$\frac{1}{\log x}$ の原始関数が初等関数で表せないことの証明

0.1 Liouville 判定法

不定積分が初等関数で表せるかどうかを判定するために、Liouville 判定法を用いる。

Liouville 判定法

> 有理関数 $f(x), g(x)$ に対して、$f(x)e^{g(x)}$ の不定積分が初等関数でかけるためには、ある有理関数 $h(x)$ が存在して、
>
> $$f(x) = h'(x) + h(x)g'(x)$$
>
> と書けることが必要かつ十分である。

このことを利用して、$\frac{1}{\log x}$ の不定積分が初等関数で表せないことを証明する。

0.2 式の変形

$\displaystyle\int \frac{dx}{\log x}$ そのままの形では Liouville 判定法を使うことができないので変形する。$t = \log x$ とすると、$x = e^t$ であるため、$dx = e^t dt$ より、

$$\int \frac{dx}{\log x} = \int \frac{e^t}{t} dt$$

となる。よって、右辺の積分が初等関数で表せないことを示せばいい。[*1]

0.3 証明

$f(t) = \frac{1}{t}, g(t) = t$ とする。

$\dfrac{e^t}{t}$ の不定積分が初等関数で書けるためには、

$$f(t) = h'(t) + h(t)g'(t)$$

となるような、有理関数 $h(t)$ が存在しなければならない。

ここで、$h(t)$ が存在すると仮定すると、互いに素である二つの多項式、$p(t), q(t)$ で

$$h(t) = \frac{p(t)}{q(t)}$$

と書ける。判定法を満たす式より、

$$\frac{1}{t} = h'(t) + h(t) \to 1 = h'(t)t + h(t)t$$

[*1] $\int f(x)dx$ の $x = \phi(t)$ における置換積分、$\int f(\phi(t))\phi'(t)dt$ が存在しなければ、仮に $F'(x) = f(x)$ とした場合に、$x = \phi(t)$ とすると $(F(\phi(t)))' = F'(\phi(t))\phi'(t)$ となり、両辺を t で積分したときに、$\int F(\phi(t))\phi'(t)dt = F(\phi(t)) + C$ となってしうので仮定に矛盾してしまう。よって、置換積分した不定積分が存在しなければ、置換する前の不定積分は存在しないことになる。

となる。これを計算すると、

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{p'(t)q(t)-p(t)q'(t)}{q^2(t)}\cdot t+\frac{p(t)}{q(t)}\cdot t \\
q^2(t) &= (p'(t)q(t)-p(t)q'(t))t+p(t)q(t)t \\
q^2(t) &= p'(t)q(t)t-p(t)q'(t)t+p(t)q(t)t \\
p(t)q'(t)t &= q(t)(p'(t)t-q(t)+p(t)t) && \text{(*)}
\end{aligned}
$$

$p(t)$ と $q(t)$ は互いに素であるため、$q'(t)$ もしくは $q'(t)t$ が $q(t)$ で割り切れることがわかる。

前者の場合は、$q(t)$ が定数であることを意味し、$h(t)$ が多項式となるため、判定式に矛盾が生じる。

後者の場合は、$q'(t)t$ と $q(t)$ が同じ次数であり、$q(t)$ に定数項がないことを意味する。また、$q(t)$ は単項式であることを意味する。なぜならば、仮に $q(t)$ が単項式ではないとすると、$a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1$ を定数として、

$$q(t)=a_nt^n+a_{n-1}t^{n-1}+\cdots+a_1t$$

と表せる。よって、$q'(t)t$ は次のように表せる。

$$q'(t)t=a_nnt^n+a_{n-1}(n-1)t^{n-1}+\cdots+a_1t$$

$q'(t)t$ を $q(t)$ で割ると、商は n、余りは

$$-a_{n-1}t^{n-1}-2a_{n-2}t^{n-2}-\cdots-(n-1)a_1t$$

となる。$q'(t)t$ は $q(t)$ で割り切れなければならないので、余りは 0 となる必要がある。よって $a_{n-1}, \cdots, a_1$ が 0 になれば、余りが 0 となる。その場合、$q(t)$ は次のように表せる。

$$q(t)=a_nt^n+0\cdot t^{n-1}+\cdots+0\cdot t=a_nt^n$$

よって仮定と矛盾するため、$q(t)$ は単項式である。

ここで、(*) 式に着目すると、、a, n を定数として、

$$p(t)\cdot ant^n=at^n(p'(t)t-at^n+p(t)t)$$

となっている。式を簡単にすると、

$$n\cdot p(t)=p'(t)t-at^n+p(t)t=t(p'(t)-at^{n-1}+p(t))$$

となり、$p(t)$ は t で割り切れる。しかし、$p(t)$ と $q(t)$ が互いに素であることに矛盾である。

よって、判定式を満たす $h(t)$ は存在しないので、$\displaystyle\int\frac{dx}{\log x}$ は初等関数で表すことができない。