偏微分

i　二変数の関数

いままでは、一つの変数 x の関数 $f(x)$ を考えてきた。しかし、一つの変数では記述できない現象も多くある。例えば、理想気体の状態方程式を考えてみる。

$$pV = RT \quad (R : \text{気体定数})$$

この式中の p(圧力) がどのような値を取るのかは、T(温度) と V(体積) の両方を指定しないと決まらない。

一般に、二つの変数 x と y があり、x と y の各々の値の組に対して z の値が決まるとき、z を x と y の関数といい、

$$z = f(x, y)$$

と表す。このとき、x と y を**独立変数**、z を**従属変数**という。

例題 1

$f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$ であるとき、$x = 1, y = -1$ のときの $f(x, y)$ を求めよ。

解答

$f(x, y) = (x + y)^2 = (1 - 1)^2 = 0$

二変数の関数における極限について考えてみよう。点 $P(x, y)$ が点 $A(a, b)$ と一致することなく点Aに近づくとする。この時、その近づき方によらず、関数 $f(x, y)$ の値が同じ一つの値 c に近づくならば、$f(x, y)$ には**極限**が存在して、その**極限値**は c であるといい、

$$f(x, y) \to c \quad (x \to a, y \to b) \qquad \lim_{x \to a, y \to b} f(x, y) = c \qquad \lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y) = c$$

などと表す。関数 $f(x, y)$ が c に**収束する**ともいう。

この時、二つほど注意することがある。

(1) 極限の定義において、点 P と点 A が一致することは除外している。一般に、点 A が関数 $f(x, y)$ の定義域に含まれているとは限らない。

(2) 点 P が点 A に近づく仕方によって、$f(x, y)$ が近づく値が異なるときには、極限は存在しない。

試しに以下の例題を解きながら考えてみよう。

例題 2

関数 $f(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$ において、$x \to 0, y \to 0$ の極限を調べ、極限値が存在するかどうか答えよ。

解答

この関数の定義域は、全平面から原点 O を除外して得られる領域である。次の二つの路で、点 $P(x, y)$ が原点 O に近づくとしよう。

(a) 点 P が x 軸に沿って近づく場合。(b) 点 P が y 軸に沿って近づく場合。

(a) の場合は $f(x, 0) = 1$ より、$\lim_{x \to 0} f(x, 0) = 1$

(b) の場合は $f(0,y)=0$ より、$\lim_{y\to 0} f(0,y)=0$

したがって、この関数は原点への近づき方によって異なる値を取り、極限値 $\lim_{x\to 0, y\to 0} f(x,y)$ は存在しない。

つづいて、関数の連続について考えてみよう。点 $A(a,b)$ の近くで定義されている関数 $z=f(x,y)$ について、次の三つの条件が成り立つ場合、$z=f(x,y)$ は点 $A(a,b)$ において**連続**であるという。

1. $f(a,b)$ が定義されている。
2. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ が存在する。
3. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b)$

例題を解きながら考えてみよう。

例題 3

次の関数の原点での連続性についてしらべよ。

$$(1) f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$$

$$(2) f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$$

$$(3) f(x,y)=\begin{cases} xy & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 2 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$$

解答

(1) は、$f(0,0)$ が存在し、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=0=f(0,0)$$

であるため、この関数は原点で連続である。

(2)$f(0,0)$ は定義されている。ここで、原点 $y=mx(m\neq 0)$ に沿って原点に近づけると、

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot mx}{x^2+(mx)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{(m^2+1)x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{m}{m^2+1}\neq f(0,0)$$

であるため、この関数は原点で連続ではない。別解として、直交座標表示から極座標表示に変換して求める方法もある。この場合だと原点に近づけるために必要なパラメータが r、つまり原点からの距離だけとなるのでわかりやすいかもしれない。

(3) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0\neq f(0,0)$ であるため、この間数は連続ではない。もし、$f(0,0)=0$ と定義しなおせば、この新しい関数は原点で連続になる。このように、不連続点で関数を定義しなおすことによって。連続にできるとき、その不連続点は除きうる不連続であるという。

ii 偏微分

関数 $z=f(x,y)$ において、独立変数 x,y は、おのおの独立な変数である。どちらかを一定にして、もう片方の変数の値を変えることができる。もちろんどちらも同時に変えることができる。

では、y を一定にして x を変動させることを考えてみる。この時 $f(x,y)$ は x の関数だから、この x の関数の導関数

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x} \tag{1}$$

が存在すれば、**偏微分可能**であるという。また、$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ を $f(x,y)$ の x に関する**偏導関数**という。同様に、x を一定として y を一定として変えたときの導関数を $f(x,y)$ の y に関する偏導関数という。一つの変数を定数とみなし、他方の変数で微分するのが、"偏" の意味であり、決して "変" な微分ではない。

偏導関数を表す記法はいろいろある。

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, f_x, f_x(x,y), \frac{\partial z}{\partial x}, \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_y$$

上記の導関数はすべて x の偏導関数である。また、最後の記法はどの変数が一定かを強調している記法で、熱力学で多用されるらしい。なお、$f(x,y)$ の偏導関数を求めることを**偏微分する**という。

例題 4

次の関数を偏微分せよ。

$$(1) f(x,y)2x^3+5xy+2y^2 \quad (2) p(T,V)=\frac{RT}{V} \quad (R:\text{定数})$$

解答

(1)y を一定にして x で微分すると、$f_x=6x^2+5y$。反対に x を一定にして y で微分すると、$f_y=5x+4y$。

(2)

$$\frac{\partial p}{\partial T}=\frac{R}{V}$$
$$\frac{\partial p}{\partial V}=-\frac{RT}{V^2}$$

多くの変数 $x,y,z,\cdots,t$ の関数 $u=f(x,y,x,\cdots,t)$ を**多変数関数**という。これらも二変数関数と同様に偏導関数を求めることができる。

例えば、$r(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ の偏導関数を求めるとすると。

$$r_x=\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{1}{2}\cdot 2x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{x}{r}$$

同様にして、

$$r_y=\frac{y}{r} \quad r_z=\frac{z}{r}$$