frac{\cos u}{\sin u} \\ M &= \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{uv} = 0 \\ N &= \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{vv} = k\cos u\sin u \end{aligned}$$

これより, Gauss 曲率を求めると

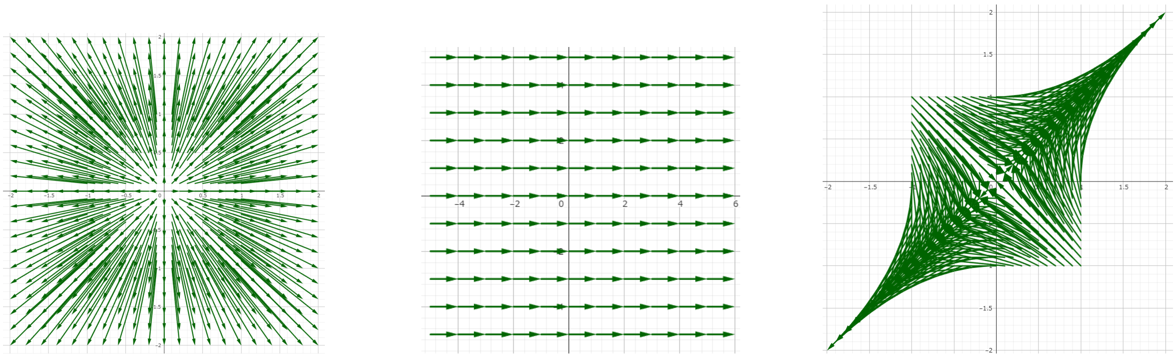
$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{-k^2\cos^2 u}{k^4\cos^2 u} = -\frac{1}{k^2}$$

となり, 負の一定値であることがわかる.

[*2] 鋭い人なら,u の範囲から $\sqrt{\cos^2 u} = |\cos u|$ とすべきではと思ったかもしれない. この指摘は完全に正しい. 本来法線ベクトルは連続的に変化するように取るべきだから, 一方で曲面の内側, もう一方で外側に取るなどは好ましくない. ただ今回の場合はどちらの符号を選んだとしても Gauss 曲率 K の LN の部分で打ち消すから ‘たまたま’ 問題なかっただけである.

問 2

I. 概形は以下のとおりである．図の作成には GeoGebra[*3]を用いた．



(a) $\boldsymbol{v} = [x, y]$　　(b) $\boldsymbol{v} = [1, 0]$　　(c) $\boldsymbol{v} = [y, x]$

図 1 各ベクトル場

II. **(4)** $\mathrm{grad}\, U = [0, mg]$

(5) $\mathrm{grad}\, U = [2, 1]$

(6) $\mathrm{grad}\, U = [0, mg, 0]$

(7) 普通に計算してもよいが，これは電位の式だから $\mathrm{grad}\, V(x, y, z) = -\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r} \quad (\boldsymbol{r} = [x, y, z], r = |\boldsymbol{r}|)$

III. **(8)** $\mathrm{div}\, \boldsymbol{v} = 0, \mathrm{rot}\, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$

(9) $\mathrm{div}\, \boldsymbol{v} = 2x + 1, \mathrm{rot}\, \boldsymbol{v} = [1, 0, 1]$

(10) $$\mathrm{div}\, \boldsymbol{v} = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} + \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{y^2+x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \end{vmatrix} = \left[0, 0, -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

IV. ノートに書いてあることと重複するが，一応述べる．

(11) $\mathrm{div}\, \mathrm{grad}\, f = \mathrm{div}\, \partial_i f = \partial_i \partial_i f = \nabla^2 f$

(12) $(\mathrm{rot}\, \mathrm{grad}\, f)_k = (\mathrm{rot}\, \partial_j f)_k = \varepsilon_{kij}\partial_i\partial_j f$ で，f_x, f_y, f_z の連続性を認めれば $\partial_i\partial_j f = \partial_j\partial_i f$ だから 0 となる．

(13) $\mathrm{div}\, \mathrm{rot}\, \boldsymbol{v} = \partial_k(\varepsilon_{kij}\partial_i v_j) = \varepsilon_{kij}\partial_k\partial_i v_j = \varepsilon_{jki}\partial_k\partial_i v_j$ より前問同様 0 となる．

(14) $(\mathrm{rot}\, \mathrm{rot}\, \boldsymbol{v})_k = \varepsilon_{kij}\partial_i(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{v})_j = \varepsilon_{kij}\partial_i\varepsilon_{jlm}\partial_l v_m = \varepsilon_{kij}\varepsilon_{jlm}\partial_i\partial_l v_m = \varepsilon_{jki}\varepsilon_{jlm}\partial_i\partial_l v_m$

ここで $\varepsilon_{jki}\varepsilon_{jlm} = \delta_{kl}\delta_{im} - \delta_{km}\delta_{il}$ だから $\varepsilon_{jki}\varepsilon_{jlm}\partial_i\partial_l v_m = (\delta_{kl}\delta_{im} - \delta_{km}\delta_{il})\partial_i\partial_l v_m = \partial_m\partial_k v_m - \partial_l\partial_l v_k$

一項目は微分の順序を入れ替えれば $\mathrm{grad}\, \mathrm{div}\, \boldsymbol{v}$ であり，二項目は $\nabla^2 \boldsymbol{v}$ だから，証明が完了した．

[*3] https://www.geogebra.org/graphing?lang=ja

問 3

I. $\boldsymbol{F}=[y^2, x+y^2]$ の場合は以下の通り．

(1) $\int_{C_1}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=0$
(2) $\int_{C_2}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_0^4(4+y^2)dy=\frac{112}{3}$
(3) $\int_{C_1+C_2}=\int_{C_1}+\int_{C_2}=\frac{112}{3}$
(4) $dy=\frac{1}{2}xdx$ より $\int_{C_3}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_0^4\left\{\frac{x^4}{16}dx+\left(x+\frac{x^4}{16}\right)\frac{x}{2}dx\right\}=\int_0^4\left(\frac{x^5}{32}+\frac{x^4}{16}+\frac{x^2}{2}\right)dx=\frac{224}{5}$
(5) $y^2=4x$ より $dx=\frac{1}{2}ydy$ だから $\int_{C_4}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_0^4\left\{\frac{1}{2}y^3+\frac{5}{4}y^2\right\}dy=\frac{320}{4}$

$\boldsymbol{F}=[ax+by, bx+cy]$ のときについて考える．もちろん普通に計算してもよいが，$\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=(ax+by)dx+(bx+cy)dy=d\left(\frac{a}{2}x^2\right)+d(bxy)+d\left(\frac{c}{2}y^2\right)=d\left(\frac{ax^2+2bxy+cy^2}{2}\right)$ より
$\int_{C_1}=8a, \int_{C_2}=8(a+2b+c)-8a=8(2b+c)$ であり，$\int_{C_1+C_2}=\int_{C_3}=\int_{C_4}=8(a+2b+c)$

II. 積分記号下が $\mathrm{grad}\,(xyz)\cdot d\boldsymbol{r}$ であることより示される．

III. 半径を a とおく．

$$\oint_\Gamma\frac{x^3-3xy^2}{(x^2+y^2)^2}dx=\int_{-a}^{a}\frac{x^3-3x(a^2-x^2)}{a^4}dx=\int_{-a}^{a}\frac{1}{a^4}(4x^3-3a^2x)dx=0$$

IV. Gauss の定理を用いる．

(6) $\displaystyle\iint_S\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}dS=\iiint_V(2x+2y+2z)dxdydz=\int_{-1}^{1}dz\int_{-1}^{1}dy\int_{-1}^{1}(2x+2y+2z)dx=0$
(7) $\displaystyle\iint_S\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}dS=\iiint 3dxdydz=3\cdot 2^2\pi\cdot 5=60\pi$
(8) $\boldsymbol{F}=[x^3,y^3,z^3], \boldsymbol{n}=[x,y,z]$ として，$\displaystyle\iint_S\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}dS=3\iiint_{x^2+y^2+z^2\leq 1}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$
$\displaystyle=3\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1 r^2\cdot r^2\sin^2\theta dr=\frac{12}{5}\pi$

特に，(8) については自分でベクトル場と法線ベクトルを設定する必要があるから注意．条件を満たすベクトル場は無限に選べるから，適当なものを選ばないと計算が煩雑になる．

V. **(9)** 質量 m の質点と単位質量の質点を結ぶ直線状に働き，吸引力だから方向は $-\frac{\boldsymbol{r}}{r}$ で，大きさは $|\boldsymbol{F}|=F$ となっているから．

(10) S が半径 r の球表面だから

$$\iint_S\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_S\boldsymbol{F}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}dS=-\frac{Gm}{r^2}\iint_S dS=-\frac{Gm}{r^2}\cdot 4\pi r^2=-4\pi Gm$$

VI. $\arctan x$ の導関数がわかれば解ける問題．

(11) $\partial_x\theta=-\frac{y}{x^2+y^2}, \partial_y\theta=\frac{x}{x^2+y^2}$
(12) $d\theta=-\frac{y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy$
(13) $\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=d\theta$ だから積分 $\oint_C\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\oint_C d\theta$ は C が原点回りを何 rad 回ったかを表す．これを 2π で割れば，何回回ったかが求められる．これは arctan が多価関数であることに起因する．図を描くとイメージしやすい．

以上

解く目安：1 時間 30 分程度.

今回は Green の定理, Stokes の定理に関する設問を一つも用意しなかった．Green の定理は来年の複素解析 (予定) でも必要となるのでしっかり理解しておこう．最後に，問題数を考えて入れなかった Stokes の定理に関する問題をあげて終わる．

$\boldsymbol{F}=[y,-x,2x^3y^2], S=\{x^2+y^2+3z^2=1, z\leq 0\}$ のとき，$\iint_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}dS$ を求めよ．ただし，S は球面の外側を表とする．

答えは 2π である．($z\leq 0$ だから通常の円周と向きが反対になることに注意.)