# 多重積分

## I　多重積分

### i　二重積分

一変数の関数 $y = f(x)$ の定積分 $\int_a^b f(x)dx$ は去年学んだ。少しだけ復習すると、積和の極限、すなわち $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta x_k$ が定積分であった。これから、定積分を二変数の場合に拡張する。いままでは、積分領域は線分であったが、今度は積分領域が面になる。

$xy$ 平面の領域 $R$ で定義された連続な関数を $f(x,y)$ とする。領域 $R$ を、各々の面積が $\Delta A_1, \Delta A_2, \cdots, \Delta A_n$ の $n$ 個の章領域 $R_1, R_2, \cdots, R_n$ に分割する。小領域 $R_1$ 内に点 $P_1(\zeta_1, \eta_1)$、小領域 $R_2$ 内に $P_2(\zeta_2, \eta_2), \cdots, R_n$ 内に点 $P_n(\zeta_n, \eta_n)$ を選び、積和の極限

$$\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta A_k = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k, \eta_k)\Delta A_k \tag{1}$$

を作る。各小領域の直径 (領域内のに転換の距離の最大値) が 0 に近づくように分割を細かくしていく。この時の極限値を

$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k.\eta_k)\Delta A_k \tag{2}$$

とかき、関数 $f(x,y)$ の領域 $R$ における**二重積分**という。積分記号が二つあるのは、二変数関数の定積分であることを示し、積分記号の添え字 $R$ は $x, y$ の値の領域を表している。

特に、$f(x,y) = 1$ と置けば、その二重積分は領域 $R$ の面積 $A$ を与える。すなわち、

$$A = \iint_R dA \tag{3}$$

### ii　二重積分と体積

定積分が面積と関係していたように、二重積分 (2) 式は体積と関係している。関数 $z = f(x,y)$ は領域 $R$ で正とする。積和 (1) の各項 $f(\zeta_k, \eta_k)\Delta A_k$ は、高さが $z_k = f(\zeta_k, \eta_k)$ で、上下の平行面の面積が $\Delta A_k$ の垂直な “柱” の体積を与える。これは、底面積が $\Delta A_k$ で、上面が曲線 $z = f(x,y)$ で与えられる垂直な柱の体積を近似したものである。すなわち、(1) の積和は、局面下の体積を近似している。こうして、この極限値である二重積分 (2) は、局面 $z = f(x,y)$、底面 $R$、$R$ の周上に建てた垂直面、がつくる領域の体積に等しいことがわかる。

### iii　三重積分

二重積分を導入したのと同じようにして、三重積分が定義される。三次元の領域 $R$ で連続な関数 $f(x,y,z)$ を考える。領域 $R$ を、各体積が $\Delta V_1, \Delta V_2, \cdots, \Delta V_n$ である $n$ 個の小区間 $R_1, R_2, \cdots, R_n$ に分割する。小領域 $R_k$ 内に点 $P_k(\zeta_k, \eta_k, \xi_k)$ をとり、積和

$$\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k, \eta_k, \xi_k)\Delta V_k \tag{4}$$

を作る。各小領域 $R_k$ の直径を 0 にするように、分割の数 $n$ を大きくする。その極限値を

$$\iiint_R f(x,y,z)dV = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k,\eta_k,\xi_k)\Delta V_k \tag{5}$$

と書き、領域 $R$ での関数 $f(x,y,z)$ の**三重積分**という。特に $f(x,y,z)=1$ ならば、三重積分は領域 $R$ の体積 $V$ を与える。すなわち、

$$V = \iiint_R dV \tag{6}$$

同様にして、$n$ 次元での領域 $R$ で連続な関数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ に対して、$n$ 重積分が定義される。

二重積分や三重積分を、(2) や (5) 式のように積和の極限として計算するのはすごく面倒だ。そこで実際には定積分と同様に、もっと楽に計算をする。そのための方法を次節で紹介する。

## II　二重積分は積分を 2 度行う