足し算と引き算、掛け算と割り算のように互いが逆の演算のものを逆演算という。微分の逆演算は積分である。すなわち、

$$F(x)' = f(x) \tag{1}$$

とすると

$$F(x) = \int f(x)dx \tag{2}$$

となるような演算を積分というのである。この時の $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数という。またこのときの $f(x)$ を被積分関数という。(2) 式の右辺を不定積分という。

(1) からわかるように原始関数 $F(x)$ は定数の分だけ不定である。言い換えるなら、原始関数の導関数は常に一つだが、被積分関数の原始関数は一つではないのである。
なぜならば、定数の微分は必ず 0 となるからである。
この時の定数項を C であらわし、これを積分定数という。

例題 1

$$\int xdx$$

を解け。

ー解答ー

$$\frac{d}{dx}x^2 = 2x \Rightarrow \int xdx = \frac{x^2}{2} + C$$

例題 1 のようにいちいち微分の逆演算として計算するのは面倒である。
実際は式をうまく変形して、自分の知っている形に変形する必要があるのである。
そのために、置換積分法や部分積分法を使うのである。

二つの多項式,$f(x), g(x)$ を用いて

$$P(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \tag{3}$$

として表される $P(x)$ を有理関数という。有理関数は部分分数分解を用いることで必ず積分できる。

例題 2

$$\int \frac{7x-1}{x^2-x-6}dx$$

を解け。

ー解答ー

$$\int \frac{7x-1}{x^2-x-6}dx = 4\int \frac{dx}{x-3} + 3\int \frac{dx}{x+2} = 4\log|x-3| + 3\log|x+2| + C$$

ある区間 $a \leq x \leq b$ での関数 $f(x)$ 下の面積を

$$\int_a^b f(x)dx \tag{4}$$

で表し、関数 $f(x)$ の a から b までの定積分という。
定積分の値は次の極限値で与えられる。

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta x_k \tag{5}$$

極限 (5) が存在するならば、$f(x)$ は積分可能であるという。
なお、x 軸より下方にある図形は負の面積を与える。

例題 3

$$\int_a^b cdx \tag{6}$$

を解け。a,b,c は定数である。

ー解答ー

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta x_k &= \sum_{k=1}^{n} c(x_k - x_{k-1}) \\
&= c((x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (x_n - x_{n-1})) \\
&= c(-x_0 + x_n) \\
&= c(b-a)
\end{aligned}$$

積和は分割の仕方によらず一定なので、極限値も $c(b-a)$ になる。

$$\therefore \int_a^b cdx = c(b-a)$$

平均値の定理というものがある。$a < c < b$ である、ある c に対して以下が成り立つというものである。

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) = (b-a)f(a+\theta(b-a)) \cdots (0 < \theta < 1) \tag{7}$$

〜微積分学の基本定理〜
不定積分の定積分の関係について考える。

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

であるとき

$$F(x)' = f(x) \tag{8}$$

であり

$$\int_a^b f(x)dx = [F(b) - F(a)]_a^b = F(b) - F(a) \tag{9}$$

が成り立つ。
(8) を微積分学の基本定理という。また、(9) より定積分の値は原始関数の積分上限の値から積分下限の値を引いたものであることがわかる。
これによって、定積分の計算がとても簡単になるのだ。

例題 4

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

を求めよ。

ー解答ー

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin(\frac{\pi}{2}) - sin(0) = 1$$

補足: 例題 4 の問題は単に機械的に計算しただけでは気づかないかもしれないが、よくよく考えると”すごい”計算をしているの気づけるだろうか。
このことに気づくためには cos x のグラフについて思い浮かべればよい。
あのような曲線からできる面の面積が 1 という簡潔な数で表せることにはただただ驚愕する。
あらためて定積分のすごさに気づけたのではないだろうか。

– 公式集 –

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \tag{10}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + C \tag{11}$$

$$\int e^x dx = e^x + C \tag{12}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \tag{13}$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C \tag{14}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C \tag{15}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[2]{1-x^2}} = \arcsin x + C \tag{16}$$

$$F(x) = \int f(x)dx \to \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \tag{17}$$

$$\int f(x)^n f'(x)dx = \begin{cases} \frac{1}{n+1} f(x)^{n+1} + C & (x \neq 1 \text{ のとき}) \\ \log|f(x)| + C & (x = 1 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{18}$$

$$f(x)g(x) - \int f(x)g(x)'dx = \int f(x)'g(x)dx \tag{19}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f[\phi(t)]\phi(t)'dt \tag{20}$$

$$\int_a^b f(x)'g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g(x)'dx \tag{21}$$

$$\sin\theta = z \longleftrightarrow \theta = \arcsin z \tag{22}$$

$$\cos\theta = z \longleftrightarrow \theta = \arccos z \tag{23}$$

$$\tan\theta = z \longleftrightarrow \theta = \arctan z \tag{24}$$

$$\tag{25}$$

終わり