3.2.1.由归一化条件得$\Sigma p_{ij}=1$,即$40c=1$,解得$c=\frac{1}{40}$

$P(x=i)=\Sigma_{k=-2}^{2}p_{ik}=\frac{i^2+6}{40}$

3.2.3.$p_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dy=\begin{cases}1,\ 0\le x\le 1\\0,\ x<0\text{或}x>1\end{cases}$

$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dx=\begin{cases}\frac{1}{2},\ 0\le y\le 2\\0,\ y<0\text{或}y>2\end{cases}$

3.2.5.$p_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dy$

令$a=\frac{|x|}{\sqrt{8\pi}},b=-\frac{x^2}{2},c=-|x|$则$p_X(x)=a\int_{-\infty}^{\infty}e^{(by^2+c)}dy$

$p_X^2(x)=a^2\int_{-\infty}^{\infty}e^{(by^2+c)}dy\int_{-\infty}^{\infty}ae^{(bz^2+c)}dz=a^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{[b(y^2+z^2)+2c]}dydz$

极坐标变换得$p_X^2(x)=a^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}e^{(br^2+2c)}rdrd\theta$

$=\frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\infty}e^{(br^2+2c)}dr^2=a^2\pi\int_0^{\infty}e^{(br^2+2c)}dr^2$

$=(\frac{|x|}{\sqrt{8\pi}})^2\pi\frac{2}{x^2}e^{-2|x|}=\frac{1}{4}e^{-2|x|}$

因此$p_X(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$

3.2.6.由题意得$(X,Y)\sim N(0,1;0,\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2})$

因此$Y\sim N(0,\frac{1}{2}),p_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-y^2},P(Y>\sqrt{2})=1-\Phi(2)$

3.3.1.由题意得$p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)$

取$p(1,0)$解得$c=\frac{2}{9}$

取$p(1,-1)$解得$a=\frac{1}{18}$

取$p(0,1)$解得$b=\frac{1}{6}$

答:$a=\frac{1}{18},b=\frac{1}{6},c=\frac{2}{9}$

3.3.3.$p_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dy=\begin{cases}4x^3,\ 0<x<1\\0,\ x\le 0\text{或}x\ge 1\end{cases}$

$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dx=\begin{cases}-12y^3+12y^2,\ 0<y<1\\0,\ y\le 0\text{或}y\ge 1\end{cases}$

当$0<y<x<1$时,$p_X(x)p_Y(y)\ne p(x,y)$,因此X与Y不相互独立

3.3.6.$p_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dy=\begin{cases}\frac{1}{2},\ |x|<1\\0,\ |x|\ge 1\end{cases}$

$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dy=\begin{cases}\frac{1}{2},\ |y|<1\\0,\ |y|\ge 1\end{cases}$

当$|x|<1$且$|y|<1$时,$p_X(x)p_Y(y)\ne p(x,y)$,因此X与Y不相互独立

3.3.7.(1)由X与Y独立得$p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)=\begin{cases} e^{-y},\ 0<x<1\text{且}y>0 \\ 0,\ \text{其他} \end{cases}$

(2)令区域D_1为$x=1,y=0,x+y=1$围出的区域

则$P(X+Y\leq 1)=\iint_{D_1}p(x,y)d\sigma=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}e^{-y}dy=\frac{1}{e}$

(3)令区域D_2为$x=0$与$x=1$之间,$y=x$以上的无限大区域

则$P(X\leq Y)=\iint_{D_2}p(x,y)d\sigma=\int_0^1 dx\int_x^{\infty}e^{-y}dy=1-e^{-1}$