

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Цель работы: научиться решать системы нелинейных уравнений (СНУ) методом простых итераций (МПИ) и методом Ньютона с помощью ЭВМ.

Содержание работы:

1. Изучить МПИ и метод Ньютона для решения систем нелинейных уравнений.
2. На конкретном примере усвоить порядок решения систем нелинейных уравнений МПИ и методом Ньютона с помощью ЭВМ.
3. Составить программу и с ее помощью решить систему уравнений с точностью $\varepsilon = 0.001$.
4. Изменить $\varepsilon = \varepsilon/100$ и снова решить задачу. Сделать вывод о влиянии точности на количество итераций.
5. Составить отчет о проделанной работе.

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Задание.

1. Аналитически решить СНУ вида:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = x + y - 5 = 0; \\ f_2(x, y) = xy - 6 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

2. Построить рабочие формулы МПИ и метода Ньютона для численного решения системы (1) при начальном приближении

$$(x^{(0)}, y^{(0)}) = (2, 1). \quad (2)$$

3. Составить программу на любом языке программирования, реализующую построенный итерационный процесс.

Решение.

1. Аналитическим решением СНУ (1) являются точки (2;3) и (3;2).
2. Для построения рабочих формул МПИ для численного решения системы (1) необходимо вначале привести ее к виду:

$$\begin{cases} x = \Phi_1(x, y) \\ y = \Phi_2(x, y) \end{cases} \quad (3)$$

Для этого умножим первое уравнение системы (1) на неизвестную постоянную α , второе - на β , затем сложим их и добавим в обе части уравнения x . Получим первое уравнение преобразуемой системы

$$x = x + \alpha f_1(x, y) + \beta f_2(x, y) = x + \alpha(x + y - 5) + \beta(xy - 6), \quad (4)$$

где $\Phi_1(x, y) = x + \alpha(x + y - 5) + \beta(xy - 6)$. Далее, умножим первое уравнение системы (1) на неизвестную постоянную γ , второе - на δ , затем сложим их и добавим в обе части уравнения y . Тогда второе уравнение преобразуемой

системы будет иметь вид:

$$y = y + \gamma f_1(x, y) + \delta f_2(x, y) = y + \gamma(x + y - 5) + \delta(xy - 6), \quad (5)$$

где $\Phi_2(x, y) = y + \gamma(x + y - 5) + \delta(xy - 6)$.

Неизвестные постоянные $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ определим из достаточных условий сходимости итерационного процесса:

$$\left| \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right| < 1 \text{ и } \left| \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right| < 1.$$

Запишем эти условия более подробно:

$$\begin{cases} \left| 1 + \alpha \frac{\partial f_1}{\partial x} + \beta \frac{\partial f_2}{\partial x} \right| + \left| \gamma \frac{\partial f_1}{\partial x} + \delta \frac{\partial f_2}{\partial x} \right| < 1 \\ \left| \alpha \frac{\partial f_1}{\partial y} + \beta \frac{\partial f_2}{\partial y} \right| + \left| 1 + \gamma \frac{\partial f_1}{\partial y} + \delta \frac{\partial f_2}{\partial y} \right| < 1 \end{cases}$$

Полагая равными нулю выражения под знаком модуля, получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) 4 порядка с 4 неизвестными $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:

$$\begin{cases} 1 + \alpha \frac{\partial f_1}{\partial x} + \beta \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0; \\ \gamma \frac{\partial f_1}{\partial x} + \delta \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0; \\ \alpha \frac{\partial f_1}{\partial y} + \beta \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0; \\ 1 + \gamma \frac{\partial f_1}{\partial y} + \delta \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Для решения системы (6) необходимо вычислить частные производные $\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial y}$:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y} = 1, \frac{\partial f_2}{\partial x} = y, \frac{\partial f_2}{\partial y} = x.$$

Тогда СЛАУ (6) запишется так:

$$\begin{cases} 1 + \alpha + \beta y = 0; \\ \gamma + \delta y = 0; \\ \alpha + \beta x = 0; \\ 1 + \gamma + \delta x = 0. \end{cases}$$

Решением этой системы являются следующие значения: $\alpha = \frac{x}{y-x},$

$\beta = -\frac{1}{y-x}, \gamma = \frac{y}{x-y}, \delta = -\frac{1}{x-y}$. Тогда рабочие формулы (4), (5) для решения СЧУ (1) примут вид:

$$x = x + \frac{x}{y-x}(x+y-5) - \frac{1}{y-x}(xy-6),$$

$$y = y + \frac{y}{x-y}(x+y-5) - \frac{1}{x-y}(xy-6).$$

Для реализации на ЭВМ рабочие формулы можно переписать так:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \frac{x^{(k)}}{y^{(k)} - x^{(k)}}(x^{(k)} + y^{(k)} - 5) - \frac{1}{y^{(k)} - x^{(k)}}(x^{(k)}y^{(k)} - 6),$$

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + \frac{y^{(k)}}{x^{(k)} - y^{(k)}}(x^{(k)} + y^{(k)} - 5) - \frac{1}{x^{(k)} - y^{(k)}}(x^{(k)}y^{(k)} - 6), k = 0, 1, 2, \dots$$

После несложных преобразований данные формулы примут вид:

$$x^{(k+1)} = \frac{-x^{(k)}y^{(k)} + 5x^{(k)} - 6}{x^{(k)} - y^{(k)}},$$

$$y^{(k+1)} = \frac{x^{(k)}y^{(k)} - 5y^{(k)} + 6}{x^{(k)} - y^{(k)}}, k = 0, 1, 2, \dots$$

Заметим, что если частные производные $\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial y}$ мало изменяются в окрестности начального приближения (2), то:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y} = 1, \frac{\partial f_2}{\partial x} = y|_{(2;1)} = 1, \frac{\partial f_2}{\partial y} = x|_{(2;1)} = 2.$$

Тогда СЛАУ (6) запишется так:

$$\begin{cases} 1 + \alpha + \beta = 0; \\ \gamma + \delta = 0; \\ \alpha + 2\beta = 0; \\ 1 + \gamma + 2\delta = 0. \end{cases}$$

Решением этой системы являются точки $\alpha = -2, \beta = \gamma = 1, \delta = -1$. Тогда рабочие формулы (4), (5) МПИ для решения СНУ (1) примут вид:

$$x = x - 2(x+y-5) + (xy-6),$$

$$y = y - (x+y-5) - (xy-6).$$

Для реализации на ЭВМ рабочие формулы можно переписать так:

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= x^{(k)} - 2(x^{(k)} + y^{(k)} - 5) + (x^{(k)}y^{(k)} - 6), \\ y^{(k+1)} &= y^{(k)} - (x^{(k)} + y^{(k)} - 5) - (x^{(k)}y^{(k)} - 6), k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Итерационный процесс (7) можно начать, задав начальное приближение (2). Процесс (7) заканчивается при одновременном выполнении двух условий: $|x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon$ и $|y_{k+1} - y_k| \leq \varepsilon$. В этом случае значения x_{k+1} и y_{k+1} являются приближенным значением одного из решений СНУ (1).

3. Для построения рабочих формул метода Ньютона в виде

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} - W^{-1} \left(\bar{x}^{(k)} \right) f \left(\bar{x}^{(k)} \right), \quad (8)$$

$$\text{где } W \left(\bar{x}^{(k)} \right) = \begin{pmatrix} (f_1)'_{x_1}, \dots, (f_1)'_{x_n} \\ \dots \\ (f_n)'_{x_1}, \dots, (f_n)'_{x_n} \end{pmatrix}_{\left(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)},$$

необходимо:

$$1. \text{ Найти матрицу частных производных } W(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}.$$

2. Найти определитель этой матрицы:

$$\det W(x, y) = x - y.$$

3. Определить обратную матрицу:

$$(W(x, y))^{-1} = \frac{1}{\det W(x, y)} \begin{pmatrix} x & -y \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{x - y} \begin{pmatrix} x & -1 \\ -y & 1 \end{pmatrix}.$$

Проведя несложные преобразования получим рабочую формулу метода Ньютона (8) в виде:

$$x^{(k+1)} = \frac{-x^{(k)}y^{(k)} + 5x^{(k)} - 6}{x^{(k)} - y^{(k)}},$$

$$y^{(k+1)} = \frac{x^{(k)}y^{(k)} - 5y^{(k)} + 6}{x^{(k)} - y^{(k)}}, k = 0, 1, \dots$$

Решение: в результате решения СНУ (1) при начальном приближении (2) методом простых итераций с точностью $\varepsilon = 0.001$ получено решение $(x^{(2)}, y^{(2)}) = (2.00000; 3.00000)$, а методом Ньютона $(x^{(1)}, y^{(1)}) = (2.00000; 3.00000)$.

4. Содержание отчета.

Отчет о проделанной работе должен содержать: номер и название лабораторной работы; цель работы; содержание работы; задание на работу; теоретическую часть работы (вывод итерационных формул); листинг программы; таблицу результатов; выводы о проделанной работе.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Определить аналитическое(ие) решение(я) исходной системы нелинейных уравнений.

2. Построить итерационные формулы, реализующие процесс поиска одного из решений системы нелинейных уравнений методом простых

итераций и методом Ньютона.

3. Составить программу на любом языке программирования, реализующую построенные итерационные процессы, используя алгоритм методов, приведенный на рисунке 1. Печать результатов должна осуществляться на каждом шаге итераций в виде следующей таблицы:

k	$x^{(k)}$	$x^{(k+1)}$	$ x^{(k+1)} - x^{(k)} $	$y^{(k)}$	$y^{(k+1)}$	$ y^{(k+1)} - y^{(k)} $

4. Провести вычислительные эксперименты.

5. Составить отчет о проделанной работе.

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

№ варианта	Система нелинейных уравнений	Начальное приближение
1.	$\begin{cases} x - y + 4 = 0; \\ xy - 5 = 0 \end{cases}$	(2,2)
2.	$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0; \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$	(3,2)
3.	$\begin{cases} x^2 - y^2 - 5 = 0; \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$	(1,0)
4.	$\begin{cases} \sqrt{x} + y - 4 = 0; \\ 8\sqrt{x} + y^2 - 20 = 0 \end{cases}$	(1,-1)
5.	$\begin{cases} x - y + 2 = 0; \\ xy - 3 = 0 \end{cases}$	(-2,-4)
6.	$\begin{cases} x - y + 2 = 0; \\ xy - 3 = 0 \end{cases}$	(-1,-3)
7.	$\begin{cases} 2x + y - 5 = 0; \\ y - x^2 - 2 = 0 \end{cases}$	(1,1)
8.	$\begin{cases} x - 3y - 5 = 0; \\ x - y^2 - 1 = 0 \end{cases}$	(-2,-1)
9.	$\begin{cases} x + y - 1 = 0; \\ y - x^2 - 1 = 0 \end{cases}$	(1,1)
10.	$\begin{cases} x + y - 1 = 0; \\ x - y^2 + 2 = 0 \end{cases}$	(2,2)
11.	$\begin{cases} x^2 + y - 6 = 0; \\ x + y - 4 = 0 \end{cases}$	(1,1)

12.	$\begin{cases} x + y^2 - 2 = 0; \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$	(2,2)
13.	$\begin{cases} 2x + y - 7 = 0; \\ xy - 6 = 0 \end{cases}$	(2,2)
14.	$\begin{cases} x^2 + y^2 - 17 = 0; \\ -3x + y - 1 = 0 \end{cases}$	(1,3)
15.	$\begin{cases} x + y + 2xy - 7 = 0; \\ 2x + 2y + xy - 8 = 0 \end{cases}$	(1,0)
16.	$\begin{cases} y^2 - xy - 12 = 0; \\ x^2 - xy + 3 = 0 \end{cases}$	(1,3)
17.	$\begin{cases} -x^2 + 25y^2 = 0; \\ xy - 5 = 0 \end{cases}$	(4,1)
18.	$\begin{cases} x^2 + y^2 - xy - 7 = 0; \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$	(3,1)
19.	$\begin{cases} x + y^2 - 2 = 0; \\ x^2 + y - 2 = 0 \end{cases}$	(2,2)
20.	$\begin{cases} x^2 - 4 = 0; \\ x + 3y - 8 = 0 \end{cases}$	(1,8,1)
21.	$\begin{cases} x^2 + y^2 - 9 = 0; \\ x - y - 3 = 0 \end{cases}$	(1,1)