積分3

理学愛好会

前回の復習

- 以下不定積分を解け。

$$(1)\ \int x\sqrt{1-2x^2}dx$$

$$(2)\ \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

$$(3)\ \int x^2 \log x \, dx$$

$$(4)\ \int \frac{dx}{x^2+a^2}$$

解答

(1) $$-\frac{1}{6}(1-2x^2)^{\frac{3}{2}}+C$$

(2) $$\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}+C$$

(3) $$\frac{1}{3}x^3\log x-\frac{1}{9}x^3+C$$

(4) $$\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+C$$

今日の大まかな道筋

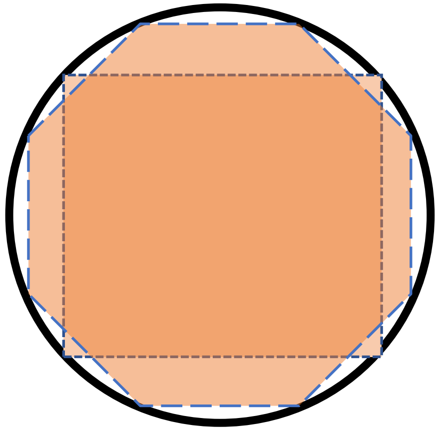
まず、古代の面積の求め方について学び、そのあとに極限を用いて図形の面積を求める方法を学ぶ。

その後、定積分の性質に移り、今日ならうことの中で最も重要な微積分学の基本定理を扱う。

敷き詰め法の問題

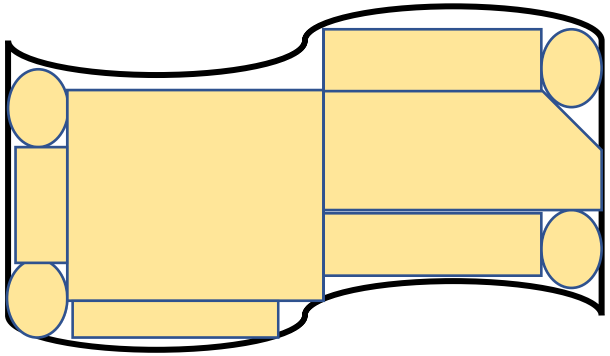
図形の面積を求めることは、古代ギリシアにさかのぼる長い歴史を持つ。例を出せば、円の面積は内接(or外接)する正n角形に近似することで、かなりの精度で計算できた。ただ、対称の図形が異なると、近似の図形も異なってしまい、一般論になりえなかった。

円の場合



じゃあ円以外の図形なら…?

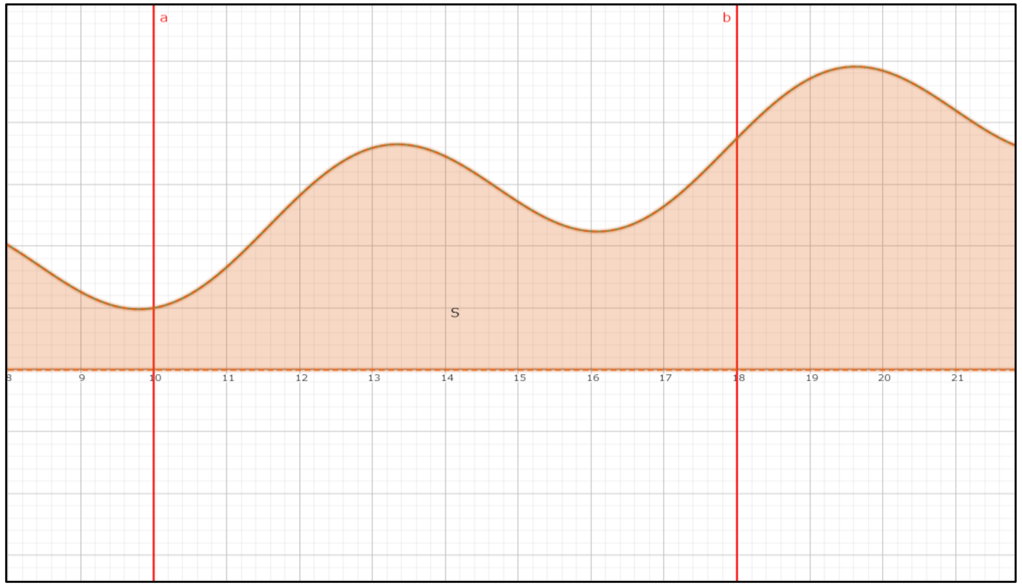
図形によって詰め方が変わる！



図形の面積と定積分1

17世紀にはいると、ライプニッツらの研究によって曲線で囲まれた図形の計算ができるようになった。

関数$y = f(x)$のグラフを考える。いま、$f(x)$は区間$a \leq x \leq b$で連続であり、また正であるとする。その曲線、x軸、x=a,x=bで囲まれた面積をSとする。

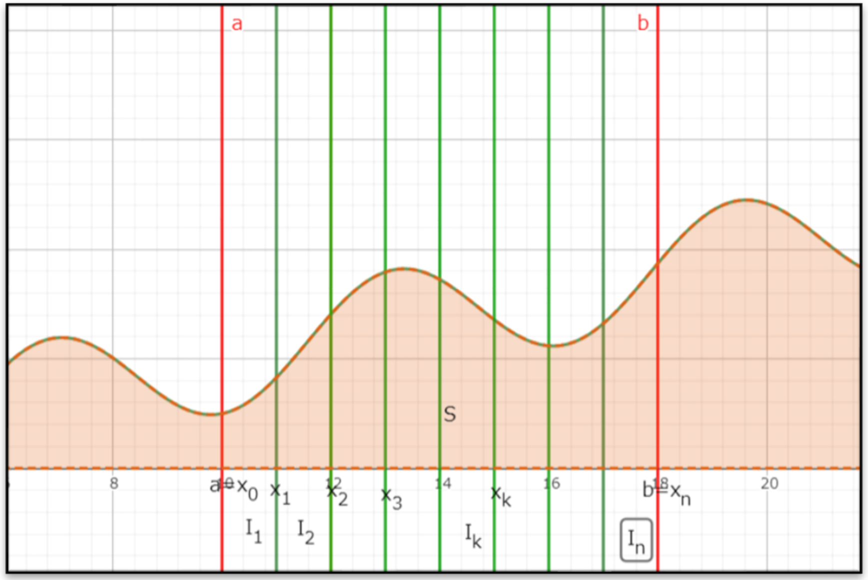


図形の面積と定積分2

区間$a \leq x \leq b$を

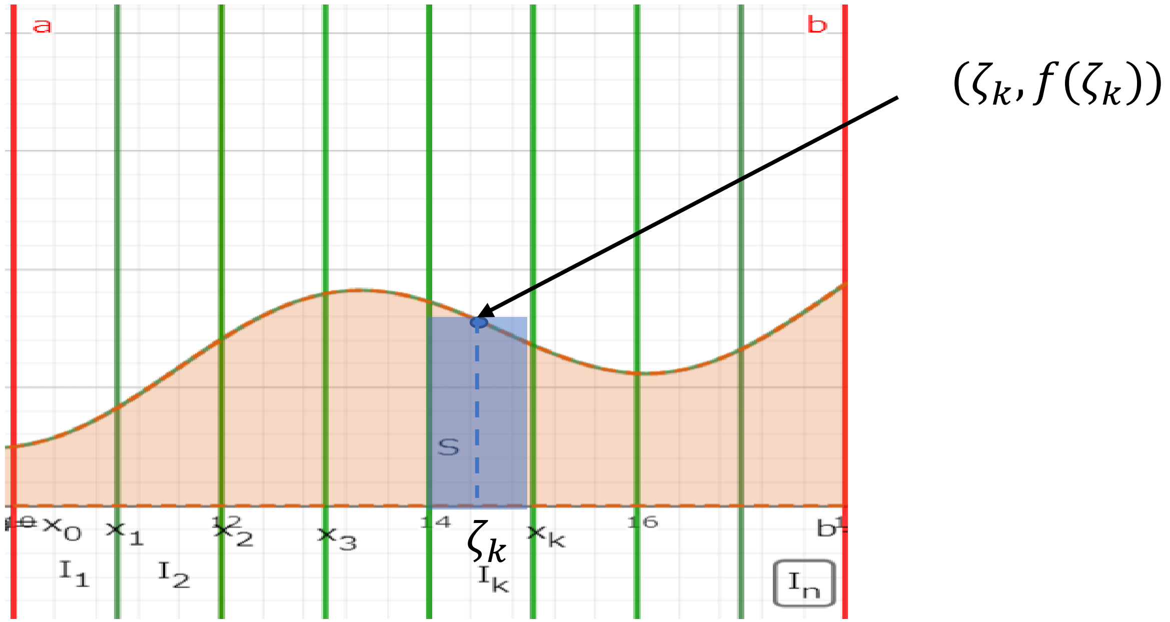
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n < b = x_n$$

であるような,n+1個の点$x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$によってn個の小区間$I_1, I_2, \dots, I_{n-1}, I_n$に分割する。各小区間$I_k$の大きさは、$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$である。点$x_k$ の各々にx軸に垂直な線を引くと、面積Sはn個の'帯'に分けることができる。



図形の面積と定積分3

小区間I_kの中に点ζ_kをとり、各々の帯の面積を、底辺の長さがΔx_kで高さが$y_k = f(\zeta_k)$の長方形の面積、すなわち、$f(\zeta_k)\Delta x_k$で近似する。



図形の面積と定積分4

このとき、求める面積Sは長方形の面積の和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta x_k$$

で近似される。このような和を**積和**と呼ぶことにする。

さて、分割を、各小区間の長さΔx_kが限りなく小さくなるように、細かくしていく。それに従って、積和はある一定の値に限りなく近づく。

その極限値($f(x)$が連続ならば必ず存在する)は面積S、すなわち$y = f(x)$, x軸, $x = a$, $x = b$で囲まれる図形の面積に等しい。この極限値を

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta x_k \cdots\cdots (a)$$

で表し、関数$f(x)$のaからbまでの**定積分**という。bを積分上限、aを積分下限と呼ぶ。記号$\int$は、不定積分のものと同じである。

図形の面積と定積分5

定積分の中で用いる文字xは積分変数と呼ばれる。定積分は一つの数値を表すのだから、積分変数は何を書いても意味に変わりはない。すなわち、

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

である。

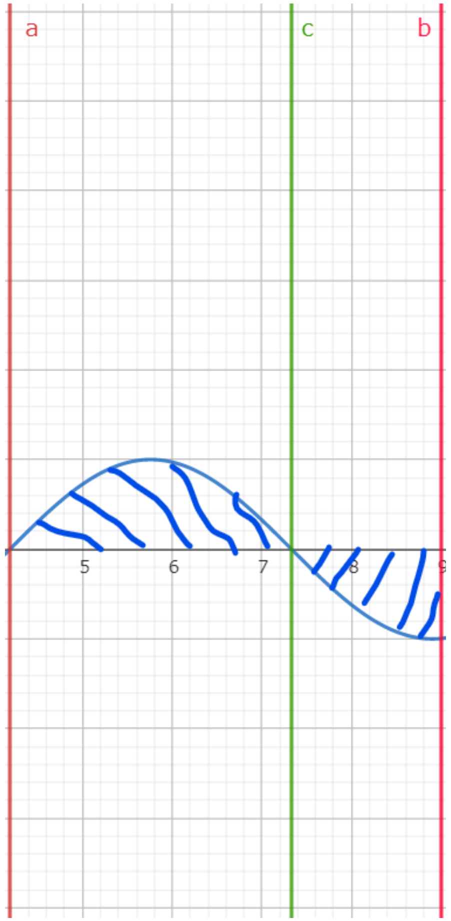
以上の説明では話を分かりやすくするために、$a \leq x \leq b$の区間で$f(x) > 0$とした。もちろん、グラフのある部分はx軸より下にあるような場合でも定積分は定義される。

図形の面積と定積分6

例えば、右のグラフの場合。
この場合$c \leq x \leq b$では、$f(x) < 0$であるため、積和からわかるように、その部分からの寄与は負である。

よってすなわち、定積分はx軸の上方向にある図形に対しては正、下方にある図形に対しては負の面積を与える。

極限(a)が存在するとき、f(x)は**積分可能**であるという。
連続関数ならば積分可能である。



例題

以下求めよ(a,b,cは定数)

$$(1)\ \int_a^b c\,dx \qquad\qquad (2)\ \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

解答(1)

$$f(x) = c\text{の}a\text{~}b\text{までの定積分を求める}$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} c(x_k - x_{k-1})$$

$$= c(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1})$$

$$= c(x_n - x_0) = c(b - a)$$

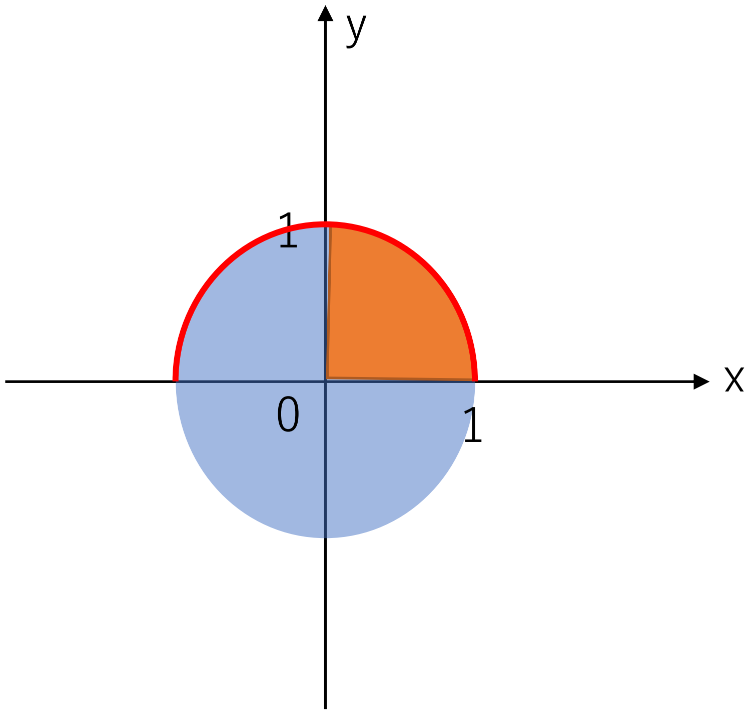
積和は分割の仕方によらず、一定であるため、分割を細かくした極限もc(b-a)で一定である。

$$\therefore \int_a^b c dx = c(b - a)$$

解答(2)

グラフで考える。$\sqrt{1-x^2}$のグラフは左下(赤線)のようになるため、
この時の面積(オレンジ部)は、

$$\pi \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}$$



定積分の性質1

数値計算を除いて、例題1のように(a)を用いて定積分を計算することはまれである。本格的な定積分は後でもっと賢くなってから行う。

とりあえず、いまは定積分の性質をまとめよう。

1. $\displaystyle\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

2. $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ $\quad\quad\ldots(k$は定数)

3. $a \leq x \leq b$ で$f(x) \geq 0 \rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$

4. $a \leq x \leq b$ で$f(x) \geq g(x) \rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

定積分の性質2

5. 平均値の定理

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \qquad (a < c < b)$$

1~3は定積分の定理から明らかである。4は1~3を用いれば示せる。よって5の証明を行う。

平均値の定理

$f(x) = c$ (cは定数)ならば、例題1より求めれる。よって、$f(x)$は

$a \leq x \leq b$で最大値M、最小値mを取るとする(M>m)。

$$m \leq f(x) \leq M$$

性質4と例題1より、

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

ここで、$m \leq A \leq M$であるような数をAを用いて

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = A$$

ところが、$f(x)$は連続関数であるため、少なくとも一回はmとMの間のすべての値を取り(中間値の定理*)、

$$f(c) = A$$

であるようなc(a<c<b)が存在する。すなわち、

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$$

よって証明完了。

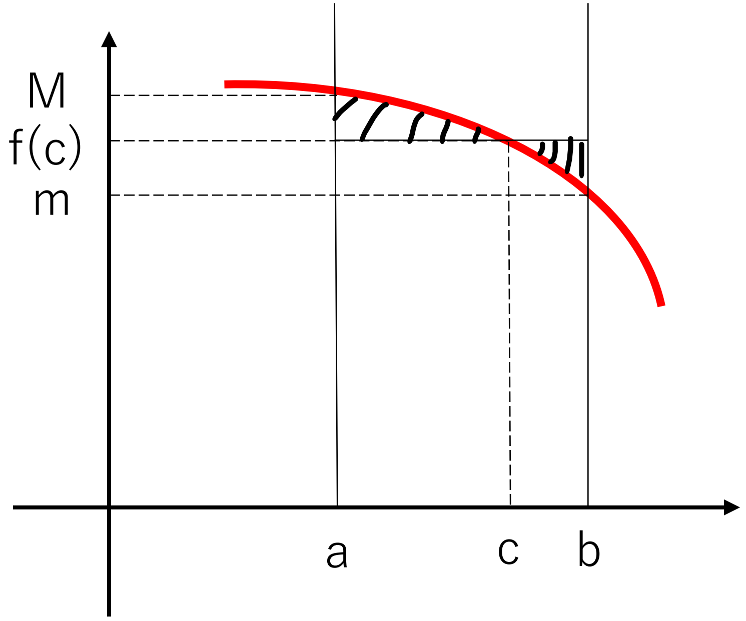
平均値の定理2

平均値の定理は次のようにも書ける。

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f\big(a+\theta(b-a)\big) \quad \text{ただし}(0<\theta<1)$$

これはグラフを書くとわかりやすい。

また、平均値の定理の意味は以下グラフを見れば一目瞭然である。



下線部の面積は等しい！

定積分の性質3

6. $a < c < b$のとき

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \pm \int_c^b f(x)dx$$

7. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

8. $\int_a^a f(x)dx = 0$

6は後で証明するのでひとまず置いておく。8は7でb=aと置けばよい。

7を証明する。a<bとすると、定積分の定義により、

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_{k_n} < \cdots < x_{n-1} < x_n < b = x_n$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1} f(\zeta_k)\Delta x_k$$

この時、$a = x_0 = t_n, x_1 = t_{n-1}, \ldots, b = x_n = t_0$と変数を置き換える。…続く。

7の証明の続き

$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}, \zeta'_k = \zeta_{n-k+1}$と置けば、

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta'_{n-k+1})(t_{n-k} - t_{n-k+1})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta'_{n-k+1}) \cdot -(t_{n-k+1} - t_{n-k})$$

$$= -\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta'_{n-k+1})\Delta t_{n-k+1} = -\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta'_k)\Delta t_k = -\int_b^a f(x)dx$$

よって証明完了。

6の証明

6の証明を行う。

定義より、

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(\mathrm{x_k} - \mathrm{x_{k-1}})$$

この極限値は、区間$a \le x \le b$をどのように分割しても、各$(x_k - x_{k-1})$が限りなく小さくなるように分割を細かくするならば同じ値である。いま、cが区間$a \le x \le b$を細分するときの分割点の一つをx_rとなるようにする。

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{r-1} f(\zeta_k)\Delta x_k + \sum_{k=r}^{n} f(\zeta_k)\Delta x_k$$

ここで、分割を細かくしていけば、

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

よって証明完了。

微積分学の基本定理

不定積分と定積分の間にどのような関係があるのだろうか。

関数$f(x)$のaからbまでの定積分$\int_a^b f(x)dx$は、上限bが決まれば(aは固定する)その値が決まるから、bの関数とみなすことができる。bを変数とみなし、それをxと表すとして、関数

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

を新たに定義する。定積分の性質6より、

$$F(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = \mathrm{F(x)} + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

ここで平均値の定理を用いると、

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = \Delta x \cdot f(x+\theta\Delta x) \quad (0 < \theta < 1)$$

よって二つの式から

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x+\theta\Delta x)$$

ここで$\Delta x \to 0$とすると、以下が得られる。

$$\boldsymbol{F(x)' = f(x)}$$

これを**微積分学の基本定理**という。

微積分学の基本定理をもちいて定積分を求める

さて、f(x)の一つの原始関数F(x)、すなわちF(x)’=f(x)を満たすある関数F(x)がわかった時、定積分

$$\int_a^b f(x)dx$$

がどのように求められるか考えてみよう。微積分学の基本定理より、上限を変数とした定積分 $\int_a^x f(t)dt$もまた原始関数であるため、Cを定数とすると、

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$$

が成り立つ。上の式でx=aと置くと、

$$0 = F(a) + C$$

よって、

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

ここでx=bと置くと、

$$\boldsymbol{\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)}$$

すなわち、**定積分の値は原始関数の積分上限での値から、下限での値を引いたものと等しい！**

定積分の計算

$F(b)-F(a)$を$[F(x)]_a^b$と表すとすると、$\int f(x)dx=F(x)$ならば

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)}$$

であった。これを用いて様々な問題を解いてみよう。

1. $\displaystyle\int_a^b k dx$

2. $\displaystyle\int_a^b x dx$

3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$

解答

1. $\int_a^b k dx = [kx]_a^b = k(b-a)$
2. $\int_a^b x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1$

ただ解くだけじゃなくて

先ほどの例題を解くとき、出てきた値についてその意味を考えてみただろうか。

例えば、3のcos xの$\mathbf{0} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$の面積は1となった。これはつまりcos xという**曲線**の面積が1であるということだ。普通あの見た目でこのようなきれいな値の面積になるとはだれも思わないのではないか。そのような普通には求めることができない図形の面積を私たちは求めることができるようになったことはとても素晴らしいことだと思う。

置換積分と部分積分

複雑な積分を求める際には次の二つを使いこなせると便利である。

１置換積分法

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f[\phi(t)]\phi(t)'dt$$

2部分積分法

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

今後の予定

微積分学の基本定理まで終わったことで、ほとんどの定積分を解けるようになった。ただ、これはあくまで有限区間において連続な関数だけに絞った話である。区間内で不連続点がある場合や無限区間での積分についてはまた別に考える必要がある。

そこで今後の流れとしては、それらを解決するために拡張した広義積分をまず学び、その後数値積分法と呼ばれる定積分の近似値を求める方法を学ぶ。そして関数の展開について軽く触れ、最後にオイラーの公式について学ぶ予定である。

ただ、その広義積分に入る前にテストをいったん挟む。次からはテストに向けての演習問題を書いておく。各自で解いておくとよい。

以下は演習問題です。

1. $\int (x^2 - 3x + 1)dx$

2. $\int \sqrt{x^2 - 2x^4}dx$

3. $\int x^2 \sin x \, dx$

4. $\int \frac{1}{\tan x} dx$

5. $\int \cos^2 x \, dx$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

7. $\int \frac{dx}{\sin x}$

1. $\int (3x^2 - 1)^{\pi} dx$

2. $\int x\sqrt{1 - 2x^2}dx$

3. $\int \sin^2 x dx$

4. $\int \frac{1}{e^{2x}} dx$

5. $\int yx \, dx$

6. $\int \frac{x^3 - x + 1}{x^2 + 1} dx$

7. $\int \frac{dx}{x^2 + 1}$

1. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$

2. $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$

3. $\int_0^2 (x^3 + 1)^{\frac{1}{2}} dx$

4. $\int_0^1 x^3 e^{x^2} dx$

5. $\int_1^9 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

6. $\int_1^2 \log x \, dx$

7. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - 4}$

1.半径rの円の面積を求めよ。ただし、定積分を用いて解き、途中の計算過程も明記せよ。

2.物理の授業で力積について学んだ。力積をIとすると$I = mv_2 - mv_1$となるのであった。
これを、力積が力Fと力がかかった時間Δtの積であることを利用して示せ。

$$I = F\Delta t \rightarrow I = mv_2 - mv_1$$（を示せばよい）

終わり