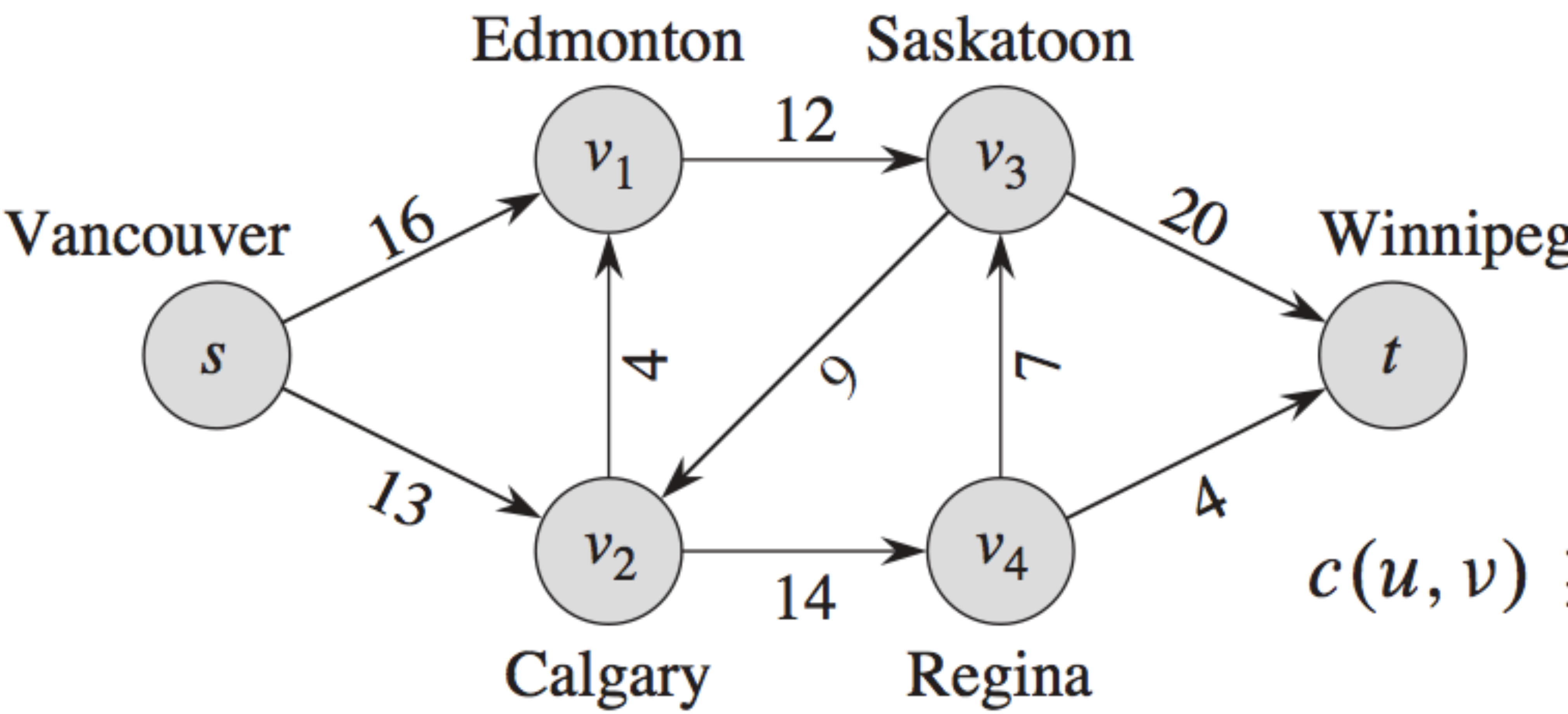
Problemas de Maximo Flujo

comp-420

Máximo Flujo

- Ejemplo de flujo clásico, capacidades en un grafo dirigido def. **funcion de capacidad**

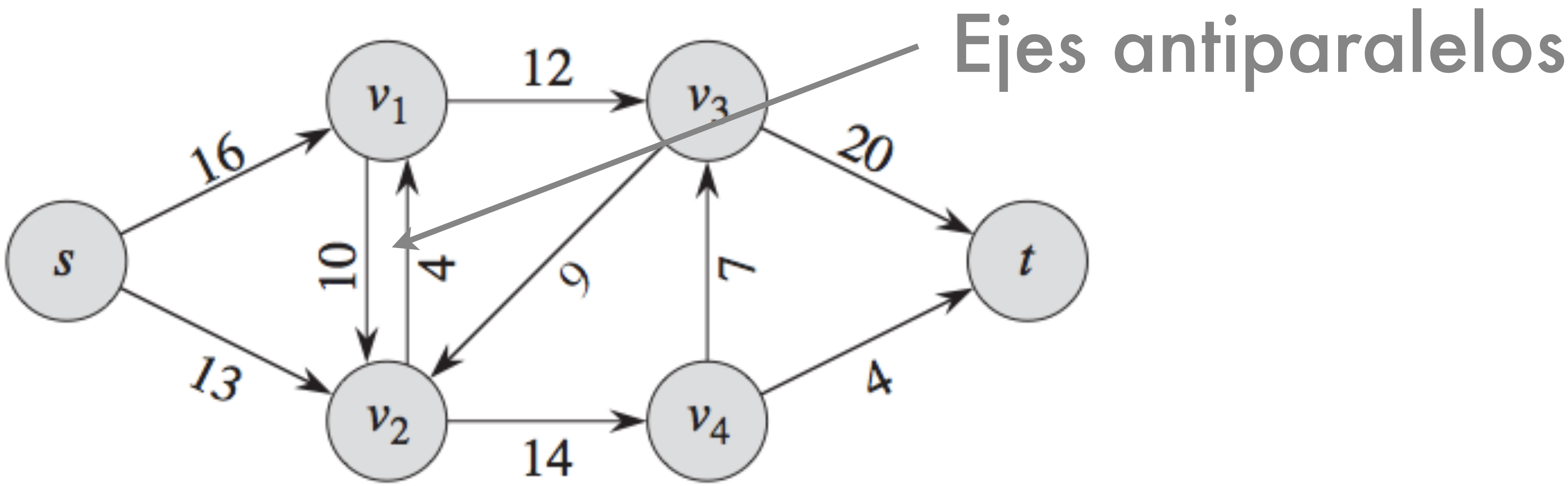


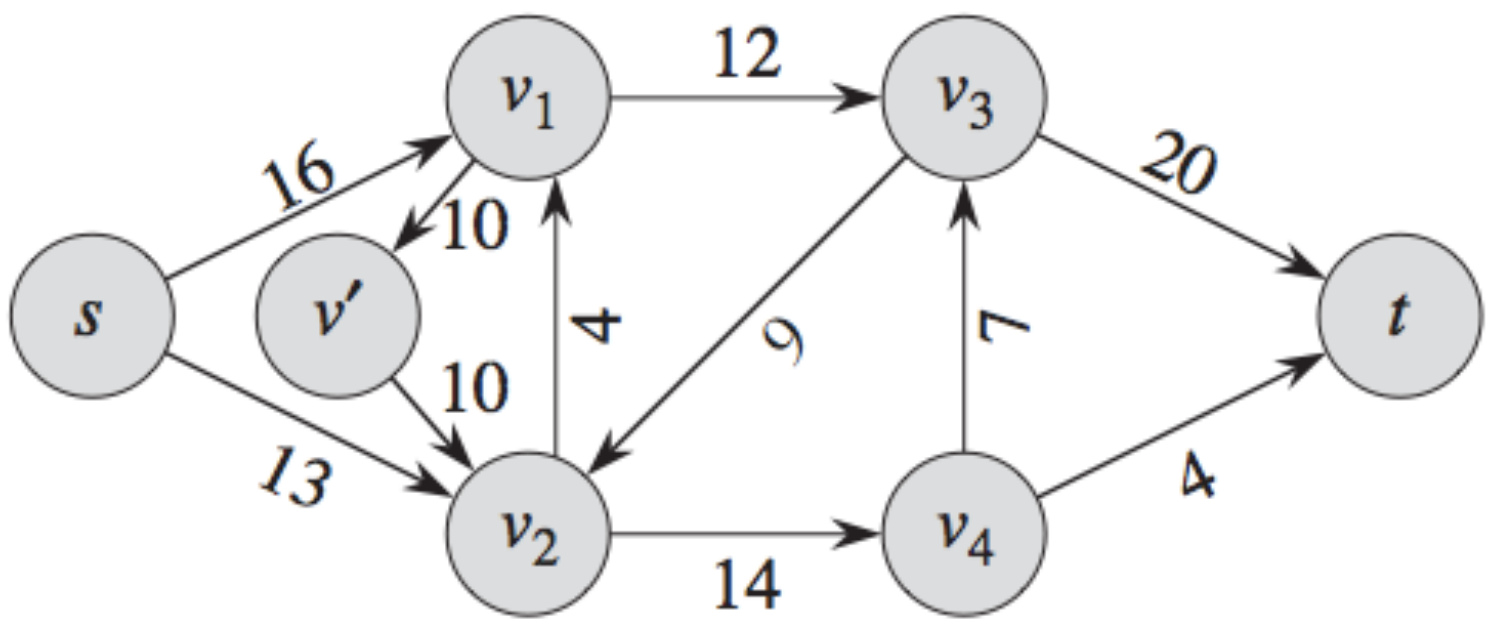
$c(u, v) \geq 0.$

- Si existe una arista (u,v) entonces no existe (v,u).
- Todos los vértices están en el camino de s a t.

Máximo Flujo

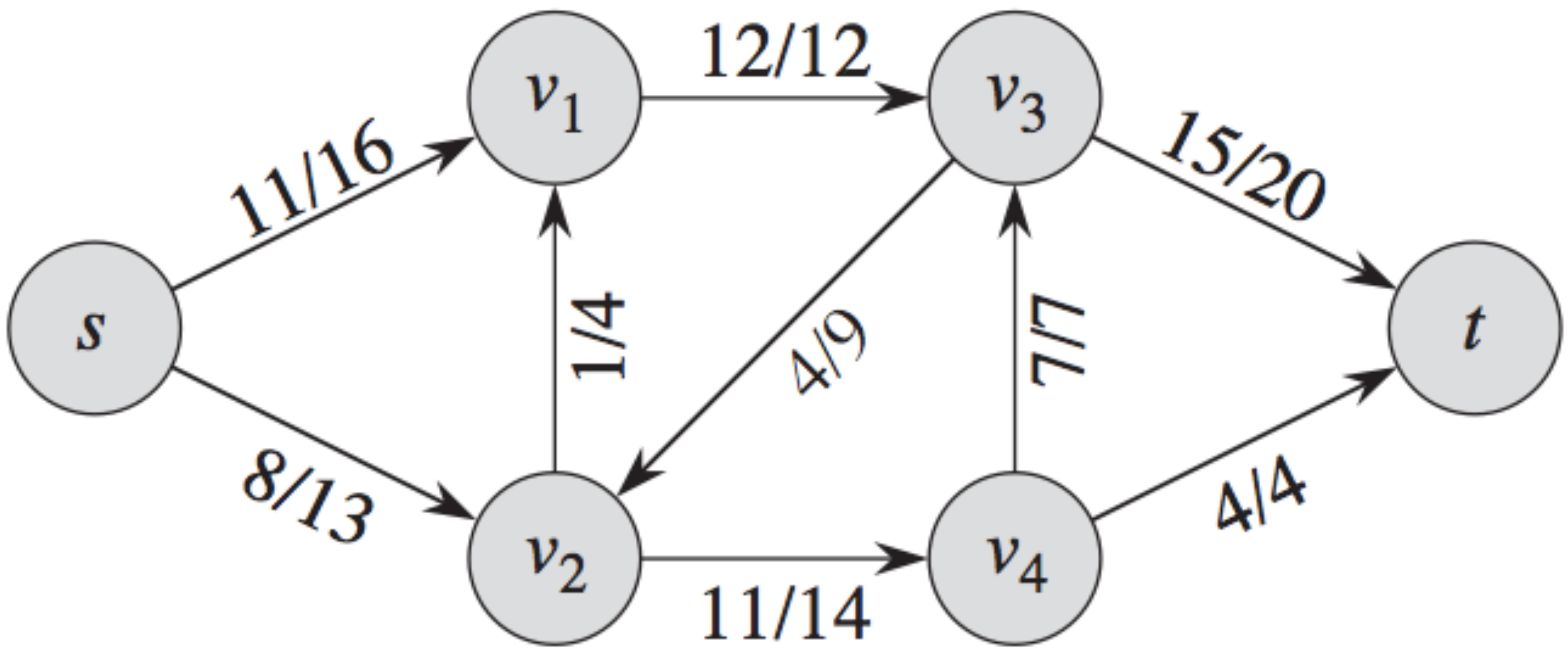
- Como convertir grafos





Máximo Flujo

- Ejemplo de flujo clásico, flujo / capacidad



|f|=19

Máximo Flujo

- Para un flujo f
- Restricción de Capacidad:

For all $u, v \in V$, we require $0 \leq f(u, v) \leq c(u, v)$.

- Conservación de Flujo

For all $u \in V - \{s, t\}$, we require

- $$\sum_{v \in V} f(v, u) = \sum_{v \in V} f(u, v) .$$

When $(u, v) \notin E$, there can be no flow from u to v, and $f(u, v) = 0$.

Máximo Flujo

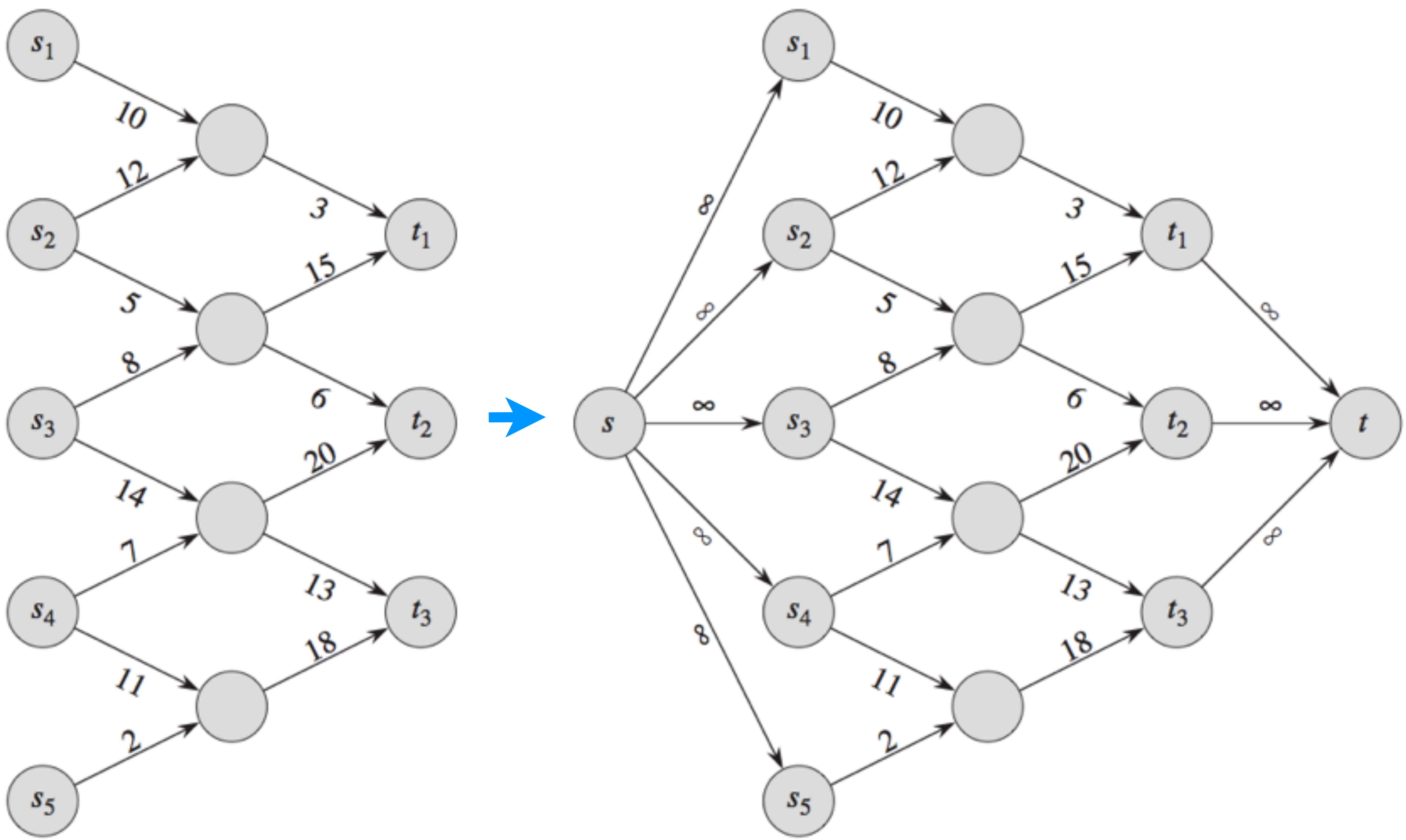
- El valor |f| de un flujo f es:

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v) - \sum_{v \in V} f(v, s) \, ,$$

- En muchos problemas nos interesa encontrar el máximo flujo

Abtracción de problemas diferentes

- Casos con multiples fuentes o sumideros



The Ford-Fulkerson method

```
FORD-FULKERSON-METHOD(G, s, t)
1  initialize flow f to 0
2  while there exists an augmenting path p in the residual network G_f
3      augment flow f along p
4  return f
```

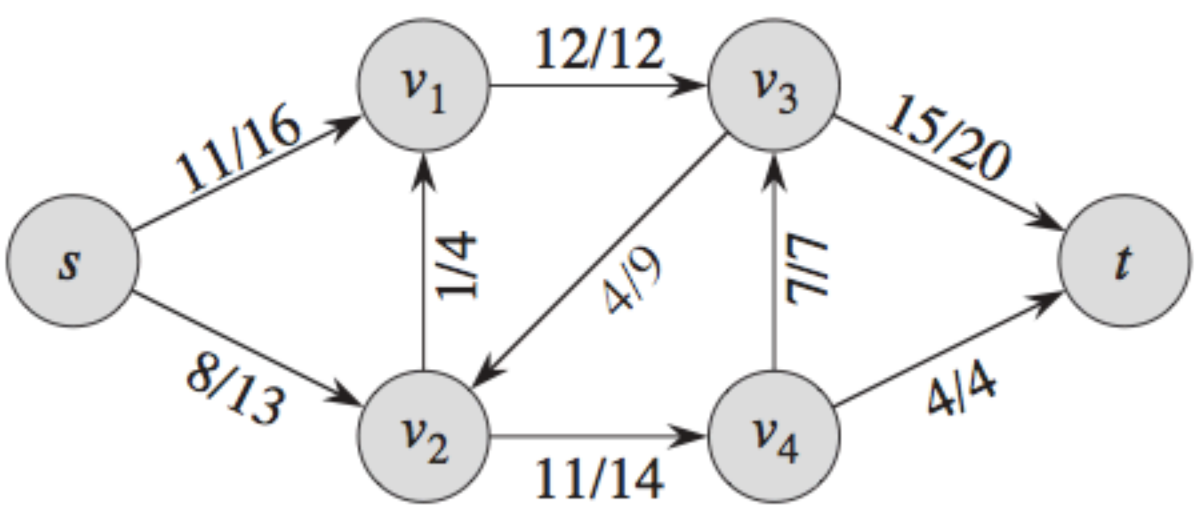
-Este método se basa en redes residuales, caminos de aumento y cortes.

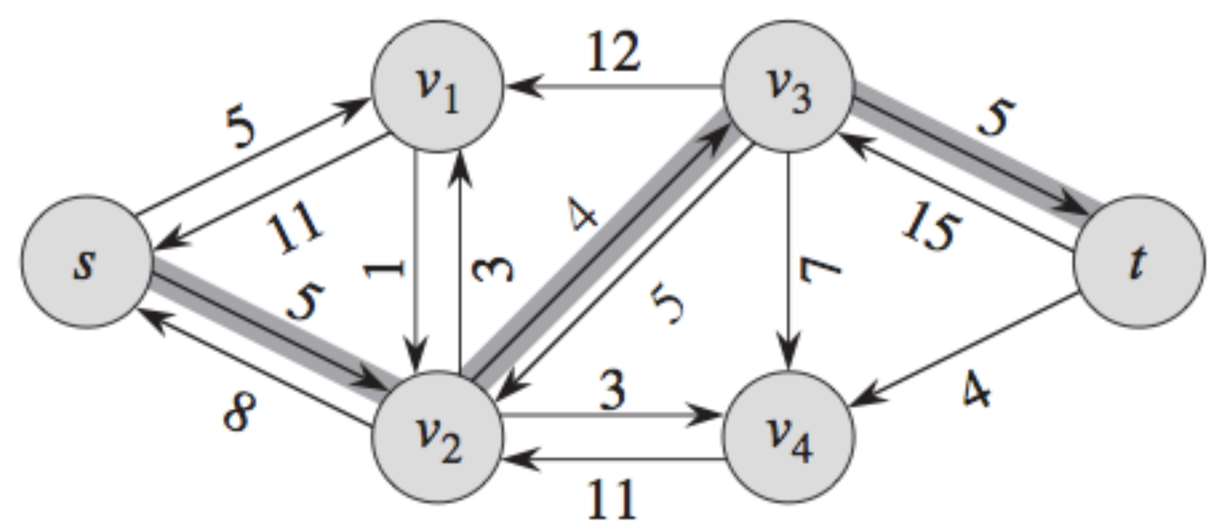
-La linea 3 puede implica incrementar flujo en algunas aristas [f(u,v)] y disminuirlo en otras.

The Ford-Fulkerson method

- La red residual G_f: con las aristas de capacidad residual (las positivas), $G_f = (V, E_f)$ $\quad E_f = \{(u,v) \in V \times V : c_f(u,v) > 0\}$.

$$c_f(u,v) = \begin{cases} c(u,v) - f(u,v) & \text{if } (u,v) \in E \ , \\ f(v,u) & \text{if } (v,u) \in E \ , \\ 0 & \text{otherwise} \ . \end{cases}$$





$$|E_f| \leq 2\,|E| \ .$$

The Ford-Fulkerson method

- La red residual, con su flujo f' nos indica como aumentar el flujo de la red original mediante una "función de aumento"

$$(f \uparrow f')(u, v) = \begin{cases} f(u, v) + f'(u, v) - f'(v, u) & \text{if } (u, v) \in E \,, \\ 0 & \text{otherwise} \,. \end{cases}$$

Cancelación

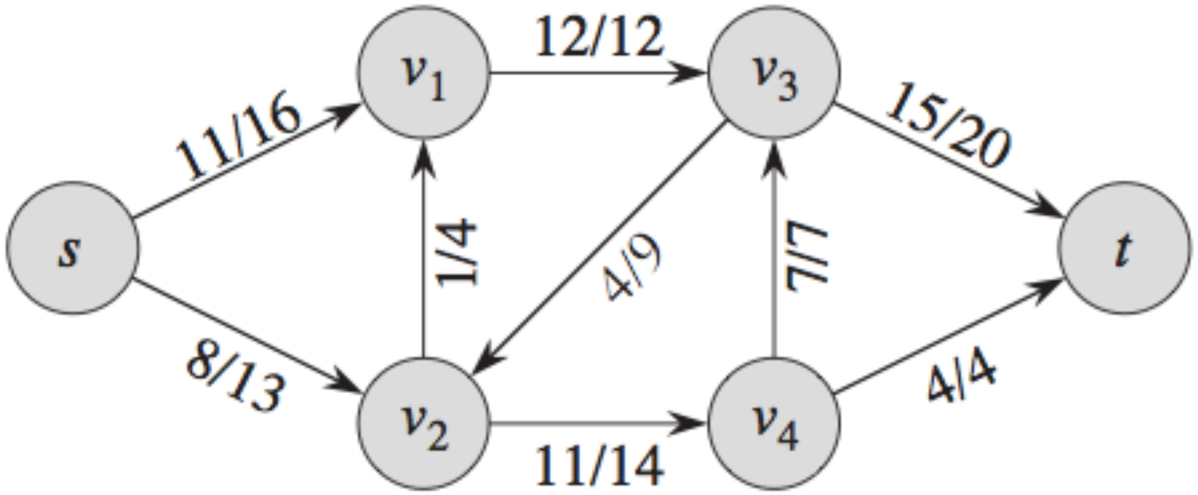
Lemma 26.1
Let $G = (V, E)$ be a flow network with source s and sink t, and let f be a flow in G. Let G_f be the residual network of G induced by f, and let f' be a flow in G_f. Then the function $f \uparrow f'$ defined in equation (26.4) is a flow in G with value $|f \uparrow f'| = |f| + |f'|$.

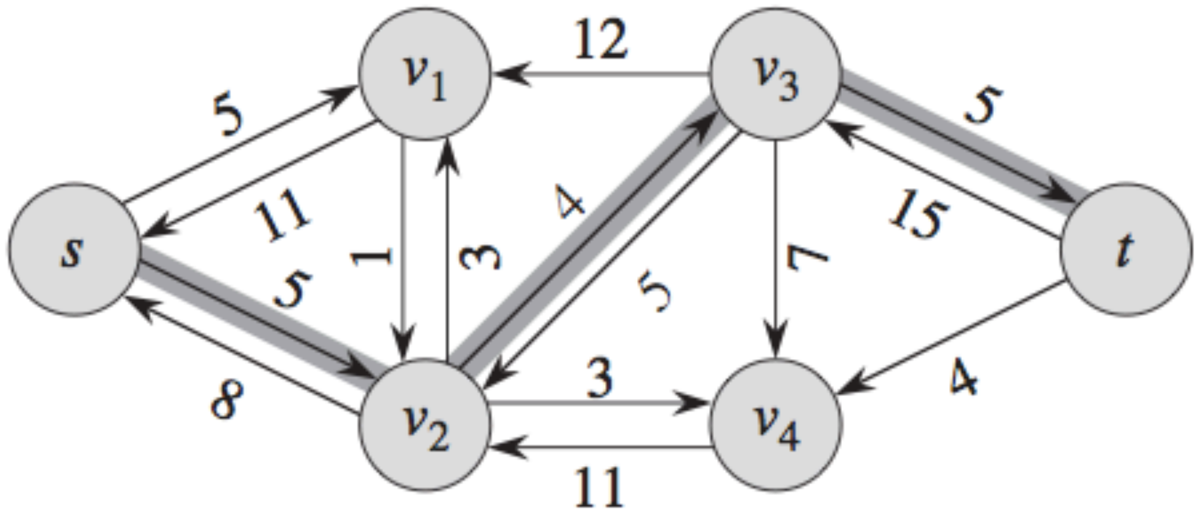
Ver la demostración

The Ford-Fulkerson method

- Caminos de aumento p, son caminos simples
- La capacidad residual de un camino

$$c_f(p) = \min\{c_f(u,v) : (u,v) \text{ is on } p\} \; .$$





The Ford-Fulkerson method

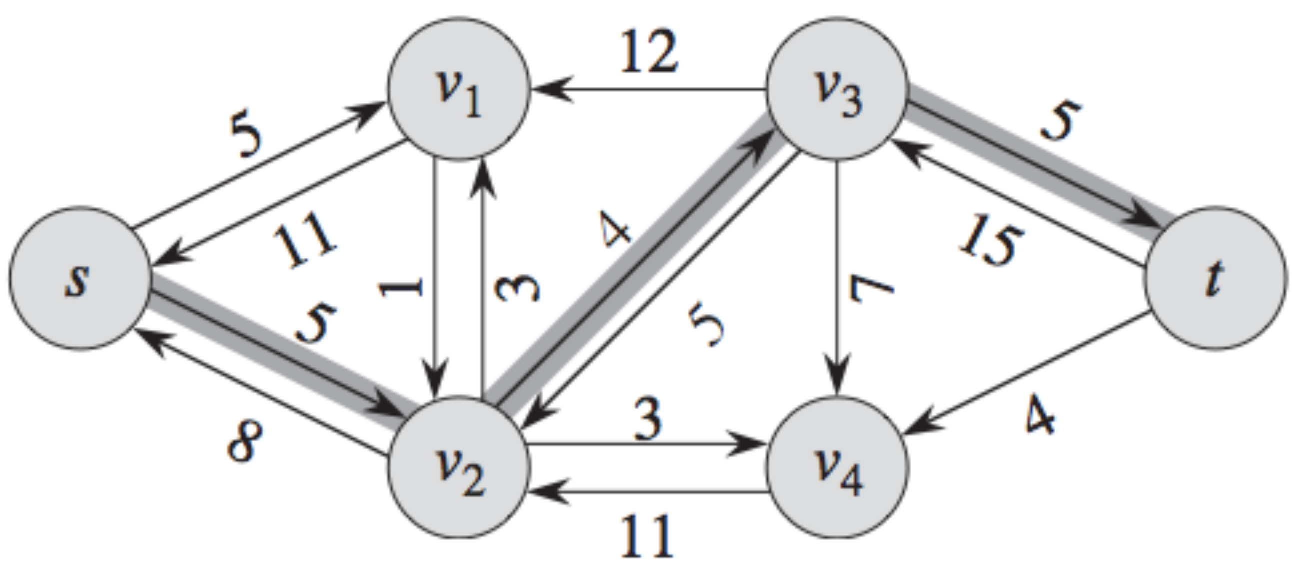
- de $c_f(p) = \min\{c_f(u,v) : (u,v) \text{ is on } p\}$.

Lemma

Let $G = (V, E)$ be a flow network, let f be a flow in G, and let p be an augmenting path in G_f. Define a function $f_p : V \times V \to \mathbb{R}$ by

$$f_p(u,v) = \begin{cases} c_f(p) & \text{if } (u,v) \text{ is on } p , \\ 0 & \text{otherwise} . \end{cases}$$

Then, f_p is a flow in G_f with value $|f_p| = c_f(p) > 0$. ■



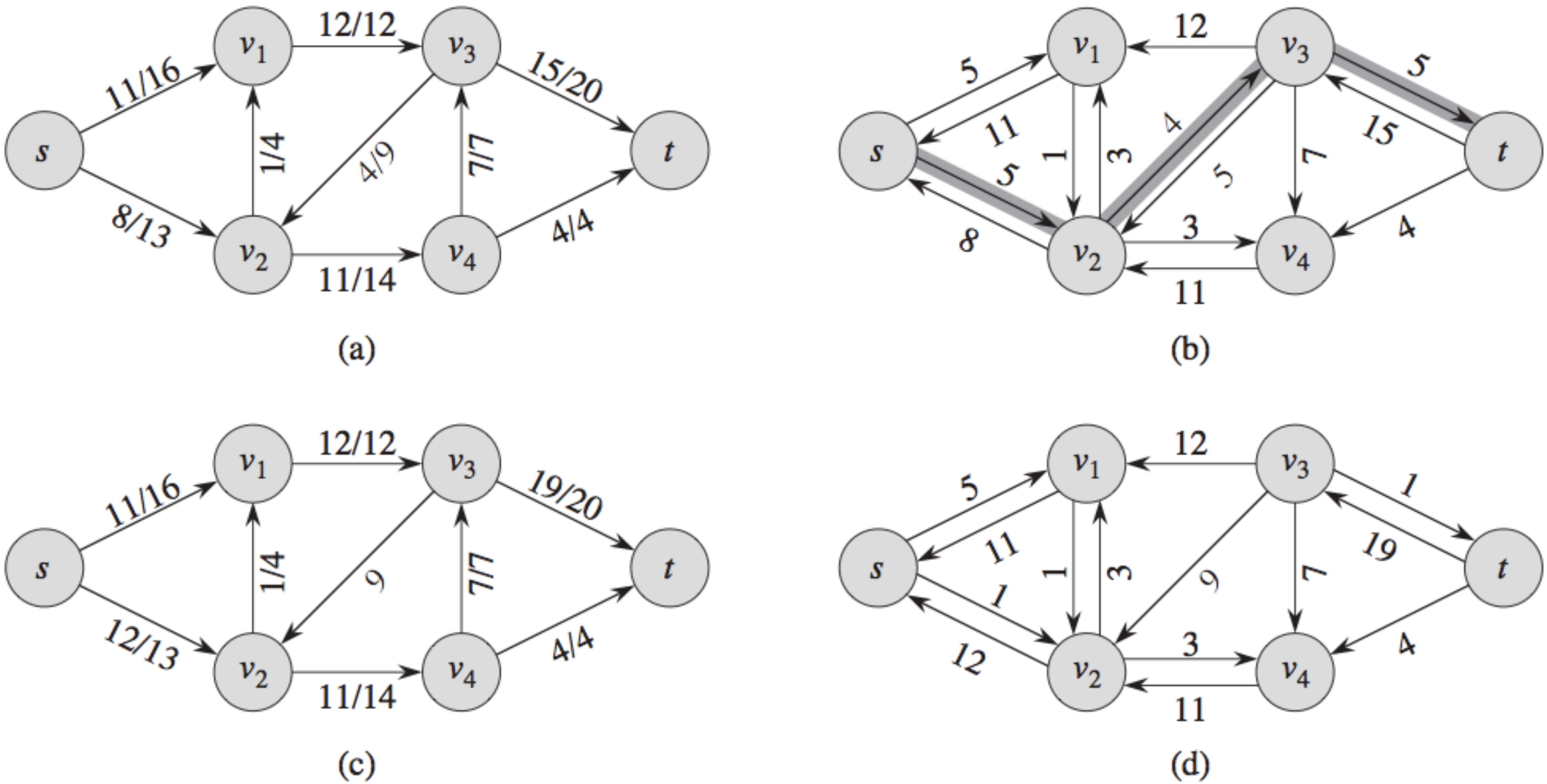
The Ford-Fulkerson method

Corollary 26.3

Let $G = (V, E)$ be a flow network, let f be a flow in G, and let p be an augmenting path in G_f. Let f_p be defined as in equation (26.8), and suppose that we augment f by f_p. Then the function $f \uparrow f_p$ is a flow in G with value $|f \uparrow f_p| = |f| + |f_p| > |f|$.

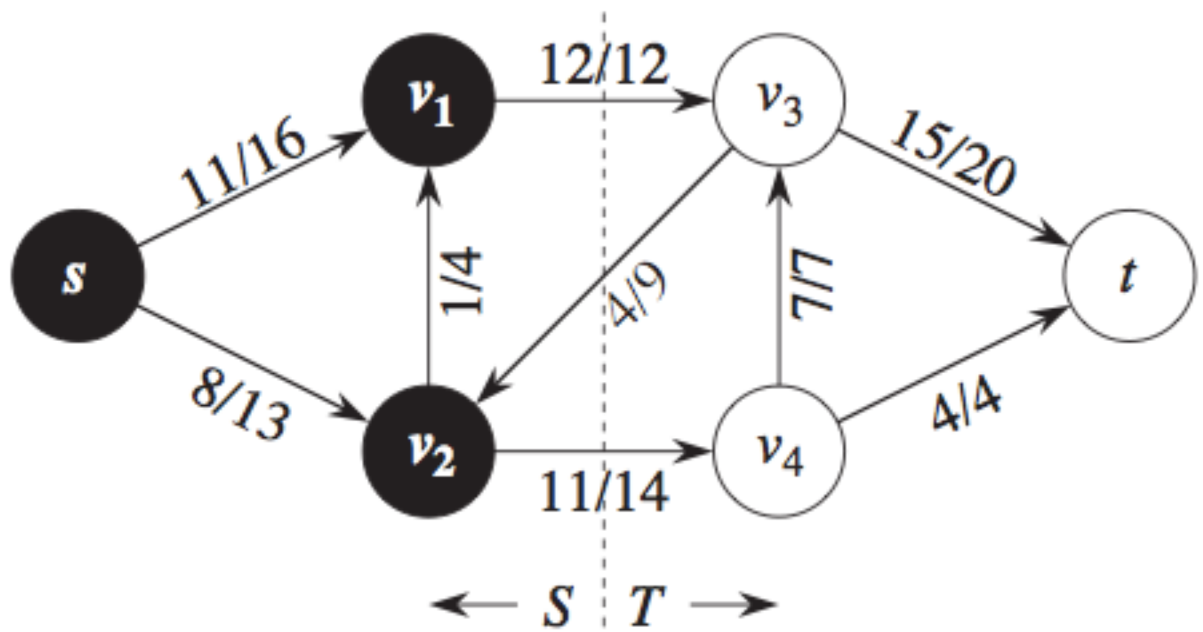
Demostración inmediata por lo lemas anteriores

The Ford-Fulkerson method



The Ford-Fulkerson method

- Un corte (S,T) en el grafo con flujo f



- El flujo neto y la capacidad del corte son:

$$f(S,T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u,v) - \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(v,u) . \quad =19$$

$$c(S,T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u,v) . \quad =26$$

- Nos interesa el mínimo corte, aquel con capacidad mínima de todos.

The Ford-Fulkerson method

Lemma 26.4

Let f be a flow in a flow network G with source s and sink t, and let (S, T) be any cut of G. Then the net flow across (S, T) is $f(S, T) = |f|$.

Corollary 26.5

The value of any flow f in a flow network G is bounded from above by the capacity of any cut of G.

Nos esta llevando a que el flujo máximo esta acotado por la capacidad del corte mínimo.

The Ford-Fulkerson method

Theorem 26.6 (Max-flow min-cut theorem)
If f is a flow in a flow network $G = (V, E)$ with source s and sink t, then the following conditions are equivalent:

1. f is a maximum flow in G.
2. The residual network G_f contains no augmenting paths.
3. $|f| = c(S, T)$ for some cut (S, T) of G.

El algoritmo

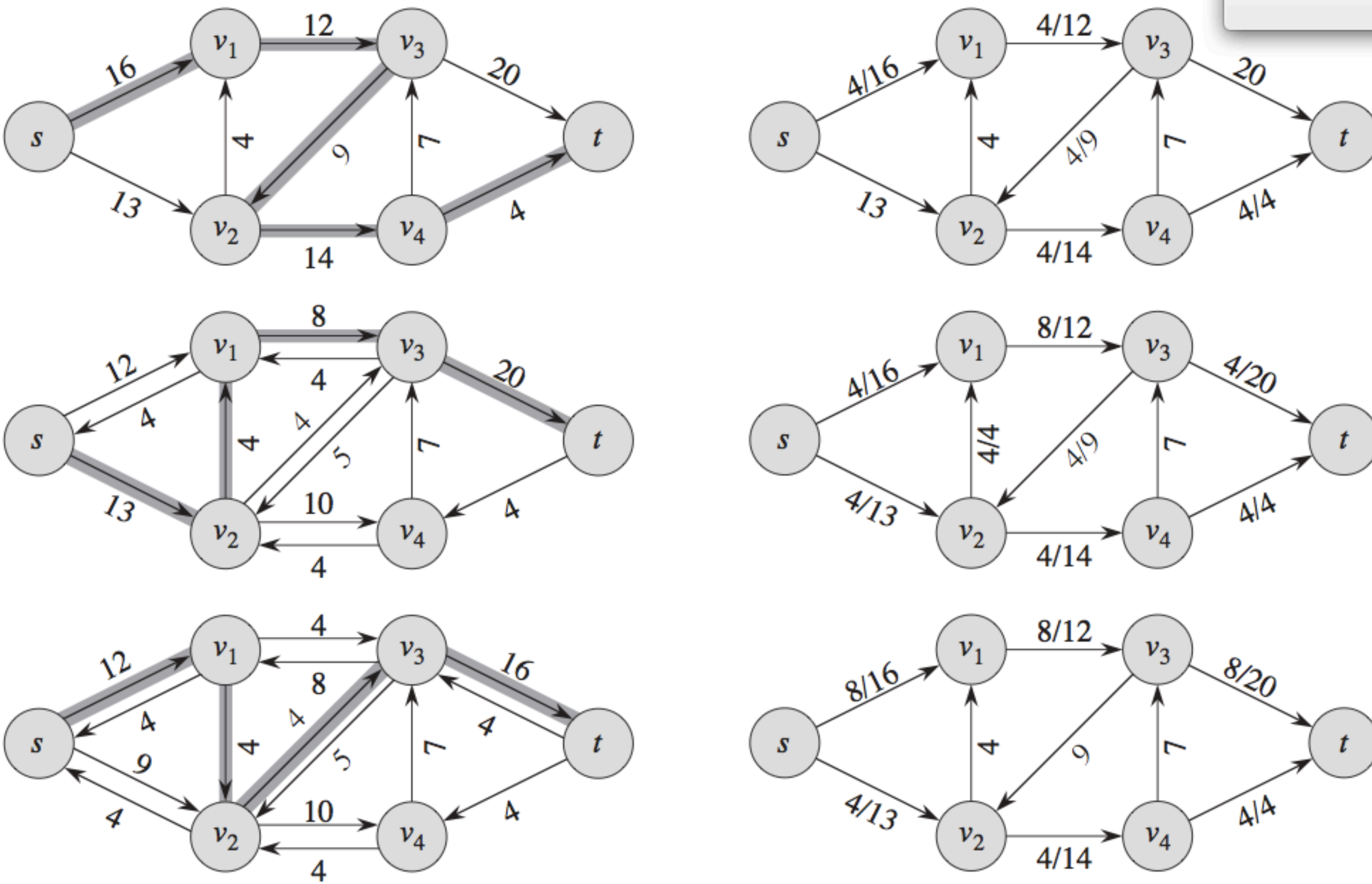
- El algoritmo de Ford Fulkerson básico, reemplazamos f por $f \uparrow f_p$

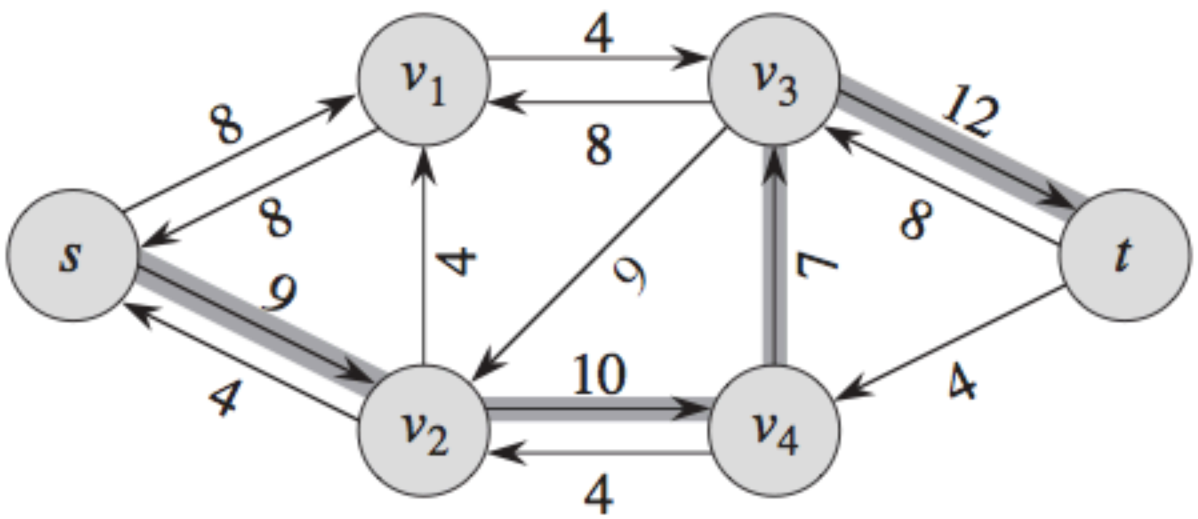
FORD-FULKERSON(G, s, t)

for each edge $(u, v) \in G.E$
    $(u, v).f = 0$
while there exists a path p from s to t in the residual network G_f
    $c_f(p) = \min\{c_f(u, v) : (u, v) \text{ is in } p\}$
    for each edge (u, v) in p
        if $(u, v) \in E$
            $(u, v).f = (u, v).f + c_f(p)$
        else $(v, u).f = (v, u).f - c_f(p)$

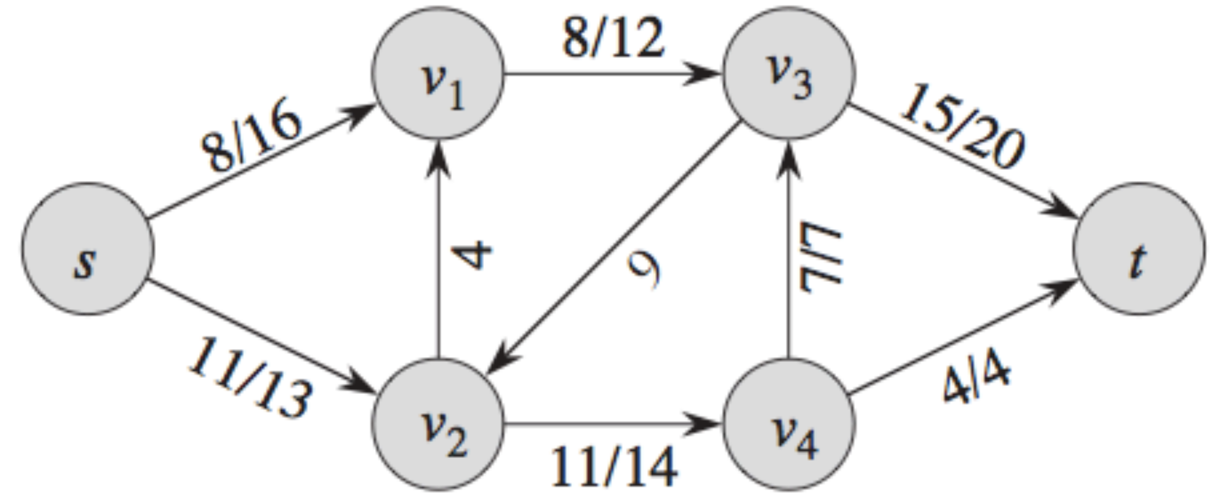
(cada arista residual es una arista en el grafo original o bien un regreso en una arista original)

mandar paper
Yesterday, 7:00 P

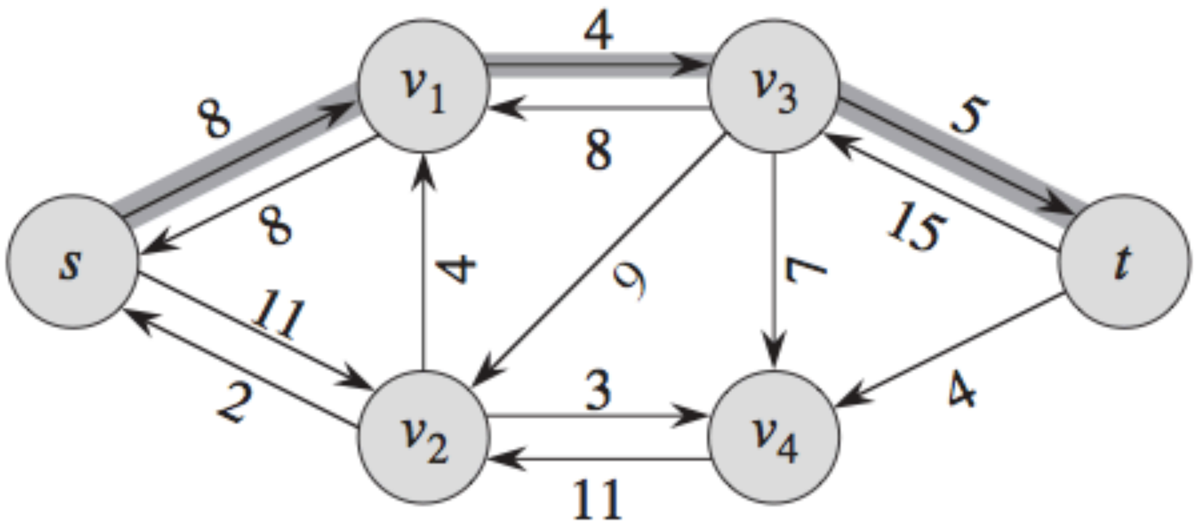




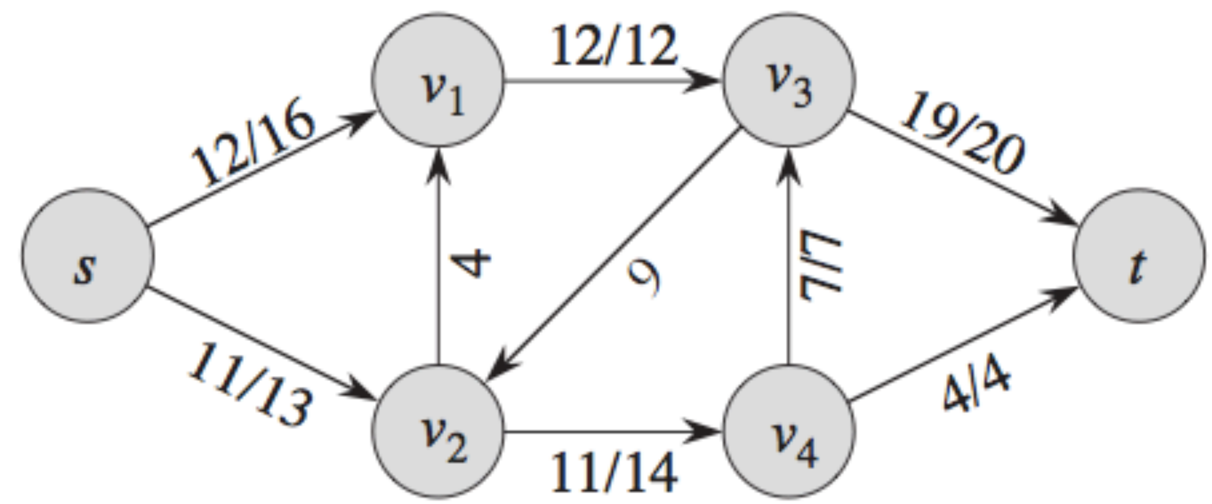
s
v_1
v_2
v_3
v_4
t
8
8
9
4
4
4
8
9
7
12
8
10
4
4



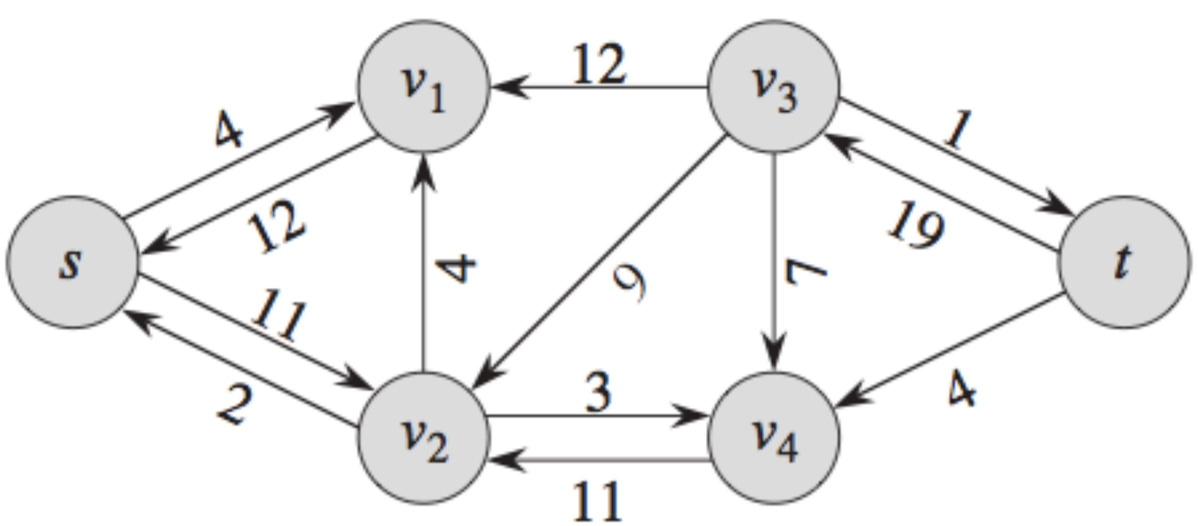
s
v_1
v_2
v_3
v_4
t
8/16
11/13
4
8/12
9
7/7
11/14
15/20
4/4



s
v_1
v_2
v_3
v_4
t
8
8
11
2
4
4
8
9
7
5
15
3
11
4



s
v_1
v_2
v_3
v_4
t
12/16
11/13
4
12/12
9
7/7
11/14
19/20
4/4



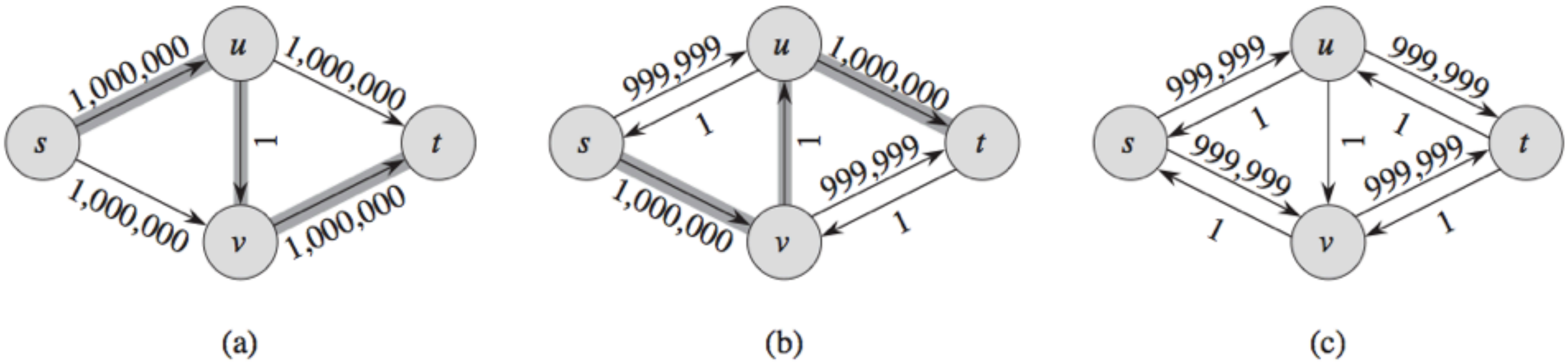
s
v_1
v_2
v_3
v_4
t
4
12
11
2
4
12
9
7
1
19
3
11
4

Detalles de implementación

- Necesitamos buscar el camino de aumento con, por ejemplo, busqueda en anchura.
- Si f^* denota el fujo maximo y estamos trabajando con capacidades enteras, el ciclo principal se ejecuta a lo mas f^* veces
- El tiempo de buscar el camino de aumento $O(V+2E) = O(E)$, entonces todo el algoritmo tiene $O(E|f^*|)$
- Cuando las capacidades son enteras y $|f^*|$ es pequeño, el algoritmo funciona muy bien.

Casos complicados

- ¿Problemas? suponiendo capacidades enteras, la complejidad del algoritmo es O(E |f*|)



capacidad residual de 1

siguiente red residual con camino de capacidad residual 1

siguiente red residual con camino de capacidad residual 1

Extensiones

- Por supuesto que necesitamos extensiones de este algoritmo
- The Edmonds-Karp algorithm, cuando busca el camino en le grafo residual de s a t, busca el camino de distancia mas corto.
- Su complejidad es $O(VE^2)$