

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS



LABORATORIO DE FÍSICA CF1B2-B

Dinámica de Rotación

El grupo conformado por:

Vasquez Alvarado Luis Martin
20234143G

Cortez Núñez Christian
20232203B

Rocca Cruz Axel
20234046A

Profesor:

AMORETTI VIDAL JESUS ESTEBAN
NAUPA ROQUE ALEXANDER RAUL

Mesa : E7

April 3, 2025

2025-1

Contents

1	Introducción y objetivos del experimento	3
1.1	Competencias generales	3
1.2	Competencias específicas	3
2	Fundamento teórico	3
2.1	Energía cinética de rotación y traslación	3
2.2	Momento de inercia	4
2.3	Dinámica de cuerpo rígido	5
2.4	Movimiento de rodadura	7
2.5	Aplicaciones en el experimento	9
3	Equipo utilizado y diagrama de flujo del experimento	9
3.1	Equipo utilizado	9
3.2	Diagrama de Flujo	12
4	Procedimiento Experimental	12
5	Cálculos y resultados	12
6	Cuestionario	12
7	Conclusiones	12
8	Anexo	12

1 Introducción y objetivos del experimento

Este informe se basa en datos obtenidos en el laboratorio de Física II de la Facultad de Ciencias. Se fundamenta en la guía de laboratorio y otras referencias citadas más adelante. Su objetivo es responder el cuestionario y comparar los resultados experimentales con la teoría. De acuerdo con la guía del laboratorio y las instrucciones del docente, el informe se organiza como sigue.

1.1 Competencias generales

- Analizar el movimiento de rodadura de una rueda de Maxwell y, con base en las mediciones realizadas, calcular su momento de inercia respecto al eje perpendicular que atraviesa su centro de gravedad.

1.2 Competencias específicas

- Registrar el tiempo que tarda la rueda en completar cada recorrido.
- Medir la masa y las dimensiones de la rueda para determinar su momento de inercia utilizando dos métodos: a través de su energía cinética de rotación y por la distribución geométrica de su masa.

Aclaración: Según las instrucciones del profesor, no se llevó a cabo el cálculo del momento de inercia de la rueda basado en la distribución geométrica de su masa.

2 Fundamento teórico

2.1 Energía cinética de rotación y traslación

Sabemos que la energía cinética viene dada por la expresión $E_c = \frac{1}{2}mv^2$.

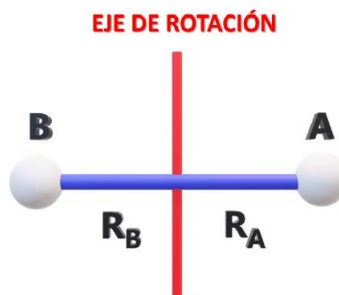


Figure 1: Sistema simple

Considerando un sistema compuesto por dos cuerpos A y B, los cuales están conectados por una barra de masa despreciable y giran alrededor de un eje que pasa por un punto de la barra, siendo este eje perpendicular a la misma con una velocidad angular \vec{w} , como se muestra en la figura 1; entonces, la energía cinética del sistema se expresa de la siguiente manera:

$$E_c(\text{ sistema }) = \frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 \quad (1)$$

Pero tenemos: $|\vec{v}_A| = v_A = |\vec{w}| |\vec{R}_A| = w R_A$ y $|\vec{v}_B| = v_B = |\vec{w}| |\vec{R}_B| = w R_B$. Reemplazando en 1:

$$E_c(\text{ sistema }) = \frac{1}{2}m_A w^2 R_A^2 + \frac{1}{2}m_B w^2 R_B^2 \quad (2)$$

Vemos que, en el caso de la rotación, la energía cinética depende del eje elegido, por lo que debemos separar la energía cinética en el movimiento de traslación y rotación. Luego $E_{\text{rotacional A}} = \frac{1}{2}m_A w^2 R_A^2$ y $E_{\text{rotacional B}} = \frac{1}{2}m_B w^2 R_B^2$

2.2 Momento de inercia

De 2 podemos factorizar $\frac{1}{2}w^2$.

$$\begin{aligned} E_c(\text{ sistema }) &= \frac{1}{2}m_A w^2 R_A^2 + \frac{1}{2}m_B w^2 R_B^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(m_A R_A^2 + m_B R_B^2 \right) w^2 \\ &= \frac{1}{2} I w^2 \end{aligned}$$

El momento de inercia del sistema en relación con el eje se define como $I = m_A R_A^2 + m_B R_B^2$, donde R_A y R_B representan las distancias de los cuerpos A y B al eje, respectivamente. Generalizando para un sistema discreto compuesto por n partículas, la expresión correspondiente para el momento de inercia en torno a un eje es:

$$\sum_{i=1}^n m_i R_i^2 \quad (3)$$

Aquí, m_i representa la masa de la i -ésima partícula, mientras que R_i denota su distancia mínima al eje de rotación.

Si en lugar de un sistema discreto consideramos un sistema de masa continua, la sumatoria se transforma en una integral, tomando un elemento diferencial de masa ($dm \rightarrow 0$) cuya distancia mínima al eje de rotación es r_i .

$$I = \lim_{dm_i \rightarrow 0} \sum r_i^2 dm_i \quad (4)$$

Esto resulta ser la integral:

$$I = \int r^2 dm \quad (5)$$

Para resolver esta integral, hace falta saber como varía la masa respecto a la distancia mínima al eje de rotación.

Si el centro de masa del objeto es conocido y consideramos una lámina plana del mismo, es posible determinar el momento de inercia respecto a un eje paralelo a otro que atraviesa su centro de masa y que es perpendicular al plano de la lámina.

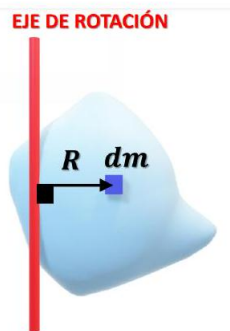


Figure 2: Sistema de masas continuo

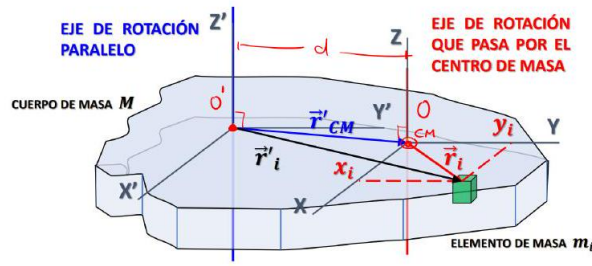


Figure 3: lámina plana del objeto.

Aquí, \vec{r}_i representa la posición del elemento de masa m_i en relación con el centro de masa (CM), mientras que \vec{r}'_i denota su posición con respecto al eje paralelo. Asimismo, \vec{CM} es la posición del centro de masa en relación con dicho eje paralelo. Luego, sabemos que : $\vec{r}'_i = r'_{CM} + \vec{r}_i$, $\sum_{i=1}^n m_i r'^2_i, \vec{r}'_i = \vec{x}'_i + \vec{y}'_i$ con $x_i \perp y_i$. Luego:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i r'^2_i &= \sum_{i=1}^n m_i (\vec{x}'_i + \vec{y}'_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n m_i (x'^2_i + y'^2_i) \\ &= \sum_{i=1}^n m_i (x'_{CM} + \vec{x}_i)^2 + \sum_{i=1}^n m_i (y'_{CM} + \vec{y}_i)^2 \end{aligned}$$

Donde :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i (x'_{CM} + \vec{x}_i)^2 &= \sum_{i=1}^n m_i x'^2_{CM} + 2 \sum_{i=1}^n m_i \langle x'_{CM}, \vec{x}_i \rangle + \sum_{i=1}^n m_i x^2_i \\ \sum_{i=1}^n m_i (\vec{CM}' + \vec{y}_i)^2 &= \sum_{i=1}^n m_i y'^2_{CM} + 2 \sum_{i=1}^n m_i \langle y'_{CM}, \vec{y}_i \rangle + \sum_{i=1}^n m_i y^2_i \end{aligned}$$

Pero sabemos que x'_{CM} y y'_{CM} son constantes. entonces:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \langle x'_{CM}, \vec{x}_i \rangle &= \langle x'_{CM}, \sum_{i=1}^n m_i \vec{x}_i \rangle = \langle x'_{CM}, \sum_{i=1}^n m_i \vec{x}_i \rangle = \langle y'_{CM}, \sum_{i=1}^n m_i \vec{y}_i \rangle \\ \sum_{i=1}^n m_i \vec{x}_i &= \sum_{i=1}^n m_i (\vec{x}_i - x'_{CM}) = \vec{0}, \sum_{i=1}^n m_i \vec{y}_i = \sum_{i=1}^n m_i (\vec{y}_i - y'_{CM}) = \vec{0} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\sum_{i=1}^n m_i r'^2_i = \sum_{i=1}^n m_i (x'^2_{CM} + y'^2_{CM}) + \sum_{i=1}^n m_i (x^2_i + y^2_i)$$

Luego :

$$I_{\text{ejeparalelo}} = I_{CM} + Md^2$$

Aquí, d representa la distancia entre el eje paralelo y el eje que pasa por el centro de masa del sistema. Este razonamiento puede extenderse a todas las láminas que conforman el volumen del objeto, lo que sugiere que es válido para objetos en cualquier dimensión.

Desde un punto de vista físico, el momento de inercia mide la resistencia de un cuerpo a rotar en torno a un eje dado. Es fundamental considerar la elección del eje de rotación, ya que el momento de inercia depende de este, pues modificar el eje implica alterar las distancias de los elementos de masa con respecto a él.

2.3 Dinámica de cuerpo rígido

Definimos al torque de una fuerza como una cantidad asociada a la capacidad de la fuerza, de alterar el estado de rotación de un cuerpo rígido.

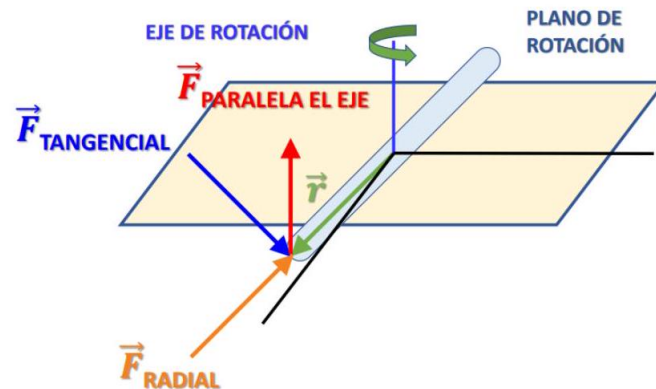


Figure 4: Representación del torque de una fuerza

Observamos que únicamente la fuerza tangencial, $F_{\text{tangencial}}$, es capaz de modificar el estado de rotación en relación con el punto de aplicación y el eje de rotación. Esto se debe a que solo esta fuerza genera un cambio en la velocidad tangencial, y dado que $|\vec{v}| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{r}|$, se concluye que $\vec{\omega}$ aumenta.

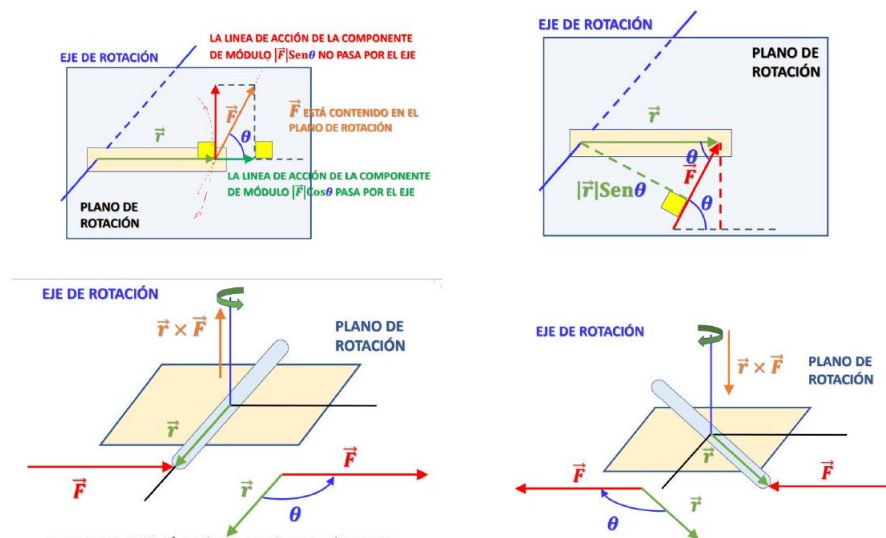
Además, el sentido de giro está determinado por la dirección del vector $\vec{r} \times \vec{F}$. De este modo, podemos establecer la siguiente expresión para el torque debido a la fuerza aplicada:

$$\vec{\tau}_{\text{eje}}^F = \vec{r} \times \vec{F}$$

Si la separación respecto al eje de rotación es suficientemente amplia para tratar al cuerpo rígido como una partícula, se introduce una nueva magnitud vectorial conocida como momento angular, definida por la expresión:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

donde

Figure 5: Representación de $\vec{r} \times \vec{F}$ y su relación con el torque

p es la cantidad de movimiento lineal y r es la posición del cuerpo rígido respecto al eje de giro).

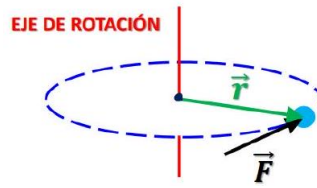


Figure 6: Se desprecian las dimensiones del cuerpo rígido

Si derivamos \vec{L} respecto al tiempo, tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} \\ &= \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} \\ &= \vec{r} \times \vec{F} + m\vec{v} \times \vec{v} \\ &= \vec{r} \times \vec{F} \\ &= \vec{\tau}_{eje}\end{aligned}$$

Luego, si seleccionamos el eje adecuado de modo que $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$ (y se cumple que: $\vec{r} \perp \vec{\omega}$), obtenemos:

$$\vec{L} = m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = m(\langle \vec{r}, \vec{r} \rangle \vec{\omega} - \langle \vec{\omega}, \vec{r} \rangle \vec{r}) = mr^2 \vec{\omega} = I\vec{\omega}$$

donde I es el momento de inercia del cuerpo rígido respecto al eje. Luego, al derivar, obtenemos:

$$\vec{\tau}_{eje} = I\vec{\alpha}$$

donde $\vec{\alpha}$ es la aceleración angular.

2.4 Movimiento de rodadura

Un caso particular de la combinación del movimiento de traslación y rotación de un cuerpo rígido (en este caso, una rueda simétrica) es el movimiento de rodadura pura (rueda sin deslizamiento). Físicamente, el no deslizamiento implica que el punto de contacto entre

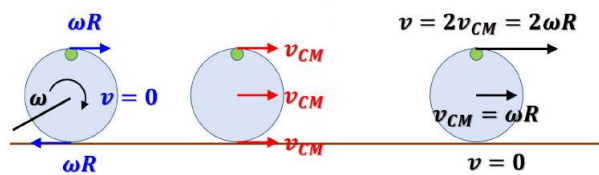


Figure 7: Rotación+Traslación sin resbalar

La rueda y la superficie no experimentan desplazamiento ni velocidad en el punto de contacto, como resultado de las condiciones iniciales: $v_{CM} = \omega R$; este punto se denomina centro instantáneo de rotación (CIR), ya que la rueda parece girar alrededor de un eje instantáneo perpendicular al plano de la rueda que pasa por el punto de contacto. De esto, concluimos que la rueda únicamente realiza rotación respecto al CIR, por lo que, si existen pérdidas, estas se deben a la rotación y no a la traslación. Sin embargo, podemos reformular la expresión en términos de las características del centro de masa (su velocidad y el momento de inercia respecto a un eje que

pasa por el centro de masa y es perpendicular al plano de la rueda).

$$\begin{aligned}
 E_{\text{rotacional}} &= \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 \\
 &= \frac{1}{2} (I_{CM} + mR^2) \omega^2 \\
 &= \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} m(\omega R)^2 \\
 &= \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 \\
 &= E_{\text{rotacional}} / CM + E_{\text{traslacional}} / CM
 \end{aligned}$$

Donde m es la masa de la rueda.

En el caso ideal, la rueda y la superficie no se deforman por acción de las fuerzas. Como

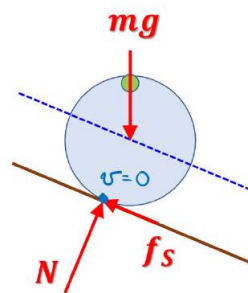


Figure 8: DCL de la rueda en un plano inclinado.

El punto de contacto no experimenta desplazamiento, $W_{fs} = W_{FNC} = 0$, y por lo tanto, se conserva la energía mecánica.

En un escenario real, se toman en cuenta las deformaciones de la rueda y la superficie, y además, se observa que la rueda desliza debido a las deformaciones. Este fenómeno se conoce como fricción por rodadura.

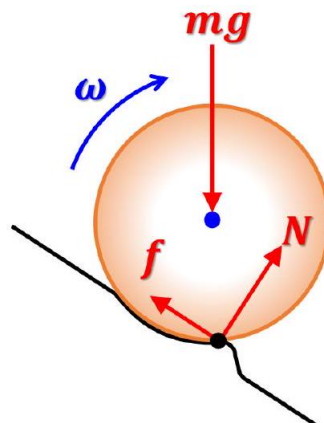
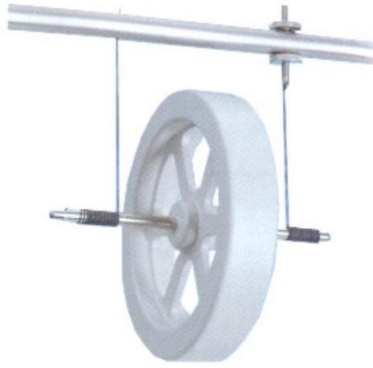


Figure 9: Se aprecian deformaciones

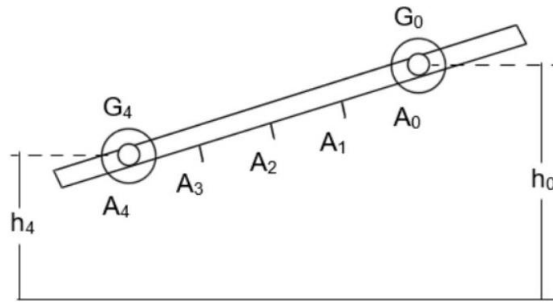
Esto genera una pérdida de energía mecánica; sin embargo, es frecuente ignorar este efecto en experimentos reales, dado que la rueda y la superficie son lo suficientemente rígidas como para no notar efectos significativos debido a la fricción por rodadura. Por lo tanto, se considera que la energía mecánica se conserva también en estos casos.

2.5 Aplicaciones en el experimento

Contamos con una rueda de Maxwell proporcionada en el laboratorio, la cual posee un eje perpendicular al plano de la rueda que pasa por su centro de gravedad. El eje es un cilindro concéntrico con la rueda, cuyo radio $r < R$ (siendo R el radio de la rueda), similar a lo mostrado en la figura (a). En la figura 10b, se encuentran marcados los puntos A_0, A_1, A_2 ,



(a) Rueda de Maxwell



(b) Trayectoria de la rueda

A_3 y A_4 están separados por 10 cm; también contamos con G_0 y G_4 , que representan las posiciones del centro de gravedad de la rueda, en el punto más alto y más bajo de su trayectoria, respectivamente. Debido a todo lo mencionado anteriormente, se desprecia la fricción por rodadura, y por lo tanto, se conserva la energía mecánica. Por lo que:

$$E_{M(4)} = mgh_4 + \frac{1}{2}I_G \omega_{G_4}^2 + \frac{1}{2}mv_{G_4}^2 \quad (6)$$

$$= mgh_4 + \frac{1}{2}I_G \frac{v_{G_4}^2}{r^2} + \frac{1}{2}mv_{G_4}^2 \quad (7)$$

$$= E_{M(0)} \quad (8)$$

$$= mgh_0 + \frac{1}{2}I_G \frac{v_{G_0}^2}{r^2} + \frac{1}{2}mv_{G_0}^2 \quad (9)$$

$$mgh_0 (v_{G_0} = 0) = mgh_4 + \frac{1}{2}I_G \frac{v_{G_4}^2}{r^2} + \frac{1}{2}mv_{G_4}^2 \quad (10)$$

Posteriormente, $x = \frac{1}{2}at^2$ en relación con el centro de masa, dado que la posición inicial es $x = 0$ y se observa un MRUV en la rueda, generado por una aceleración constante debido al peso, la fricción estática y la fuerza normal. Sabemos que $v_G = at$ cuando $v_0 = 0$, por lo que $v_G = \frac{2x}{t}$. Con estos datos, podemos realizar el experimento y comprobar los resultados, midiendo únicamente la velocidad, el radio del eje de rotación, el desplazamiento y el tiempo transcurrido.

3 Equipo utilizado y diagrama de flujo del experimento

3.1 Equipo utilizado

- Un par de rieles paralelos (como plano inclinado)



- Una rueda de Maxwell



- Un cronómetro digital



- Un pie de rey



- Una regla milimetrada



- Una balanza



- Un nivelador



3.2 Diagrama de Flujo

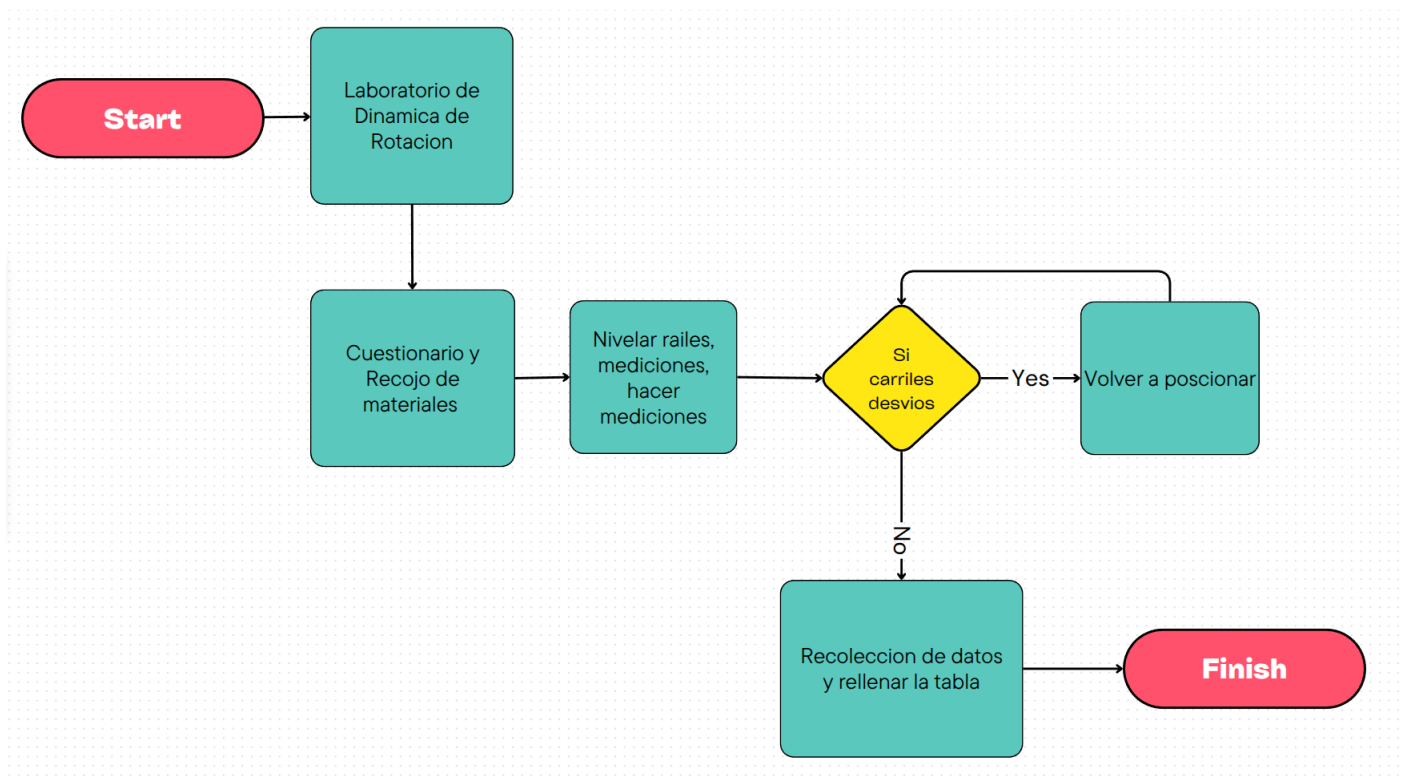


Figure 10: Diagrama de Flujo

4 Procedimiento Experimental

5 Cálculos y resultados

6 Cuestionario

7 Conclusiones

8 Anexo