计算机科学188：人工智能导论
2024年春季 Note 11

作者（其他所有注释）：尼基尔·夏尔马
作者（贝叶斯网络注释）：乔希·胡格和杰基·梁，由王瑞佳编辑
作者（逻辑注释）：亨利·朱，由考佩林编辑
学分（机器学习和逻辑注释）：部分章节改编自教材《人工智能：一种现代方法》。

最后更新时间：2023年8月26日

贝叶斯网络表示

虽然通过枚举进行推理可以计算我们想要的任何查询的概率，但在计算机内存中表示整个联合分布对于实际问题来说是不切实际的——如果我们想要表示的每个 n 变量都可以取 d 个可能的值（其域大小为 d ），那么我们的联合分布表将有 d^n 个条目，与变量数量呈指数关系，存储起来非常不切实际！

贝叶斯网络通过利用条件概率的思想避免了这个问题。概率不是存储在一个巨大的表中，而是分布在一些较小的条件概率表中，同时还有一个有向无环图（DAG)，它捕获了变量之间的关系。局部概率表和DAG一起编码了足够的信息，以计算在给定整个大的联合分布的情况下我们可以计算的任何概率分布。我们将在下一节中看到这是如何工作的

我们正式将贝叶斯网络定义为由以下部分组成：

- 一个节点的有向无环图，每个变量 X 对应一个节点。
- 为每个节点 $P\left(X \mid A_1 \ldots A_n\right)$ 构建一个条件分布，其中 A_i 是 X 的 i^{th} 父节点，该条件分布以条件概率表（CPT）的形式存储。每个CPT有 $n+2$ 列：一列用于每个 n 父变量 $A_1 \ldots A_n$ 的值，一列用于 X 的值，还有一列用于给定其父节点时 X 的条件概率。

贝叶斯网络图形的结构编码了不同节点之间的条件独立关系。这些条件独立性使我们能够存储多个小表而不是一个大表。

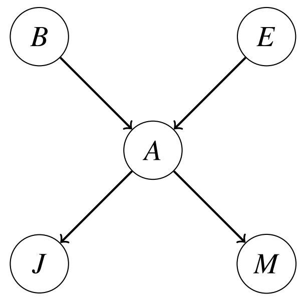
需要记住的是，贝叶斯网络节点之间的边并不意味着这些节点之间存在特定的因果关系，也不意味着变量必然相互依赖。它只是意味着节点之间可能存在某种关系。

作为贝叶斯网络的一个示例，考虑一个具有以下描述的五个二元随机变量的模型：

- B：发生入室盗窃。

- A：警报响起。
- E：地震发生。
- J：约翰打电话。
- M：玛丽打电话。

假设如果发生入室盗窃或地震，警报就会响起，并且如果玛丽和约翰听到警报就会打电话。我们可以用下面所示的图来表示这些依赖关系。



在这个贝叶斯网络中，我们将存储概率表 $P(B), P(E), P(A \mid B, E), P(J \mid A)$ 和 $P(M \mid A)$。

给定图的所有条件概率表（CPT），我们可以使用以下规则计算给定赋值的概率：

$$P(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i | parents(X_i))$$

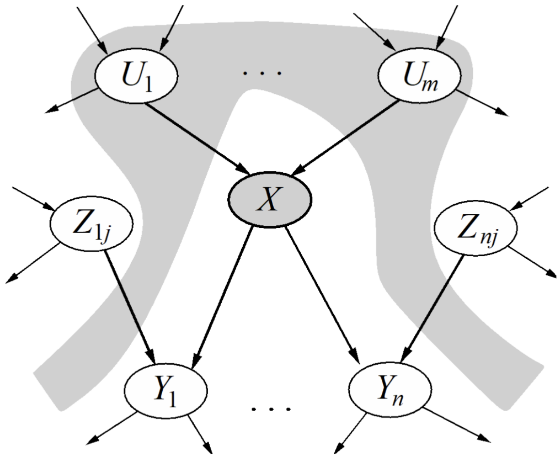
对于上述报警模型，我们实际上可以按如下方式计算联合概率：
$P(-b, -e, +a, +j, -m) = P(-b) \cdot P(-e) \cdot P(+a \mid -b, -e) \cdot P(+j \mid +a) \cdot P(-m \mid$
我们将在下一节中看到这种关系是如何成立的。
作为一种实际检验，重要的是要明白贝叶斯网络只是一种模型类型。模型试图捕捉世界运行的方式，但由于它们总是一种简化，所以总是存在错误。然而，通过良好的建模选择它们仍然可以是足够好的近似，从而有助于解决现实世界中的实际问题。

一般来说，一个好的模型可能无法考虑到每一个变量，甚至无法考虑到变量之间的每一种相互作用。但是，通过在图的结构中做出建模假设，我们可以产生极其高效的推理技术，这些技术通常比诸如枚举推理之类的简单过程更具实际用途。

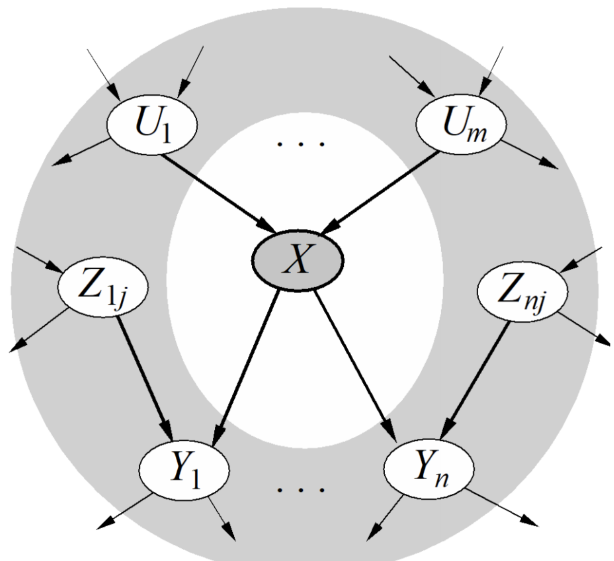
贝叶斯网络的结构

在本课程中，我们将提及贝叶斯网络独立性的两条规则，通过查看贝叶斯网络的图形结构可以推断出这些规则：

- 在图中，给定一个节点的所有父节点，该节点与其所有祖先节点（非后代节点）条件独立。



•给定其马尔可夫毯，每个节点都与所有其他变量条件独立。一个变量的马尔可夫毯由其父节点、子节点以及子节点的其他父节点组成。

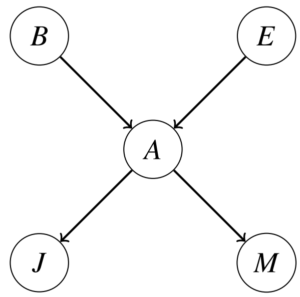


使用这些工具，我们可以回到上一节的断言：即我们可以通过连接贝叶斯网络的条件概率表来得到所有变量的联合分布。

$$P(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i | parents(X_i))$$

贝叶斯网络的联合分布与条件概率表之间的这种关系之所以成立，是因为图所给出的条件独立关系。我们将通过一个例子来证明这一点。

让我们回顾一下之前的例子。我们有条件概率表 $P(B), P(E), P(A \mid B, E), P(J \mid A)$ 和 $P(M \mid A)$，以及以下图形：



对于这个贝叶斯网络，我们试图证明以下关系：

$$P(B,E,A,J,M) = P(B)P(E)P(A|B,E)P(J|A)P(M|A) \tag{1}$$

我们可以用另一种方式展开联合分布：使用链式法则。如果我们按照拓扑排序（父节点先于子节点）展开联合分布，我们会得到以下等式

$$P(B,E,A,J,M) = P(B)P(E|B)P(A|B,E)P(J|B,E,A)P(M|B,E,A,J) \tag{2}$$

注意，在等式(1)中，每个变量都由一个条件概率表 $P(\mathrm{var} \mid \mathrm{Parents}(\mathrm{var}))$ 表示，而在等式(2)中，每个变量都由一个条件概率表 $P(\mathrm{var} \mid \mathrm{Parents}(\mathrm{var}), \mathrm{Ancestors}(\mathrm{var}))$ 表示。

我们依赖于上面的第一个条件独立关系，即在图中，给定一个节点的所有父节点[1]，该节点条件独立于其所有祖先节点。

因此，在贝叶斯网络中， $P(\mathrm{var} \mid \mathrm{Parents}(\mathrm{var}), \mathrm{Ancestors}(\mathrm{var})) = P(\mathrm{var} \mid \mathrm{Parents}(\mathrm{var}))$，所以等式 (1) 和等式 (2) 相等。贝叶斯网络中的条件独立性允许用多个较小的条件概率表来表示整个联合概率分布。

[1] 在其他地方，该假设可能被定义为 “给定一个节点的父节点，该节点条件独立于其非后代节点”。我们总是希望做出尽可能少的假设并证明我们需要的内容，所以我们将使用祖先假设。