计算机科学188：人工智能导论
2024年春季 笔记12

作者（其他所有笔记）：尼基尔·夏尔马
作者（贝叶斯网络笔记）：乔希·胡格和杰基·梁，由王瑞吉编辑
作者（逻辑笔记）：亨利·朱，由考佩林编辑
致谢（机器学习与逻辑笔记）：部分内容改编自教材《人工智能：一种现代方法》。

最后更新时间：2023年8月26日

贝叶斯网络中的精确推理

推理是找到某个概率分布 $P\left(Q_1 \ldots Q_k \mid e_1 \ldots e_k\right)$ 值的问题，如本笔记开头概率推理部分所述。给定一个贝叶斯网络，我们可以通过形成联合概率密度函数并使用枚举推理来天真地解决这个问题。这需要创建并遍历一个指数级大的表格。

变量消除

另一种方法是逐个消除隐藏变量。要消除变量 X ，我们：

1. 将所有涉及 X 的因子相乘。
2. 对 X 进行求和消元。

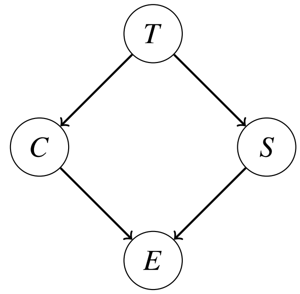
因子简单定义为未归一化的概率。在变量消去的所有步骤中，每个因子都与它所对应的概率成比例，但每个因子的基础分布不一定像概率分布那样总和为1。变量消去的伪代码如下：

```
function ELIMINATION-ASK(X, e, bn) returns a distribution over X
   inputs: X, the query variable
           e, observed values for variables E
           bn, a Bayesian network specifying joint distribution P(X_1, ..., X_n)

   factors ← []
   for each var in ORDER(bn.VARS) do
       factors ← [MAKE-FACTOR(var, e)|factors]
       if var is a hidden variable then factors ← SUM-OUT(var, factors)
   return NORMALIZE(POINTWISE-PRODUCT(factors))
```

Figure 14.11 The variable elimination algorithm for inference in Bayesian networks.

让我们通过一个例子使这些想法更具体。假设我们有如下所示的一个模型，其中 T, C, S 和 E 可以取二进制值，如下所示。这里，T 表示冒险家获取宝藏的概率，C 表示冒险家获取宝藏时笼子落到他身上的概率，S 表示冒险家获取宝藏时释放蛇的概率，并且 E 表示冒险家根据笼子和蛇的状态信息逃脱的概率。



在这种情况下，我们有因子 $P(T), P(C \mid T), P(S \mid T)$ 和 $P(E \mid C, S)$。假设我们想要计算 $P(T \mid +e)$。通过枚举法进行推理时，我们要构建一个16行的联合概率密度函数 $P(T, C, S, E)$，只选择与 $+$e 对应的行，然后对 C 和 S 进行求和，最后进行归一化。

另一种方法是每次消除一个变量，先消除 C，然后消除 S。我们可以按如下步骤进行：

- 将所有包含 C 的因子相乘，得到 $f_1(C, +e, T, S) = P(C \mid T) \cdot P(+e \mid C, S)$。有时写成 $P(C, +e \mid T, S)$。
- 从这个新因子中对 C 求和，得到新因子 $f_2(+e, T, S)$，有时写成 $P(+e \mid T, S)$。
- 将所有包含 S 的因子相乘，得到 $f_3(+e, S, T) = P(S \mid T) \cdot f_2(+e, T, S)$，有时写成 $P(+e, S \mid T)$。
- 对 S 进行求和，得到 $f_4(+e, T)$，有时写作 $P(+e \mid T)$。
- 将其余因子相乘，得到 $f_5(+e, T) = f_4(+e, T) \cdot P(T)$。

一旦我们得到了 $f_5(+e, T)$，就可以通过归一化轻松计算出 $P(T \mid +e)$。

在书写由相乘得到的因子时，我们既可以使用像 $f_1(C, +e, T, S)$ 这样的因子表示法，它忽略条件竖线，只简单列出该因子中包含的变量。

另外，我们可以写成 $P(C, +e \mid T, S)$，即便这不一定是一个有效的概率分布（例如，各行之和可能不为1）。为了机械地推导这个表达式，请注意原始因子中条件竖线左侧的所有变量（这里，$P(C \mid T)$ 中的 C 和 $P(E \mid C, S)$ 中的 E）仍在竖线左侧。然后，所有其余变量（这里，T 和 S）移到竖线右侧。

这种书写因子的方法基于链式法则的反复应用。在上述示例中，我们知道条件竖线两侧不能有同一个变量。此外，我们知道

$$P(T,C,S,+e) = P(T)P(S|T)P(C|T)P(+e|C,S) = P(S,T)P(C|T)P(+e|C,S)$$

所以

$$P(C|T)P(+e|C,S) = \frac{P(T,C,S,+e)}{P(S,T)} = P(C,+e|T,S)$$

虽然从概念角度来看，变量消除过程更为复杂，但生成的任何因子的最大规模仅为8行，而如果我们形成整个联合概率密度函数（joint PDF），则会是16行。
看待这个问题的另一种方式是注意到，$P(T \mid +e)$ 的计算可以通过如下枚举推理来完成：

$$\alpha \sum_s \sum_c P(T)P(s|T)P(c|T)P(+e|c,s)$$

或者通过如下变量消除来完成：

$$\alpha P(T) \sum_s P(s|T) \sum_c P(c|T)P(+e|c,s)$$

我们可以看到，这些等式是等价的，只是在变量消除中，我们将与每个求和无关的项移到了每个求和之外！
关于变量消除的最后一点需要注意的是，重要的是要观察到，只有当我们能够将最大因子的规模限制在合理值时，它才会比枚举推理有所改进。