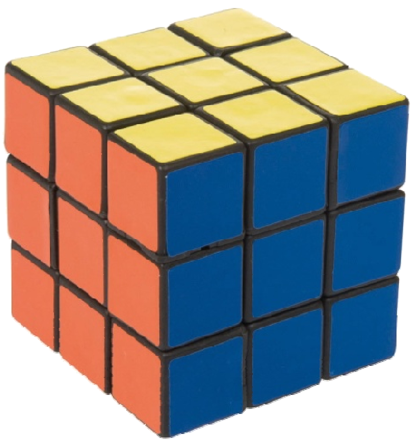
Polinomios y transformada rápida de Fourier:

Polinomios

Los polinomios son una parte importante del Álgebra. Están presentes en todos los contextos científicos y tecnológicos: desde los ordenadores y la informática hasta la carrera espacial.

La fórmula para calcular el volumen de un cubo en función de la longitud (*l*) de su lado viene dada por:



$$V(l) = l^3$$

La fórmula que expresa el movimiento de un cuerpo en caída libre viene dada por el siguiente polinomio:

$$P(t) = \frac{1}{2} g t^2$$

t: tiempo
g: gravedad

Expresiones Algebraicas

Monomio:
Expresión algebraica
que consta de un solo término

$$\frac{2}{3}x^4y$$

Polinomio:
Expresión algebraica
que consta de más de un término

$$-a^2b-3ab+8b-1$$

Partes de un monomio

Los **coeficientes** son los números que aparecen multiplicando.

La **parte literal** la forman las letras y sus exponentes.

$$2x^2 \qquad -12x^3yz^2 \qquad \sqrt{4}abc^{15}$$

El **grado del monomio** es la suma de los exponentes de las letras.

$$2x^{\boxed{2}} \qquad -12x^{\boxed{3}}y^{\boxed{1}}z^{\boxed{2}} \qquad \sqrt{4}a^{\boxed{1}}b^{\boxed{1}}c^{\boxed{15}}$$

$$Gr.=2 \qquad Gr.=3+1+2=6 \qquad Gr.=1+1+15=17$$

POLINOMIOS

Un **polinomio** es una expresión algebraica formada por la suma o resta de dos o más monomios no semejantes.

Coeficiente principal

Grado: 2 + 5 = 7

Término independiente

$$3xy^3 - 7x^2y^5 + 3xyz - 21$$

Términos

Cada uno de los monomios se llama **término**, y si no tiene parte literal se llama **término independiente**.

POLINOMIOS

Un **polinomio** es una expresión algebraica formada por la suma o resta de dos o más monomios no semejantes.

Coeficiente principal

Grado: 2 + 5 = 7

Término independiente

$$3xy^3 - 7x^2y^5 + 3xyz - 21$$

Términos

El mayor de los grados de todos sus términos se denomina **grado** del polinomio.

POLINOMIOS

Un **polinomio** es una expresión algebraica formada por la suma o resta de dos o más monomios no semejantes.

Coeficiente principal

Grado: 2 + 5 = 7

Término independiente

$$3xy^3 - 7x^2y^5 + 3xyz - 21$$

Términos

Se llama **coeficiente principal** al coeficiente del monomio de mayor grado.

POLINOMIOS

El **valor numérico** de un polinomio $P(x)$, para un valor $x=a$, lo expresamos como $P(a)$ y se obtiene sustituyendo la variable x por el valor a en el polinomio y operando.

Ejemplo: $P(x)=7x^4-3x^3+4x-10$

$$P(2)=7\cdot 2^4-3\cdot 2^3+4\cdot 2-10=$$

$$=7\cdot 16-3\cdot 8+8-10=112-24+8-10=86$$

$$P(-1)=7\cdot(-1)^4-3\cdot(-1)^3+4\cdot(-1)-10=$$

$$=7\cdot 1-3\cdot(-1)-4-10=7+3-4-10=-4$$

POLINOMIOS

División:
- Algoritmo de la división
- Leyes de los exponentes
- Leyes de los signos

Suma:
- Reducción de Términos semejant

Operaciones con Polinomios

Multiplicación:
- Propiedad distributiva
- Leyes de los exponentes
- Leyes de los signos

Resta:
- Signo "–" precediendo un signo de agrupación
- Reducción de términos semejantes

POLINOMIOS

Sumar $$2a^2b - ab + 7b$$

con

$$-3a^2b - 4ab + b - 1$$

$$\left(2a^2b - ab + 7b\right) + \left(-3a^2b - 4ab + b - 1\right)$$

POLINOMIOS

$$\left(2a^2b - ab + 7b\right) + \left(-3a^2b - 4ab + b - 1\right) =$$

$$\Downarrow$$

$$= 2a^2b - ab + 7b - 3a^2b - 4ab + b - 1 =$$

¡¡ Reducción de términos semejantes !!

$$= -a^2b - 5ab + 8b - 1$$

POLINOMIOS

- La *suma* de los polinomios p y q es el polinomio r de modo que

$$r(x) = p(x) + q(x) =$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{j=0}^{m} b_j x^j = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} c_k x^k$$

- Sumar polinomios equivale sumar los coeficientes que afectan a la misma potencia de x.

POLINOMIOS

De

$$2a^2b - ab + 7b$$

restar

$$-3a^2b - 4ab + b - 1$$

$$\left(2a^2b - ab + 7b\right) - \left(-3a^2b - 4ab + b - 1\right)$$

$$\left(2a^2b - ab + 7b\right) - \left(-3a^2b - 4ab + b - 1\right) =$$

Signos de agrupación

$$= 2a^2b - ab + 7b + 3a^2b + 4ab - b + 1 =$$

Reducción de términos semejantes

$$= 5a^2b + 3ab + 6b + 1$$

POLINOMIOS

Multiplicar $$2a^2b - ab + 7b$$

por

$$b - 1$$

$$\left(2a^2b - ab + 7b\right) \bullet \left(b - 1\right)$$

Propiedad distributiva

$$\left(2a^2b - ab + 7b\right)\left(b \quad -1\right) =$$

$$\left(2a^2b\right)\left(b-1\right) + \left(-ab\right)\left(b-1\right) + \left(7b\right)\left(b-1\right)$$

Propiedad distributiva

$$\left(2a^2b\right)(b-1)+(-ab)(b-1)+(7b)(b-1)$$

$$\left(2a^2b\right)(b)+\left(2a^2b\right)(-1)$$

$$+$$

$$(-ab)(b)+(-ab)(-1)$$

$$+$$

$$(7b)b+(7b)(-1)$$

$$2a^2b^2-2a^2b-ab^2+ab+7b^2-7b$$

POLINOMIOS

- El *producto* de los polinomios p y q es el polinomio s de modo que

$$s(x)=p(x)q(x)=\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j\right)=$$

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_i b_j x^{i+j}=\sum_{k=0}^{n+m} d_k x^k$$

- Nótese que el grado del polinomio suma r es a lo sumo el máximo de n y m.

Transformada de Fourier

La Transformada de Fourier

Si la función f(t) está dada por una lista de N valores $f(t_1)$, $f(t_2)$, ...$f(t_N)$ se dice que está ***discretizada o muestreada***, entonces la integral que define la Transformada de Fourier:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Se convierte en la sumatoria

$$\boxed{F(n) = \sum_{k=1}^{N} f(t_k) e^{-j\frac{2\pi n}{N}(k-1)}, \quad \text{para } 1 \le n \le N}$$

(Donde k es la frecuencia discreta)

Transformada Discreta de Fourier

Transformada discreta de Fourier (TDF)

$$F(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-j2\pi ux/M}$$

$$F_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n W_N^{-nk}$$

$$\text{para} \quad k = 0,1,\ldots, N-1$$

Donde: $$W_N = e^{j2\pi/N}$$

Complejidad de la TDF

El cálculo de la *transformada discreta de Fourier* involucra dos pasos:

Cálculo de W_N^{-nk} , para $n, k = 0, 1, \ldots , N\text{-}1$

Complejidad = $O(N^2)$

Cálculo de F_k = suma de N números, $k = 0, \ldots, N\text{-}1$

Complejidad = $O(N^2)$

La Transformada Rápida de Fourier

La Transformada Discreta de Fourier (DFT) requiere el cálculo de N funciones exponenciales para obtener F(n),

Cálculo enorme para N grande.

Se han desarrollado métodos que permiten ahorrar cálculos y evaluar de manera rápida la Transformada discreta, a estos métodos se les llama

Transformada Rápida de Fourier (FFT)

Transformada rápida de Fourier TTF

La transformada rápida de Fourier sigue la estrategia de: *divide y vencerás*!!

Por: J.W. Cooley y
J.W. Tokey, 1965

La idea:

$$F_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_n W_N^{-nk}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N/2-1} g_n W_{N/2}^{-nk} \qquad \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N/2-1} h_n W_{N/2}^{-nk}$$

$$TDF(g, N/2) \qquad TDF(h, N/2)$$

Transformada rápida de Fourier TTF

Se divide la TDF en coeficientes en posiciones *pares* e *impares* :

$$F_{2k} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} (f_n + f_{n+N/2}) W_{N/2}^{-nk} = TDF(g, N/2)$$

$$F_{2k+1} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} [(f_n - f_{n+N/2}) W^n] W_{N/2}^{-nk} = TDF(h, N/2)$$

Transformada rápida de Fourier TTF

Calcular la TDF de N coeficientes es igual a calcular 2 TDF de $N/2$ coeficientes.

Se aplica esta idea de manera recursiva y obtenemos la *FFT*.

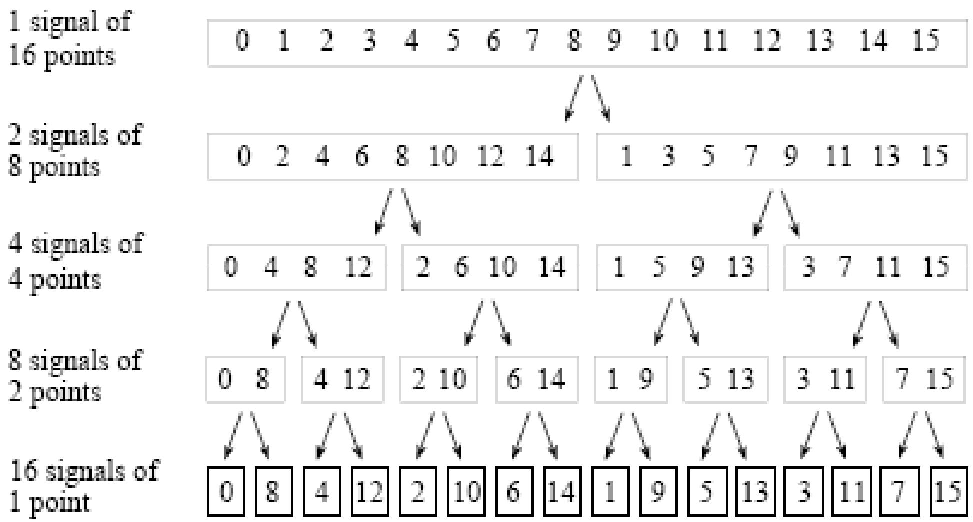
La complejidad de la FFT = $O(N \log_2 N)$

Transformada rápida de Fourier TTF

El algoritmo de la FFT:

1) **Descomponer** *una señal* del dominio del tiempo de *tamaño N* puntos en *N señales* del dominio del tiempo cada una compuesta por *un sólo punto*.
2) **Calcular** los *N espectros de frecuencia* correspondientes a estas *N señales* en el dominio del tiempo.
3) **Sintetizar** los *N espectros* en *un arreglo de espectros unico.*

Transformada rápida de Fourier TTF



Descomposición de FFT: Una señal de *N* puntos se descompone en N señales de un sólo punto cada una.

Cada estado utiliza una *descomposición entrelazada*, separando las muestras enumeradas como *pares* e *impares*.

Esta es una señal que tiene inicialmente 16 puntos y es descompuesta en 16 señales de un sólo punto cada una.

Descomposición entrelazada

La *descomposición entrelazada* se utiliza cada vez que la señal se divide en dos, esto es, la señal se separa en sus muestras numeradas como *pares* e *impares*.

Se requieren $log_2 N$ estados para esta descomposición,

Por ejemplo: una señal de 16 puntos (2^4) requiere de 4 estados, una señal de 512 puntos (2^7) requiere de 7 estados, una señal de 4096 (2^{12}) requiere de 12 estados, etc.

Reordenamiento de las muestras

La descomposición no es más que un *reordenamiento* de las muestras.

Sample numbers in normal order

Decimal	*Binary*
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
10	1010
11	1011
12	1100
13	1101
14	1110
15	1111

Sample numbers after bit reversal

Decimal	*Binary*
0	0000
8	1000
4	0100
12	1100
2	0010
10	1010
6	0100
14	1110
1	0001
9	1001
5	0101
13	1101
3	0011
11	1011
7	0111
15	1111

A la izquierda se ve una lista de valores decimales con sus equivalentes valores binarios.

A la derecha las muestras se encuentran reordenadas también con sus equivalentes binarios.

La idea importante aquí es que el número binario son los reversos de cada uno. La muestra 3 (0011) se cambia por 12 (1100), la muestra 14 (1110) se cambia por 7 (0111).

A ésto se le llama *ordenamiento reverso de bit* (*bit reversal sorting*). Reordena las *N* muestras del dominio del tiempo, *invirtiendo los bits* de izquierda a derecha.

Transformada Rápida de Fourier TRF

Combinar los *N* espectros de frecuencia en el *orden inverso* en que se llevó la descomposición en el dominio del tiempo.

Hay que pasar por un estado cada vez.

En el primer estado 16 espectros de frecuencia (1 punto c/u) se sintetizan en 8 espectros de frecuencia (2 puntos c/u).

En el segundo estado 8 espectros de frecuencia (2 puntos c/u) se sintetizan en 4 espectros de frecuencia (4 puntos c/u), etc.

El último estado resulta el espectro de frecuencia de 16 puntos esperado como salida de la TRF.

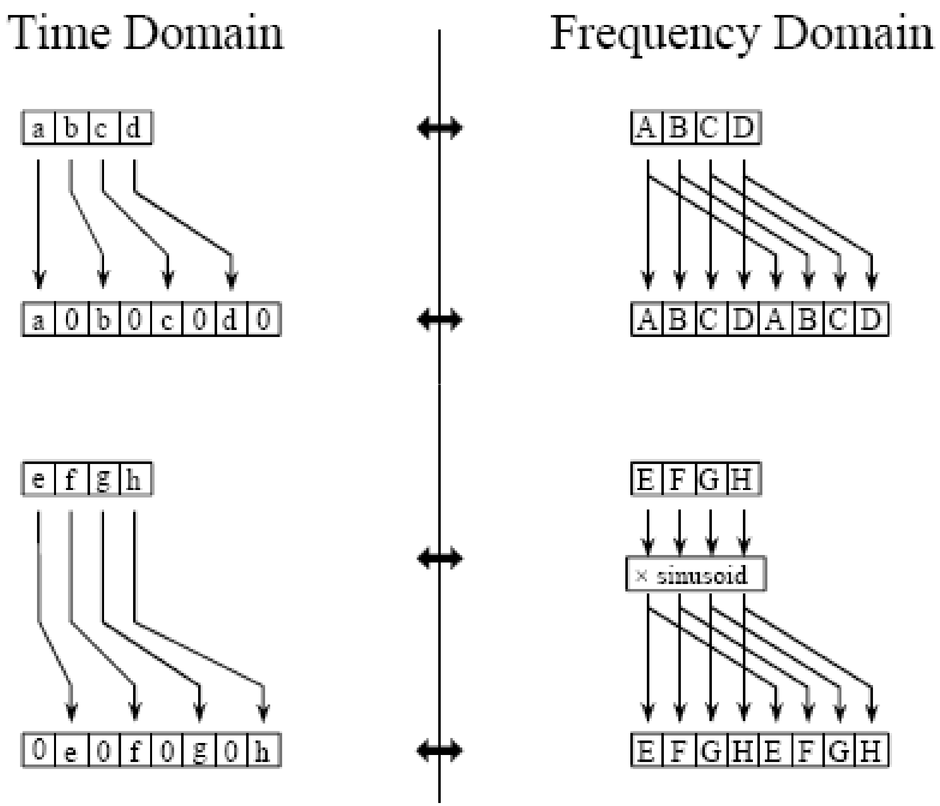
Síntesis de la TRF

A la hora de unirse, las dos señales de tiempo se mezclan de manera algo diferente.

A una señal se le ponen en *cero las posiciones pares*, mientras que a la otra se le ponen en *cero las posiciones impares*.

El *corrimiento* en el dominio del tiempo corresponde a la *multiplicación* del espectro de frecuencia por una *senoidal.*

Síntesis de la TRF



Dos espectros de frecuencia de 2 puntos c/u se *combinan* en un sólo espectro de frecuencia de 8 puntos.

Diluir (mezclar) los puntos en el dominio del tiempo *con ceros* corresponde a una *duplicación* en el dominio de la frecuencia.

El espectro de frecuencia se combina en la TRF duplicándolos, y luego sumando los espectros duplicados.