NO:.............................. DATE:..............................

[M1] EXERCISE SHEET 17: MATRICES

① a) 3

b) -3

c) 3×4

② $2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 10 \\ 6 & 8 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 3 & 12 & -9 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2-0 & 4-6 & 10-3 \\ 6-3 & 8-12 & 0--9 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 & -2 & 7 \\ 3 & -4 & 9 \end{bmatrix}$

③ $3 \times 3 \quad 3 \times 2 \quad 3 \times 2$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

④ a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2 & 3+1 \\ -2+2 & -2+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3-2 & -3-1 \\ -2-2 & 2-1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$

⑤ $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

⑥ a) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = (4)(5) - (3)(-2) = 26$

b) $\begin{vmatrix} a & -b \\ -b & a \end{vmatrix} = aa - (-b)(-b) = a^2 - b^2$

⑦ a) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

⑧ a) $\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -30 & -1 \\ 22 & 1 \end{bmatrix}$

⑧ b) $A\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}^{-1}$

$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -5 & -5 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -7 & -6 \\ -16 & -13 \end{bmatrix}$

⑧ c) $A\begin{bmatrix} -11 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -11 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -8 & -22 \end{bmatrix}$

⑨ a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -19 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ -19 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

$(x, y) = (2, -3)$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -16 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 \\ -16 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$

$(x, y) = (-1, -2)$

NO:........................ DATE:........................

[MATHEMATICS 1] EXERCISE SHEET 17: MATRICES

e) $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$(x, y) = (-2, 3)$

10 a) A is sigular if $\det(A) = 0$ and A does not have an inverse.

b) $(t)(t-1) - (2)(1) = 0$

$t^2 - t - 2 = 0$

$(t-2)(t+1) = 0$

$t = 2 \qquad t = -1$

$t \quad -2 \quad -2t$
$t \quad 1 \quad t$
$-t$

11) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{0}\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$ <no solution>

The system does not have a unique solution because $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$

12) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ p \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ p \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{p-6}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ p \end{bmatrix}$$

$p - 6 \neq 0$

$p \neq 6$

There is a unique solution if and only if $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & p \end{vmatrix} \neq 0$

That is, $p - 6 \neq 0$

That is, $p \neq 6$