

天线

碎碎念

自由空间电磁波阻抗

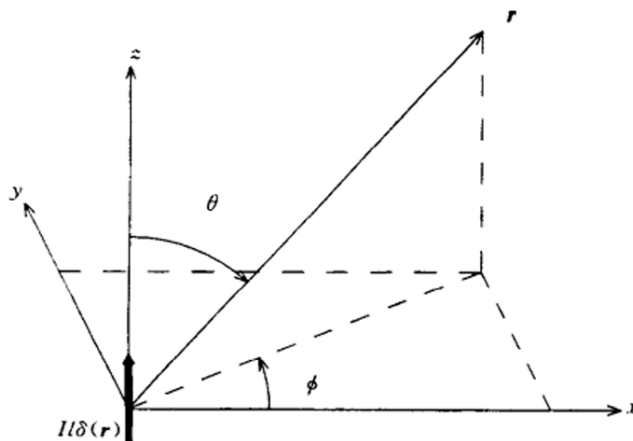
$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi\Omega$$

相位系数

$$\beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$$

复习：球坐标系

符号： \hat{r} 、 $\hat{\theta}$ 、 $\hat{\phi}$



球坐标表示的赫兹偶极子

PPT上球坐标的图实在是太抽象啦

赫兹电偶极子

整体特性

$$\begin{aligned}
\widehat{H_r} &= 0 \\
\widehat{H_\theta} &= 0 \\
\widehat{H_\phi} &= \frac{\hat{I}dl}{4\pi}\beta_0^2 \sin\theta \left(j\frac{1}{\beta_0 r} + \frac{1}{\beta_0^2 r^2} \right) e^{-j\beta_0 r} \\
\widehat{E_r} &= 2\frac{\hat{I}dl}{4\pi}\eta_0\beta_0^2 \cos\theta \left(\frac{1}{\beta_0^2 r^2} - j\frac{1}{\beta_0^3 r^3} \right) e^{-j\beta_0 r} \\
\widehat{E_\theta} &= \frac{\hat{I}dl}{4\pi}\eta_0\beta_0^2 \sin\theta \left(j\frac{1}{\beta_0 r} + \frac{1}{\beta_0^2 r^2} - j\frac{1}{\beta_0^3 r^3} \right) e^{-j\beta_0 r} \\
\widehat{E_\phi} &= 0
\end{aligned}$$

远场特性

r 充分大的时候，忽略等式中的 $\frac{1}{r^2}$ 项，式子简化为：

$$\begin{aligned}
\widehat{H_r} &= 0 \\
\widehat{H_\theta} &= 0 \\
\widehat{H_\phi} &= j\frac{\hat{I}dl}{4\pi}\beta_0 \sin\theta \frac{1}{r} e^{-j\beta_0 r} \\
\widehat{E_r} &= 0 \\
\widehat{E_\theta} &= j\frac{\hat{I}dl}{4\pi}\eta_0\beta_0 \sin\theta \frac{1}{r} e^{-j\beta_0 r} \\
\widehat{E_\phi} &= 0
\end{aligned}$$

此时 $\widehat{E_r} = 0$ 、 $\widehat{H_r} = 0$ ，径向不存在电和磁场。 $\widehat{H_\phi}$ 和 $\widehat{E_\theta}$ 彼此正交，并与电磁波的传播方向正交（球坐标系特性），此时的电磁波以平面波形式传播（TEM波）

近场特性

近场中忽略低阶量，高阶量的起主导作用

$$\begin{aligned}
\widehat{H_r} &= 0 \\
\widehat{H_\theta} &= 0 \\
\widehat{H_\phi} &= \frac{\hat{I}dl}{4\pi r^2} \sin\theta e^{-j\beta_0 r} \\
\widehat{E_r} &= -j2\frac{\hat{I}dl}{4\pi}\eta_0 \frac{1}{\beta_0 r^3} \cos\theta e^{-j\beta_0 r} \\
\widehat{E_\theta} &= -j\frac{\hat{I}dl}{4\pi}\eta_0 \frac{1}{\beta_0 r^3} \sin\theta e^{-j\beta_0 r} \\
\widehat{E_\phi} &= 0
\end{aligned}$$

$\widehat{E_r} \neq 0$ ，并不是TEM波，是TM波。

特征阻抗：

$$Z_0 = \frac{\widehat{E_\theta}}{\widehat{H_\phi}} \sim \frac{\eta_0}{\beta_0 r} \gg \eta_0$$

远近场的交界条件：

$$\beta_0 r = 1$$

(复习：相位系数 $\beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$)

环形电流（由磁偶极子推导而来）

由电与磁的对偶性很容易将电场与磁场互换得到磁偶极子。

复习：磁偶极矩

$$\hat{m} = I \hat{S}$$

我觉得直接根据面积和右手定则来看磁偶极矩会更直观，PPT上不直观。

整体特性

$$\widehat{E}_r = 0$$

$$\widehat{E}_\theta = 0$$

$$\widehat{E}_\phi = -j \frac{\hat{m} \omega \mu_0}{4\pi} \beta_0^2 \sin\theta \left(j \frac{1}{\beta_0 r} + \frac{1}{\beta_0^2 r^2} \right) e^{-j\beta_0 r}$$

$$\widehat{H}_r = 2j \frac{\hat{m} \omega \mu_0}{4\pi \eta_0} \beta_0^2 \cos\theta \left(\frac{1}{\beta_0^2 r^2} - j \frac{1}{\beta_0^3 r^3} \right) e^{-j\beta_0 r}$$

$$\widehat{H}_\theta = j \frac{\hat{m} \omega \mu_0}{4\pi \eta_0} \beta_0^2 \sin\theta \left(j \frac{1}{\beta_0 r} + \frac{1}{\beta_0^2 r^2} - j \frac{1}{\beta_0^3 r^3} \right) e^{-j\beta_0 r}$$

$$\widehat{H}_\phi = 0$$

远场特性

类似的推导，舍弃高阶项。

$$\widehat{E}_r = 0$$

$$\widehat{E}_\theta = 0$$

$$\widehat{E}_\phi = \frac{\hat{m} \omega \mu_0}{4\pi r} \beta_0 \sin\theta e^{-j\beta_0 r}$$

$$\widehat{H}_r = 0$$

$$\widehat{H}_\theta = -\frac{\hat{m} \omega \mu_0}{4\pi \eta_0 r} \beta_0 \sin\theta e^{-j\beta_0 r}$$

$$\widehat{H}_\phi = 0$$

同样是TEM波

近场特性

要推吗，真的要推吗？

能发现是TE波，传播方向存在磁场。

两种偶极子的总结

远场条件下电磁波的特性阻抗都是 120π （废话，自由空间阻抗），近场条件下电偶极子天线阻抗很高，磁偶极子天线阻抗很低。

远场条件（重要）

小天线

如果天线的尺寸远小于波长（ $D \ll \lambda$ ），直接近似偶极子，远场条件：

$$R_{ff} > \frac{\lambda}{2\pi}$$

（这里到底有没有等号呀）

大天线

另一种情况 $D \gg \lambda$ ，比如孔径天线，接收到的电磁波需要近似为平面波，所以需要路程差 $\Delta \leq \frac{\lambda}{16}$ ，用勾股定理可以得到

$$R + \Delta = \sqrt{R^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2}$$

之后泰勒展开取低阶量

$$R + \Delta \approx R + \frac{D^2}{8R}$$

根据前文得到的结论 $\Delta \leq \frac{\lambda}{16}$ ，可以得到

$$\frac{D^2}{8R} \leq \frac{\lambda}{16}$$

从而可以得到远场条件为

$$R_{ff} \geq \frac{2D^2}{\lambda}$$

在EMC测量领域，会令 $\Delta \leq \frac{\lambda}{8}$ 或者 $\Delta \leq \frac{\lambda}{4}$ ，远场条件也随之改变

天线的辐射特性

辐射特性一般说的都是远场。

线天线

线天线可以视为无数个赫兹电偶极子在直线上排列而成，所以为了获得远场处的电场，需要对整段天线从 $-L$ 到 L 积分。

更具体的推导好像不太重要的样子

概念：归一化电场

$$F(\theta, \phi) = \frac{E(\theta, \phi)}{E_{max}}$$

线天线的归一化电场方向函数（此处存疑）：

$$F(\theta, \phi) = \frac{\sin(\beta_0 L \cos\theta)}{\beta_0 L \cos\theta} \sin\theta$$

老印在计算天线具体参数时用的dipole公式应该是这个：

$$F(\theta, \phi) = \frac{\cos(\beta_0 L \cos\theta) - \cos(\beta_0 L)}{\sin\theta (1 - \cos(\beta_0 L))}$$

这两个公式有着细微的误差，是在积分时展开项不同导致的。

方向图的参数们

主瓣、增益、3dB波束宽度、第1零点、第1旁瓣、后瓣

天线的方向性

概念：立体角

符号是 Ω 与单位球面上的一块面积有关，整个单位球的立体角为 $4\pi \text{sr}$

小知识：

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$$

概念：平均功率 P_{ave}

$$P_{ave} = \frac{1}{4\pi} \iint_{4\pi} P(\theta, \phi) d\Omega$$

对所有方向的功率进行积分并除以球面的立体角 4π ，得到等效的在球面上的平均功率。

概念：归一化功率 $P_n(\theta, \phi)$

$$P_n(\theta, \phi) = \frac{P(\theta, \phi)}{P_{max}}$$

归一化电场与归一化功率的关系

$$P_n(\theta, \phi) = |F(\theta, \phi)|^2$$

概念：方向性 D

$$D = \frac{P_{max}}{P_{ave}} = \frac{4\pi}{\iint_{4\pi} P_n(\theta, \phi) d\Omega}$$

概念：波束范围 Ω_A

$$\Omega_A = \iint_{4\pi} P_n(\theta, \phi) d\Omega$$

从而可以得到方向性 $D = \frac{4\pi}{\Omega_A}$ (哪来这么多概念啊, 草)

各向同性天线

辐射特性是个球, $P_n(\theta, \phi) = 1$, $D = 1$

赫兹电偶极子的方向性

先计算归一化电场, 远场条件下的电场为:

$$\widehat{E}_\theta = j \frac{\hat{I} dl}{4\pi} \eta_0 \beta_0 \sin\theta \frac{1}{r} e^{-j\beta_0 r}$$

先归一化电流

$$\widehat{E}_\theta = j \frac{dl}{4\pi} \eta_0 \beta_0 \sin\theta \frac{1}{r} e^{-j\beta_0 r}$$

除一下

$$F(\theta, \phi) = \frac{j \frac{dl}{4\pi} \eta_0 \beta_0 \sin\theta \frac{1}{r} e^{-j\beta_0 r}}{j \frac{dl}{4\pi} \eta_0 \beta_0 \sin\theta_{max} \frac{1}{r} e^{-j\beta_0 r}}$$

直接全部拿掉

$$F(\theta, \phi) = \frac{\sin\theta}{\sin\theta_{max}}$$

在球坐标系中 θ 的取值范围是 $0 \sim \pi$ 所以可以发现

$$\sin\theta_{max} = \sin\theta|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 1$$

所以得到

$$F(\theta, \phi) = \sin\theta$$

获得归一化电场后就是计算波束范围

$$\Omega_A = \iint_{4\pi} |F(\theta, \phi)|^2 d\Omega$$

带入上面计算得到的归一化电场, 打开二重积分 ($d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$) 不想积了, 直接抄

$$\begin{aligned} \Omega_A &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^2\theta \sin\theta d\theta d\phi \\ &= \frac{8\pi}{3} \end{aligned}$$

根据波束范围的概念，可以算出方向性 $D = \frac{4\pi}{\Omega_A} = 1.5$

$\lambda/2$ 偶极子天线

$$F(\theta, \phi) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}$$

$$\Omega_A = 7.66$$

$$D = 1.64$$

1λ 偶极子天线

$$F(\theta, \phi) = \frac{\cos(\pi\cos\theta) + 1}{2\sin\theta}$$

$$\Omega_A = 5.21$$

$$D = 2.41$$

很长的线天线

$$D \sim \frac{2L}{\lambda} (L \gg \lambda)$$

L 是天线长度

孔径天线

$$D = \frac{4\pi A_e}{\lambda^2}$$

孔径天线的有效截面积：

$$A_e = A \times e_{ap}$$

孔径效率： e_{ap}

孔径面积： A

天线增益

综合考虑方向性和天线的损耗后可以得到，单位是 dBi ：

$$G = 10\log_{10}(D \times e)$$

e 是天线的效率

联想之前算方向性 D 的计算，其实天线的增益是

$$G = 10\log_{10}\left(\frac{P_\theta}{P_{ave}}\right)$$

在例题中出现的二级结论：

$$G = 10 \log_{10} \left(\frac{P_{\theta}}{P_{max}} \right)$$

老师PPT上放的公式是孔径天线的，我觉得这里应该用普适的公式，所以删了。

无耗偶极子天线

赫兹偶极子 $D = 1.5$, $G = 10 \log_{10} (1.5) = 1.76 \text{dBi}$

$\lambda/2$ 偶极子天线 $D = 1.64$, $G = 10 \log_{10} (1.64) = 2.14 \text{dBi}$

1λ 偶极子天线 $D = 2.41$, $G = 10 \log_{10} (2.41) = 3.82 \text{dBi}$

无耗孔径天线

TODO

有损耗孔径天线

TODO

半功率波束宽度/3dB波束宽度

长度为 L 的线天线，电流分布为

$$I(r) = \cos^n \left(\frac{\pi r}{L} \right)$$

直径为 a 的圆形喇叭天线

这里的n我没找到具体的含义，应该是天线长度和波长的关系？

高指向天线的估算方法（奇怪的经验公式增加了）：

$$D \approx \frac{4\pi}{\theta_{1r} \theta_{2r}}$$

角度制我就不写了，360转一下的事

例题题解

Example 1a

天线类型：圆形喇叭天线，属于孔径天线，直径10cm，题目假设没有损耗，孔径效率60%

频点：12GHz，波长 0.025m；15GHz，波长 0.020m；18GHz，波长 0.01667m

计算：套孔径天线的公式

$$A_e = A \times e_{ap} = \pi \times 0.05^2 \times 0.6$$

$$D = \frac{4\pi A_e}{\lambda^2} = 94.75$$

$$G = 10 \log_{10} (De) = 10 \log_{10} (94.75 \times 1) = 19.76 \text{dBi}$$

$$D \approx \frac{4\pi}{\theta_{1r} \theta_{2r}}$$

这里PPT直接写等于号了，让我大为恼火。由于是圆形喇叭天线，所以可以得到 $\theta_{1r} = \theta_{2r}$ ，代入解得 $\theta_{1r} = \theta_{2r} = 0.364$

其他频点不算了

Example 1b

(a)

线天线的归一化电场：

$$F(\theta, \phi) = \frac{\sin(\beta_0 L \cos\theta)}{\beta_0 L \cos\theta} \sin\theta$$

L 是天线长度的一半

赫兹偶极子的归一化电场（ L 很小，使用著名等价无穷小，用前面PPT推的内容也能直接做出来）：

$$\lim_{L \rightarrow 0} F(\theta, \phi) = \sin\theta$$

随后得到归一化功率

$$P_n(\theta, \phi) = \sin^2\theta$$

天线增益的定义：

$$G = 10 \log_{10} \left(\frac{P_{\theta=30^\circ}}{P_{ave}} \right) = 10 \log_{10} \left(\frac{P_{max}}{P_{ave}} \times \frac{P_{\theta=30^\circ}}{P_{max}} \right) = 10 \log_{10} (D \times P_{n\theta=30^\circ}) = -4.25 \text{dBi}$$

这里可以看到一个二级结论 $G = 10 \log_{10} (D \times P_n)$

(b)

复习：

$$\beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$$

长度是 1λ 的话， $L = \frac{\lambda}{2}$ ，可以得到

$$F(\theta, \phi) = \frac{\sin(\pi \cos\theta) \sin\theta}{\pi \cos\theta}$$

使用背书技能得到 $D = 2.41$ ，用上文得到的二级结论可以算出来

$$G = 10 \log_{10} (2.41 \times F^2|_{\theta=45^\circ}) = -8.1 \text{dBi}$$