多重積分

I　多重積分

i　二重積分

一変数の関数 $y = f(x)$ の定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ は去年学んだ。少しだけ復習すると、積和の極限、すなわち $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta x_k$ が定積分であった。これから、定積分を二変数の場合に拡張する。いままでは、積分領域は線分であったが、今度は積分領域が面になる。

xy 平面の領域 R で定義された連続な関数を $f(x,y)$ とする。領域 R を、各々の面積が $\Delta A_1, \Delta A_2, \cdots, \Delta A_n$ の n 個の章領域 $R_1, R_2, \cdots, R_n$ に分割する。小領域 R_1 内に点 $P_1(\zeta_1, \eta_1)$、小領域 R_2 内に $P_2(\zeta_2, \eta_2), \cdots, R_n$ 内に点 $P_n(\zeta_n, \eta_n)$ を選び、積和の極限

$$\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta A_k = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k, \eta_k)\Delta A_k \tag{1}$$

を作る。各小領域の直径 (領域内のに転換の距離の最大値) が 0 に近づくように分割を細かくしていく。この時の極限値を

$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k.\eta_k)\Delta A_k \tag{2}$$

とかき、関数 $f(x,y)$ の領域 R における**二重積分**という。積分記号が二つあるのは、二変数関数の定積分であることを示し、積分記号の添え字 R は x, y の値の領域を表している。

特に、$f(x,y) = 1$ と置けば、その二重積分は領域 R の面積 A を与える。すなわち、

$$A = \iint_R dA \tag{3}$$

ii　二重積分と体積

定積分が面積と関係していたように、二重積分 (2) 式は体積と関係している。関数 $z = f(x,y)$ は領域 R で正とする。積和 (1) の各項 $f(\zeta_k, \eta_k)\Delta A_k$ は、高さが $z_k = f(\zeta_k, \eta_k)$ で、上下の平行面の面積が ΔA_k の垂直な “柱” の体積を与える。これは、底面積が ΔA_k で、上面が曲線 $z = f(x,y)$ で与えられる垂直な柱の体積を近似したものである。すなわち、(1) の積和は、局面下の体積を近似している。こうして、この極限値である二重積分 (2) は、局面 $z = f(x,y)$、底面 R、R の周上に建てた垂直面、がつくる領域の体積に等しいことがわかる。

iii　三重積分

二重積分を導入したのと同じようにして、三重積分が定義される。三次元の領域 R で連続な関数 $f(x,y,z)$ を考える。領域 R を、各体積が $\Delta V_1, \Delta V_2, \cdots, \Delta V_n$ である n 個の小区間 $R_1, R_2, \cdots, R_n$ に分割する。小領域 R_k 内に点 $P_k(\zeta_k, \eta_k, \xi_k)$ をとり、積和

$$\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k, \eta_k, \xi_k)\Delta V_k \tag{4}$$

を作る。各小領域 R_k の直径を 0 にするように、分割の数 n を大きくする。その極限値を

$$\iiint_R f(x,y,z)dV = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k,\eta_k,\xi_k)\Delta V_k \tag{5}$$

と書き、領域 R での関数 $f(x,y,z)$ の**三重積分**という。特に $f(x,y,z)=1$ ならば、三重積分は領域 R の体積 V を与える。すなわち、

$$V = \iiint_R dV \tag{6}$$

同様にして、n 次元での領域 R で連続な関数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ に対して、n 重積分が定義される。

二重積分や三重積分を、(2) や (5) 式のように積和の極限として計算するのはすごく面倒だ。そこで実際には定積分と同様に、もっと楽に計算をする。そのための方法を次節で紹介する。

II　二重積分は積分を 2 度行う

i　累次積分

まず二重積分について考える。積分領域 R の境界は、x 軸または y 軸に平行な線と 3 回以上交わらないとしよう。（下図参照）

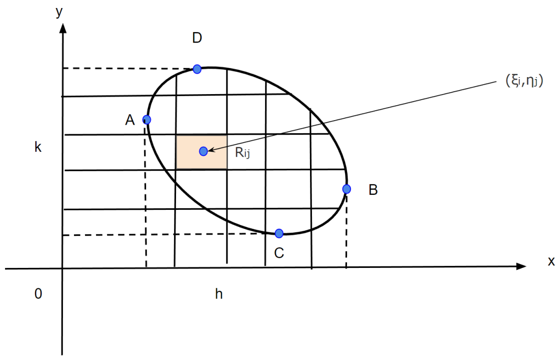

図 1　累次積分

より複雑な形の領域は、このような領域に分けられる。曲線 ACB を $y=g(x)$, 曲線 BDA を $y=h(x)$ で表す。

区間 $a\le x\le b$ を、長さが $\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_m$ の m 個の小区間 $h_1,h_2.\cdots,h_m$ に分割する。また、区間 $c\le y\le d$ を、長さが $\Delta y_1,\Delta y_2,\cdots,\Delta y_n$ の n 個の小区間 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ に分割する。そして、直線 $x=x_1,x=x_2,\cdots,x=x_{m+1},y=y_1,y=y_2,\cdots,y=y_{n+1}$ を引くと、領域 R は各面積が $\Delta x_i\Delta y_j$ の長方形の領域 R_{ij} に分割される。境界の近くでは長方形にはならないが、m,n が大きい限り、それらの寄与は無視できる。領域 $R_{ij}(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$ は全部で mn 個ある。領域 R_{ij} 内に点 (ξ_i,η_j) を選び、積和

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_i,\eta_j)\Delta x_i\Delta y_j \tag{7}$$

を作る。

これは、(1) 式の特別な場合であることに注意しよう。各区間の長さが 0 になるように、m, n を大きくすれば、二重積分 (2) 式に等しい。

いま、最初に区間 h_i を固定し、その上に並んだ長方形をおいて、積和

$$\left\{\sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j)\Delta y_j\right\}\Delta x_i \quad (i \text{ は固定}) \tag{8}$$

を考える。そして、y 軸方向の区間 k_j の長さが 0 になるように $n \to \infty$ の極限を取ると、

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j)\Delta y_j\right\}\Delta x_i = \left\{\int_{g(\xi_i)}^{h(\xi_i)} f(\xi_i, \eta_j)dy\right\}\Delta x_i \tag{9}$$

を得る。次に、x 軸方向の区間に対して和を取り、$m \to \infty$ の極限を取ると

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\left\{\int_{g(\xi_i)}^{h(\xi_i)} f(\xi_i, \eta_j)dy\right\}\Delta x_i = \int_a^b \left[\int_{g(\xi_i)}^{h(\xi_i)} f(\xi_i, \eta_j)dy\right]dx \tag{10}$$

が得られる。こうして、二重積分は、$f(x, y)$ の y についての積分を行い、次に x についての積分を行うことで計算できることがわかる。また、これは x 積分と y 積分の順序を入れ替えても同じである。

積分 (10) 式を**累次積分**という。

以上まとめるなら、$f(x, y)$ が領域 R で連続ならば、

$$\begin{aligned}\iint_R f(x,y)dxdy &= \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dydx \\ &= \int_c^d \int_{k(y)}^{l(y)} f(x,y)dxdy \end{aligned} \tag{11}$$

例題

次の積分を求めよ。

$$(1) \int_0^q \int_0^x dydx \qquad (2) \int_0^1 \int_1^2 (x+y)dxdy$$

解答

$$(1) \int_0^1 \int_0^x dydx = \int_0^1 [y]_0^x dx = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$$

$$(2) \int_0^1 \int_1^2 (x+y)dxdy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + xy\right]_1^2 dy = \int_0^1 (\frac{3}{2} + y)dy = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

例題

直線 $y = x, x = 1, y = 0$ で囲まれた領域を R とするとき、次の二重積分を求めよ。

$$I = \iint_R (x^2 + y^2)dxdy$$

解答

最初に、y 積分、x 積分の順に計算する。

$$I = \int_0^1 \left\{ \int_0^x (x^2 + y^2) dy \right\} dx = \frac{1}{3}$$

次に、x 積分、y 積分の順に計算する。

$$I = \int_0^1 \left\{ \int_y^1 (x^2 + y^2) dx \right\} dy = \frac{1}{3}$$

三重積分の場合にも、同様に累次積分が定義される。

$$\iiint_R f(x,y,z) dxdydz = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) dz \right\} dy \right] dx \tag{12}$$

上の式では、積分はかっこの内側から順に行う。すなわち x, y を固定して、z 積分を行い、次に x を固定して y 積分を行い、最後に x 積分を行う。二重積分と同様に、$f(x,y,z)$ が連続ならば、個の積分は存在して、積分の順序を変えることができる。

例題

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-y} xyzdzdydx$$

を求めよ。

解答

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-y} xyzdzdydx \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{xy}{2}(2-y)^2 dydx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2} x \left\{ \frac{1}{4}(1-x)^4 - \frac{4}{3}(1-x)^3 + 2(1-x)^2 \right\} dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}x^5 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{11}{12}x \right) dx = \frac{13}{240}
\end{aligned}$$

III　積分変数の変換

i　座標系

まず始めに、直交座標での多重積分をまとめる。

二重積分は、直交座標 (x, y) において、

$$\iint_R f(x,y) dxdy \tag{13}$$

で与えられる。$dA = dxdy$ を直交座標での**面積要素**という。

また、三重積分は、直交座標 (x, y, z) において、

$$\iiint_R f(x, y, z) dxdydz \tag{14}$$

で与えられる。$dV = dxdydz$ を直交座標での**体積要素**という。

これらの多重積分を実行する際は、積分領域の形によっては、直交座標系よりはほかの座標系を用いたほうが簡単になることがある。また、応用上では、問題設定の初めからほかの座標系を使って議論することも多い。よく用いられる座標系に対して、多重積分がどのように定義されるかを調べてみよう。

ii　２次元極座標

２次元極座標 (ρ, ϕ) は、直交座標 (x, y) を用いて

$$x = \rho\cos\phi, \quad y = \rho\sin\phi \tag{15}$$
$$(0 \leq \rho \leq \infty, 0 \leq \phi \leq 2\pi)$$

または、

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \arctan\frac{y}{x} \tag{16}$$

で定義される。(15) 式と (16) 式は同じことを意味していることに気づけるだろうか。$\rho =$ 一定の曲線は原点を中心とする円であり、$\phi =$ 一定は原点を通る半直線である。半径が $\rho, \rho + \Delta\rho$ の 2 つの同心円と、角 $\phi, \phi + \Delta\phi$ の 2 つの半直線とで囲まれる領域を考える。この領域は、$\Delta\rho$ と $\Delta\phi$ が十分小さいならば、辺の長さが $\Delta\rho, \rho\Delta\phi$ の長方形とみなすことができるので、その面積 ΔA は、

$$\Delta A = \rho\Delta\phi \cdot \Delta\rho = \rho\Delta\rho\Delta\phi \tag{17}$$

で与えられる。したがって、２次元座標系での二重積分は、

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta A_k = \iint_D f(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi)\rho d\rho d\phi \tag{18}$$

となる。領域 D は直交座標での領域を 2 次元極座標で表したものである。

例題

次の積分を求めよ。

$$I = \iint_R e^{-(x^2+y^2)} dxdy \quad (R : 0 \leq x^2 + y^2 \leq a^2)$$

解答

$x = \rho\cos\phi, y = \rho\sin\phi$ 遠く。領域 R は、$0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \phi \leq 2\pi$ に変換される。また、$x^2 + y^2 = \rho^2$ である。よって、(18) 式より、

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^a e^{-\rho^2}\rho d\rho d\phi = 2\pi\int_0^a e^{-\rho^2}\rho d\rho = \pi(1 - e^{-a^2})$$

さて、この時、$a \to \infty$ としてみると、x, y の積分領域は、各々独立に $-\infty$ から $+\infty$ になるから、

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right\}^2 = \lim_{a \to \infty} \pi (1 - e^{-a^2}) = \pi$$

よって、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \tag{19}$$

を得る。これは有名な**ガウス積分**であり、確率論や統計力学で非常によく用いられる。

iii　円柱座標