Matematica Computacional - Examen Parcial 1

November 3, 2024

Nombre: ______________________________________

Libros

Puedes encontrar el libro en **GITHUB** de la clase en el folder correspiente `3.Books/Estructura_de_Datos/`

`ESTRUCTURA DE DATOS EN C++, Luis Joyanes, Ignacio Zahonero, Primera Edicion, McGrawHill, 2007`

1. (4 points) Resuelva :

   (a) Calcular el resto de la división 2^{98} por 101.

   (b) Encuentra, si es posible, el inverso de 47 en $\mathbb{Z}_{61}$.

   Solución:

   (a) Queremos encontrar el resto de 2^{98} cuando se divide por 101, es decir, calcular $2^{98} \mod 101$. El pequeño teorema de Fermat establece que si p es un número primo y a es un número entero tal que a no es divisible por p, entonces:

$$a^{p-1} \equiv 1 \mod p$$

Dado que $p = 101$ es primo y $a = 2$ no es divisible por 101, aplicamos el teorema:

$$2^{100} \equiv 1 \mod 101$$

Queremos encontrar $2^{98} \mod 101$. Como $2^{100} \equiv 1 \mod 101$, tenemos:

$$2^{98} = 2^{-2} \cdot 2^{100} \equiv 2^{-2} \cdot (1 \mod 101)$$

$$2^{98} \equiv \frac{1}{4} \cdot (1 \mod 101 + 0 \mod 101) \equiv \frac{1}{4} \cdot (1 \mod 101 + 303 \mod 101)$$

$$2^{98} \equiv \frac{1}{4} \cdot (1 + 303) \mod 101 \equiv \frac{1}{4} \cdot (304) \mod 101 \equiv 76 \mod 101$$

Finalmente, tenemos:

$$2^{98} \equiv 76 \mod 101$$

Por lo tanto, el resto de la división de 2^{98} por 101 es **76**.

Otra forma : Expresamos 2^{98} en términos de 101 ($\overset{\circ}{101} = 0 \mod 101$)

$$2^{98} \equiv (\overset{\circ}{101} + 2)^{98} \equiv \overset{\circ}{101} + 2^{98} \equiv \overset{\circ}{101} + (2)^{2\times 49} \equiv \overset{\circ}{101} + (4)^{49} \equiv \overset{\circ}{101} + (4^7)^7$$

expresamos 4^7 en términos de 101 :

$$\begin{aligned}
4^1 &\equiv \overset{\circ}{101} + 4 \\
4^2 &\equiv \overset{\circ}{101} + 4^2 \\
4^3 &\equiv \overset{\circ}{101} + 4^3 \\
4^4 &\equiv \overset{\circ}{101} + 4^4 \equiv \overset{\circ}{101} + 256 \equiv \overset{\circ}{101} + 54 \\
4^5 &\equiv \overset{\circ}{101} + 4^5 \equiv \overset{\circ}{101} + 1024 \equiv \overset{\circ}{101} + 14 \\
4^6 &\equiv \overset{\circ}{101} + 4^6 \equiv \overset{\circ}{101} + 2048 \equiv \overset{\circ}{101} + 56 \\
4^7 &\equiv \overset{\circ}{101} + 4^6 \equiv \overset{\circ}{101} + 4096 \equiv \overset{\circ}{101} + 22
\end{aligned}$$

$$2^{98} \equiv \overset{\circ}{101} + (4^7)^7 \equiv \overset{\circ}{101} + (\overset{\circ}{101} + 22)^7 \equiv \overset{\circ}{101} + (22)^7$$

expresamos 22^7 en términos de 101:

$$\begin{aligned}
22^1 &\equiv \mathring{101} + 22 \\
22^2 &\equiv \mathring{101} + 22^2 \equiv \mathring{101} + 484 \equiv \mathring{101} + 80 \\
22^3 &\equiv \mathring{101} + 22^3 \equiv \mathring{101} + 10648 \equiv \mathring{101} + 45 \\
22^4 &\equiv \mathring{101} + 22^4 \equiv \mathring{101} + 234256 \equiv \mathring{101} + 37 \\
22^5 &\equiv \mathring{101} + 22^5 \equiv \mathring{101} + 5153632 \equiv \mathring{101} + 6 \\
22^6 &\equiv \mathring{101} + 22^6 \equiv \mathring{101} + 113379904 \equiv \mathring{101} + 31 \\
22^7 &\equiv \mathring{101} + 22^7 \equiv \mathring{101} + 2494357888 \equiv \mathring{101} + 76
\end{aligned}$$

$$2^{98} \equiv \mathring{101} + (22)^7 \equiv \mathring{101} + (\mathring{101} + 76) \equiv \mathring{101} + 76$$

Por lo tanto:

$$2^{98} \equiv 76 \pmod{101}$$

El resto de la división de 2^{98} por 101 es **76**.

(b) Para encontrar el inverso de 47 en $\mathbb{Z}_{61}$, necesitamos resolver la siguiente congruencia:

$$47x \equiv 1 \pmod{61}$$

Esto significa encontrar un valor de x tal que el producto de $47x$ sea congruente con 1 módulo 61. Para resolverlo, utilizamos el algoritmo extendido de Euclides, que nos ayudará a encontrar los coeficientes que satisfacen la identidad de Bézout para 47 y 61.

Aplicando el algoritmo de Euclides: Primero, aplicamos la división de Euclides entre 61 y 47:

$$\begin{aligned}
61 &= 1 \cdot 47 + 14 \\
47 &= 3 \cdot 14 + 5 \\
14 &= 2 \cdot 5 + 4 \\
5 &= 1 \cdot 4 + 1 \Leftarrow (\text{último residuo es } 1) \\
4 &= 4 \cdot 1 + 0
\end{aligned}$$

Ya que el último residuo es 1, podemos decir que 47 y 61 son coprimos y, por lo tanto, existe un inverso.

Aplicando el algoritmo extendido de Euclides: Ahora retrocedemos para expresar 1 como una combinación lineal de 47 y 61:

$$\begin{aligned}
1 &= 5 - 1 \cdot 4 \\
1 &= 5 - 1 \cdot (14 - 2 \cdot 5) = 3 \cdot 5 - 1 \cdot 14 \\
1 &= 3 \cdot (47 - 3 \cdot 14) - 1 \cdot 14 = 3 \cdot 47 - 10 \cdot 14 \\
1 &= 3 \cdot 47 - 10 \cdot (61 - 1 \cdot 47) = 13 \cdot 47 - 10 \cdot 61
\end{aligned}$$

$$13 \cdot 47 = 10 \cdot 61 + 1 \equiv 1 \pmod{61}$$

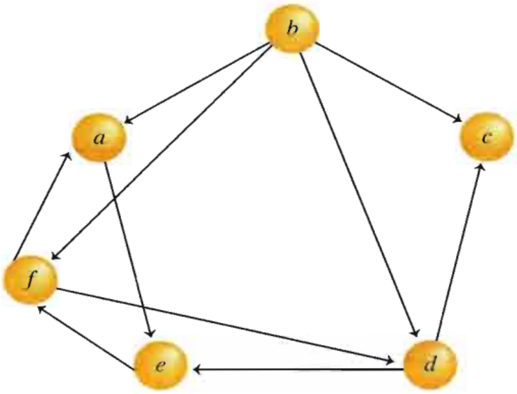
Por lo tanto, tenemos que $13 \cdot 47 \equiv 1 \pmod{61}$, lo que significa que el inverso de 47 en $\mathbb{Z}_{61}$ es 13.

$$47^{-1} \equiv 13 \pmod{61}$$

2. (4 points) Utilice una matriz de adyacencia y una lista de adyacencia para representar la digrafica de la **Figura** 2

Solución:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si existe una arista entre i y j} \\ 0 & \text{De lo contrario} \end{cases}$$



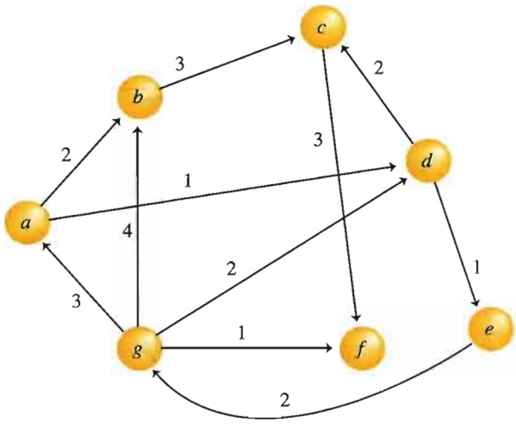
$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{lllllll} a & \to & e & & & & \\ b & \to & f & \to & d & \to & c \\ c & & & & & & \\ d & \to & e & \to & c & & \\ e & \to & f & & & & \\ f & \to & d & \to & a & & \end{array}$$

Problema 2

3. (4 points) Aplique el **algoritmo de Dijkstra** a la digrafica de la **Figura** 3. Tome el vertice **a** como vertice origen. Contruya la tabla de correspondencias al seguimiento del algorithmo .

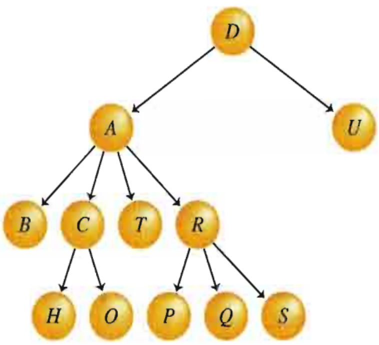
Solución:



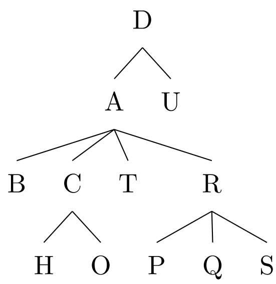
Problema 3

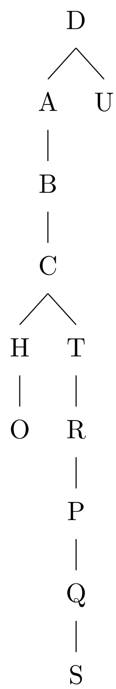
Vertices	Paso 1	Paso 2	Paso 3	Paso 4
A	(0,A)	*	*	*
B	(2,A)	∞	∞	∞
C	∞	(3,D)	*	*
D	(1,A)	(1,A)	*	*
E	∞	(2,D)	(2,D)	(2,D)
F	∞	∞	∞	∞
G	∞	∞	(5,E)	*

4. (4 points) **Figura** 4. **Solución:**



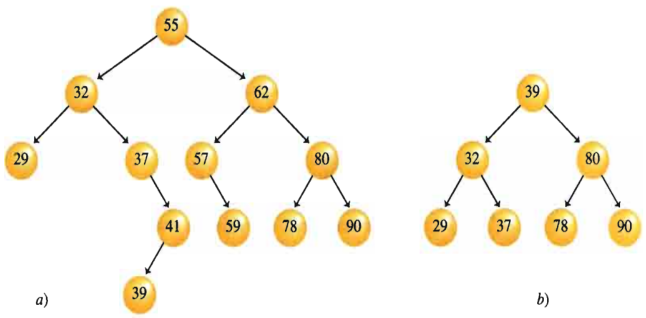
Problema 4

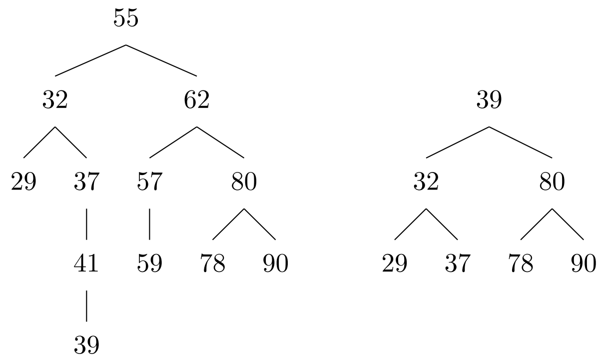




5. (4 points) Verifique si el arbol binario de busqueda del diagrama del **inciso (a)** queda igual al del diagrama del **inciso (b)**, **Figura** 5, luego eliminar las claves : **55-62-57-59-41**

Solución:





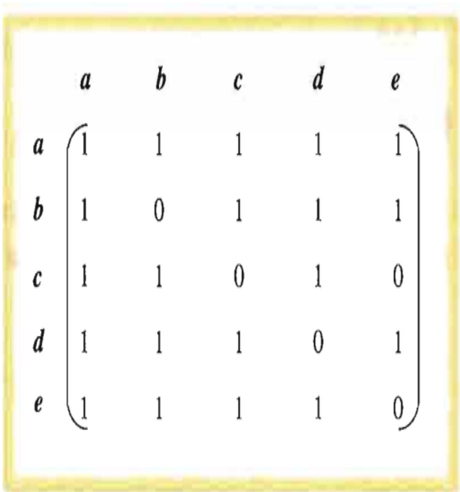
Problema 5

Eliminado las claves : **55-62-57-59-41**, se verifica la igualdad de **(a)** y **(b)**

6. (4 points) Dada la siguiente matriz de adyacencia, dibuje la grafica correspondiente **Figura** .

Solución:

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} &
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$



	a	b	c	d	e
a	1	1	1	1	1
b	1	0	1	1	1
c	1	1	0	1	0
d	1	1	1	0	1
e	1	1	1	1	0

Problema 6