代数

教科書 pp.63-86. 定理番号などは本の番号と**一致しない**ことに注意.

基本事項の確認

定義 1 (全称記号と存在記号)**.** $\forall x$ は「任意の x」や「全ての x」の意. $\exists x$ は「ある x が存在して」の意.

定義 2 (基本的な集合の表記)**.** 集合とはものの集まり. なお以下, 有理数については略.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \text{自然数全体の集合} \\
\mathbb{Z} &= \text{整数全体の集合} \\
\mathbb{R} &= \text{実数全体の集合} \\
\mathbb{C} &= \text{複素数全体の集合}
\end{aligned}
$$

定義 3 (群の定義)**.** 集合 G が群というのは, G の任意の元に対して演算が定まり, 結合則が満たされ, 単位元と逆元が存在すること.

定義 4 (部分群の定義)**.** 群 G の部分集合 $H \subset G$ が G の部分群であるとは, G の演算で H も群となるということ. すなわち, H の元が演算に閉じていて, 逆元が H 内に存在していればよい.

右剰余類分解

Review

集合 A の同値関係 $\sim$ とは, $a, b, c \in A$ に対して

- $a \sim a$
- $a \sim b \to b \sim a$
- $a \sim b \wedge b \sim c \to a \sim c$

を満たす二項関係のこと. これによって, A を直和分割できるのだった.

G を群, H を部分群とする. $a, b \in G$ に対し, $a \sim' b \Leftrightarrow b \cdot a^{-1} \in H$ と定めると, $\sim'$ は同値関係だから, 同値類が考えられる. この同値類を H に関する右剰余類という. したがって, G の H に関する右剰余類分解は

$$G = \coprod_{\lambda' \in \Lambda'} H_{a_{\lambda'}} \tag{1}$$

となる.

Review

G を群, N を G の部分群とする. このとき, N が正規部分群であるというのは, $\forall x \in G, xNx^{-1} = N$.
また, N が正規部分群であることと "同値" な命題は

- $xN = Nx$
- $\forall x \in G, xNx^{-1} \subset N$

であった.

N が正規部分群であれば, その右剰余類と左剰余類は一致する. よって, G の分解も等しくなる.

剰余群

命題 1. G を群, N を G の正規部分群とする. A, B が N に関する左剰余類なら, AB も N に関する左剰余類.

定理 1. G を群, N を G の正規部分群とする. このとき G/N は $\cdot : G/N \times G/N \to G/N; (A, B) \mapsto AB$ を演算とする群の構造を持つ.

定義 5. 上のような群を剰余群 (商群) という.

群の準同型写像, 群の同型

Review

$f : A \to B$ が A から B への写像というのは, A の任意の元に対して, B の元が "一意に" 定まっている対応関係のことをいう.

定義 6 (準同型写像)**.** G, G' を群とする. $f : G \to G'$ が群の準同型写像であるとは,

$$\forall x, y \in G, f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \tag{2}$$

が成り立つときにいう.

命題 2. $f : G \to G'$ は群の準同型写像.

- $f(e) = e'$
- $\forall x \in G, f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$

Review

写像 $f : A \to B$ が全単射であるとは, 次の二つの条件を満たすこと.

- $x \neq y \to f(x) \neq f(y)$ (**単射**)
- $f(A) = B$ (**全射**)

定義 7 (同型写像, 同型)**.** G, G' を群とする.

1. $f : G \to G'$ が準同型写像で, 全単射であるとき, f を同型写像という.
2. G, G' の間に同型写像が存在するとき, G と G' は同型といい, $G \simeq G'$ とかく.

Review

群 G が Abel 群であるとは, その演算が可換 (交換可能) であること.
G の "元"x に対して, 位数とは $x^k = e$ なる k のうち最小のもの.

命題 3. $G \simeq G'$ とし, 同型写像を $f : G \to G'$ とする.

- $|G| = |G'|$
- G が Abel 群 $\Rightarrow$ G' も Abel 群
- $x \in G$ が位数 n の元 $\Rightarrow$ $f(x)$ は G' の位数 n の元

群の準同型定理

定義 8 (核と像)**.** $f : G \to G'$ を準同型写像とする.

- f の核 (Kernel) $\mathrm{Ker}\, f := \{x \in G \mid f(x) = e'\}$
- f の像 (Image) $\mathrm{Im}\, f := \{f(x) \mid x \in G\}$

と定める.[*1]

命題 4. $f : G \to G'$ は準同型写像.

- $\mathrm{Ker}\, f$ は G の正規部分群
- $\mathrm{Im}\, f$ は G' の部分群
- f が単射 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}\, f = \{e\}$

定理 2 (**準同型定理**)**.** $f : G \to G'$ を群の準同型写像とする. このとき, $\mathrm{Ker}\, f$ の剰余類 $x\mathrm{Ker}\, f\, (x \in G)$ に G' の元 $f(x)$ を対応させることで, 群の "同型" 写像

$$\overline{f} : G/\mathrm{Ker}\, f \to \mathrm{Im}\, f \tag{3}$$

が得られる.

Review

G の位数とは G の要素数のこと.
G が巡回群とは, $\exists a \in G, G = \langle a \rangle (= \{a^k ; k \in \mathbb{Z}\})$.
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は, 整数を n で割った余りで作った同値類全体.

命題 5. G が位数 n の巡回群とする. このとき, $G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

[*1] 集合論の記号を借りれば, $\mathrm{Ker}\, f = f^{-1}(\{e'\}), \mathrm{Im}\, f = f(G)$ に過ぎないとわかる.