

理学同好会 ベクトル解析 テスト 1

問 1

ベクトルの基礎的な計算について考える。以下の問いに答えよ。

I. まずは平面ベクトルで計算してみよう。基本ベクトルを $\mathbf{i} = [1, 0], \mathbf{j} = [0, 1]$ とする。

- (1) ベクトル $\mathbf{A} = [2, 5]$ を基本ベクトルの線形結合で表せ。また、大きさを求めよ。
- (2) ベクトル $\mathbf{B} = [-3, -8]$ を正規化せよ。また、 $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ を正規化せよ。
- (3) 内積 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ を求めよ。
- (4) ベクトル \mathbf{A}, \mathbf{B} のなす角度を求めよ。

II. 次に空間ベクトルでも計算してみよう。基本ベクトルを $\mathbf{i} = [1, 0, 0], \mathbf{j} = [0, 1, 0], \mathbf{k} = [0, 0, 1]$ とする。

- (5) ベクトル $\mathbf{A} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ と同じ向きの単位ベクトルの成分を求めよ。また、 \mathbf{A} の方向余弦も求めよ。
- (6) 二つのベクトル $\mathbf{B} = [B_x, B_y, B_z], \mathbf{C} = [C_x, C_y, C_z]$ について、 $|\mathbf{B} - \mathbf{C}|$ を求めよ。
- (7) ベクトル $\mathbf{D} = [3, 1, 2]$ を正規化し、問 (5) で求めた単位ベクトルとの内積を求めよ。
- (8) 外積 $\mathbf{A} \times \mathbf{D}$ を求めよ。

III. 以下ではベクトルはすべて空間ベクトルを指すものとする。

- (9) ベクトル $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ が \mathbf{a} に直行することを計算によって確かめよ。
- (10) ベクトル三重積の公式

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (1)$$

を外積の Einstein の規約 (もどき) による表示から示せ。(すなわち $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i = \varepsilon^{ijk} A_j B_k$ から示せ。)

- (11) 公式

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \quad (2)$$

を証明せよ (Lagrange)。

問 2

ベクトル値関数の微分演算について考える。以下の問いに答えよ。

I. 単純な計算をしてみる。

- (1) 楕円 $\mathbf{r} = [a \cos t, b \sin t]$ を t で微分せよ。
- (2) 放物線 $\mathbf{r} = [t, t^2]$ を t で微分せよ。
- (3) 螺旋 $\mathbf{r} = [\cos t, \sin t, t]$ を t で微分せよ。

II. 以下単位ベクトル $\mathbf{e}(t)$ の t 微分を \mathbf{e}' で表す。次の問いに答えよ。

- (4) $\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}' = 0$ を示せ。
- (5) $|\mathbf{e} \times \mathbf{e}'| = |\mathbf{e}'|$ を示せ。
- (6) $\mathbf{e} \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{e}') = 0$ を示せ。

III. 物体が回転運動を行うとき、物体の位置を $\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$ とすると、その速度は $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ で与えられる。ここで $\boldsymbol{\omega}$ は角速度ベクトルで、回転軸の方向を向き、大きさが回転の角速度の大きさと一致する。回転軸 $\boldsymbol{\omega}$ を z 軸に取って、 $|\boldsymbol{\omega}| = \omega = \text{一定}$ であるとき、これが等速円運動であることを示せ。

問 3

以下では曲線について曲率等のパラメータを求めてみる。

I. 平面曲線について考えてみる。

(1) 放物線 $y = \frac{1}{2}ax^2$ の曲率を求めよ。

(2) 楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の $x = a, y = 0$ における曲率半径を求めよ。また、 $x = 0, y = b$ の曲率半径を求めよ。

II. 空間曲線についても計算してみよう。地球を完全な球体だと仮定したとき、北緯 45 度の緯線の曲率、捩率を求めよ。ただし、地球の半径は $R_E = 6.4 \times 10^6 [\text{m}]$ とする。

以上
