多重積分

I　多重積分

i　二重積分

一変数の関数 $y = f(x)$ の定積分 $\int_a^b f(x)dx$ は去年学んだ。少しだけ復習すると、積和の極限、すなわち $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta x_k$ が定積分であった。これから、定積分を二変数の場合に拡張する。いままでは、積分領域は線分であったが、今度は積分領域が面になる。

xy 平面の領域 R で定義された連続な関数を $f(x,y)$ とする。領域 R を、各々の面積が $\Delta A_1, \Delta A_2, \cdots, \Delta A_n$ の n 個の章領域 $R_1, R_2, \cdots, R_n$ に分割する。小領域 R_1 内に点 $P_1(\zeta_1, \eta_1)$、小領域 R_2 内に $P_2(\zeta_2, \eta_2), \cdots, R_n$ 内に点 $P_n(\zeta_n, \eta_n)$ を選び、積和の極限

$$\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta A_k = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k, \eta_k)\Delta A_k \tag{1}$$

を作る。各小領域の直径 (領域内のに転換の距離の最大値) が 0 に近づくように分割を細かくしていく。この時の極限値を

$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k.\eta_k)\Delta A_k \tag{2}$$

とかき、関数 $f(x,y)$ の領域 R における**二重積分**という。積分記号が二つあるのは、二変数関数の定積分であることを示し、積分記号の添え字 R は x, y の値の領域を表している。

特に、$f(x,y) = 1$ と置けば、その二重積分は領域 R の面積 A を与える。すなわち、

$$A = \iint_R dA \tag{3}$$

ii　二重積分と体積

定積分が面積と関係していたように、二重積分 (2) 式は体積と関係している。関数 $z = f(x,y)$ は領域 R で正とする。積和 (1) の各項 $f(\zeta_k, \eta_k)\Delta A_k$ は、高さが $z_k = f(\zeta_k, \eta_k)$ で、上下の平行面の面積が ΔA_k の垂直な "柱" の体積を与える。これは、底面積が ΔA_k で、上面が曲線 $z = f(x,y)$ で与えられる垂直な柱の体積を近似したものである。すなわち、(1) の積和は、局面下の体積を近似している。こうして、この極限値である二重積分 (2) は、局面 $z = f(x,y)$、底面 R、R の周上に建てた垂直面、がつくる領域の体積に等しいことがわかる。

iii　三重積分

二重積分を導入したのと同じようにして、三重積分が定義される。三次元の領域 R で連続な関数 $f(x,y,z)$ を考える。領域 R を、各体積が $\Delta V_1, \Delta V_2, \cdots, \Delta V_n$ である n 個の小区間 $R_1, R_2, \cdots, R_n$ に分割する。小領域 R_k 内に点 $P_k(\zeta_k, \eta_k, \xi_k)$ をとり、積和

$$\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k, \eta_k, \xi_k)\Delta V_k \tag{4}$$

を作る。各小領域 R_k の直径を 0 にするように、分割の数 n を大きくする。その極限値を

$$\iiint_R f(x,y,z)dV = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k,\eta_k,\xi_k)\Delta V_k \tag{5}$$

と書き、領域 R での関数 $f(x,y,z)$ の**三重積分**という。特に $f(x,y,z)=1$ ならば、三重積分は領域 R の体積 V を与える。すなわち、

$$V = \iiint_R dV \tag{6}$$

同様にして、n 次元での領域 R で連続な関数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ に対して、n 重積分が定義される。

二重積分や三重積分を、(2) や (5) 式のように積和の極限として計算するのはすごく面倒だ。そこで実際には定積分と同様に、もっと楽に計算をする。そのための方法を次節で紹介する。

II　二重積分は積分を 2 度行う

i　累次積分

まず二重積分について考える。積分領域 R の境界は、x 軸または y 軸に平行な線と 3 回以上交わらないとしよう。（下図参照）

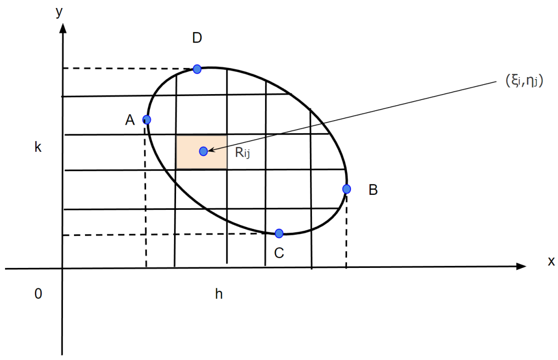

図 1　累次積分

より複雑な形の領域は、このような領域に分けられる。曲線 ACB を $y=g(x)$, 曲線 BDA を $y=h(x)$ で表す。

区間 $a\le x\le b$ を、長さが $\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_m$ の m 個の小区間 $h_1,h_2.\cdots,h_m$ に分割する。また、区間 $c\le y\le d$ を、長さが $\Delta y_1,\Delta y_2,\cdots,\Delta y_n$ の n 個の小区間 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ に分割する。そして、直線 $x=x_1,x=x_2,\cdots,x=x_{m+1},y=y_1,y=y_2,\cdots,y=y_{n+1}$ を引くと、領域 R は各面積が $\Delta x_i\Delta y_j$ の長方形の領域 R_{ij} に分割される。境界の近くでは長方形にはならないが、m,n が大きい限り、それらの寄与は無視できる。領域 $R_{ij}(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$ は全部で mn 個ある。領域 R_{ij} 内に点 (ξ_i,η_j) を選び、積和

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_i,\eta_j)\Delta x_i\Delta y_j \tag{7}$$

を作る。

これは、(1) 式の特別な場合であることに注意しよう。各区間の長さが 0 になるように、m, n を大きくすれば、二重積分 (2) 式に等しい。

いま、最初に区間 h_i を固定し、その上に並んだ長方形をおいて、積和

$$\left\{\sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j)\Delta y_j\right\}\Delta x_i \quad (i \text{ は固定}) \tag{8}$$

を考える。そして、y 軸方向の区間 k_j の長さが 0 になるように $n \to \infty$ の極限を取ると、

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j)\Delta y_j\right\}\Delta x_i = \left\{\int_{g(\xi_i)}^{h(\xi_i)} f(\xi_i, \eta_j)dy\right\}\Delta x_i \tag{9}$$

を得る。次に、x 軸方向の区間に対して和を取り、$m \to \infty$ の極限を取ると

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\left\{\int_{g(\xi_i)}^{h(\xi_i)} f(\xi_i, \eta_j)dy\right\}\Delta x_i = \int_a^b \left[\int_{g(\xi_i)}^{h(\xi_i)} f(\xi_i, \eta_j)dy\right]dx \tag{10}$$

が得られる。こうして、二重積分は、$f(x, y)$ の y についての積分を行い、次に x についての積分を行うことで計算できることがわかる。また、これは x 積分と y 積分の順序を入れ替えても同じである。

積分 (10) 式を**累次積分**という。

以上まとめるなら、$f(x, y)$ が領域 R で連続ならば、

$$\begin{aligned}\iint_R f(x,y)dxdy &= \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dydx \\ &= \int_c^d \int_{k(y)}^{l(y)} f(x,y)dxdy \end{aligned} \tag{11}$$

例題

次の積分を求めよ。

$$(1) \int_0^q \int_0^x dydx \qquad (2) \int_0^1 \int_1^2 (x+y)dxdy$$

解答

$$(1) \int_0^1 \int_0^x dydx = \int_0^1 [y]_0^x dx = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$$

$$(2) \int_0^1 \int_1^2 (x+y)dxdy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + xy\right]_1^2 dy = \int_0^1 (\frac{3}{2} + y)dy = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

例題

直線 $y = x, x = 1, y = 0$ で囲まれた領域を R とするとき、次の二重積分を求めよ。

$$I = \iint_R (x^2 + y^2)dxdy$$

解答

最初に、y 積分、x 積分の順に計算する。

$$I = \int_0^1 \left\{ \int_0^x (x^2+y^2)dy \right\} dx = \frac{1}{3}$$

次に、x 積分、y 積分の順に計算する。

$$I = \int_0^1 \left\{ \int_y^1 (x^2+y^2)dx \right\} dy = \frac{1}{3}$$

三重積分の場合にも、同様に累次積分が定義される。

$$\iiint_R f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right\} dy \right] dx \tag{12}$$

上の式では、積分はかっこの内側から順に行う。すなわち x,y を固定して、z 積分を行い、次に x を固定して y 積分を行い、最後に x 積分を行う。二重積分と同様に、$f(x,y,z)$ が連続ならば、個の積分は存在して、積分の順序を変えることができる。

例題

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-y} xyzdzdydx$$

を求めよ。

解答

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-y} xyzdzdydx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{xy}{2}(2-y)^2 dydx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}x \left\{ \frac{1}{4}(1-x)^4 - \frac{4}{3}(1-x)^3 + 2(1-x)^2 \right\} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}x^5 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{11}{12}x \right) dx = \frac{13}{240} \end{aligned}$$

III　積分変数の変換

i　座標系

まず始めに、直交座標での多重積分をまとめる。

二重積分は、直交座標 (x, y) において、

$$\iint_R f(x, y) dxdy \tag{13}$$

で与えられる。$dA = dxdy$ を直交座標での**面積要素**という。

また、三重積分は、直交座標 (x, y, z) において、

$$\iiint_R f(x, y, z) dxdydz \tag{14}$$

で与えられる。$dV = dxdydz$ を直交座標での**体積要素**という。

これらの多重積分を実行する際は、積分領域の形によっては、直交座標系よりはほかの座標系を用いたほうが簡単になることがある。また、応用上では、問題設定の初めからほかの座標系を使って議論することも多い。よく用いられる座標系に対して、多重積分がどのように定義されるかを調べてみよう。

ii　２次元極座標

２次元極座標 (ρ, ϕ) は、直交座標 (x, y) を用いて

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi \tag{15}$$
$$(0 \leq \rho \leq \infty, 0 \leq \phi \leq 2\pi)$$

または、

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \arctan \frac{y}{x} \tag{16}$$

で定義される。(15) 式と (16) 式は同じことを意味していることに気づけるだろうか。$\rho =$ 一定の曲線は原点を中心とする円であり、$\phi =$ 一定は原点を通る半直線である。半径が $\rho, \rho + \Delta\rho$ の２つの同心円と、角 $\phi, \phi + \Delta\phi$ の２つの半直線とで囲まれる領域を考える。この領域は、$\Delta\rho$ と $\Delta\phi$ が十分小さいならば、辺の長さが $\Delta\rho, \rho\Delta\phi$ の長方形とみなすことができるので、その面積 ΔA は、

$$\Delta A = \rho\Delta\phi \cdot \Delta\rho = \rho\Delta\rho\Delta\phi \tag{17}$$

で与えられる。したがって、２次元座標系での二重積分は、

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(P_k) \Delta A_k = \iint_D f(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi) \rho d\rho d\phi \tag{18}$$

となる。領域 D は直交座標での領域を２次元極座標で表したものである。

例題

次の積分を求めよ。

$$I = \iint_R e^{-(x^2+y^2)} dxdy \quad (R : 0 \leq x^2 + y^2 \leq a^2)$$

解答

$x = \rho \cos \phi, y = \rho \sin \phi$ 遠く。領域 R は、$0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \phi \leq 2\pi$ に変換される。また、$x^2 + y^2 = \rho^2$ である。よって、(18) 式より、

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^a e^{-\rho^2} \rho d\rho d\phi = 2\pi \int_0^a e^{-\rho^2} \rho d\rho = \pi(1 - e^{-a^2})$$

さて、この時、$a \to \infty$ としてみると、x, y の積分領域は、各々独立に $-\infty$ から $+\infty$ になるから、

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right\}^2 = \lim_{a\to\infty}\pi(1-e^{-a^2}) = \pi$$

よって、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi} \tag{19}$$

を得る。これは有名な**ガウス積分**であり、確率論や統計力学で非常によく用いられる。

iii　極座標

極座標 (r, θ, ϕ) は、直交座標 (x, y, z) を用いて、次のように表せる。

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta$$
$$(0 \le r \le \infty, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \phi \le 2\pi) \tag{20}$$

で定義される。任意の点を P とするとき、線分 OP の長さが r、z 軸と線分 OP のなす角は θ、軸 Oz と点 P を通る半平面が平面 xOz となす角は ϕ である。当然のことながら、$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ と置けば、二次元極座標と同じである。

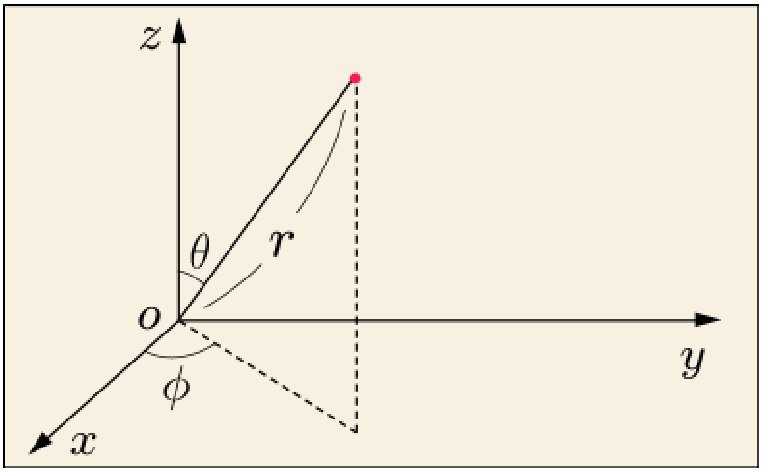

図 2　極座標 (引用：https://eman-physics.net/math/calculus04.html)

$r =$ 一定は原点 O を中心とする球面を表す。$\theta =$ 一定は z 軸を回転軸とする円錐面を与える。また,$\phi =$ 一定は、z 軸を通る半平面平面を表す。いま、半径が、$r, r+\Delta r$ の二つの同心球、頂角が $\theta, \theta+\Delta\theta$ の二つの円錐面、$\phi, \phi+\Delta\phi$ の二つの半平面、で囲まれる領域を考える。この領域は、$\Delta r, \Delta\phi, \Delta\theta$ が十分小さいならば、辺の長さ $\Delta r, r\Delta\theta, r\sin\theta\Delta\phi$ の直方体とみなすことができるので、その体積は ΔV は、

$$\Delta V = \Delta r \cdot r\Delta\theta \cdot r\sin\theta\Delta\phi = r^2\sin\theta\Delta r\Delta\theta\Delta\phi \tag{21}$$

で与えられる。したがって、極座標系での三重積分は、

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta V_k = \iiint_D f(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)r^2\theta drd\theta d\phi \tag{22}$$

となる。領域Dは、直角座標 (x, y, z) での領域を極座標で表したものであり、また、$r^2 \sin\theta drd\theta d\phi$ は極座標での体積要素である。

例題

次の三重積分を求めよ。

$$I = \iiint_R (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz \quad (R : 0 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, a > 0)$$

極座標変換すると、簡単に求まる。$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ に注意して、

$$I = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^a r^2 \cdot r^2 \sin\theta dr = 2\pi \cdot \frac{1}{5}a^5 \cdot 2 = \frac{4\pi}{5}a^5$$

となる。

iv　曲線座標

もっと一般に、

$$x = g(u, v), \quad y = h(u, v)$$

で与えられる曲線座標系 (u, v) では、二重積分はどう表せるのか考えてみよう。結論だけ与えると、二重積分は

$$\iint_R f(x, y)dxdy = \iint_D f(g(u, v), h(u, v))|J|dudv$$

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} \tag{23}$$

となる。ここで、J は u, v に関する x, y の**ヤコビ行列式**または、**ヤコビアン**という。$|J|$ は、その絶対値である。

例題

二次元極座標 (ρ, ϕ) に対して、

$$\iint_R f(x, y)dxdy = \iint_D f(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi)\rho d\rho d\phi$$

を示せ。

解答

公式 (23) 式より、

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\phi & -\rho\sin\phi \\ \sin\phi & \rho\cos\phi \end{vmatrix} = \cos\phi \cdot \rho\cos\phi - (-\rho\sin\phi)\sin\phi = \rho(\sin^2\phi + \cos^2\phi) = \rho$$

よって、xy 座標系での領域 R を uv 座標系で表した領域を D として、

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_D f(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi)\rho d\rho d\phi$$

を得る。

IV　線積分

i　線積分

この章の最後の課題として、線積分について述べる。理工学でよく用いられる概念らしい。

ひとまず定義から述べる。三次元空間内に、方向を持った曲線 C を考える。その C 上のすべての点において連続な関数 $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ があるとする。

いま、曲線 C 上に $n-1$ 個の点 $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),\cdots,(x_{n-1},y_{n-1},z_{n-1})$ をとり、n 個の小区間に分ける。始点 A を $(a_1,a_2,a_3)\equiv(x_0,y_0,z_0)$、終点 B を $(b_1,b_2,b_3)\equiv(x_n,y_n,z_n)$ と書き、$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \Delta y_k = y_k - y_{k-1}, \Delta z_k = z_k - x_{k-1} (k=1,2,\cdots,n)$ と置く。点 $(x_{k-1},y_{k-1},z_{k-1})$ と (x_k,y_k,z_k) の間の C 上の点を (ξ_k,η_k,ζ_k) として、積和

$$\sum_{k=1}^{n}\{P(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta y_k + R(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta z_k\} \tag{24}$$

をつくる。すべての $\Delta x_k, \Delta y_k, \Delta z_k$ が 0 に近づくように分割の数 n を大きくする。この時の極限値を

$$\int_C [P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz] \tag{25}$$

で表し、**線積分**という。線積分は、一般に始点 A と終点 B をつなぐ曲線 (**積分路**) の選び方に依存する。そのため、選んだ経路は $\int_C$ のように選んだ積分路を積分記号の横に書く。

曲線 C が xy 平面上の曲線である場合は、線積分は

$$\int_C [P(x,y)dx + Q(x,y)dy]$$

となる。

線積分の性質をまとめる。

- $\displaystyle\int_C [Pdx + Qdy + Rdz] = \int_C Pdx + \int_C Qdy + \int_C Rdz$
- 曲線 C の逆向きの曲線を $\overline{C}$ とする。

$$\int_{\overline{C}} [Pdx + Qdy + Rdz] = -\int_C [Pdx + Qdy + Rdz]$$

- 曲線 C_1, C_2 をつなぎ合わせた曲線を C とする。

$$\int_C [Pdx + Qdy + Rdz] = \int_{C_1} [Pdx + Qdy + Rdz] + \int_{C_2} [Pdx + Qdy + Rdz]$$

例題

線積分

$$\int_C [(x-y)dx + ydy]$$

を次の二つの積分路で求めよ。

(1)C_1 :x 軸上を始点 $(1,0)$ から $(2,0)$。次に y 軸に平行に $(2,0)$ から終点 $(2,1)$。

(2)C_2 : 始点 $(1,0)$ と終点 $(2,1)$ を結ぶ直線。

解答

(1) 求める線積分は

$$\int_1^2 xdx + \int_0^1 ydy = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

左辺第一項は x 軸の線、第二項は y 軸平行の直線を表す。

(2) 始点と終点を結ぶ直線 C_2 は $y = x - 1 (1 \leq x \leq 2)$ であるため、C_2 上では $dy = dx$ となる。よって、

$$\int_{C_2} [(x-y)dx + ydy] = \int_1^2 [(x-(x-1))dx + (x-1)dx] = \int_1^2 xdx = \frac{3}{2}$$

この答えから、始点終点が共通でも、積分路が異なると、線積分の値が異なることに注意しよう。

ii　仕事

線積分は、力学の仕事をイメージすると理解しやすいかもしれない。位置に依存して働く力の x, y, z 成分をそれぞれ P, Q, R とすれば、Pdx, Qdy, Rdz は微小区間におけるそれぞれの方向の仕事 (= 力 × 変位) になることがわかるだろうか。線積分はそれらの総和であるわけだから、全体の仕事となるわけである。

iii　重力による位置エネルギー

物理の授業では、重力による位置エネルギー (ポテンシャルエネルギー) は $U = mgh$ で与えられることを学んだ。この式から、重力による位置エネルギーは途中の経路によらず、物体の位置によって決まるということがわかる。この理由を、線積分をつかって考えてみよう。

まず、選んだ経路を C とすると、重力による位置エネルギー U は次のように表せる。

$$U = \int_C Fdy$$

この時の F は物体に及ぼす重力である。重力は鉛直方向にしか力を及ぼさないので、x, z 成分の力は考える必要はない。よって、

$$U = \int_C mgdy = mg \int_C dy$$

ここで、$\displaystyle\int_c dy$ は、始点と終点との高さの変位を表すため、これを h と置くと、

$$U = mgh$$

となる。

iv　積分路によらない条件

先ほど、重力による位置エネルギーが積分路によらないことを学んだ。これをもっと一般化してみて考えてみよう。これはすなわち、

$$\int_C [P(x,y)dx + Q(x,y)dy]$$

が途中の経路 C によらず、始点 A と終点 B だけによって決まるときの場合を考えればよい。始点 $A(a,b)$ と終点 $B(x,y)$ で、点 A を固定し、B を動かすとき、線積分は x,y の関数となる。

$$U(x,y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} [Pdx + Qdy]$$

まず、x のみ増分 Δx を与えたとする。この時の点を B' とすると、この線積分は

$$U(x+\Delta x, y) = \int_{(a,b)}^{(x+\Delta x,y)} [Pdx + Qdy]$$

となる。いま、線積分は途中の経路によらないとしているから、上記の積分路は、AB の曲線に BB' の線分を付け加えたものと考えてよい。すなわち、

$$U(x+\Delta x, y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} [Pdx + Qdy] + \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} [Pdx + Qdy] = U(x,y) + \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} Pdx$$

右辺の積分に平均値の定理を用いると、

$$\frac{U(x+\Delta x,y) - U(x,y)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} P(x,y)dx = P(x+\theta\Delta x, y) \quad (0<\theta<1)$$

ここで、$\Delta x \to 0$ とすると、

$$P(x,y) = \frac{\partial U(x,y)}{\partial x}$$

を得る。同様にして、

$$Q(x,y) = \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}$$

この二つの式を用いて、

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$
$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = Pdx + Qdy$$

が成り立つことがわかる。つまり、線積分が途中の経路によらないための条件は

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{26}$$

であり、その時、**ポテンシャル関数** $U(x,y)$ が存在する。

同様に、線積分 $\displaystyle\int_C Pdx + Qdy + Rdz$ が途中の路によらないための条件は、

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} \tag{27}$$

であることがわかる。条件 (26)(27) は、線積分が途中の経路によらないための必要条件であるが、十分条件でもある。

では、いま学んだことを用いて、重力による位置エネルギーが経路によらないかどうかを考えてみよう。条件 (26) を用いて、

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = 0 = \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

であるため、重力による位置エネルギーは途中の経路によらないことがわかる。

このようにすれば、ほかの保存力による位置エネルギーも途中の経路によらないことが証明できる。

V　まとめ

今回はいろいろな積分が登場した。これらをすぐに理解するのは、とても難しいだろう。多くの人は不可能と思われる。このとき、幾何学的な理解で乗り切ろうとしたら、かえって頭が混乱するかもしれない。そのときは一度基本に戻って、定積分が積和の極限であることを思い出そう。ゆっくり一つずつ紐解いていけばわかるはずだ。

以下練習問題を少しだけおいておく。適宜取り組むといいと思う。

VI　練習問題

次の二重積分を求めよ。

$$\int_0^1 \int_1^2 dxdy \qquad \int_1^2 \int_0^4 (x+y)dxdy \qquad \int_0^1 \int_{x^3}^x dydx \qquad \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} xydydx$$

$$\iint_R xdxdy \qquad (\text{R は } y = x^2 \text{ と } y = x^3 \text{ に囲まれた領域})$$

次の三重積分を求めよ。

$$\int_0^1 \int_1^2 \int_2^3 dzdydx \qquad \int_0^1 \int_{x^2}^x \int_0^{xy} dzdydx$$

球の半径を r とするとき、球の体積を求めよ。(球の体積が $\frac{4\pi r^3}{3}$ であることは周知の事実である。この公式を使って求めることもできるが、それでは面白くない。積分を使って求めてみよう。)

次の三重積分を求めよ。

$$\iint_R \sqrt{x^2+y^2}dxdy \quad (R : 4 \leq x^2+y^2 \leq 16) \qquad \iiint_R \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \quad (a^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq b^2)$$

線積分

$$I = \int_C [x^2ydx + (x-1)dy]$$

を次の二つの積分路で求めよ。

(1)C_1 : 始点 A$(0,0)$ と終点 B$(1,1)$ を直線でつなぐ。

(2)C_2 : 始点 A と終点 B を曲線 $y = x^2$ でつなぐ。

以上