微積分テスト 2 解答

はじめに

微積分テスト 2 の解答を以下に乗せる。途中式等もできるだけ丁寧に書く。参考にしてほしい。
なお、解答に誤りがあればすぐに教えてください。計算しなおします。

大問 1

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin\theta\cos\theta} = \int \frac{dx}{\tan x} + \int \tan x dx = \log|\tan x| + C$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4}(\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x-2} - \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x+2}) = \frac{1}{4}[\log|\frac{x-2}{x+2}|]_{-1}^{1} = \frac{1}{4}(\log|\frac{-1}{3}| - \log|-3|) = \frac{1}{4}\log\frac{1}{9} = -\frac{\log 3}{2}$

(3) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = [-\frac{1}{x}]_{1}^{\infty} = [0-(-1)] = 1$

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} = \int_{0}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan t]_0^{\infty} = (\frac{\pi}{2} - 0) = \frac{\pi}{2}$

(5) $\displaystyle\int_{a}^{b} \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \lim_{\epsilon_1 \to +0}\lim_{\epsilon_2 \to +0} \int_{a+\epsilon_1}^{b-\epsilon_2} \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$

ここからは極限の操作を省略する。

$\displaystyle = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(\frac{b-a}{2})^2 - (x - \frac{a+b}{2})^2}}$ 　ここで、$A = \dfrac{b-a}{2}, t = x - \dfrac{a+b}{2}$ とすると

$\displaystyle = \int_{-A}^{A} \frac{dt}{\sqrt{A^2-t^2}} = [\arcsin\frac{t}{A}]_{-A}^{A} = (\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})) = \pi$

式を変形するだけのものが多く、そこまでの難易度ではないだろう。ここくらいまでは解けてほしいところ。

大問 2

すべて $(0 < \theta < 1)$ とする

(1)$\displaystyle e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$

(2)$\displaystyle (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$

最後の一項はどちらも剰余の和である。

(2) は α が正の整数ならば右辺が有限の値になることに気づこう。よく見てみると二項定理の式である。

大問 3

(1) $t=\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a}x$ と置換して、$x=$ の式で表してみよう。

$$
\begin{aligned}
t &= \sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a}x \\
t^2-2\sqrt{a}tx+ax^2 &= ax^2+bx+c \\
-2\sqrt{a}t\cdot x-bx &= c-t^2 \\
x &= \frac{t^2-c}{2t\sqrt{a}+b} \\
dx &= \frac{2(\sqrt{a}t^2+bt+\sqrt{a}c)}{(2\sqrt{a}t+b)^2}dt \\
\sqrt{ax^2+bx+c} &= t-\sqrt{a}\cdot\frac{t^2-c}{2t\sqrt{a}+b} \quad \text{※ここは面倒なのでこれ以上計算をしない} \\
\therefore \int f(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx &= 2\cdot\int f(\frac{t^2-c}{2t\sqrt{a}+b}, t-\sqrt{a}\cdot\frac{t^2-c}{2t\sqrt{a}+b})\frac{(\sqrt{a}t^2+bt+\sqrt{a}c)}{(2\sqrt{a}t+b)^2}dt
\end{aligned}
$$

よって、t についての有理関数に帰着できるので、必ず積分できる。

(2) まず、楕円の半円部分 (今回は x 軸より上) の面積を求める。楕円の面積を S とすると、

$$\frac{S}{2}=\int_{-a}^{a}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}dx$$

となる。ここで、$\displaystyle\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx$ は半径 a の半円の面積を表すので、$\frac{1}{2}a^2\pi$ となる。よって、

$$\frac{S}{2}=\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{2}\pi\to S=ab\pi$$

よって示された。

(3) 増加が早いことを示すために、次の極限を取る。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}$$

ここで、ド・ロピタルの定理を適用して、

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{nx^{n-1}}\lim_{x\to\infty}=\frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}}=\cdots=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{n!}=\infty$$

となるため、分子のほうが分母より増加が早い。よって示された。[*1]

[*1] 同様にして対数関数 $\log x$ はどんな正のべきよりも増加が遅い。これらは一生覚えておいて損はない。

大問 4

(1) ただ計算すればよいから、

$$\int_2^6 \frac{dx}{x} dx = [\log(x)]_2^6 = \log\frac{6}{2} = \log 3$$

(2)$\dfrac{67}{60} = 1.1167...$
(3)$\dfrac{1.1}{10} = 1.1$
(4) 自然対数の値を覚えてないと答えられないので、ここは全員点が与えられる。
一応解答としては、$\log 3 = 1.0986...$ より、シンプソンの公式のほうが近似値として有効である。

大問 5

(1) 広義積分であるが、$x = a\sin^2 t$ と置換して

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{x}{\sqrt{ax - x^2}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\sin^2 t \cdot 2a\sin t\cos t}{a\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}} dt \\ &= 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = 2a[\frac{1}{2}t - \frac{\sin 2t}{4}]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2a(\frac{\pi}{4}) = \frac{a\pi}{2}\end{aligned}$$

(2)$f(x) = \sqrt[5]{x}$ とすると、$f(33) = f'(32+\theta) + f(32) \quad (0 < \theta < 1)$ である。近似値を求めるので

$$\sqrt[5]{33} \approx \frac{1}{5\sqrt[5]{32^4}} + 2 = \frac{161}{80} = 2.0125$$

よって 2.0125 が答えとなる。気になるなら電卓で計算してみよう。

大問 6

よくよく読めば意外と簡単であることがわかる。δ は問題文につられて積分定数を忘れないようにしよう。

$$\begin{aligned}(\alpha) &= \cos(bx) + i\sin(bx) \\ (\beta) &= \frac{e^{ax+ibx}}{a+ib} \\ (\gamma) &= \frac{a-ib}{a^2+b^2} \\ (\delta) &= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos(bx) + b\sin(bx)) + C\end{aligned}$$

以上