ΗΜΜΥ ΕΜΠ

6ο Εξάμηνο

Συστήματα Αναμονής

2η ομάδα ασκήσεων

Ήβη Χατζή

[redacted]

Άσκηση 1: Θεωρητική μελέτη της ουράς M/M/1

(α) Οι εξισώσεις ισορροπίας στην ουρά M/M/1 είναι:

$$-(\lambda+\mu)p_n + \lambda p_{n-1} + \mu p_{n+1} = 0$$

$$-\lambda p_0 + \mu p_1 = 0$$

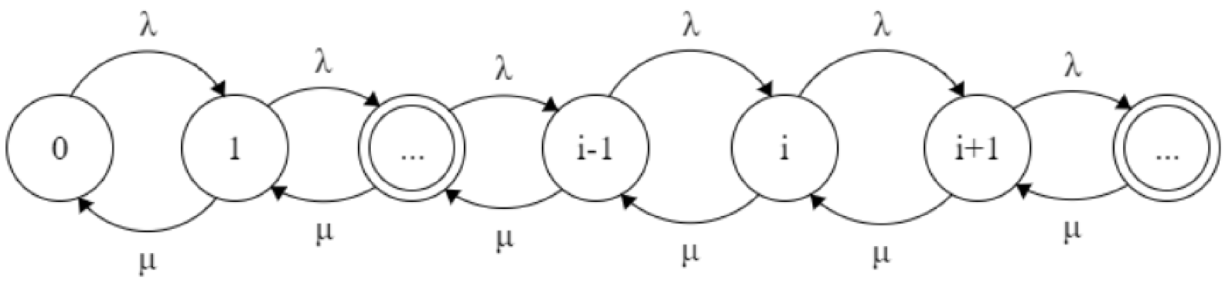
Από την επίλυση αυτών, λαμβάνοντας υπόψη και τη συνθήκη κανονικοποίησης, προκύπτουν οι πιθανότητες καταστάσεων του συστήματος:

$$p_n = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]^{-1}$$

Απαραίτητη συνθήκη για να συγκλίνουν οι παραπάνω σειρές είναι να ισχύει $0 < \frac{\lambda}{\mu} < 1$. Τότε η ουρά M/M/1 είναι εργοδική.

Διάγραμμα ρυθμού μεταβάσεων:



(β) Από τον τύπο Little παίρνουμε

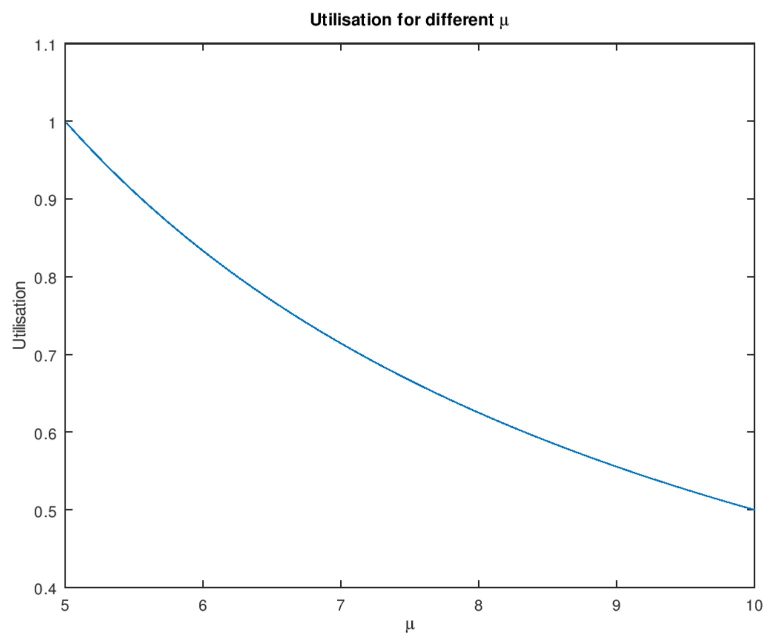
$$E[T] = \frac{E[n(t)]}{\gamma} = \frac{E[n(t)]}{\lambda} = \frac{\frac{1}{\mu}}{1-\rho}$$

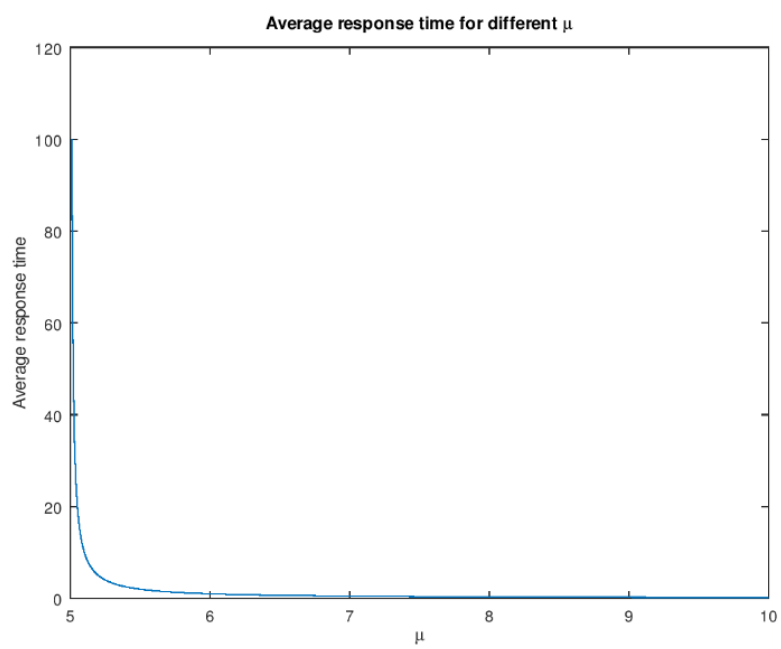
(γ) Η πιθανότητα να έχουμε 57 πελάτες στο σύστημα είναι $p_{57} = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{57}$. Η πιθανότητα αυτή είναι μη μηδενική, οπότε αν ο χρόνος κυλάει επ' άπειρον, σίγουρα θα υπάρξει χρονική στιγμή που το σύστημα θα βρεθεί στην κατάσταση αυτή.

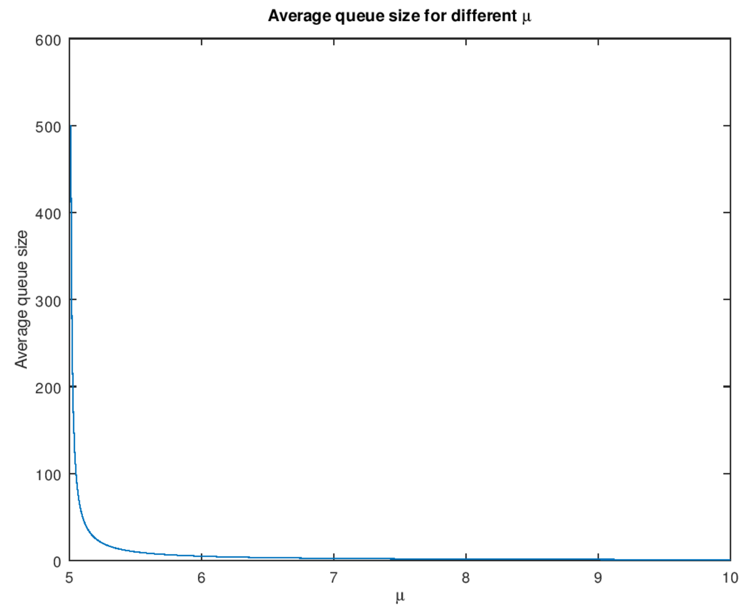
Άσκηση 2: Ανάλυση ουράς M/M/1 με Octave

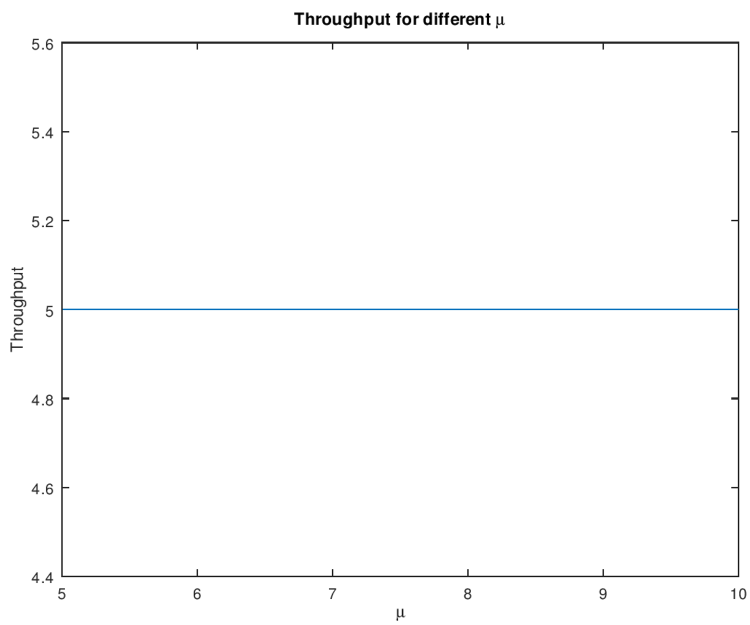
(α) Πρέπει $0 < \frac{\lambda}{\mu} < 1$ οπότε θέλουμε $5 < \mu \leq 10$.

(β)







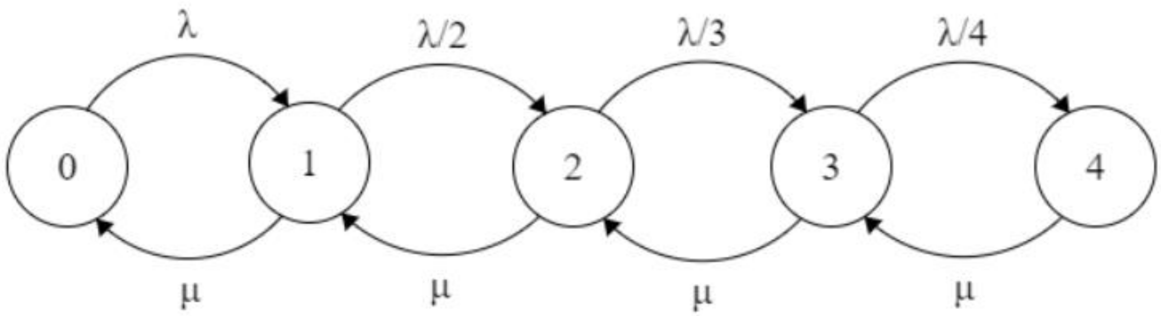


(γ) Παρατηρούμε ότι για μ=7 και πάνω ο χρόνος καθυστέρησης είναι πρακτικά σταθερός και πολύ μικρός, οπότε επιλέγουμε μ=7. Έτσι παίρνουμε καλά αποτελέσματα με μικρότερο κόστος απ'ότι αν είχαμε μεγαλύτερο μ.

(δ) Το throughput ισούται με $\lambda(1 - P[blocking])$ όπου $P[blocking]$ η πιθανότητα να χαθεί ένας πελάτης. Όμως το σύστημα M/M/1 έχει άπειρη χωρητικότητα άρα $P[blocking] = 0$. Γι'αυτό το throughput είναι σταθερό για κάθε μ και ίσο με λ.

Άσκηση 3: Διαδικασία γεννήσεων θανάτων (birth-death process): εφαρμογή σε σύστημα M/M/1/K

(α)



Έχουμε:

$$\lambda p_0 = \mu p_1$$

$$\frac{\lambda}{2} p_1 = \mu p_2$$

$$\frac{\lambda}{3} p_2 = \mu p_3$$

$$\frac{\lambda}{4} p_3 = \mu p_4$$

$\Rightarrow \quad p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0, \quad p_2 = \frac{\lambda}{2\mu} p_1 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} p_0, \ \ldots \quad \Rightarrow \ p_n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n!} p_0$ για $n = 1,2,3,4$

Συνθήκη κανονικοποίησης: $\sum_{n=0}^{4} p_n = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{4} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n!} p_0 = 1 \Rightarrow p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{4} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n!}}$

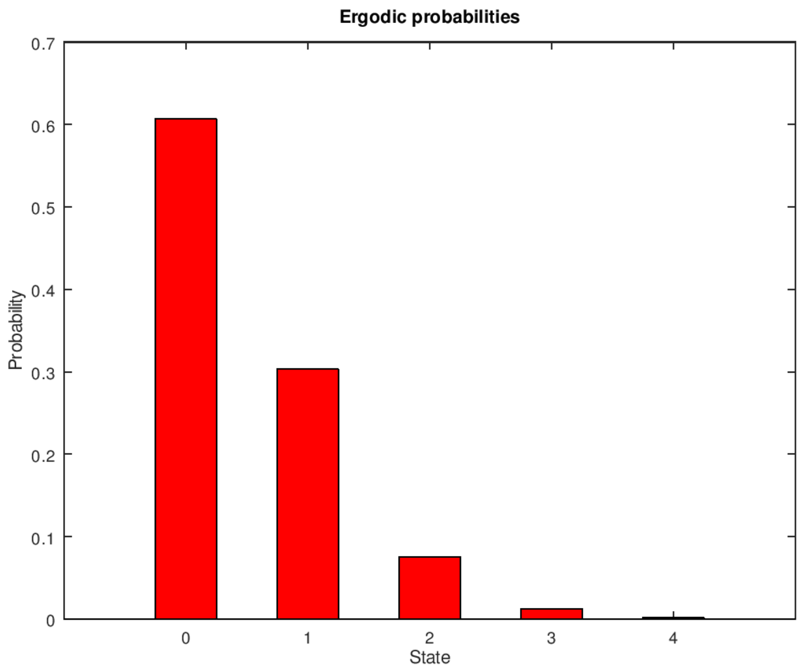
Προκύπτουν: $p_0 = 0.607, \quad p_1 = 0.303, \quad p_2 = 0.076, \quad p_3 = 0.0126, \quad p_4 = 0.0016$

Η πιθανότητα απώλειας πελάτη είναι $P[blocking] = p_4 = 0.0016$

(β)

i.
```
transition_matrix =
   -5.00000    5.00000    0.00000    0.00000    0.00000
   10.00000  -12.50000    2.50000    0.00000    0.00000
    0.00000   10.00000  -11.66667    1.66667    0.00000
    0.00000    0.00000   10.00000  -11.25000    1.25000
    0.00000    0.00000    0.00000   10.00000  -10.00000
```

ii.
```
P =
   0.6066351   0.3033175   0.0758294   0.0126382   0.0015798
```



Ίδιες με αυτές που υπολογίσαμε πριν.

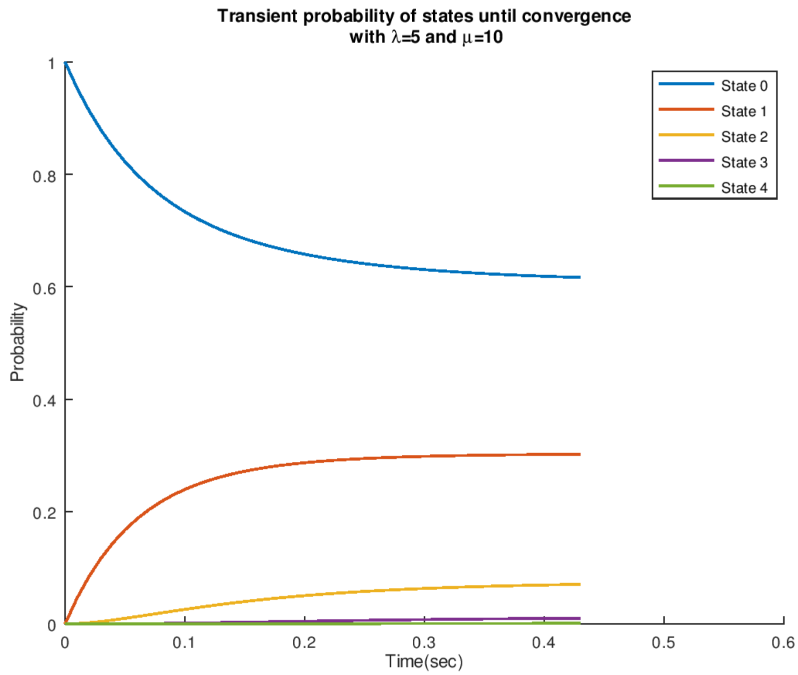
iii. Ο μέσος αριθμός πελατών υπολογίζεται από τη σχέση $E[\#\ of\ customers] = \sum_{n=0}^{4} np_n$

```
Average number of customers:
avg_customers =  0.49921
```

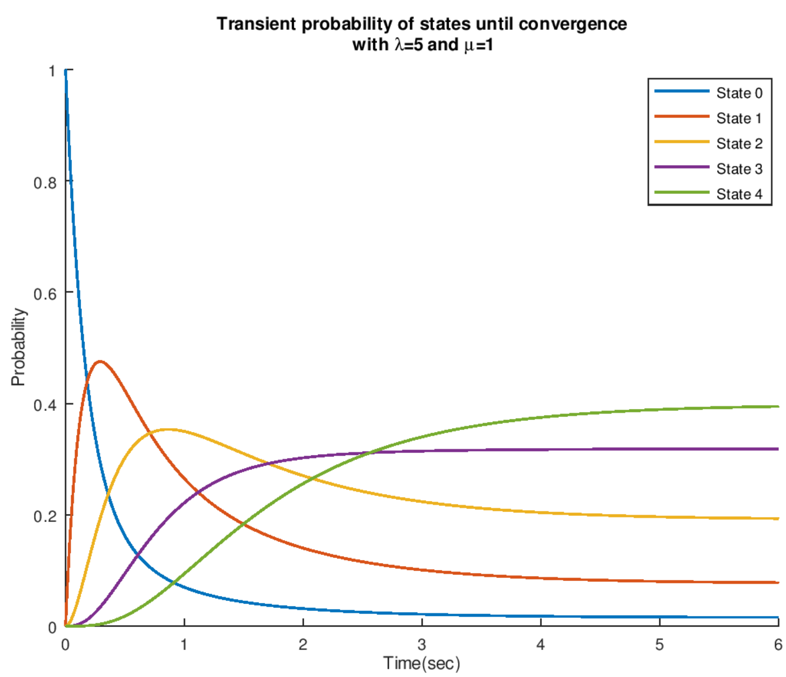
iv. Η πιθανότητα απόρριψης πελάτη ισούται με p_4:

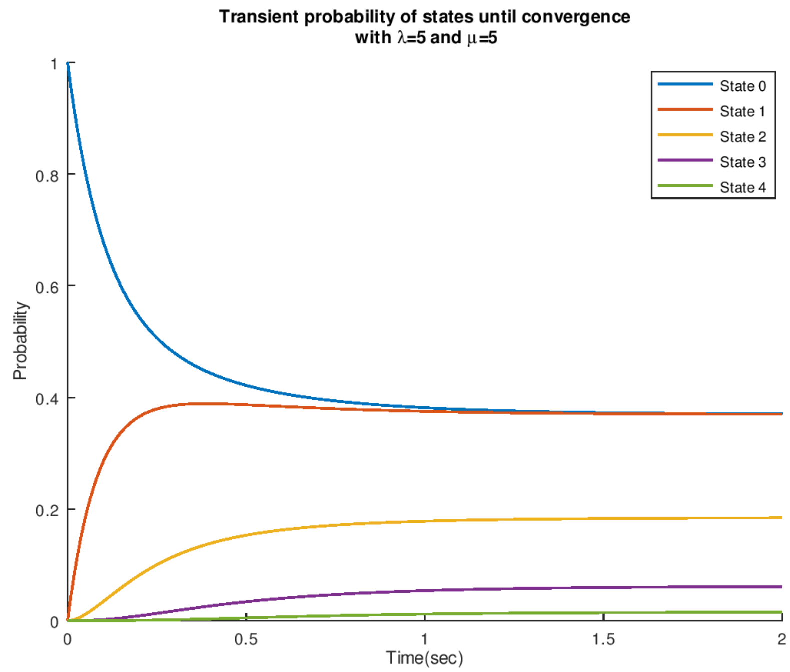
```
Probability of losing a customer:
P_blocking =  0.0015798
```

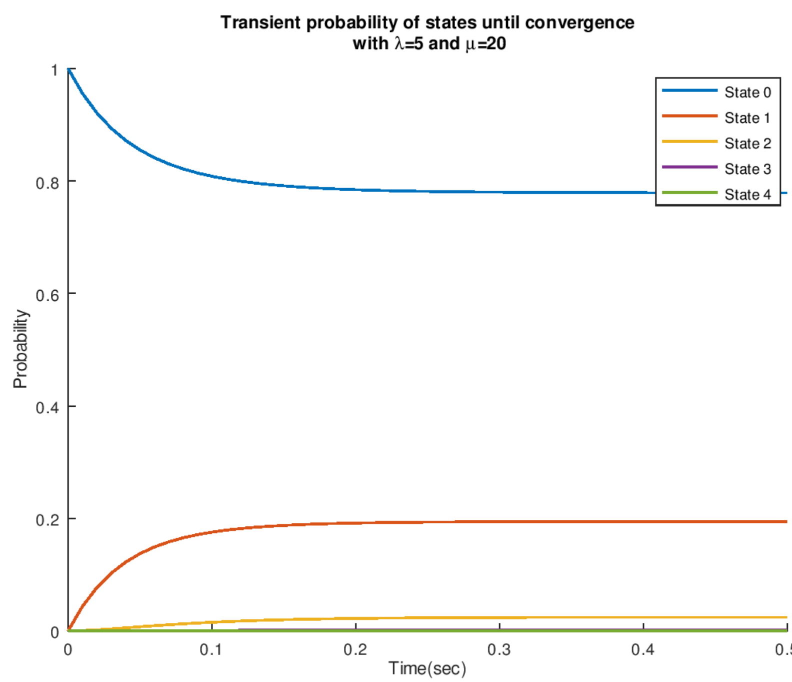
v.


Transient probability of states until convergence
with λ=5 and μ=10
Probability
Time(sec)
State 0
State 1
State 2
State 3
State 4
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0.1
0.3
0.5

vi.


Transient probability of states until convergence
with λ=5 and μ=1
Probability
Time(sec)
State 0
State 1
State 2
State 3
State 4
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
2
3
4
5
6





Όσο μεγαλώνει το μ τόσο μικρότερη είναι η περίοδος μετάβασης, δηλαδή οι πιθανότητες συγκλίνουν γρηγορότερα στις εργοδικές τιμές τους. Επίσης όσο μικρότερος είναι ο λόγος λ/μ τόσο αυξάνονται οι εργοδικές πιθανότητες των πρώτων καταστάσεων και μειώνονται αυτές των τελευταίων καταστάσεων. Αυτά είναι λογικό αφού αν η τιμή λ/μ γίνει μεγαλύτερη από 1 το σύστημα παύει να συγκλίνει.

Κώδικας

```
clc;
clear all;
close all;
pkg load statistics;
pkg load queueing;

% Part 2
lambda=5;
mu=5.01:.01:10;
U=zeros(1,500);
R=zeros(1,500);
Q=zeros(1,500);
X=zeros(1,500);

for i=1:500
    [U(i),R(i),Q(i),X(i)] = qsmm1(lambda, mu(i));
endfor

figure(1)
plot(mu,U); title("Utilisation for different \\mu");
xlabel("\\mu"); ylabel("Utilisation");

figure(2)
plot(mu,R); title("Average response time for different \\mu");
xlabel("\\mu"); ylabel("Average response time");

figure(3)
plot(mu,Q); title("Average queue size for different \\mu");
xlabel("\\mu"); ylabel("Average queue size");

figure(4)
plot(mu,X); title("Throughput for different \\mu");
xlabel("\\mu"); ylabel("Throughput");

% Part 3
lambda = 5;
mu = 10;
states = [0, 1, 2, 3, 4]; % system with capacity 4 states
% the initial state of the system. The system is initially empty.
initial_state = [1, 0, 0, 0, 0];

% define the birth and death rates between the states of the system.
births_B = [lambda, lambda/2, lambda/3, lambda/4];
deaths_D = [mu, mu, mu, mu];

% i
% get the transition matrix of the birth-death process
transition_matrix = ctmcbd(births_B, deaths_D)
```

```
% ii
% get the ergodic probabilities of the system
display("Ergodic probabilities of the system:");
P = ctmc(transition_matrix)
% plot the ergodic probabilities (bar for bar chart)
figure(1);
bar(states, P, "r", 0.5);
title("Ergodic probabilities"); xlabel("State");
ylabel("Probability");

% iii
display("Average number of customers:");
avg_customers=sum(P.*states)
display("");

% iv
display("Probability of losing a customer:");
P_blocking=P(5)
display("");

% v
% transient probability of states until convergence to ergodic
probability. Convergence takes place when P0 and P differ by 0.01
index = 0;
for T = 0 : 0.01 : 50
  index = index + 1;
  P0 = ctmc(transition_matrix, T, initial_state);
  Prob0(index) = P0(1);
  Prob1(index)=P0(2);
  Prob2(index)=P0(3);
  Prob3(index)=P0(4);
  Prob4(index)=P0(5);
  if P0 - P < 0.01*P
    break;
  endif
endfor

T = 0 : 0.01 : T;
figure(2);
hold on;
plot(T, Prob0, "linewidth", 1.3);
plot(T, Prob1, "linewidth", 1.3);
plot(T, Prob2, "linewidth", 1.3);
plot(T, Prob3, "linewidth", 1.3);
plot(T, Prob4, "linewidth", 1.3);
title("Transient probability of states until convergence\n with
\\lambda=5 and \\mu=10");
xlabel("Time(sec)"); ylabel("Probability");
legend("State 0","State 1","State 2","State 3","State 4");


mu = 1;
```

```
deaths_D = [mu, mu, mu, mu];
transition_matrix = ctmcbd(births_B, deaths_D);
index = 0;
for T = 0 : 0.01 : 6
  index = index + 1;
  P0 = ctmc(transition_matrix, T, initial_state);
  Prob0(index) = P0(1);
  Prob1(index)=P0(2);
  Prob2(index)=P0(3);
  Prob3(index)=P0(4);
  Prob4(index)=P0(5);
  if P0 - P < 0.01*P
    break;
  endif
endfor

T = 0 : 0.01 : T;
figure(3);
hold on;
plot(T, Prob0, "linewidth", 1.3);
plot(T, Prob1, "linewidth", 1.3);
plot(T, Prob2, "linewidth", 1.3);
plot(T, Prob3, "linewidth", 1.3);
plot(T, Prob4, "linewidth", 1.3);
title("Transient probability of states until convergence\n with
\\lambda=5 and \\mu=1");
xlabel("Time(sec)"); ylabel("Probability");
legend("State 0","State 1","State 2","State 3","State 4");


mu = 5;
deaths_D = [mu, mu, mu, mu];
transition_matrix = ctmcbd(births_B, deaths_D);
index = 0;
for T = 0 : 0.01 : 2
  index = index + 1;
  P0 = ctmc(transition_matrix, T, initial_state);
  Prob05(index) = P0(1);
  Prob15(index)=P0(2);
  Prob25(index)=P0(3);
  Prob35(index)=P0(4);
  Prob45(index)=P0(5);
  if P0 - P < 0.01*P
    break;
  endif
endfor

T = 0 : 0.01 : 2;
figure(4);
hold on;
plot(T, Prob05, "linewidth", 1.3);
plot(T, Prob15, "linewidth", 1.3);
```

```
plot(T, Prob25, "linewidth", 1.3);
plot(T, Prob35, "linewidth", 1.3);
plot(T, Prob45, "linewidth", 1.3);
title("Transient probability of states until convergence\n with
\\lambda=5 and \\mu=5");
xlabel("Time(sec)"); ylabel("Probability");
legend("State 0","State 1","State 2","State 3","State 4");


mu = 20;
deaths_D = [mu, mu, mu, mu];
transition_matrix = ctmcbd(births_B, deaths_D);
index = 0;
for T = 0 : 0.01 : 0.5
  index = index + 1;
  P0 = ctmc(transition_matrix, T, initial_state);
  Prob02(index) = P0(1);
  Prob12(index)=P0(2);
  Prob22(index)=P0(3);
  Prob32(index)=P0(4);
  Prob42(index)=P0(5);
  if P0 - P < 0.01*P
    break;
  endif
endfor

T = 0 : 0.01 : 0.5;
figure(5);
hold on;
plot(T, Prob02, "linewidth", 1.3);
plot(T, Prob12, "linewidth", 1.3);
plot(T, Prob22, "linewidth", 1.3);
plot(T, Prob32, "linewidth", 1.3);
plot(T, Prob42, "linewidth", 1.3);
title("Transient probability of states until convergence\n with
\\lambda=5 and \\mu=20");
xlabel("Time(sec)"); ylabel("Probability");
legend("State 0","State 1","State 2","State 3","State 4");
```