



# ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Τομέας Επικοινωνιών, Ηλεκτρονικής & Συστημάτων Πληροφορικής

Εργαστήριο Διαχείρισης και Βέλτιστου Σχεδιασμού Δικτύων Τηλεματικής - NETMODE

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, Ζωγράφου, 157 80

e-mail: queuing@netmode.ntua.gr, URL: <http://www.netmode.ntua.gr>

12 Απριλίου 2021

## Συστήματα Αναμονής (Queuing Systems)

### 2η Ομάδα Ασκήσεων

#### Θεωρητική μελέτη της ουράς M/M/1

Στην άσκηση αυτή, θα μελετηθεί θεωρητικά η ουρά M/M/1. Οι αφίξεις στην ουρά ακολουθούν κατανομή Poisson με παράμετρο  $\lambda$  πελάτες/sec και οι εξυπηρετήσεις ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\mu$  πελάτες/sec. Να θεωρήσετε ότι το σύστημα είναι αρχικά άδειο. Να απαντήσετε **θεωρητικά** στις ακόλουθες ερωτήσεις:

(α) Ποια είναι η απαραίτητη συνθήκη ώστε η ουρά M/M/1 να είναι εργοδική; Να σχεδιάσετε το διάγραμμα ρυθμού μεταβάσεων της ουράς M/M/1 και να υπολογίσετε με τη βοήθεια των εξισώσεων ισορροπίας τις εργοδικές πιθανότητες των καταστάσεων του συστήματος.

$$\rho < 1 \Leftrightarrow \lambda < \mu$$

(β) Για τις ουρές M/M/1 ισχύει η ακόλουθη ισότητα:

$$E[n(t)] = \sum_{k=1}^{+\infty} k P_k = \frac{\rho}{1 - \rho} \quad \text{όπου } \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Να υπολογίσετε το μέσο χρόνο καθυστέρησης ενός πελάτη στο σύστημα, όταν η ουρά αναμονής βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας.

(γ) Θα υπάρξει χρονική στιγμή που θα βρεθεί το σύστημά σας με 57 πελάτες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

#### Ανάλυση ουράς M/M/1 με Octave

Στην άσκηση αυτή θα συγκρίνετε την επίδοση διαφορετικών συστημάτων αναμονής με τη βοήθεια του πακέτου queueing του Octave. Οδηγίες για την εγκατάσταση και τη χρήση του πακέτου αυτού υπάρχουν στο τέλος της άσκησης.

Έστω ότι έχετε στη διάθεσή σας μία ουρά M/M/1. Οι αφίξεις στην ουρά ακολουθούν την κατανομή Poisson με μέσο ρυθμό  $\lambda=5$  πελάτες/min. Έχετε τη δυνατότητα να επιλέξετε εξυπηρετητή με εκθετικό χρόνο εξυπηρέτησης μέσου ρυθμού  $\mu$  από 0 έως 10 πελάτες/min.

(α) Ποιοι ρυθμοί εξυπηρέτησης είναι αποδεκτοί για το σύστημά σας, ώστε να είναι εργοδικό;

(β) Για τους επιτρεπτούς ρυθμούς εξυπηρέτησης, να κάνετε τα παρακάτω 4 διαγράμματα:

- Βαθμός χρησιμοποίησης (utilization) ως προς το ρυθμό εξυπηρέτησης.
- Μέσος χρόνος καθυστέρησης του συστήματος  $E(T)$  ως προς το ρυθμό εξυπηρέτησης.
- Μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα ως προς το ρυθμό εξυπηρέτησης.
- Ρυθμαπόδοση (throughput) πελατών ως προς το ρυθμό εξυπηρέτησης.

(γ) Ποιο μέσο ρυθμό εξυπηρέτησης θα επιλέγατε με βάση το διάγραμμα του μέσου χρόνου καθυστέρησης και γιατί; (δ) Τι παρατηρείτε για το throughput πελατών σε μια ουρά M/M/1;

Να χρησιμοποιήσετε την εντολή `qsmml` του πακέτου `queueing` του Octave.

### Διαδικασία γεννήσεων θανάτων (birth-death process): εφαρμογή σε σύστημα M/M/1/K

Σας δίνεται σύστημα αναμονής M/M/1/4, δηλαδή σύστημα με 1 εξυπηρετητή και μέγιστη χωρητικότητα 4 πελάτες. Οι αφίξεις στο σύστημα ακολουθούν κατανομή Poisson με μέσο ρυθμό  $\lambda_i = \lambda/(i+1)$ , δηλαδή οι αφίξεις πελατών εξαρτώνται από την κατάσταση στην οποία βρίσκεται το σύστημα (μειώνονται ανάλογα με τον παρόντα αριθμό πελατών στο σύστημα) και ο χρόνος εξυπηρέτησης του εξυπηρετητή είναι εκθετικός με μέσο ρυθμό  $\mu_i = \mu$ , ανεξάρτητος από τον αριθμό πελατών στο σύστημα. Να θεωρήσετε ότι  $\lambda = 5$  πελάτες/sec και  $\mu = 10$  πελάτες/sec. Επίσης, να θεωρήσετε ότι αρχικά (στο χρόνο 0) στο σύστημα δεν υπάρχει κανένας πελάτης. Να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα:

(α) Να μοντελοποιήσετε το σύστημα αυτό ως μία διαδικασία γεννήσεων-θανάτων, δηλαδή να σχεδιάσετε το διάγραμμα ρυθμού μεταβάσεων και να υπολογίσετε, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις ισορροπίας, τις εργοδικές πιθανότητες των καταστάσεων του συστήματος και την πιθανότητα απώλειας πελάτη (μη χρησιμοποιήσετε τα υπολογιστικά εργαλεία του Octave).

(β) Με τη βοήθεια της εντολής `ctmcdbd` του πακέτου `queueing` του Octave να μοντελοποιήσετε το παραπάνω σύστημα ως μία διαδικασία γεννήσεων-θανάτων συνεχούς χρόνου. Ζητούνται:

- i. Η μήτρα ρυθμού μεταβάσεων, δηλαδή ο πίνακας που περιγράφει τους ρυθμούς μετάβασης ανάμεσα στις καταστάσεις του συστήματος.
- ii. Με την εντολή `ctmc` του πακέτου `queueing` του Octave να βρείτε τις εργοδικές πιθανότητες των καταστάσεων του συστήματος. Να επιβεβαιώσετε ότι είναι εκείνες που υπολογίσατε στο ερώτημα (α).
- iii. Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα, όταν εκείνο βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας.
- iv. Η πιθανότητα απόρριψης πελάτη (blocking probability) από το σύστημα, όταν εκείνο βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας.
- v. Για κάθε μία από τις καταστάσεις του συστήματος να σχεδιάσετε τα διαγράμματα των πιθανοτήτων των καταστάσεων του συστήματος σαν συναρτήσεις του χρόνου από την αρχική κατάσταση μέχρι οι πιθανότητες να έχουν απόσταση μικρότερη του 1% από τις εργοδικές πιθανότητες του ερωτήματος (2).

- vi. Να επαναλάβετε το ερώτημα (v) για τιμές (i)  $\lambda=5$ ,  $\mu=1$ , (ii)  $\lambda=5$ ,  $\mu=5$ , (iii)  $\lambda=5$ ,  $\mu=20$ . Να σχολιάσετε ποιοτικά πώς αλλάζουν οι πιθανότητες και η ταχύτητα σύγκλισης στην εργοδική κατάσταση.

### **Χρήσιμες πηγές:**

α) Octave queueing package home page:

<https://www.moreno.marzolla.name/software/queueing/>

β) Octave queueing package documentation:

<https://www.moreno.marzolla.name/software/queueing/queueing.pdf>

γ) Octave queueing package list of functions:

<https://octave.sourceforge.io/queueing/overview.html>

### **Οδηγίες για το queueing package του Octave**

Για το πακέτο queueing του Octave, απαιτείται να εκτελέσετε την παρακάτω εντολή στο command line του Octave:

**pkg install -forge queueing**