

# 理学同好会 ベクトル解析 模擬 1

## 問 1

ベクトルの基礎的な計算について考える。以下の問いに答えよ。

I. まずは平面ベクトルで計算してみよう。

- (1) ベクトル  $A = [0, 3]$  の大きさを求めよ。
- (2) ベクトル  $B = [2, 0]$  を正規化せよ。
- (3) 内積  $A \cdot B$  を求めよ。
- (4) ベクトル  $A, B$  のなす角度を求めよ。

II. 次に空間ベクトルでも計算してみよう。基本ベクトルを  $i = [1, 0, 0], j = [0, 1, 0], k = [0, 0, 1]$  とする。

- (5) ベクトル  $A = 2i$  と同じ向きの単位ベクトルの成分を求めよ。また、 $A$  の方向余弦も求めよ。
- (6) 二つのベクトル  $B = [B_x, B_y, B_z], C = [C_x, C_y, C_z]$  について、 $|B + C|$  を求めよ。
- (7) ベクトル  $D = [0, 2, 0]$  を正規化し、問 (5) で求めた単位ベクトルとの内積を求めよ。
- (8) 外積  $A \times D$  を求めよ。

III. 以下ではベクトルはすべて空間ベクトルを指すものとする。

- (9) ベクトル  $[2, 1, 0] \times [1, 2, 0]$  が  $[2, 1, 0]$  に直行することを計算によって確かめよ。
- (10) スカラー三重積の公式

$$a \cdot (b \times c) = c \cdot (a \times b) \quad (1)$$

を Einstein の規約を用いて求めよ。

## 問 2

ベクトル値関数の微分演算について考える。以下の問いに答えよ。

I. 単純な計算を試みる。

- (1) 直線  $r = [t, t]$  を  $t$  で微分せよ。
- (2) 曲線  $r = [t, t, 0]$  を  $t$  で微分せよ。

II. 大きさが一定のベクトルは微分すると元のベクトルに直行することを示せ。

III. 物体が回転運動を行うとき、物体の位置を  $r(t) = [x(t), y(t), z(t)]$  とすると、その速度は  $\omega \times r$  で与えられる。ここで  $\omega$  は角速度ベクトルで、回転軸の方向を向き、大きさが回転の角速度の大きさと一致する。回転軸  $\omega$  を  $z$  軸に取って、 $|\omega| = \omega = \text{一定}$  であるとき、これが等速円運動であることを示せ。

### 問 3

以下では曲線について曲率等のパラメータを求めてみる。

I. 平面曲線について考えてみる。

(1) 直線  $y = ax$  の曲率を求めよ。

(2) 円  $x^2 + y^2 = a^2$  の  $x = a, y = 0$  における曲率半径を求めよ。

II. 空間曲線についても計算してみよう。曲線  $\mathbf{r} = [0, \cos t, \sin t]$  の振率を求めよ。

---

以上

/30	/30	/40	/100
-----	-----	-----	------