理学同好会　ベクトル解析　テスト1

問1

ベクトルの基礎的な計算について考える。以下の問いに答えよ。

I. まずは平面ベクトルで計算してみよう。基本ベクトルを $\boldsymbol{i}=[1,0], \boldsymbol{j}=[0,1]$ とする。

(1) ベクトル $\boldsymbol{A}=[2,5]$ を基本ベクトルの線形結合で表せ。また、大きさを求めよ。
(2) ベクトル $\boldsymbol{B}=[-3,-8]$ を正規化せよ。また、$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ を正規化せよ。
(3) 内積 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ を求めよ。
(4) ベクトル $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ のなす角度を求めよ。

II. 次に空間ベクトルでも計算してみよう。基本ベクトルを $\boldsymbol{i}=[1,0,0], \boldsymbol{j}=[0,1,0], \boldsymbol{k}=[0,0,1]$ とする。

(5) ベクトル $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ と同じ向きの単位ベクトルの成分を求めよ。また、$\boldsymbol{A}$ の方向余弦も求めよ。
(6) 二つのベクトル $\boldsymbol{B}=[B_x,B_y,B_z], \boldsymbol{C}=[C_x,C_y,C_z]$ について、$|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}|$ を求めよ。
(7) ベクトル $\boldsymbol{D}=[3,1,2]$ を正規化し、問 (5) で求めた単位ベクトルとの内積を求めよ。
(8) 外積 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{D}$ を求めよ。

III. 以下ではベクトルはすべて空間ベクトルを指すものとする。

(9) ベクトル $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}$ に直行することを計算によって確かめよ。
(10) ベクトル三重積の公式

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) \tag{1}$$

を外積の Einstein の規約 (もどき) による表示から示せ。(すなわち $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_i=\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{B}_k$[*1]から示せ。)
(11) 公式

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) \tag{2}$$

を証明せよ (Lagrange)。

問2

ベクトル値関数の微分演算について考える。以下の問いに答えよ。

I. 単純な計算をしてみる。

(1) 楕円 $\boldsymbol{r}=[a\cos t, b\sin t]$ を t で微分せよ。
(2) 放物線 $\boldsymbol{r}=[t,t^2]$ を t で微分せよ。
(3) 螺旋 $\boldsymbol{r}=[\cos t,\sin t,t]$ を t で微分せよ。

II. 以下単位ベクトル $\boldsymbol{e}(t)$ の t 微分を $\boldsymbol{e}'$ で表す。次の問いに答えよ。

(4) $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}'=0$ を示せ。
(5) $|\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{e}'|=|\boldsymbol{e}'|$ を示せ。
(6) $\boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{e}')=0$ を示せ。

III. 物体が回転運動を行うとき、物体の位置を $\boldsymbol{r}(t)=[x(t),y(t),z(t)]$ とすると、その速度は $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ で与えられる。ここで $\boldsymbol{\omega}$ は角速度ベクトルで、回転軸の方向を向き、大きさが回転の角速度の大きさと一致する。回転軸 $\boldsymbol{\omega}$ を z 軸に取って、$|\boldsymbol{\omega}|=\omega=$ 一定 であるとき、これが等速円運動であることを示せ。

[*1] 授業中は述べなかったが、本来 Levi-Civita 記号は下付きの添え字である。そうすると今回のように外積は $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_i=\varepsilon_{ijk}a_jb_k$ となる。しかしこの場合、(本来の)Einstein の規約に外れてしまう。そこで、見た目的にわかりやすくするため授業等では ε^{ijk} と書いた次第である。(やはり相対論屋さんからすると気持ちが悪いらしい。)

問 3

以下では曲線について曲率等のパラメータを求めてみる。

I. 平面曲線について考えてみる。

(1) 放物線 $y=\dfrac{1}{2}ax^2$ の曲率を求めよ。

(2) 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の $x=a, y=0$ における曲率半径を求めよ。また、$x=0, y=b$ の曲率半径を求めよ。

II. 空間曲線についても計算してみよう。地球を完全な球体だと仮定したとき、北緯 45 度の緯線の曲率、捩率を求めよ。ただし、地球の半径は $R_E=6.4\times 10^6$[m] とする。

以上

/30	/30	/40	/100