数学习题选讲

lsy

难度标签

分为 易 中 难，分别表示 属于基础知识 / 需要一点转化 / 需要很多转化。

如果目标是获得 CSP-S / NOIP 一等奖，应该要求听懂大部分 中 的题目。

如果目标是进入省队，应该要求听懂绝大多数题目。

难度与洛谷难度没有联系，是笔者的主观见解。

知识回顾：筛法与整除

1. 埃氏筛时间复杂度?
2. 线性筛过程？线性筛时间复杂度及原因?
3. 如何在线性时间复杂度内，求出:
(1) $1 \sim n$ 每个整数的欧拉函数值。
(2) $1 \sim n$ 每个整数的因数个数。
(3) $1 \sim n$ 每个整数的 k 次方因数个数，也就是 $f(x) = \sigma_0(x^k)$。（$k \le n$）
(4) $1 \sim n$ 每个整数的唯一分解中，所有质因子次数的和。
(5) $1 \sim n$ 每个整数的唯一分解中，所有质因子次数的最大值；最小值。
(6) $1 \sim n$ 每个整数的唯一分解中，有几种不同的质因子。
4. 如何求 $\gcd(a, b)$？时间复杂度?
5. 如何 $O(n)$ 预处理， $O(\log n)$ 回答任意一个 n 以内数的质因数分解?

例题：UVA12716 [易]

求有多少对 $(a, b), 1 \le a \le b \le n$，满足 $\gcd(a, b) = a \operatorname{xor} b$。
$n \le 3 \times 10^7$，时间限制 5s。

怎么处理看上去很奇怪的等式？打表找规律？

如果不打表，能直接证明这个规律吗？

补充知识：几个不等式

gcd：

$$\gcd(a,b) \le \min(a,b)$$
$$a \ne b \to \gcd(a,b) \le \min(a,b)/2$$
$$a \ne b \to \gcd(a,b) \le |a-b|$$

lcm 同理。

位运算：

$$|a-b| \le a \operatorname{xor} b \le a+b$$
$$\max(a,b) \le a \operatorname{or} b \le a+b$$
$$a \operatorname{and} b \le \min(a,b)$$
$$a \operatorname{and} b \le a \operatorname{xor} b \le a \operatorname{or} b$$

其它：

$$a \ge b \to a \bmod b \le a/2$$

几道与 gcd 不等式有关的例题 [易]

CF1834E：给定一个序列，求其所有区间的 LCM 的 mex。$n \le 200000, a_i \le 10^9$。

提示：先找答案上界。对于一个固定的右端点，所有以其为右端点的区间的 LCM 种类会很多吗？

夏令营测试 T1：给定一个序列，对于每个 x，求有多少个区间的 gcd 等于 x。$n \le 200000, a_i \le 200000$。

提示：同样，分段维护。

补充知识：gcd 与差分 [易]

$$\gcd(a,b)=\gcd(b,a\pm b)$$
$$\gcd(a,b,c)=\gcd(a,b-a,c-a)$$
$$\gcd(a,b,c)=\gcd(a,b-a,c-b)$$

两道例题:

[CF1548B]

给定 n 和一个长度为 n 的数组 a，求一个**最长**的区间 $[l,r]$，使得存在 $m\geq 2$ 和 k，对于所有 $l\leq i\leq r, a_i\equiv k\pmod m$（即**区间内所有数对 m 取模余数相等**），输出最长区间长度（区间长度定义为 $r-l+1$）。

$$n\leq 2\times 10^5, a_i\leq 10^9$$

[CF1458A]

给定长度为 n 的序列 a,长度为 m 的序列 b.

现在你需要对于所有整数 j 满足 $1\leq j\leq m$,求出 $\gcd(a_1+b_j,a_2+b_j,...,a_n+b_j)$ 的值.

$$n\leq 2\times 10^5, a_i,b_j\leq 10^{18}$$

例题：P8338 [中 / 难]

对于排列 A，定义 $v(A)$ 为最小的 x 使得 $A^x = A$。
给定排列 S，定义 $f(i,j)$，若存在 x 使得 $S_i^x = j$，则 $f(i,j) = 0$；否则令 S' 表示 S 交换 i,j 两个元素形成的排列，$f(i,j) = v(S)$。
对于所有 (i,j)，求 $f(i,j)$ 之和。

先对题目进行转化。

1. $v(A)$ 是什么？
2. 交换两个元素后，$v(A)$ 怎么变？

例题：P8338 [难]

我们首先有一个 $O(n\log^2 n)$（实际上跑不满，能过）的解法。

在 $v(A)$ 改变时，暴力维护其每个质因子幂次的变化，并重新统计最大值。

* 例题：P8338 cont.

给定若干个环，选择两个不在同一个环上的点，将他们所在的环合并成同一个。求每个选择方案的环长 lcm 之和。

考虑现在合并的是 a, b 这两个环，设此时的 lcm 为 l，先前的 lcm 为 g，我们来分析是否有好方法可以通过 g 算出 l。

考虑 $v_p(l) = \max(v_p(a+b), v_p(others))$，进行分类讨论：

1. 若 $v_p(a) \neq v_p(b)$，则 $v_p(a+b) = \min(v_p(a), v_p(b))$。
2. 若 $v_p(a) = v_p(b)$，则 $v_p(a+b) \geq \max(v_p(a), v_p(b))$。

如果我们设 $f(a) = \max(v_p(a) - v_p(sc), 0)$，那么有：

$$v_p(l) = \max\left(v_p(g), v_p(a+b)\right) - f(a) - f(b)$$

回到 lcm 的形式，我们可以：

$$l = \frac{\operatorname{lcm}(g, a+b)}{f^*(a) f^*(b)}$$

其中 $f^*(a)$ 是对于每个质数，$p^{-f(a)}$ 的积。

* 例题：P8338 cont.

$$l = \frac{\operatorname{lcm}(g, a+b)}{f^*(a)f^*(b)}$$

怎么快速算这个式子?

你能做到什么复杂度?

知识回顾：扩展欧几里得算法

1. 手推一遍 exgcd 式子。
2. exgcd 的解范围有保证吗？
3. 如何用 exgcd 解决同余方程的合并？

知识回顾：同余

1. 同余意义下，什么操作可以任意进行？什么操作可以有限制地进行？
2. 如何做除法操作？
3. 如何在 $O(n + \log p)$ 时间内求出 n 个数在模 p 意义下的逆元？

例题：CF1656D [中]

如果 n 可以被表示成 k 个模 k 意义下互不相同的正整数之和，就说 n 是 k-good 的。

给出 n，请你输出任何一个 $k \geq 2$，使得 n 是 k-good 的。

$$n \leq 10^{18}$$

k-good 意味着什么？

例题：CF1656D cont.

分类讨论 k 的奇偶性。

$2n = k(k+1) + 2kt$

$$2n \equiv k(k+1) \pmod{2k}$$

- k 是奇数，则 $k(k+1) \equiv 0 \pmod{2k}$。所以 $2n$ 是 $2k$ 的倍数，n 就是 k 的倍数。
- k 是偶数，则 $k(k+1) \equiv k \pmod{2k}$，所以 $2n$ 是 k 的倍数但不是 $2k$ 的倍数。

怎么满足“正整数”？

练习题：CF1603B

知识回顾：欧拉函数相关

1. 欧拉函数的定义是？如何计算？
2. 复述一遍欧拉定理和扩展欧拉定理。

例题：幂塔方程 (弱化版) [中]

给定 n,p，保证 p 是质数，解方程 $x^x \equiv n \pmod p$ 。
$0 < n < p \leq 10^{18}$，需要满足 $x \leq 2^{125}$。

能不能联想之前什么样的工具能帮我们处理幂次?

x 在底数和指数上，分别要满足什么条件?

例题：P4588 [易]

维护一个数，支持乘以一个正整数，除以一个正整数，输出这个数模 M 的值。

操作数 10^6，$M \le 10^9$。

对合数取模时，什么操作可以进行，什么不能进行？

如何规避不能进行的操作？

例题：P2568 [易]

给定正整数 n，求 $1 \le x, y \le n$ 且 $\gcd(x, y)$ 为素数的数对 (x, y) 有多少对。

$$n \le 10^7$$

考虑直接枚举质数 p，算 gcd 为 p 的数对有多少对。条件是什么?

* 例题：P4139 [易]

设 $a_1 = 2, a_n = 2^{a_{n-1}}$ 。可以证明，从某一项开始， $a_i \bmod p$ 都相同了，求这个相同的值。

用拓展欧拉定理：有什么发现?

知识回顾：组合数与基本计数思想

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

$$(x+y)^n = \sum \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{i}{n} \binom{k-i}{m} = \binom{k+1}{n+m+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$$

枚举子集，复杂度是什么？

1,2, … , n 有多少种圆排列？

卡特兰数的递推公式和通项公式分别是什么？

* 例题：CF1696E [易]

对于组合计数题，有两个可能的难点：列式和计算。

你有一张残缺的有 $n+1$ 行的网格纸，第 i 行只有前 A_i 格 $(A_i \ge A_{i+1})$。在一开始，在第一行的第一格写着一个数 1，其他格子上写的都是 0。

接下来，你可以进行若干次操作，每次操作可以将格子上任意位置 (i,j)，将上面的数减一，并将 $(i+1,j)$ 和 $(i,j+1)$ 上的数加一。特别的，如果即使在纸的边界上，你也可以进行这一操作，这会使得在格子外的加法无效。

现在，你需要求出使网格纸上的数全部变成 0 的最少操作次数对 10^9+7 取模的结果

$A_i, n \le 2\times 10^5$

知识回顾：二项式反演

若

$$f(i) = \sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i} g(j)$$

则

$$g(i) = \sum_{j=i}^{n} (-1)^{j-i} \binom{j}{i} f(j)$$

插板法

考虑方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$，其正整数解的个数为 $\binom{k-1}{n-1}$。

非负整数解的个数？$x_i \geq a_i$ 解的个数？$1 \leq x_i \leq t$ 解的个数？

例题：P5505 [易]

有 n 种球，第 i 种有 a_i 个，同种球完全相同。要把这些球分给 m 个同学，每个同学至少得到一个球，求方案数。

$n, m, a_i \leq 1000$，答案对大质数取模。

提示 1：忽略“每个同学至少得到一个球”，列一个简单的式子。

提示 2：“每个同学至少得到一个球”有什么简单方法处理？

例题：ARC102C [中]

有一个可重集，大小为 n，每个元素都是 $[1,k]$ 的正整数。对于每个 $2 \le s \le 2k$，求出有多少种这样的可重集，使得不存在两个不同的数加起来是 s。对大质数取模。

$$n,k \le 2000$$

提示 1：基本思想：先列式，后计算。列式时，要学会分类、分步。

提示 2：善用递推。

* 例题：P3214 [难]

计算有多少个 $2^{\{1,2,\ldots,n\}}$ 的 k 元子集，满足每个 $1,2,\ldots,n$ 中的值都在偶数个子集中出现。对大质数取模。

$$n,k \le 10^6$$

提示 1：考虑递推，设 $f(i)$ 表示 $k=i$ 的答案，你能否推出 f 的递推式？

* 例题：P3214 cont.

计算有多少个 $2^{\{1,2,\ldots,n\}}$ 的 k 元子集，满足每个 $1,2,\ldots,n$ 中的值都在偶数个子集中出现。
对大质数取模。

$$n,k \le 10^6$$

提示 1：考虑递推，设 $f(i)$ 表示 $k=i$ 的答案，你能否推出 f 的递推式？

提示 2：正难则反，能不能列出 k 元子集需要满足的条件，使用容斥——解决？

知识回顾：组合数前缀和

计算 $\{1,2,\ldots,n\}$ 有多少个子集，大小不超过 m：设答案为 $f(n,m)$。

求出 $f(1,m),f(2,m),\ldots,f(n,m)$。对大质数取模。

$$0 \le m \le 10^6, 1 \le n \le 10^6$$

提示：递推。

组合数前缀和 cont.

我们发现，已知 $f(n,m)$，可以在 $O(1)$ 时间内算出，满足 (x,y) 与 (n,m) 曼哈顿距离为 1 的任何 $f(x,y)$。

例如，考虑一条 (0,0) 到 (n,m) 的路径，每次向上或向右走一格。我们可以在 $O(n+m)$ 时间内求出路径上每一个整点的 f。

Bonus：给定 q 组询问，每次询问 $f(n_i,m_i)$，且 $n_i,m_i \le N$。设计一个 $O(Nq^{0.5})$ 的算法解决本题。

例题：ARC061D [难]

A B C 三个人玩游戏。游戏中共有 $n+m+k$ 张卡牌，其中三个人分别有 n,m,k 张。每张卡牌上写着 A B C 三个大写字母之一。初始时，A 先走。

游戏的进程如下：

1. 当前轮到的玩家抽出其牌堆里的最靠上的牌（这张牌随即消失）。如果当前玩家的牌堆为空，则当前玩家获胜。
2. 下一轮，轮到这张牌上写着的玩家。

计算在总共的 3^{n+m+k} 种安排牌堆的方式里，有多少种方式使得 A 获胜，对大质数取模。

$$n,m,k \le 10^6$$

提示 1：先列出一个计算答案的公式。

例题：ARC061D cont.

提示 1.1：先不考虑谁赢。安排牌堆的过程和游戏过程有没有对应关系？是否存在能使我们便于计数的转化？

Answer 1.1：如果到游戏结束的时候，已经拿出来的牌，按照拿的先后顺序序列是 $x_1 x_2 \dots x_s$，则这对应了 $3^{n+m+k-s}$ 种牌堆。

例题：ARC061D cont.

提示 1.2：列出一个用序列个数算牌堆个数的式子，先枚举序列长度，再用刚才的结论算牌堆个数。

Answer 1.2：

$$\sum_{s=n}^{n+m+k} \binom{s-1}{n-1} 3^{n+m+k-s} \sum_{i=\max(s-n-k,0)}^{m} \binom{s-n}{i}$$

例题：ARC061D cont.

提示 2：考虑优化第二个求和符号，利用上一个例题的结论。

数学之高斯消元法

lsy

高斯消元法

高斯消元法的得出来源于 解线性方程组。

线性方程组可以被写成 $Ax = B$ 的形式，其中 A 是矩阵，x, B 是向量。

核心思想为：从上往下，用第 i 行，把第 $i+1 \sim n$ 行的第 i 列都消掉。这样，整个矩阵就变为上三角矩阵。消完后，就从下往上回代。

如果在消元部分就同时消掉第 $1 \sim i-1$ 行，就可以省去 回代 这一步。

考虑下面矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

高斯消元法 cont.

方程组的解，有以下几种情况：唯一解，无穷解，无解。

$1 \times x = 1$：唯一解。
$0 \times x = 0$：无穷解。
$0 \times x = 1$：无解。

如何判断一个方程组是属于其中哪种情况？

回代过程中，若出现 $0x = 1$ 就无解。否则，若出现 $0x = 0$ 就无穷解，否则唯一解。

高斯消元法 cont.

高斯消元法在许多情况下均可进行。

1. 实数高斯消元
2. 模质数 p 意义下高斯消元

思考:

1. 若在模意义下高斯消元，且已知方程组的解个数不多，怎样生成所有合法解？（思考题：P9382）
2. 实数意义下高斯消元，肯定会遇到精度误差，这个误差可控吗？

例题：P4035 [易]

在 n 维空间里有 $n+1$ 个点，已知它们都在一个球的球面上，试确定球的球心坐标。

$$n \leq 10$$

模 2 / 模小质数高斯消元

用高斯消元解模 2 意义下的方程组，一行加到另一行上的操作可以用 bitset 优化：模 2 意义下，对位加，就是异或。这样，可以把时间复杂度优化为 $O(n^3/w)$，w 通常为 32 或 64。

模板题：P3164 [易]

思考题：P2447（涉及到基于“线性相关”性质的贪心和秩的概念，超过范围。）

Bonus：模 3 意义下还能 bitset 优化吗？

Answer：可以！

模 p 意义下，如果对每行用 p 个 bitset，对每个 $0 \le i < p$ 维护模 p 为 i 的位置集合，则用一行去消另一行的过程可以用 $O(p^2)$ 次 bitset 操作描述（枚举某个位置在两行分别是什么）。所以如果 p 很小（$p^2 < w$），也可以把 $O(n^3)$ 优化到 $O(n^3p^2/w)$。

例题：CF1606F [中]

有一个无向图，n 个点 m 条边。请你给每条边染上红绿蓝三种颜色之一，使得每个三元简单环上的三条边，颜色要么互不相同，要么全部相同。或报告无解。

$n \le 64, m \le 256$，10 组数据，1s。

提示 1：可以证明， n 个点 m 条边的无向图，三元环个数不超过 $O(m^{1.5})$。

提示 2：本题和高斯消元有什么联系？

Answer：把三种颜色分别看作 0/1/2 三个数，则题目的限制就是每个三元环上，边权和是 0。

现在有 $O(m^{1.5})$ 个方程，m 个未知数，消元的复杂度是什么？

Answer：$O(m^{3.5}/w)$。

思考题

1. 有一个多项式 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$，现给出 $n+1$ 个点 $(x_0, y_0) \sim (x_n, y_n)$，且 $f(x_i) = y_i$，再给出 X，请你求出 $f(X)$ 的值。一切运算均对大质数取模。$n \leq 500$。

2. 有一个序列 $a_0, a_1, \ldots$。已知其满足一个递推式：对于 $n \geq N$，都有 $a_n = b_1 a_{n-1} + b_2 a_{n-2} + \cdots + b_N a_{n-N}$。给出 $a_0 \sim a_{2N-1}$，再给出 m，求出 a_m 的值（输入保证能唯一确定 a_m 的值）。一切运算均对大质数取模。$n \leq 100, m \leq 10^9$。

Bonus：上述两个问题都可以做到更优的复杂度吗？