天线

碎碎念

自由空间电磁波阻抗

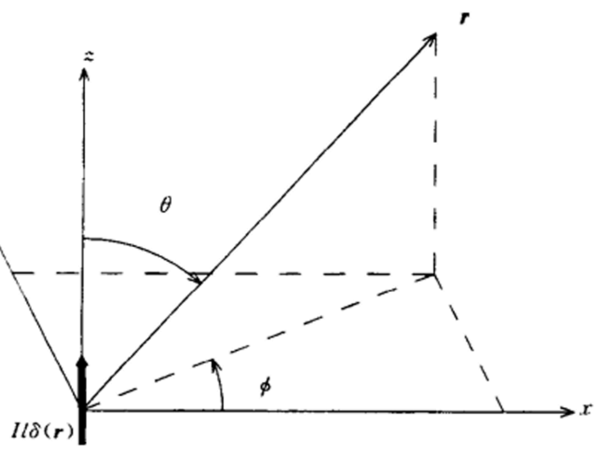
$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi\Omega$$

相位系数

$$\beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$$

复习：球坐标系

符号：$\hat{r}$、$\hat{\theta}$、$\hat{\phi}$



球坐标表示的赫兹偶极子

PPT上球坐标的图实在是太抽象啦

赫兹电偶极子

整体特性

$$\widehat{H_r} = 0$$
$$\widehat{H_\theta} = 0$$
$$\widehat{H_\phi} = \frac{\hat{I}\mathrm{d}l}{4\pi}\beta_0^2 sin\theta\left(j\frac{1}{\beta_0 r} + \frac{1}{\beta_0^2 r^2}\right)e^{-j\beta_0 r}$$
$$\widehat{E_r} = 2\frac{\hat{I}\mathrm{d}l}{4\pi}\eta_0\beta_0^2 cos\theta\left(\frac{1}{\beta_0^2 r^2} - j\frac{1}{beta_0^3 r^3}\right)e^{-k\beta_0 r}$$
$$\widehat{E_\theta} = \frac{\hat{I}\mathrm{d}l}{4\pi}\eta_0\beta_0^2 sin\theta\left(j\frac{1}{\beta_0 r} + \frac{1}{\beta_0^2 r^2} - j\frac{1}{\beta_0^3 r^3}\right)e^{-j\beta_0 r}$$
$$\widehat{E_\phi} = 0$$

远场特性

r 充分大的时候，忽略等式中的 $\frac{1}{r^2}$ 项，式子简化为：

$$\widehat{H_r} = 0$$
$$\widehat{H_\theta} = 0$$
$$\widehat{H_\phi} = j\frac{\hat{I}\mathrm{d}l}{4\pi}\beta_0 sin\theta\frac{1}{r}e^{-j\beta_0 r}$$
$$\widehat{E_r} = 0$$
$$\widehat{E_\theta} = j\frac{\hat{I}\mathrm{d}l}{4\pi}\eta_0\beta_0 sin\theta\frac{1}{r}e^{-j\beta_0 r}$$
$$\widehat{E_\phi} = 0$$

此时 $\widehat{E_r} = 0$ 、 $\widehat{H_r} = 0$ ，径向不存在电和磁场。 $\widehat{H_\phi}$ 和 $\widehat{E_\theta}$ 彼此正交，并与电磁波的传播方向正交（球坐标系特性），此时的电磁波以平面波形式传播（TEM波）

近场特性

近场中忽略低阶量，高阶量的起主导作用

$$\widehat{H_r} = 0$$
$$\widehat{H_\theta} = 0$$
$$\widehat{H_\phi} = \frac{\hat{I}\mathrm{d}l}{4\pi r^2} sin\theta e^{-j\beta_0 r}$$
$$\widehat{E_r} = -j2\frac{\hat{I}\mathrm{d}l}{4\pi}\eta_0\frac{1}{\beta_0 r^3}cos\theta e^{-j\beta_0 r}$$
$$\widehat{E_\theta} = -j\frac{\hat{I}\mathrm{d}l}{4\pi}\eta_0\frac{1}{\beta_0 r^3}sin\theta e^{-j\beta_0 r}$$
$$\widehat{E_\phi} = 0$$

$\widehat{E_r} \neq 0$ ，并不是TEM波，是TM波。

特征阻抗：

$$Z_0 = \frac{\widehat{E_\theta}}{\widehat{H_\phi}} \sim \frac{\eta_0}{\beta_0 r} \gg \eta_0$$

远近场的交界条件：

$$\beta_0 r = 1$$

（复习：相位系数 $\beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$ ）

环形电流（由磁偶极子推导而来）

由电与磁的对偶性很容易将电场与磁场互换得到磁偶极子。

复习：磁偶极矩

$$\hat{m} = I\hat{S}$$

我觉得直接根据面积和右手定则来看磁偶极矩会更直观点，PPT上不直观。

整体特性

$$\begin{aligned}
&\widehat{E_r} = 0 \\
&\widehat{E_\theta} = 0 \\
&\widehat{E_\phi} = -j\frac{\hat{m}\omega\mu_0}{4\pi}\beta_0^2 sin\theta\left(j\frac{1}{\beta_0 r} + \frac{1}{\beta_0^2 r^2}\right)e^{-j\beta_0 r} \\
&\widehat{H_r} = 2j\frac{\hat{m}\omega\mu_0}{4\pi\eta_0}\beta_0^2 cos\theta\left(\frac{1}{\beta_0^2 r^2} - j\frac{1}{\beta_0^3 r^3}\right)e^{-j\beta_0 r} \\
&\widehat{H_\theta} = j\frac{\hat{m}\omega\mu_0}{4\pi\eta_0}\beta_0^2 sin\theta\left(j\frac{1}{\beta_0 r} + \frac{1}{\beta_0^2 r^2} - j\frac{1}{\beta_0^3 r^3}\right)e^{-j\beta_0 r} \\
&\widehat{H_\phi} = 0
\end{aligned}$$

远场特性

类似的推导，舍弃高阶项。

$$\begin{aligned}
&\widehat{E_r} = 0 \\
&\widehat{E_\theta} = 0 \\
&\widehat{E_\phi} = \frac{\hat{m}\omega\mu_0}{4\pi r}\beta_0 sin\theta e^{-j\beta_0 r} \\
&\widehat{H_r} = 0 \\
&\widehat{H_\theta} = -\frac{\hat{m}\omega\mu_0}{4\pi\eta_0 r}\beta_0 sin\theta e^{-j\beta_0 r} \\
&\widehat{H_\phi} = 0
\end{aligned}$$

同样是TEM波

近场特性

要推吗，真的要推吗？

能发现是TE波，传播方向存在磁场。

两种偶极子的总结

远场条件下电磁波的特性阻抗都是 120π （废话，自由空间阻抗），近场条件下电偶极子天线阻抗很高，磁偶极子天线阻抗很低。

远场条件（重要）

小天线

如果天线的尺寸远小于波长（ $D \ll \lambda$ ），直接近似偶极子，远场条件：

$$R_{ff} > \frac{\lambda}{2\pi}$$

（这里到底有没有等号呀）

大天线

另一种情况 $D \gg \lambda$ ，比如孔径天线，接收到的电磁波需要近似为平面波，所以需要路程差 $\Delta \leq \frac{\lambda}{16}$ ，用勾股定理可以得到

$$R + \Delta = \sqrt{R^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2}$$

之后泰勒展开取低阶量

$$R + \Delta \approx R + \frac{D^2}{8R}$$

根据前文得到的结论 $\Delta \leq \frac{\lambda}{16}$ ，可以得到

$$\frac{D^2}{8R} \leq \frac{\lambda}{16}$$

从而可以得到远场条件为

$$R_{ff} \geq \frac{2D^2}{\lambda}$$

在EMC测量领域，会令 $\Delta \leq \frac{\lambda}{8}$ 或者 $\Delta \leq \frac{\lambda}{4}$ ，远场条件也随之改变

天线的辐射特性

辐射特性一般说的都是远场。

线天线

线天线可以视为无数个赫兹电偶极子在直线上排列而成，所以为了获得远场处的电场，需要对整段天线从 $-L$ 到 L 积分。

更具体的推导好像不太重要的样子

概念：归一化电场

$$F\left(\theta,\phi\right)=\frac{E\left(\theta,\phi\right)}{E_{max}}$$

线天线的归一化电场方向函数（此处存疑）：

$$F\left(\theta,\phi\right)=\frac{sin\left(\beta_0 Lcos\theta\right)}{\beta_0 Lcos\theta}sin\theta$$

老印在计算天线具体参数时用的dipole公式应该是这个：

$$F\left(\theta,\phi\right)=\frac{cos\left(\beta_0 Lcos\theta\right)-cos\left(\beta_0 L\right)}{sin\theta\left(1-cos\left(\beta_0 L\right)\right)}$$

这两个公式有着细微的误差，是在积分时展开项不同导致的。

方向图的参数们

主瓣、增益、3dB波束宽度、第1零点、第1旁瓣、后瓣

天线的方向性

概念：立体角

符号是 Ω 与单位球面上的一块面积有关，整个单位球的立体角为 $4\pi\mathrm{sr}$

小知识：

$$\mathrm{d}\Omega=sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

概念：平均功率 P_{ave}

$$P_{ave}=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{4\pi}P\left(\theta,\phi\right)\mathrm{d}\Omega$$

对所有方向的功率进行积分并除以球面的立体角 4π，得到等效的在球面上的平均功率。

概念：归一化功率 $P_n\left(\theta,\phi\right)$

$$P_n\left(\theta,\phi\right)=\frac{P\left(\theta,\phi\right)}{P_{max}}$$

归一化电场与归一化功率的关系

$$P_n\left(\theta,\phi\right)=\left|F\left(\theta,\phi\right)\right|^2$$

概念：方向性 D

$$D=\frac{P_{max}}{P_{ave}}=\frac{4\pi}{\iint\limits_{4\pi}P_n\left(\theta,\phi\right)\mathrm{d}\Omega}$$

概念：波束范围 Ω_A

$$\Omega_A = \iint\limits_{4\pi} P_n\left(\theta,\phi\right)\mathrm{d}\Omega$$

从而可以得到方向性 $D = \frac{4\pi}{\Omega_A}$ （哪来这么多概念啊，草）

各向同性天线

辐射特性是个球， $P_n\left(\theta,\phi\right) = 1$ ， $D = 1$

赫兹电偶极子的方向性

先计算归一化电场，远场条件下的电场为：

$$\widehat{E_\theta} = j\frac{\hat{I}\mathrm{d}l}{4\pi}\eta_0\beta_0 sin\theta\frac{1}{r}e^{-j\beta_0 r}$$

先归一化电流

$$\widehat{E_\theta} = j\frac{\mathrm{d}l}{4\pi}\eta_0\beta_0 sin\theta\frac{1}{r}e^{-j\beta_0 r}$$

除一下

$$F\left(\theta,\phi\right) = \frac{j\frac{\mathrm{d}l}{4\pi}\eta_0\beta_0 sin\theta\frac{1}{r}e^{-j\beta_0 r}}{j\frac{\mathrm{d}l}{4\pi}\eta_0\beta_0 sin\theta_{max}\frac{1}{r}e^{-j\beta_0 r}}$$

直接全部拿掉

$$F\left(\theta,\phi\right) = \frac{sin\theta}{sin\theta_{max}}$$

在球坐标系中 θ的取值范围是 $0 \sim \pi$ 所以可以发现

$$sin\theta_{max} = sin\theta|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 1$$

所以得到

$$F\left(\theta,\phi\right) = sin\theta$$

获得归一化电场后就是计算波束范围

$$\Omega_A = \iint\limits_{4\pi} \left|F\left(\theta,\phi\right)\right|^2\mathrm{d}\Omega$$

带入上面计算得到的归一化电场，打开二重积分（ $\mathrm{d}\Omega = sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$ ）不想积了，直接抄

$$\begin{aligned}\Omega_A &= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} sin^2\theta sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\ &= \frac{8\pi}{3}\end{aligned}$$

根据波束范围的概念，可以算出方向性 $D = \frac{4\pi}{\Omega_A} = 1.5$

$\lambda/2$偶极子天线

$$F(\theta, \phi) = \frac{cos\left(\frac{\pi}{2}cos\theta\right)}{sin\theta}$$

$$\Omega_A = 7.66$$

$$D = 1.64$$

1λ偶极子天线

$$F(\theta, \phi) = \frac{cos(\pi cos\theta) + 1}{2sin\theta}$$

$$\Omega_A = 5.21$$

$$D = 2.41$$

很长的线天线

$$D \sim \frac{2L}{\lambda}(L \gg \lambda)$$

L是天线长度

孔径天线

$$D = \frac{4\pi A_e}{\lambda^2}$$

孔径天线的有效截面积：

$$A_e = A \times e_{ap}$$

孔径效率：e_{ap}

孔径面积：A

天线增益

综合考虑方向性和天线的损耗后可以得到，单位是dBi：

$$G = 10log_{10}(D \times e)$$

e 是天线的效率

联想之前算方向性 D 的计算，其实天线的增益是

$$G = 10log_{10}\left(\frac{P_\theta}{P_{ave}}\right)$$

在例题中出现的二级结论：

$$G = 10log_{10}\left(\frac{P_\theta}{P_{max}}\right)$$

老师PPT上放的公式是孔径天线的，我觉得这里应该用普适的公式，所以删了。

无耗偶极子天线

赫兹偶极子 $D=1.5$ ， $G=10log_{10}\left(1.5\right)=1.76dBi$

$\lambda/2$ 偶极子天线 $D=1.64$ ， $G=10log_{10}\left(1.64\right)=2.14dBi$

1λ 偶极子天线 $D=2.41$ ， $G=10log_{10}\left(2.41\right)=3.82dBi$

无耗孔径天线

TODO

有损耗孔径天线

TODO

半功率波束宽度/3dB波束宽度

长度为 L 的线天线，电流分布为

$$I\left(r\right)=cos^n\left(\frac{\pi r}{L}\right)$$

直径为 a 的圆形喇叭天线

这里的n我没找到具体的含义，应该是天线长度和波长的关系？

高指向天线的估算方法（奇怪的经验公式增加了）：

$$D\approx\frac{4\pi}{\theta_{1r}\theta_{2r}}$$

角度制我就不写了，360转一下的事

例题题解

Example 1a

天线类型：圆形喇叭天线，属于孔径天线，直径10cm，题目假设没有损耗，孔径效率60%

频点： $12GHz$ ，波长 $0.025m$ ； $15GHz$ ，波长 $0.020m$ ； $18GHz$ ，波长 $0.01667m$

计算：套孔径天线的公式

$$A_e=A\times e_{ap}=\pi\times0.05^2\times0.6$$

$$D=\frac{4\pi A_e}{\lambda^2}=94.75$$

$$G = 10log_{10}\left(De\right) = 10log_{10}\left(94.75 \times 1\right) = 19.76dBi$$

$$D \approx \frac{4\pi}{\theta_{1r}\theta_{2r}}$$

这里PPT直接写等于号了，让我大为恼火。由于是圆形喇叭天线，所以可以得到 $\theta_{1r} = \theta_{2r}$ ，代入解得 $\theta_{1r} = \theta_{2r} = 0.364$

其他频点不算了

Example 1b

(a)

线天线的归一化电场：

$$F\left(\theta, \phi\right) = \frac{sin\left(\beta_0 Lcos\theta\right)}{\beta_0 Lcos\theta} sin\theta$$

L 是天线长度的一半

赫兹偶极子的归一化电场（ L 很小，使用著名等价无穷小，用前面PPT推的内容也能直接做出来）：

$$\lim_{L \to 0} F\left(\theta, \phi\right) = sin\theta$$

随后得到归一化功率

$$P_n\left(\theta, \phi\right) = sin^2\theta$$

天线增益的定义：

$$G = 10log_{10}\left(\frac{P_{\theta=30^\circ}}{P_{ave}}\right) = 10log_{10}\left(\frac{P_{max}}{P_{ave}} \times \frac{P_{\theta=30^\circ}}{P_{max}}\right) = 10log_{10}\left(D \times P_{n_{\theta=30^\circ}}\right) = -4.25dBi$$

这里可以看到一个二级结论 $G = 10log_{10}\left(D \times P_n\right)$

(b)

复习：

$$\beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$$

长度是 1λ 的话， $L = \frac{\lambda}{2}$ ，可以得到

$$F\left(\theta, \phi\right) = \frac{sin\left(\pi cos\theta\right) sin\theta}{\pi cos\theta}$$

使用背书技能得到 $D = 2.41$ ，用上文得到的二级结论可以算出来

$$G = 10log_{10}\left(2.41 \times F^2|_{\theta=45^\circ}\right) = -8.1dBi$$