積分2

理学愛好会

前回の復習

次の不定積分を解け

$$\int (2x^3 + 2)^3 dx$$

解答

$$\int (2x^3 + 2)^3 dx$$

$$= 8 \times \int (x^3 + 1)^3 \, dx$$
$$= 8 \times \int (x^9 + 3x^6 + 3x^3 + 1) \, dx$$
$$= 8 \times (\int x^9 dx + 3 \int x^6 dx + 3 \int x^3 dx + \int dx)$$
$$= 8 \times \left(\frac{x^{10}}{10} + \frac{3x^7}{7} + \frac{3x^4}{4} + x \right) + C$$

積分はむずい

一般的に、与えられた関数の不定積分を求めるのは簡単ではない。
必ずしも公式がそのまま適用できるわけではないからである。
例えば、次の不定積分を解いてみよ。

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

おそらく、先ほどの不定積分は今までの知識のみでは解くのが難しいと思う。

先ほどの積分よりも簡単そうな、

$$\int x \sin x \, dx$$

でさえ、今までの知識では解けないのだ。

(実を言うと、微分の逆演算だということを利用して解くことができるのだが、そんなめんどくさいことは誰もしないだろう)。

ではどうすればよいか、簡単な話だ。与えられた不定積分を変形してすでに知られている形に直せばよいのだ。

いまからそのためのいくつかの方法を紹介する。

置換積分

積分を求めるとき、変数xの代わりに新たな変数tを導入し、

$$x = \phi(x)$$

とおくと、積分が簡単に行える場合がある。　いま、

$$F(x) = \int f(x)dx$$

ならば、

$$F\big(\phi(t)\big) = \int f\big(\phi(t)\big)\phi'(t)dt \cdots (a)$$

である。なぜなら、合成関数の微分より、

$$\frac{d}{dt}F\big(\phi(t)\big) = \frac{d}{dx}F(x)\frac{dx}{dt} = f(x)\phi'(t) = f\big(\phi(t)\big)\phi'(t)$$

であるため、(a)を得る。

こうして、

$$\boldsymbol{\int f(x)dx = \int f\big(\phi(t)\big)\phi'(t)dt}$$

を得る。これを**置換積分法**という。

置換積分を使ってみる

置換積分を用いて、以下不定積分を求めよ。

$$(1): \int (2x+5)^{100} dx$$

$$(2): \int \sin(ax+b) dx$$

$$(3): \int \frac{1}{\sqrt{(x^2+a^2)}} dx$$

解答(1)

$$I = \int (2x+5)^{100} dx$$

$t = 2x + 5$ とおく $\cdots (a)$

$$2dx = dt \to dx = \frac{1}{2} dt$$

$$I = \frac{1}{2} \int (t)^{100} dt = \frac{1}{2} \times \frac{t^{101}}{101} + C$$

(a) より

$$I = \frac{(2x+5)^{101}}{202} + C$$

解答(2)

$$I=\int\sin(ax+b)dx$$

$t=ax+b$とおく $\cdots(a)$

$dt=a\times dx$

$$dx=\frac{dt}{a}$$

よって$I=\dfrac{1}{a}\displaystyle\int\sin(t)\,dt=-\dfrac{\cos t}{a}+C$

(a)より

$$I=-\frac{\cos(ax+b)}{a}+C$$

解答(3)

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{(x^2 + a^2)}} dx$$

=================

$t = x + \sqrt{x^2 + a^2}$とおく $\cdots (a)$

$(t - x)^2 = x^2 + a^2$

$t^2 - 2xt + x^2 = x^2 + a^2$

$2xt = t^2 - a^2$

$$x = \frac{1}{2}\left(t - \frac{a^2}{t}\right)$$

$$dx = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a^2}{t^2}\right) dt = \frac{t^2 + a^2}{2t^2} dt$$

$$I = \int \frac{1}{t - \frac{t^2 - a^2}{2t}} \times \frac{t^2 + a^2}{2t^2} dt$$

$$= \int \frac{2t}{2t^2 - t^2 + a^2} \times \frac{t^2 + a^2}{2t^2} dt$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C$$

ここで(a)より

$$I = \log\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C$$

置換積分から導かれる公式

置換積分法を使うと以下の公式を示せる

$$(\mathrm{I})\int f(x)dx = F(x) \to \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)$$

$$(\mathrm{II})\int \{f(x)\}^n f'(x)dx = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}\{f(x)\}^{n+1} + C & (n \neq -1) \\ \log|f(x)| + C & (n = -1) \end{cases}$$

時間があれば証明して確かめることをお勧めする。

tan xの原始関数を求めよう

さて、これまでの知識を使って

$$\int \tan x \, dx$$

を求めよ。

解答

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$
$$= -\int \frac{1}{\cos x} (\cos x)' dx$$
$$= -\log|\cos x| + C$$

こう見てみると、意外とあっさりしているものである。

試しに、$-\log|\cos x| + C$ を微分して、本当に$\tan x$になるか確かめてみるとよい。

部分積分法

微分可能な二つの関数をそれぞれf, gとすると、

$$(fg)' = f'g + fg'$$

が成り立つ。

ここで両辺を積分すると、

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

が成り立つ。

すなわち、

$$\boldsymbol{f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx = \int f'(x)g(x)dx}$$

が成り立つ。これを**部分積分法**という。

部分積分をつかってみる

部分積分を用いて、以下不定積分を計算せよ。

$$(1)\ \int x\ \sin x\ dx$$

$$(2)\ \int \mathrm{e}^{x} \cos x\ \mathrm{dx}$$

$$(3)\ \int \log x\ dx$$

解答(1)

普通に部分積分を行う。

$$\int x\,\sin x\,dx$$
$$= \int (-\cos x)' x\,dx$$
$$= -\cos x \times x - \int (-\cos x) \times x' dx$$
$$= -x\cos x + \sin x + C$$

解答(2)

$$I = \int \mathrm{e}^x \cos x \, dx$$ とおく

$$I = \int (\mathrm{e}^x)' \cos x \, dx$$
$$= \mathrm{e}^x \cos x - \int \mathrm{e}^x \, (-\sin x) dx$$
$$= \mathrm{e}^x \cos x - \int \mathrm{e}^x \, (-\sin x) dx$$
$$= \mathrm{e}^x \cos x - (\mathrm{e}^x(-\sin x)$$
$$- \int \mathrm{e}^x \, (-\cos x) dx)$$
$$= \mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x \sin x - I$$

$$2I = \mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x \sin x$$
$$I = \frac{\mathrm{e}^x(\sin x + \cos x)}{2} + C$$

解答(3)

$$\int \log x \, dx$$
$$= x \log x - \int dx$$
$$= x \log x - x + C$$

部分積分法の注意点

部分積分法ではうまくfとgを選ばないと悲惨な結果になってしまう。

例えば、(1)の問題で$f = \sin x\,, g = \frac{x^2}{2}$を選ぶと、

$$\int x\ \sin x dx = \int \sin x\,(\frac{1}{2}x^2)'\,dx = \sin x \cdot \frac{1}{2}x^2 - \int (\sin x)' \cdot \frac{1}{2}x^2\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \sin x - \frac{1}{2}\int x^2 \cos x\,dx$$

とまぁ、余計複雑な積分となってしまうわけだ。

部分分数分解1

有利関数の積分は必ず求めることができる。これを今から説明する。

まず、言葉の定義から説明しよう。多項式

$$a_0x^n + a_1x^{(n-1)} + a_2x^{(n-2)} + \cdots + a_n (n \in \mathbb{N})$$

において、$a_0 \neq 0$のとき、nを多項式の**次数**というのは皆知っていると思う。二つの多項式、$f(x), g(x)$として、有理関数$F(x)$は

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

と表せる。分子にある$f(x)$の次数が、分母にある$g(x)$の次数よりも高いなら、

$$\frac{3x-2}{x-1} = \frac{3(x-1)+1}{x-1} = 3 + \frac{1}{x-1}$$

というように、多項式と分子の次数が分母より低い有理関数の和で表すことができる。

（続く）

部分分数分解2

いま、多項式の部分に興味はないため、分子の次数は分母の次数より低いとして話を進める。

このとき、すべての有理関数は

$$\frac{1}{(x+a)^m} \text{ と } \frac{Ax+B}{[(x-a)^2+b^2]^m}$$

の和に分解できる(**部分分数分解**)。

これらは、のちに証明するように積分できるので、一般に<u>有利関数の不定積分は常に求められる</u>。

部分分数分解の練習

以下、部分分数分解せよ。

$$(1)\ \frac{1}{x^3+1}$$

$$(2)\ \frac{7x-1}{x^2-x-6}$$

解答

(1) $\dfrac{1}{x^3+1} = \dfrac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Bx+C}{x^2-x+1}$

$\rightarrow A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1) = 1$
$Ax^2 - Ax + A + Bx^2 + (B+C)x + C = 1$
$(A+B)x^2 - (A-B-C)x + (A+C-1) = 0$

$\rightarrow (A+B) = 0, (A-B-C) = 0, A+C = 1$
$\therefore A = \dfrac{1}{3}, B = -\dfrac{1}{3}, C = \dfrac{2}{3}$
よって $\dfrac{1}{x^3+1} = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{3}\dfrac{x-2}{x^2-x+1}$

(2) $\dfrac{7x-1}{x^2-x-6}$
$= \dfrac{7x-1}{(x-3)(x+2)}$
$= \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{x+2}$
$\rightarrow A(x+2) + B(x-3) = 7x-1$
$(A+B)x + (2A-3B) = 7x-1$
$A+B = 7, 2A-3B = -1$
$\rightarrow 5A = 20 \rightarrow A = 4, B = 3$
$\therefore = \dfrac{4}{x-3} + \dfrac{3}{x+2}$

有理関数の積分１

有理関数$F(x)$は、$\frac{1}{(x+a)^m}, \frac{Ax+B}{[(x-a)^2+b^2]^m}$の二つの形の和に分けれるのであった。よって、有理関数の積分は

$$\int F(x)dx = \int \frac{1}{(x+a)^m}dx + \cdots + \int \frac{Ax+B}{[(x-a)^2+b^2]^m}dx + \cdots.$$

で表せるのである。

つまり、

$$\int \frac{1}{(x+a)^m}dx \ldots (a)$$

$$\int \frac{Ax+B}{[(x-a)^2+b^2]^m}dx \ldots (b)$$

の二つの積分を解けばよい。

有理関数の積分2

まず、(a)の積分を求める。

$$\int \frac{1}{(x+a)^m}dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1-m}\dfrac{1}{(x+a)^{m-1}} + C \ldots (m \neq 1) \\ \log|x+a| + C \qquad\qquad \ldots (m = 1) \end{cases}$$

有理関数の積分3

次に(b)の積分は、

$$\frac{Ax+B}{[(x-a)^2+b^2]^m}=\frac{A}{2}\frac{2(x-a)}{[(x-a)^2+b^2]^m}+\frac{B+Aa}{[(x-a)^2+b^2]^m}$$

と変形できるので、以下の積分を考えればよい。

$$I_m=\int\frac{2(x-a)}{[(x-a)^2+b^2]^m}dx\quad\ldots\ (m=1,2,3,\ldots)$$

$$J_m=\int\frac{1}{[(x-a)^2+b^2]^m}dx\quad\ldots\ (m=1,2,3,\ldots)$$

積分I_mは

$$I_m=\int\frac{[(x-a)^2+b^2]'}{[(x-a)^2+b^2]^m}dx$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{1-m}\dfrac{1}{[(x-a)^2+b^2]^{m-1}}+C & \ldots\ (m\neq 1)\\ \log[(x-a)^2+b^2]+C & \ldots\ (m=1)\end{cases}$$

有理関数の積分4

J_mを一般のmで求められることを示すには、少し工夫する必要がある。

$m=1$のときは簡単に求められて、

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \int \frac{1}{(x-a)^2+b^2}\,dx \\
&= \int \frac{dt}{t^2+b^2} = \frac{1}{b}\arctan\frac{t}{b} + C \\
&= \frac{1}{b}\arctan\frac{x-a}{b} + C
\end{aligned}
$$

注：$\arctan x$は$\tan x$の逆関数である。（つまり$\tan^{-1} x$ は$\arctan x$と書ける）

有理関数の積分 5

$m \geq 2$に対しては

部分積分

$$\boldsymbol{J_m} = \int \frac{1}{[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^2 + b^2]^m} dx$$

$$= \int \frac{\boldsymbol{dt}}{[\boldsymbol{t^2} + \boldsymbol{b^2}]^{\boldsymbol{m}}} = \frac{1}{b^2} \int \frac{(t^2+b^2) - t^2}{[t^2+b^2]^m} dx$$

$$= \frac{1}{b^2}\left(J_{m-1} - \int \frac{t}{2} \frac{2t}{(t^2+b^2)^m} dt\right)$$

$$= \frac{1}{b^2}\left(J_{m-1} - \{\frac{t}{2} \frac{1}{1-m} \frac{1}{(t^2+b^2)^{m-1}} - \frac{1}{2(1-m)} \int \frac{dt}{(t^2+b^2)^{m-1}}\}\right)$$

$$= \frac{1}{b^2}\left(J_{m-1} + \frac{(x-a)}{2(m-1)} \frac{1}{\left((x-a)^2+b^2\right)^{m-1}} - \frac{1}{2(m-1)} J_{m-1}\right)$$

$$= \frac{1}{b^2}\left(\frac{1}{2(m-1)} \frac{x-a}{\left((x-a)^2+b^2\right)^{m-1}} - \frac{2m-3}{2m-2} J_{m-1}\right) \quad \ldots (c)$$

有理関数の積分6

(c)のような式を**漸化式**という。J_mを知るためにはJ_{m-1}を知っておけばよい。また、J_1はすでに計算しているので、この漸化式により積分することなしに、$J_2, J_3 \dots J_m$を求めることができる。

有理関数の積分を解いてみる。

$$(1)\int\frac{dx}{x^2-9}$$

$$(2)\int\frac{7x-1}{x^2-x-6}dx$$

解答

$$(1)\int\frac{dx}{x^2-9}=\int\frac{dx}{(x-3)(x+3)}$$
$$=\frac{1}{6}(\int\frac{dx}{x-3}-\int\frac{dx}{x+3})=\ \frac{1}{6}(\log|x-3|-\log|x+3|)+C$$
$$=\frac{1}{6}\left(\log\left|\frac{x-3}{x+3}\right|\right)+C$$

\=

$$(2)\int\frac{7x-1}{x^2-x-6}dx=4\int\frac{dx}{x-3}+3\int\frac{dx}{x+2}$$
$$=4\log|x-3|+3\log|x+2|+C$$

今日学んだこと

- 置換積分法
- 部分積分法
- 部分分数分解
- 有理関数の積分

不定積分はこれで終わりである。
ぜひいろいろな問題を解いて力をつけてほしい。

次回行うこと

次回は定積分について軽く学ぶ。ある関数のグラフ下の面積を極限を用いてうまく近似していくのである。時間の都合が合えば微積分学の宝である「微積分学の基本定理」についても説明する。

微積分学の基本定理とは簡単に言うと、定積分の演算が微分の演算の逆演算だということを示すものである。これによって、定積分を不定積分と同じように解けるようになるのである。

ちょっとした宿題 1

以下計算せよ。

$$(1)\ \int a^x \log(a)\, dx$$

$$(2)\ \int x^2 \mathrm{e}^x dx$$

$$(3)\ \int \sin^2 x \cos x\, dx$$

$$(4)\ \int \frac{x+1}{x^3+x^2-2x} dx$$

ちょっとした宿題２

(6)$\sin x$と$\cos x$の有理関数を$f(\sin x, \cos x)$とおく。変数変換して$t = \tan\frac{x}{2}$と置くことにより、

$$\int f(\sin x, \cos x)dx$$

は有理関数の不定積分に帰着出来て必ず積分できることを示せ。

ヒント： $t = \tan\frac{x}{2}$と置くことにより、$\sin x, \cos x$を

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

と変形できることを利用する。