偏微分

i　二変数の関数

いままでは、一つの変数 x の関数 $f(x)$ を考えてきた。しかし、一つの変数では記述できない現象も多くある。例えば、理想気体の状態方程式を考えてみる。

$$pV = RT \quad (R: \text{気体定数})$$

この式中の p(圧力) がどのような値を取るのかは、T(温度) と V(体積) の両方を指定しないと決まらない。

一般に、二つの変数 x と y があり、x と y の各々の値の組に対して z の値が決まるとき、z を x と y の関数といい、

$$z = f(x, y)$$

と表す。このとき、x と y を**独立変数**、z を**従属変数**という。

例題 1

$f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$ であるとき、$x = 1, y = -1$ のときの $f(x, y)$ を求めよ。

解答

$f(x, y) = (x + y)^2 = (1 - 1)^2 = 0$

二変数の関数における極限について考えてみよう。点 $P(x, y)$ が点 $A(a, b)$ と一致することなく点Aに近づくとする。この時、その近づき方によらず、関数 $f(x, y)$ の値が同じ一つの値 c に近づくならば、$f(x, y)$ には**極限**が存在して、その**極限値**は c であるといい、

$$f(x, y) \to c \quad (x \to a, y \to b) \qquad \lim_{x \to a, y \to b} f(x, y) = c \qquad \lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y) = c$$

などと表す。関数 $f(x, y)$ が c に**収束する**ともいう。

この時、二つほど注意することがある。

(1) 極限の定義において、点 P と点 A が一致することは除外している。一般に、点 A が関数 $f(x, y)$ の定義域に含まれているとは限らない。

(2) 点 P が点 A に近づく仕方によって、$f(x, y)$ が近づく値が異なるときには、極限は存在しない。

試しに以下の例題を解きながら考えてみよう。

例題 2

関数 $f(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$ において、$x \to 0, y \to 0$ の極限を調べ、極限値が存在するかどうか答えよ。

解答

この関数の定義域は、全平面から原点 O を除外して得られる領域である。次の二つの路で、点 $P(x, y)$ が原点 O に近づくとしよう。

(a) 点 P が x 軸に沿って近づく場合。(b) 点 P が y 軸に沿って近づく場合。

(a) の場合は $f(x, 0) = 1$ より、$\lim_{x \to 0} f(x, 0) = 1$

(b) の場合は $f(0,y)=0$ より、$\lim_{y\to 0} f(0,y)=0$
したがって、この関数は原点への近づき方によって異なる値を取り、極限値 $\lim_{x\to 0, y\to 0} f(x,y)$ は存在しない。