多重積分

I　多重積分

i　二重積分

一変数の関数 $y = f(x)$ の定積分 $\int_a^b f(x)dx$ は去年学んだ。少しだけ復習すると、積和の極限、すなわち $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta x_k$ が定積分であった。これから、定積分を二変数の場合に拡張する。いままでは、積分領域は線分であったが、今度は積分領域が面になる。

xy 平面の領域 R で定義された連続な関数を $f(x,y)$ とする。領域 R を、各々の面積が $\Delta A_1, \Delta A_2, \cdots, \Delta A_n$ の n 個の章領域 $R_1, R_2, \cdots, R_n$ に分割する。小領域 R_1 内に点 $P_1(\zeta_1, \eta_1)$、小領域 R_2 内に $P_2(\zeta_2, \eta_2), \cdots, R_n$ 内に点 $P_n(\zeta_n, \eta_n)$ を選び、積和の極限

$$\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta A_k = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k, \eta_k)\Delta A_k \tag{1}$$

を作る。各小領域の直径 (領域内のに転換の距離の最大値) が 0 に近づくように分割を細かくしていく。この時の極限値を

$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k.\eta_k)\Delta A_k \tag{2}$$

とかき、関数 $f(x,y)$ の領域 R における**二重積分**という。積分記号が二つあるのは、二変数関数の定積分であることを示し、積分記号の添え字 R は x, y の値の領域を表している。

特に、$f(x,y) = 1$ と置けば、その二重積分は領域 R の面積 A を与える。すなわち、

$$A = \iint_R dA \tag{3}$$

ii　二重積分と体積

定積分が面積と関係していたように、二重積分 (2) 式は体積と関係している。関数 $z = f(x,y)$ は領域 R で正とする。積和 (1) の各項 $f(\zeta_k, \eta_k)\Delta A_k$ は、高さが $z_k = f(\zeta_k, \eta_k)$ で、上下の平行面の面積が ΔA_k の垂直な "柱" の体積を与える。これは、底面積が ΔA_k で、上面が曲線 $z = f(x,y)$ で与えられる垂直な柱の体積を近似したものである。すなわち、(1) の積和は、局面下の体積を近似している。こうして、この極限値である二重積分 (2) は、局面 $z = f(x,y)$、底面 R、R の周上に建てた垂直面、がつくる領域の体積に等しいことがわかる。

iii　三重積分

二重積分を導入したのと同じようにして、三重積分が定義される。三次元の領域 R で連続な関数 $f(x,y,z)$ を考える。領域 R を、各体積が $\Delta V_1, \Delta V_2, \cdots, \Delta V_n$ である n 個の小区間 $R_1, R_2, \cdots, R_n$ に分割する。小領域 R_k 内に点 $P_k(\zeta_k, \eta_k, \xi_k)$ をとり、積和

$$\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k, \eta_k, \xi_k)\Delta V_k \tag{4}$$

を作る。各小領域 R_k の直径を 0 にするように、分割の数 n を大きくする。その極限値を

$$\iiint_R f(x,y,z)dV = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k,\eta_k,\xi_k)\Delta V_k \tag{5}$$

と書き、領域 R での関数 $f(x,y,z)$ の**三重積分**という。特に $f(x,y,z)=1$ ならば、三重積分は領域 R の体積 V を与える。すなわち、

$$V = \iiint_R dV \tag{6}$$

同様にして、n 次元での領域 R で連続な関数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ に対して、n 重積分が定義される。

二重積分や三重積分を、(2) や (5) 式のように積和の極限として計算するのはすごく面倒だ。そこで実際には定積分と同様に、もっと楽に計算をする。そのための方法を次節で紹介する。

II　二重積分は積分を 2 度行う

i　累次積分

まず二重積分について考える。積分領域 R の境界は、x 軸または y 軸に平行な線と 3 回以上交わらないとしよう。（下図参照）

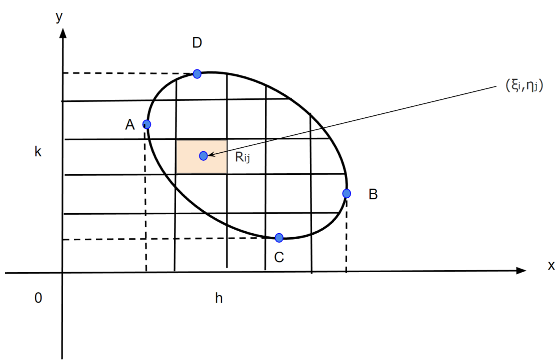

図 1　累次積分

より複雑な形の領域は、このような領域に分けられる。曲線 ACB を $y=g(x)$, 曲線 BDA を $y=h(x)$ で表す。

区間 $a\le x\le b$ を、長さが $\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_m$ の m 個の小区間 $h_1,h_2.\cdots,h_m$ に分割する。また、区間 $c\le y\le d$ を、長さが $\Delta y_1,\Delta y_2,\cdots,\Delta y_n$ の n 個の小区間 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ に分割する。そして、直線 $x=x_1,x=x_2,\cdots,x=x_{m+1},y=y_1,y=y_2,\cdots,y=y_{n+1}$ を引くと、領域 R は各面積が $\Delta x_i\Delta y_j$ の長方形の領域 R_{ij} に分割される。境界の近くでは長方形にはならないが、m,n が大きい限り、それらの寄与は無視できる。領域 $R_{ij}(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$ は全部で mn 個ある。領域 R_{ij} 内に点 (ξ_i,η_j) を選び、積和

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_i,\eta_j)\Delta x_i\Delta y_j \tag{7}$$

を作る。

これは、(1) 式の特別な場合であることに注意しよう。各区間の長さが 0 になるように、m, n を大きくすれば、二重積分 (2) 式に等しい。

いま、最初に区間 h_i を固定し、その上に並んだ長方形をおいて、積和

$$\left\{\sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j)\Delta y_j\right\}\Delta x_i \quad (i \text{ は固定}) \tag{8}$$

を考える。そして、y 軸方向の区間 k_j の長さが 0 になるように $n \to \infty$ の極限を取ると、

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j)\Delta y_j\right\}\Delta x_i = \left\{\int_{g(\xi_i)}^{h(\xi_i)} f(\xi_i, \eta_j)dy\right\}\Delta x_i \tag{9}$$

を得る。次に、x 軸方向の区間に対して和を取り、$m \to \infty$ の極限を取ると

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\left\{\int_{g(\xi_i)}^{h(\xi_i)} f(\xi_i, \eta_j)dy\right\}\Delta x_i = \int_a^b \left[\int_{g(\xi_i)}^{h(\xi_i)} f(\xi_i, \eta_j)dy\right]dx \tag{10}$$

が得られる。こうして、二重積分は、$f(x, y)$ の y についての積分を行い、次に x についての積分を行うことで計算できることがわかる。また、これは x 積分と y 積分の順序を入れ替えても同じである。

積分 (10) 式を**累次積分**という。

以上まとめるなら、$f(x, y)$ が領域 R で連続ならば、

$$\begin{aligned}\iint_R f(x, y)dxdy &= \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)dydx \\ &= \int_c^d \int_{k(y)}^{l(y)} f(x, y)dxdy \end{aligned} \tag{11}$$

例題

次の積分を求めよ。

$$(1)\int_0^q \int_0^x dydx \qquad (2)\int_0^1 \int_1^2 (x+y)dxdy$$

解答

$$(1)\int_0^1 \int_0^x dydx = \int_0^1 [y]_0^x dx = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$$

$$(2)\int_0^1 \int_1^2 (x+y)dxdy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + xy\right]_1^2 dy = \int_0^1 (\frac{3}{2} + y)dy = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

例題

直線 $y = x, x = 1, y = 0$ で囲まれた領域を R とするとき、次の二重積分を求めよ。

$$I = \iint_R (x^2 + y^2)dxdy$$

解答

最初に、y 積分、x 積分の順に計算する。

$$I = \int_0^1 \left\{ \int_0^x (x^2 + y^2) dy \right\} dx = \frac{1}{3}$$

次に、x 積分、y 積分の順に計算する。

$$I = \int_0^1 \left\{ \int_y^1 (x^2 + y^2) dx \right\} dy = \frac{1}{3}$$

三重積分の場合にも、同様に累次積分が定義される。

$$\iiint_R f(x,y,z) dxdydz = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) dz \right\} dy \right] dx \tag{12}$$

上の式では、積分はかっこの内側から順に行う。すなわち x, y を固定して、z 積分を行い、次に x を固定して y 積分を行い、最後に x 積分を行う。二重積分と同様に、$f(x,y,z)$ が連続ならば、個の積分は存在して、積分の順序を変えることができる。

例題

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-y} xyz dz dy dx$$

を求めよ。

解答

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-y} xyz dz dy dx \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{xy}{2} (2-y)^2 dy dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2} x \left\{ \frac{1}{4}(1-x)^4 - \frac{4}{3}(1-x)^3 + 2(1-x)^2 \right\} dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}x^5 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{11}{12}x \right) dx = \frac{13}{240}
\end{aligned}$$

III　積分変数の変換

i　座標系