ΗΜΜΥ ΕΜΠ

6ο Εξάμηνο

Συστήματα Αναμονής

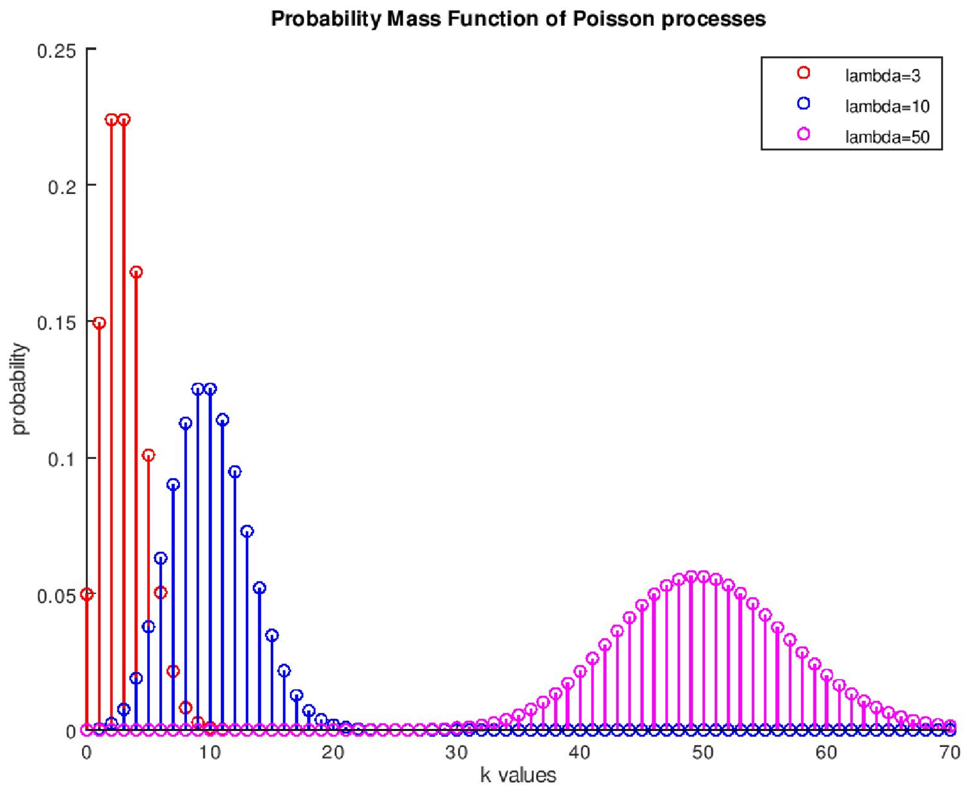
1η ομάδα ασκήσεων

Ήβη Χατζή

[redacted]

1η Άσκηση: Κατανομή Poisson

A)



Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται το λ, το κέντρο της κατανομής μετακινείται δεξιά. Αυτό είναι αναμενόμενο καθώς το λ αντιστοιχεί στη μέση τιμή της κατανομής Poisson.

Το λ ισούται επίσης με τη διασπορά της κατανομής Poisson, γι'αυτό και απλώνονται περισσότερο οι κατανομές όσο αυτό αυξάνεται, καθώς η αύξηση της διασποράς προκαλεί μεγαλύτερες αποκλίσεις από τη μέση τιμή.

B)

```
mean value of Poisson with lambda 30 is
mean_value =  30.000
Variance of Poisson with lambda 30 is
variance =  30.000
```

Όπως γνωρίζουμε, η μέση τιμή και η διασπορά μιας κατανομής Poisson με παράμετρο λ είναι λ.

Γ) Η συνέλιξη δύο ανεξάρτητων κατανομών Poisson με παραμέτρους λ_1, λ_2 δίνει κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda_1 + \lambda_2$. Προϋπόθεση είναι να ισχύει $\lambda_1 > 0,\ \ \lambda_2 > 0$.

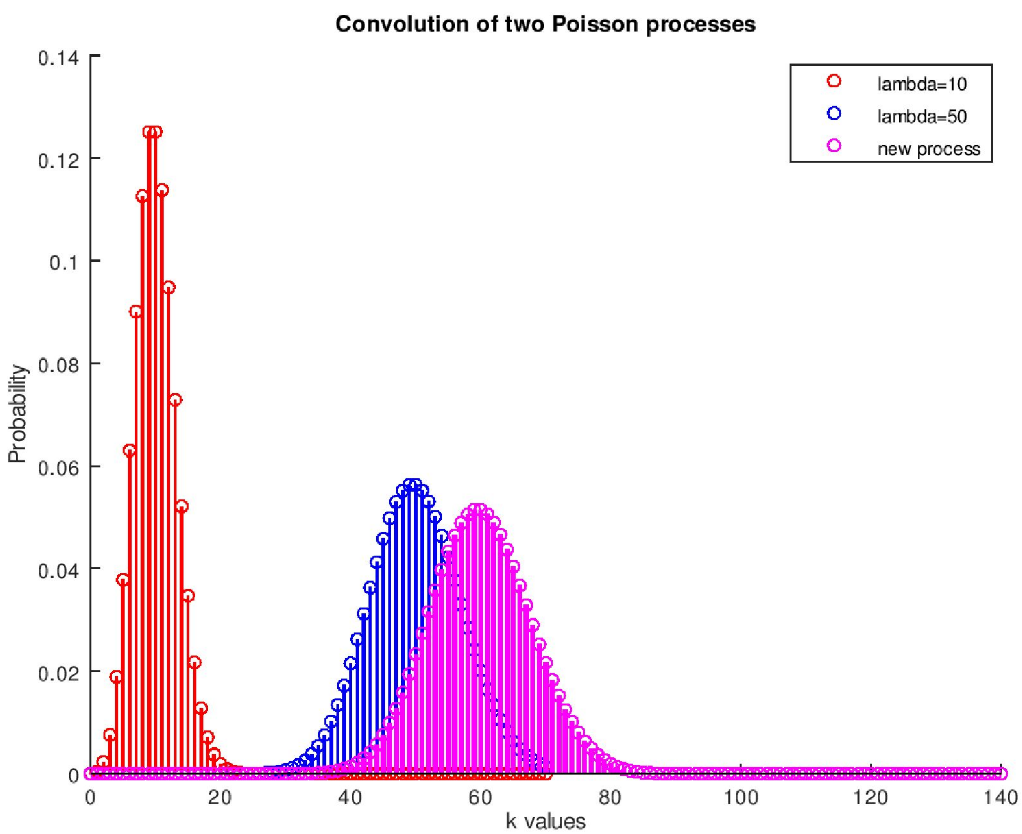
$$p(k) = \sum_{u=0}^{k} \frac{\lambda_1^u\, e^{-\lambda_1}}{u!} \frac{\lambda_2^{k-u}\, e^{-\lambda_2}}{(k-u)!} =$$

$$= \sum_{u=0}^{k} \frac{k!}{u!\,(k-u)!} \frac{\lambda_1^u\, \lambda_2^{k-u}\, e^{-\lambda_1-\lambda_2}}{k!} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda_1-\lambda_2}}{k!} \sum_{u=0}^{k} \binom{k}{u} \lambda_1^u\, \lambda_2^{k-u} =$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} (\lambda_1+\lambda_2)^k = Poisson(\lambda_1+\lambda_2)$$

Εδώ, για $\lambda_1 = 10,\ \ \lambda_2 = 50$ προκύπτει κατανομή Poisson με $\lambda = 10 + 50 = 60$.



Δ) Μια διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n,\ p$ προσεγγίζει κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda = np$ για $n \to \infty,\ p \to 0,\ np \to \lambda.$

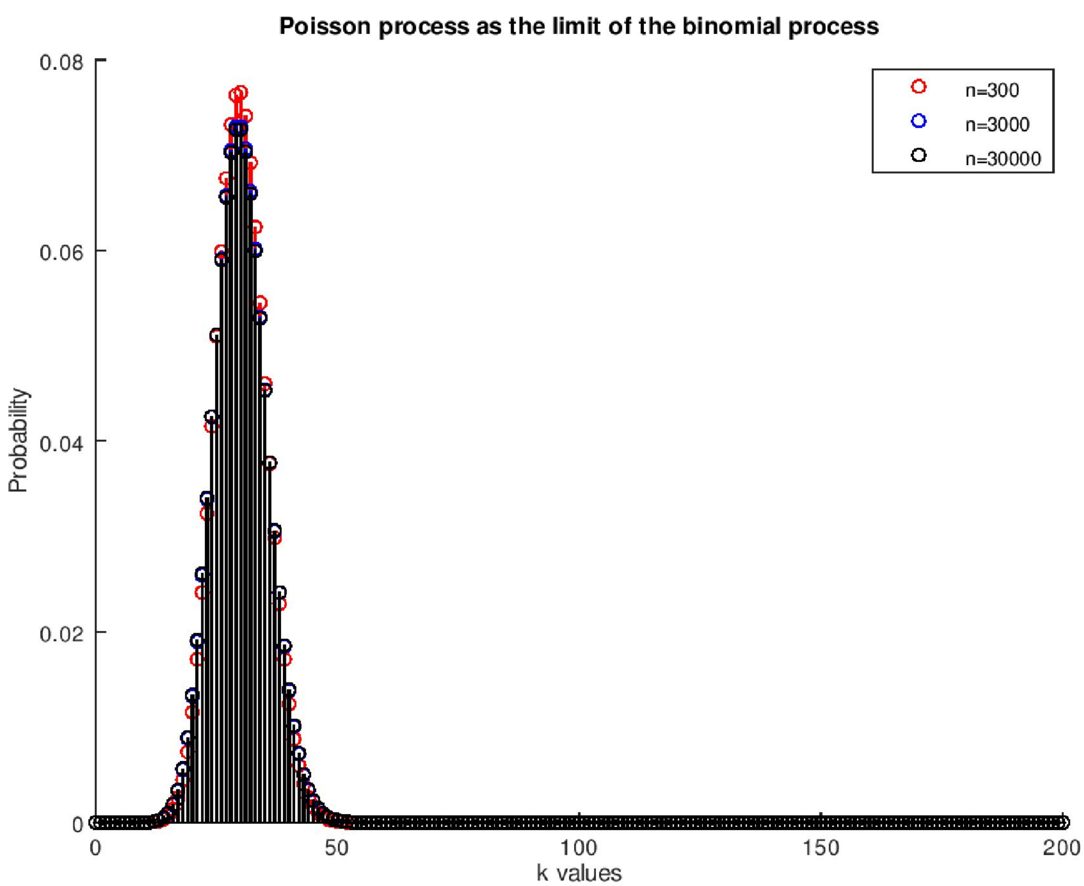
$$p_{binom(n,p)}(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k-1)}{k!}\frac{n^k}{n^k} p^k \frac{(1-p)^n}{(1-p)^k}$$

Για $n \to \infty,\ p \to 0$ κάνουμε τις ακόλουθες προσεγγίσεις:

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k-1)}{n^k} \to 1 \qquad (1-p)^k \to 1 \qquad (1-p)^n = e^{n\ln(1-p)} = e^{pn\frac{ln(1-p)}{p}} \to e^{-pn}$$

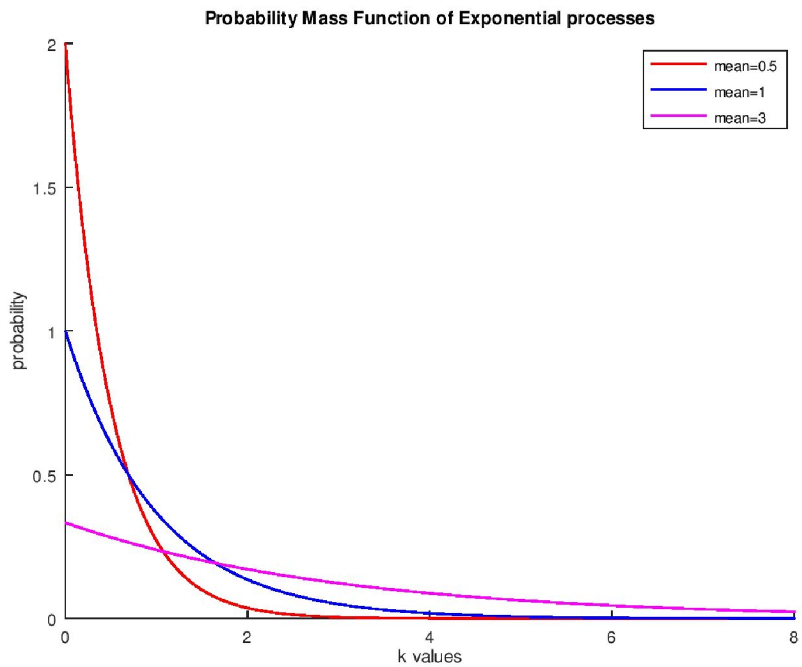
Άρα έχουμε $p_{binom(n,p)}(k) \to \frac{(pn)^k}{k!} e^{-pn} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = p_{poisson(\lambda)}(k)$

Την προσέγγιση αυτή παρατηρούμε στο διάγραμμα:

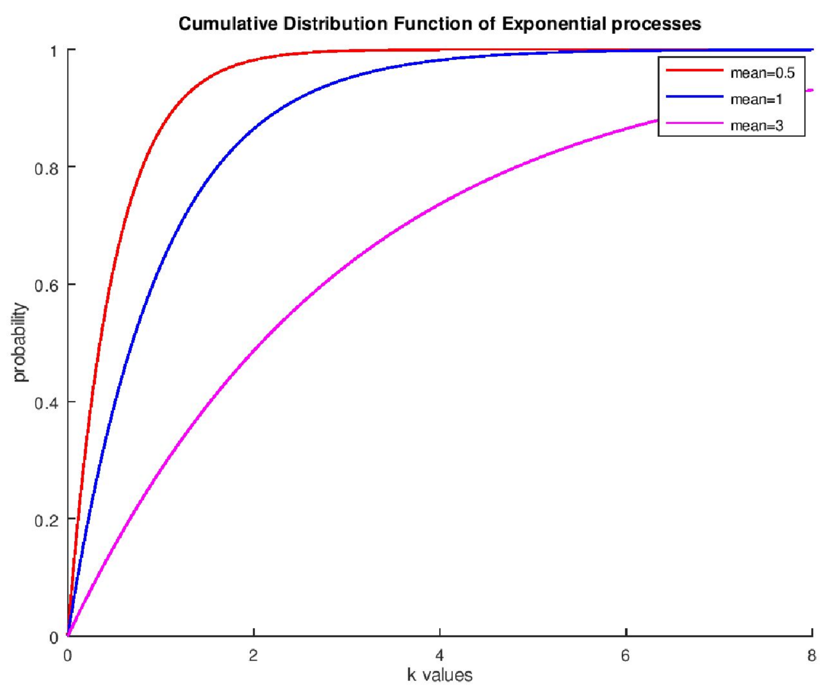


2η Άσκηση: Εκθετική Κατανομή

A) Χρησιμοποίησα βήμα 0.0001 αντί για 0.00001 επειδή αργούσε πολύ να τρέξει.



B)



Γ) Η εκθετική κατανομή έχει την ιδιότητα απώλειας μνήμης:

$$P(X > t + s \mid X > t) = \frac{P(X > t + s)}{P(X > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P(X > s) = 1 - F_X(s)$$

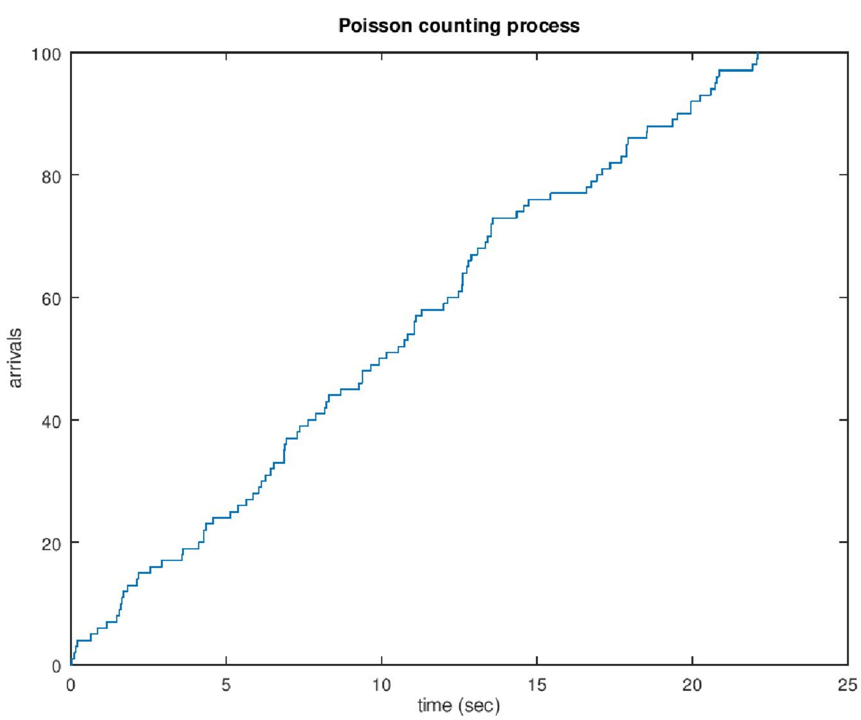
Για το λόγο αυτό περιμένουμε οι δύο πιθανότητες $P(X > 30000)$ και $P(X > 50000|X > 20000)$ να είναι ίσες.

Πράγματι, από τον υπολογισμό προκύπτουν πρακτικά ίσες, με μια μικρή απόκλιση που οφείλεται στην προσέγγιση της συνέχειας από διακριτό βήμα και σε πιθανές στρογγυλοποιήσεις του octave κατά τη διαχείρηση μικρών αριθμών.

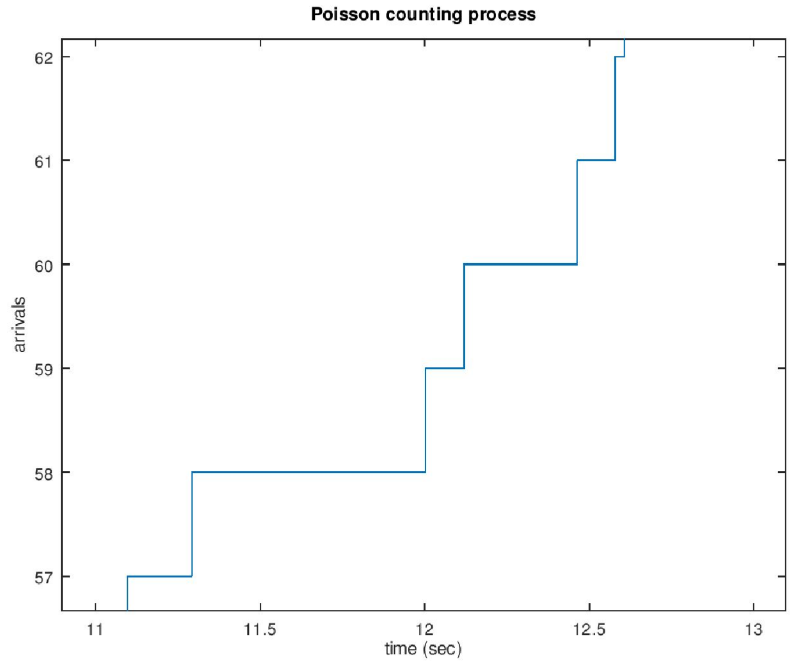
```
Probability P(X>30000) is
 0.30121
Probability P(X>50000|X>20000) is
 0.30119
```

3η Άσκηση: Διαδικασία Καταμέτρησης Poisson

Α) Οι χρόνοι ανάμεσα σε δύο ανεξάρτητα γεγονότα Poisson ακολουθούν εκθετική κατανομή:



Zoom in:



B)

Ο αριθμός των γεγονότων σε χρονικό διάστημα T ακολουθεί κατανομή Poisson με μέσο όρο εμφανίσεων λT. Στη μονάδα του χρόνου ο μέσος αριθμός εμφανίσεων είναι λ:

```
Average number of arrivals per second
 5.5620
 5.5951
 4.9979
 4.8812
 4.9512
 5.0042
```

Όπως αναμέναμε, με την αύξηση των δειγμάτων ο μέσος όρος τείνει προς το 5.

Κώδικας

```
clc;
clear all;
close all;

pkg load statistics;

# TASK: In a common diagram, design the Probability Mass Function of
Poisson processes
# with lambda parameters 3, 10, 30, 50. In the horizontal axes, choose
k parameters
# between 0 and 70.

k = 0:1:70;
lambda = [3,10,30, 50];

for i=1:columns(lambda)
  poisson(i,:) = poisspdf(k,lambda(i));
endfor

colors = "rbkm";
figure(1);
hold on;
for i=[1,2,4]
  stem(k,poisson(i,:),colors(i),"linewidth",1.2);
endfor
hold off;

title("Probability Mass Function of Poisson processes");
xlabel("k values");
ylabel("probability");
legend("lambda=3","lambda=10","lambda=50");

# TASK: regarding the poisson process with parameter lambda 30,
compute its mean
# value and variance

index = find(lambda == 30);
chosen = poisson(index,:);
mean_value = 0;
for i=0:(columns(poisson(index,:))-1)
  mean_value = mean_value + i.*poisson(index,i+1);
endfor

display("mean value of Poisson with lambda 30 is");
display(mean_value);

second_moment = 0;
for i=0:(columns(poisson(index,:))-1)
  second_moment = second_moment + i.*i.*poisson(index,i+1);
```

```
endfor
variance = second_moment - mean_value.^2;
display("Variance of Poisson with lambda 30 is");
display(variance);

# TASK: consider the convolution of the Poisson distribution with
lambda 20 with
# the Poisson distribution with lambda 30.

first = find(lambda==10);
second = find(lambda==50);
poisson_first = poisson(first,:);
poisson_second = poisson(second,:);

composed = conv(poisson_first,poisson_second);
new_k = 0:1:(2*70);

figure(2);
hold on;
stem(k,poisson_first(:),colors(1),"linewidth",1.2);
stem(k,poisson_second(:),colors(2),"linewidth",1.2);
stem(new_k,composed,"mo","linewidth",2);
hold off;
title("Convolution of two Poisson processes");
xlabel("k values");
ylabel("Probability");
legend("lambda=10","lambda=50","new process");

# TASK: show that Poisson process is the limit of the binomial
distribution.
k = 0:1:200;
# Define the desired Poisson Process
lambda = 30;
i=[10 100 1000];
n = lambda.*i;
p = lambda./n;

figure(3);
title("Poisson process as the limit of the binomial process");
xlabel("k values");
ylabel("Probability");
hold on;
for i=1:3
  binomial = binopdf(k,n(i),p(i));
  stem(k,binomial,colors(i),'linewidth',1.2);
endfor
hold off;
legend("n=300","n=3000","n=30000");
```

```
# TASK: In a common diagram, design the Probability Mass Function of
Exponential processes
# with mean 0.5, 1, 3. In the horizontal axes, choose k parameters
# between 1 and 8.

# I use a larger step 0.0001 instead of 0.00001
# because my computer can't handle it and octave crashes
k = 0:0.0001:8;
expmean = [0.5,1,3,2.5];

for i=[1 2 3 4]
  exponpdf(i,:) = exppdf(k,expmean(i));
endfor

colors = "rbm";
figure(4);
hold on;
for i=[1 2 3]
  plot(k,exponpdf(i,:),colors(i),"linewidth",1.2);
endfor
hold off;

title("Probability Mass Function of Exponential processes");
xlabel("k values");
ylabel("probability");
legend("mean=0.5","mean=1","mean=3");


# TASK: In a common diagram, design the Cumulative Distribution
Function of Exponential processes
# with mean 0.5, 1, 3.

for i=[1 2 3 4]
  exponcdf(i,:) = expcdf(k,expmean(i));
endfor

colors = "rbm";
figure(5);
hold on;
for i=[1 2 3]
  plot(k,exponcdf(i,:),colors(i),"linewidth",1.2);
endfor
hold off;

title("Cumulative Distribution Function of Exponential processes");
xlabel("k values");
ylabel("probability");
legend("mean=0.5","mean=1","mean=3");
```

```
# TASK: Compute the probabilities P(X>30000) and P(X>50000|X>20000)
# using the cdf with mean 2.5

display("Probability P(X>30000) is");
display(1-exponcdf(4,30000));
display("Probability P(X>50000|X>20000) is");
display((1-exponcdf(4,50000))/(1-exponcdf(4,20000)));

# TASK: Plot a Poisson Process counting 100 random arrivals

d=exprnd(1/5,1,100);
timeArrivals=zeros(1,101);
for i=2:101
  timeArrivals(i)=timeArrivals(i-1)+d(i-1);
endfor

figure(6)
stairs(timeArrivals,0:100);
title("Poisson counting process");
ylabel("arrivals");
xlabel("time (sec)");

# TASK: Compute the average number of arrivals per second

numArrivals=[100 200 300 500 1000 10000];
display("Average number of arrivals per second for 100, 200, 300, 500,
1000, 10000 arrivals");
for i=1:6
  d=exprnd(1/5,1,numArrivals(i));
  timeArrivals=zeros(1,numArrivals(i)+1);
  timeArrivals(1)=d(1);
  for n=2:numArrivals(i)+1
    timeArrivals(n)=timeArrivals(n-1)+d(n-1);
  endfor
  display(numArrivals(i)/timeArrivals(numArrivals(i)+1));
endfor
```