

# 杂题选讲

feecie6418

# 自我介绍

---

QQ 30831672。

常用 id feecle6418 / feecie6418。

# 趣题部分

一些令笔者印象深刻的题，不一定难。

# QOJ1171

---

定义对数组  $A$  一次操作为：不停删去  $A$  最左侧或最右侧的元素，并将其 `push_back` 到一个新数组  $B$  里。删完后， $B \rightarrow A$ ，并将  $B$  清空。

问：对于给定数组至少要几次才能排好序。

$$n \leq 200000$$

# QOJ1171

---

倒着思考，对于一个有序数组，可以把它变成一段升序 + 一段降序。

对于一段升序 + 一段降序，可以把它变成 升降升降。

因此， $k$  次操作可以造出  $2^{k-1}$  个“升降”段。所以答案就是升降段个数的  $\log$ 。

# QOJ4996

---

给定一个  $n$  个点  $m$  条边的图，构造一种将点分为两个子集的方式，其中一个子集存在哈密顿路，另一个子集在补图中存在哈密顿路。

$$n, m \leq 10^6$$

# QOJ4996

---

增量构造。

# QOJ6684

---

给你一棵边上还没填字母的 Trie 树，你要在边上填字母。

Trie 树上有一些关键点，表示有一个字符串的结尾在这里。保证叶子都是关键点。

假设你填完字母后，关键点对应的字符串集合为  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ 。

请你最小化  $S$  从小到大排序之后得到的序列的字典序。

$$n \leq 2 \times 10^5$$



# QOJ6684

---

考虑几种特殊情况哪个子树排在前面：

1. 两个子树都是一条链，但是链底叶子深度不同。
2. 两个子树在某个点后，一个向下继续，一个换了儿子。
3. 两个子树在某个点后，一个向下继续，一个记录了。
4. 两个子树在某个点后，一个换了儿子，一个记录了。

可以发现，按照 dfs 序，把记录、向下、向上 分别赋值  $-1, 0, 1$ ，然后按照字典序贪心即可。

可以用启发式合并 deque 维护，时间复杂度  $O(n \log^2 n)$ 。

# QOJ6684 review

---

多种情况的分析，总结出比较的条件。

# QOJ5568

---

给定一个长度不超过 5000 的排列。

一次操作为，选一个子序列，将其向右循环移位一次。设子序列长度为  $k$ ，则代价为  $1/k$ 。

用不超过 2 的总代价排序。

# QOJ5568 cont.

---

实验发现，随机排列，每次把所有  $p_i \neq i$  的  $p_i$  全拿出来循环移位，大部分时候代价都略小于 1。

然而这样在排列完全逆序时，仍需要  $c \times \log n$  的代价（ $c$  为常数）。

考虑随机一个排列  $q$ ，分别执行  $p \rightarrow q, q \rightarrow I$ 。这样，两步都是随机了。

# QOJ5568 review

---

复合一个随机排列，可以把任意排列变为随机的。

# QOJ5092

---

一个有根树，每个点有点权。

A 和 B 轮流选择一个现在没有父亲的点，将其删去，并获得其点权的分数。两人都想最大化自己的分数。

求 A 分数 - B 分数 的值。

$$n \leq 200000$$

唯一的一个部分分：  $a_i \leq a_{fa_i}$

# QOJ5092

---

这里，我们仅仅给出本题的“思路”，证明就省略了。

首先，注意到  $a_i \leq a_{fa_i}$  时，两人都会贪心选当前最大的（理解：让对手取总不优）。

如果某个  $a_i > a_{fa_i}$ ，对手取了  $fa_i$  我一定也会取  $i$ 。

考虑把取数的过程描述为：“两人轮流获得  $x_1, x_2, \dots, x_k$  的贡献， $x_i$  不升”。对每个子树，用一个堆维护其  $x_i$ 。如果不考虑根结点，子树的合并就是堆的直接合并。

如果子树的堆里有大于根的权值  $v$  的元素  $u$ ，后手一定会在先手取完根后直接取这个元素。

此时先手收益是负的，所以先手必须再取一个元素  $w$  获得收益  $v - u + w$ ，可以看作把三个元素直接合并。

感性理解，合并的过程可以递归进行，直到满足堆性质（也就是先手收益比后手大）。

# QOJ5092

---

如果一直满足不了堆性质怎么办？

1. 若总元素个数为奇数，则这个子树（虽然值是负的）还是可以看成一个元素。
2. 若总元素个数为偶数，则这个子树值一定是负的，而且还不能转换先后手，是谁都不愿意要的。此时，根据  $n$  的奇偶性判断谁会被迫选到这个子树。

[Submission #65508 - QOJ.ac](#)



# QOJ5092 review

---

游戏的（感性）化归。

# QOJ5095

---

小王唱歌。 $n + 1$  首歌， $n$  个听众每个人有一个喜好度顺序。

从 1 号开始，每人 ban 一首歌，最后剩下一首，让小王唱。

每个人都希望最后的歌自己最喜欢，问小王唱哪首。

对于  $1 \sim n$  的每个循环移位都求答案。

$$n \leq 5000$$

# QOJ5095

---

题目看起来很奇怪，考虑手动模拟一下小数据。

考虑  $n = 2$ ，第二个人决策时肯定拿掉自己觉得最差的歌。

如果第一个人留下了第二个人觉得**最差**的歌，则这首歌怎么都会被拿掉。在第二个人的曲目顺序里，如果第一个人留下 1,3 或 2,3，则可以确定剩下 1 还是 2，但拿掉 3 还要让第二个人在 1,2 里挑。所以第一个人肯定留下 3，删掉 1,2 里自己觉得最差的。

归纳一下，可以发现每个人都会删掉自己后面的人还没删掉的，自己觉得最差的。

暴力实现  $O(n^3)$ ，但改成只调整变化的就能  $O(n^2)$ 。

# QOJ5095 review

---

从小数据开始，倒着分析。

# PR #6 C

---

通信题。有一个带权有向图。

A 和 B 合作。B 希望回答  $q$  次询问，第  $i$  次询问希望找到一条  $s_i \rightarrow t_i$  的最短路（只需要给出经过的边的编号）。A 和 B 都知道询问。

A 知道有向图的每一条边的端点和长度。B 知道有向图每一条边的端点，和除了  $K$  条边外的每一条边的长度。保证 B 不知道长度的边，起点都相同。

现在 A 可以向 B 发送不超过  $L$  bit 的信息，请让 B 能正确回答所有询问。

有向图点数不超过 300，边数不超过  $10^5$ 。 $q \leq 60, K \leq 5$ 。边权不超过  $10^{16}$ ， $L = 64$ 。

# PR #6 C

---

笔者的解法是乱搞。

不妨假设 A,B 以相同顺序处理询问，且询问的顺序是随机打乱的。

如果直接发送每条边的边权，需要  $O(k \log w)$  bit；如果发送每个询问用哪条边，需要  $O(\log((k+1)^q))$  bit。

注意到询问之间并不是互不影响的。通过之前的询问，可以得到未知边权之间的大小关系。

根据大小关系剪枝，在测试数据中就只需要约 50 bit 了。

# PR #6 C review

---

利用之前信息，剪枝

# CF154E

---

给定平面上  $n$  个点和定值  $R$ ，保证存在一个半径为  $R$  的圆包含所有点。

设  $S$  为所有包含所有点的半径为  $R$  的圆构成的集合。求  $\text{area}(\cap_{x \in S} x)$ 。

$$n \leq 10^5, R \leq 10^9$$

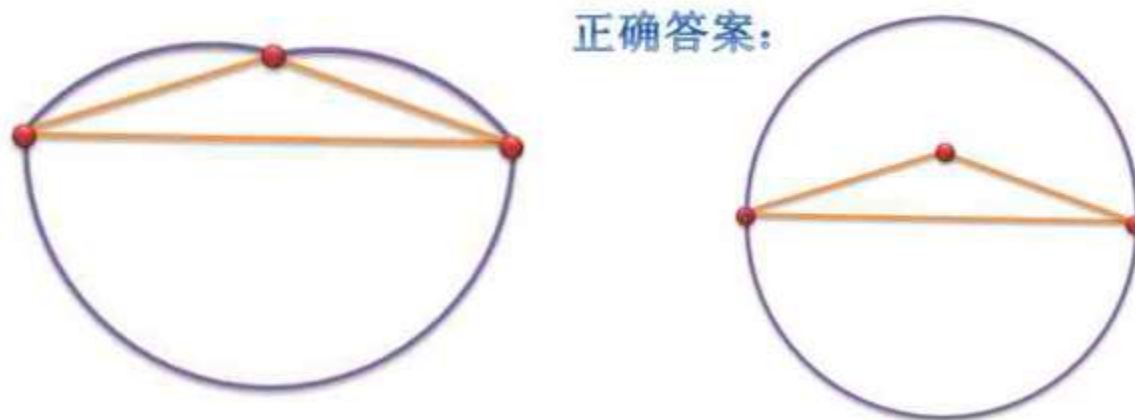


# CF154E

---

感性理解一下，答案很可能是贴着凸包每条边画一个半径为  $R$  的圆得到的。

但这样有问题：考虑下图。



# CF154E

---

可以发现，存在非法情况，就一定存在相邻的非法情况，也就是  $i, i + 1, i + 2$  三个点满足  $i, i + 1$  的圆不包含  $i + 2$ 。

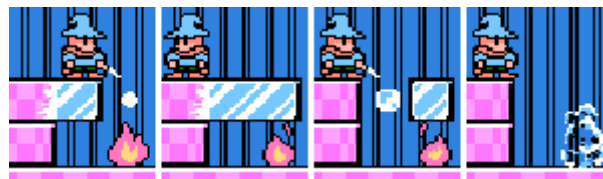
如果  $i, i + 1$  的圆不包含  $i + 2$ ，但  $i, i + 2$  的圆含  $i + 1$ ，则可以把  $i + 1$  删去，把  $(i, i + 2)$  看成凸包的一条边。

注意，还有一种情况：如果  $i, i + 1$  的圆不包含  $i + 2$ ，但  $i + 1, i + 2$  的圆含  $i$ ，则可以把  $i$  删去，把  $(i - 1, i + 1)$  看成凸包的一条边。

可以用类似拓扑排序的方式模拟，时间复杂度  $O(n)$ 。

# CF89E

你在玩下面这个小游戏：



初始时，小人站在最左边的柱子上。你可以做三种操作：

1. 左移：L
2. 右移，要求移动到的位置必须有冰块：R
3. 在小人当前位置右侧位置放置一块冰块，使得自己可以移动上去：A
4. 打碎在小人当前位置前方的冰块，并使得该位置右侧的所有位置的冰块都掉到地上：A

地上有  $n$  团火，第  $i$  团火在柱子右侧第  $i + 1$  格，血量为  $a_i$ 。一团火被冰块砸到一次，血量就会减小 1。问至少多少次操作后，火的血量全部小于等于 0，并给出方案。

$$n \leq 1000, a_i \leq 100$$

# CF89E

---

每次操作是给  $[l, r]$  血量减一。

为了给  $[l, r]$  血量减一，需要站在  $l - 2$  上敲碎  $l - 1$  的冰。

可以发现，假设初始站在  $l - 2$  上，则消除一次  $[l, r]$  区间需要  $3(r - l + 1) + 2$  次操作（每个位置 RAL，第零个位置两个 A）。

不妨假设  $n$  处有火。通过调整可以证明，总可以认为最后一次操作消除的区间是  $[p, n]$ 。

同时也能证明，只要消完某个位置还要向后走（也就是除了最后一次操作），则消除的区间就不会做无用功。（考虑拆分成  $[l, k - 1], [k + 1, r]$ ）

# CF89E

---

考虑最优策略是什么。容易发现，除了最后一次，都是按照左端点从小到大的顺序依次消除区间，最后退回  $p$  把  $n$  消除了。可以发现这样总步数为  $3\sum a_i + 2m + C - p$  级别， $m$  为消除次数。所以枚举  $p$ ，选择  $3\sum a_i + 2m - p$  最小的  $p$ 。

输出方案直接模拟上述策略即可。

# CF238E

---

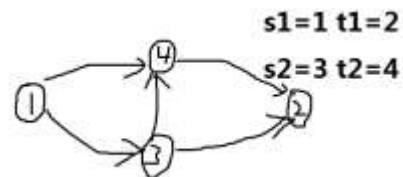
有一个城市，共有  $n$  个点， $m$  条有向边，边权均为 1。有  $k$  路公交车，第  $i$  路公交车从  $s_i$  到  $t_i$ 。公交车的路径不固定，但一定走最短路。

你想从  $a$  到  $b$ ，且只能搭车。你可以在任意点上下车。问最坏情况至少转几次车，或指出最坏情况无法到  $b$ 。

$$n \leq 100, k \leq 100, m \leq n^2$$

# CF238E

直接找必经点有 hack：右图中，1 可以到 4，但是路线没有必经点。



考虑看成人和车之间的“博弈”问题，直接 dp。

设  $f(i, j)$  表示人在  $i$  点，在  $j$  车上的答案。

1. 不下车，此时车会把人带到答案最大的在最短路上的点。
2. 下车，此时可以换乘到这个点是必经点的车。

考虑用类似 Dijkstra 的思路转移，按照  $f$  值分层。

具体地：第二种转移会使得 dp 值加一，故转移到下一层。第一种转移是同层更新前驱的转移，可以用队列迭代实现。

# CF238E review

---

直接 dp。