杂题选讲

feecie6418

自我介绍

QQ 30831672。

常用 id feecle6418 / feecie6418。

趣题部分

一些令笔者印象深刻的题，不一定难。

QOJ1171

定义对数组 A 一次操作为：不停删去 A 最左侧或最右侧的元素，并将其 push_back 到一个新数组 B 里。删完后，$B \to A$，并将 B 清空。

问：对于给定数组至少要几次才能排好序。

$$n \leq 200000$$

QOJ1171

倒着思考，对于一个有序数组，可以把它变成一段升序 + 一段降序。

对于一段升序 + 一段降序，可以把它变成 升降升降。

因此，k 次操作可以造出 2^{k-1} 个“升降”段。所以答案就是升降段个数的 log。

QOJ4996

给定一个 n 个点 m 条边的图，构造一种将点分为两个子集的方式，其中一个子集存在哈密顿路，另一个子集在补图中存在哈密顿路。

$$n,m \le 10^6$$

QOJ4996

增量构造。

QOJ6684

给你一棵边上还没填字母的 Trie 树，你要在边上填字母。

Trie 树上有一些关键点，表示有一个字符串的结尾在这里。保证叶子都是关键点。

假设你填完字母后，关键点对应的字符串集合为 $S=\{s_1,s_2,\dots,s_m\}$。

请你最小化 S 从小到大排序之后得到的序列的字典序。

$$n \le 2\times 10^5$$

QOJ6684

考虑几种特殊情况哪个子树排在前面:

1. 两个子树都是一条链，但是链底叶子深度不同。
2. 两个子树在某个点后，一个向下继续，一个换了儿子。
3. 两个子树在某个点后，一个向下继续，一个记录了。
4. 两个子树在某个点后，一个换了儿子，一个记录了。

可以发现，按照 dfs 序，把记录、向下、向上 分别赋值 -1,0,1，然后按照字典序贪心即可。

可以用启发式合并 deque 维护，时间复杂度 $O(n\log^2 n)$。

QOJ6684 review

多种情况的分析，总结出比较的条件。

QOJ5096

在一个环上，定义一次操作为：$(a_{i-1},a_i,a_{i+1})\to(a_{i-1}-a_i,-a_i,a_{i+1}-a_i)$。

询问至少几次操作后，$\forall i,a_ia_{i+1}<0$。

带修，修改形如：给定 i,x，将 a_i,a_{i+1} 同时加上 x。

$$|a_i|,|x|\le 10^9;n,q\le 10^5$$

QOJ5096

$(a_{i-1}, a_i, a_{i+1}) \to (a_{i-1} - a_i, -a_i, a_{i+1} - a_i)$。

设 $s_i = \sum_{1 \le i \le n} (-1)^i a_i$，则 $(s_{i-1}, s_i, s_{i+1}) \to (s_i, s_{i-1}, s_{i+1})$。

题目条件等价于 s 严格单调 增 / 减。如果是序列上的问题，可以通过 s_n 的符号判断增还是减，答案就是逆序对数。而修改就是对 s 单点修改，容易用数据结构维护。

环上怎么办？

QOJ5096

把 s 看成一个长度无限的序列，且 $s_i = s_{i-n} + s_n$。则题目要求被满足时，这样的 s 也一定递增。

这时， $i,j\ (i < j)$ 两个位置之间的贡献（交换次数）就变得复杂了一些，但仍然可以计算：设 $m = s_n$，则交换次数将包含“除以 m 并取整”的形式。

不过，注意 m 为定值，题目仍然是偏序问题，可以用数据结构解决。

QOJ5096 review

构造差分，环的延展。

QOJ5568

给定一个长度不超过 5000 的排列。

一次操作为，选一个子序列，将其向右循环移位一次。设子序列长度为 k，则代价为 $1/k$。

用不超过 2 的总代价排序。

QOJ5568 cont.

实验发现，随机排列，每次把所有 $p_i \neq i$ 的 p_i 全拿出来循环移位，大部分时候代价都略小于 1。

然而这样在排列完全逆序时，仍需要 $c \times \log n$ 的代价（c 为常数）。

考虑随机一个排列 q，分别执行 $p \to q, q \to I$。这样，两步都是随机了。

QOJ5568 review

复合一个随机排列，可以把任意排列变为随机的。

QOJ5092

一个有根树，每个点有点权。

A 和 B 轮流选择一个现在没有父亲的点，将其删去，并获得其点权的分数。两人都想最大化自己的分数。

求 A 分数 – B 分数 的值。

$$n \leq 200000$$

唯一一个部分分：$a_i \leq a_{fa_i}$

QOJ5092

这里，我们仅仅给出本题的“思路”，证明就省略了。

首先，注意到 $a_i \le a_{fa_i}$ 时，两人都会贪心选当前最大的（理解：让对手取总不优）。

如果某个 $a_i > a_{fa_i}$，对手取了 fa_i 我一定也会取 i。

考虑把取数的过程描述为：“两人轮流获得 $x_1, x_2, \dots, x_k$ 的贡献，x_i 不升”。对每个子树，用一个堆维护其 x_i。如果不考虑根结点，子树的合并就是堆的直接合并。

如果子树的堆里有大于根的权值 v 的元素 u，后手一定会在先手取完根后直接取这个元素。

此时先手收益是负的，所以先手必须再取一个元素 w 获得收益 $v-u+w$，可以看作把三个元素直接合并。

感性理解，合并的过程可以递归进行，直到满足堆性质（也就是先手收益比后手大）。

QOJ5092

如果一直满足不了堆性质怎么办？

1. 若总元素个数为奇数，则这个子树（虽然值是负的）还是可以看成一个元素。
2. 若总元素个数为偶数，则这个子树值一定是负的，而且还不能转换先后手，是谁都不愿意要的。此时，根据 n 的奇偶性判断谁会被迫选到这个子树。

[Submission #65508 - QOJ.ac]

QOJ5092 review

游戏的（感性）化归。

QOJ5095

小王唱歌。$n+1$ 首歌，n 个听众每个人有一个喜好度顺序。

从 1 号开始，每人 ban 一首歌，最后剩下一首，让小王唱。

每个人都希望最后的歌自己最喜欢，问小王唱哪首。

对于 $1 \sim n$ 的每个循环移位都求答案。

$$n \leq 5000$$

QOJ5095

题目看起来很奇怪，考虑手动模拟一下小数据。

考虑 $n=2$，第二个人决策时肯定拿掉自己觉得最差的歌。

如果第一个人留下了第二个人觉得**最差**的歌，则这首歌怎么都会被拿掉。在第二个人的曲目顺序里，如果第一个人留下 1,3 或 2,3，则可以确定剩下 1 还是 2，但拿掉 3 还要让第二个人在 1,2 里挑。所以第一个人肯定留下 3，删掉 1,2 里自己觉得最差的。

归纳一下，可以发现每个人都会删掉自己后面的人还没删掉的，自己觉得最差的。

暴力实现 $O(n^3)$，但改成只调整变化的就能 $O(n^2)$。

QOJ5095 review

从小数据开始，倒着分析。

PR #6 C

通信题。有一个带权有向图。

A 和 B 合作。B 希望回答 q 次询问，第 i 次询问希望找到一条 $s_i \to t_i$ 的最短路（只需要给出经过的边的编号）。A 和 B 都知道询问。

A 知道有向图的每一条边的端点和长度。B 知道有向图每一条边的端点，和除了 K 条边外的每一条边的长度。保证 B 不知道长度的边，起点都相同。

现在 A 可以向 B 发送不超过 L bit 的信息，请让 B 能正确回答所有询问。

有向图点数不超过 300，边数不超过 10^5。$q \le 60, K \le 5$。边权不超过 10^{16}，$L = 64$。

PR #6 C

笔者的解法是乱搞。

不妨假设 A,B 以相同顺序处理询问，且询问的顺序是随机打乱的。

如果直接发送每条边的边权，需要 $O(k\log w)$ bit；如果发送每个询问用哪条边，需要 $O(\log((k+1)^q)$ bit。

注意到询问之间并不是互不影响的。通过之前的询问，可以得到 未知边权 之间的大小关系。

根据大小关系剪枝，在测试数据中就只需要约 50 bit 了。

PR #6 C review

利用之前信息，剪枝

CF154E

给定平面上 n 个点和定值 R，保证存在一个半径为 R 的圆包含所有点。

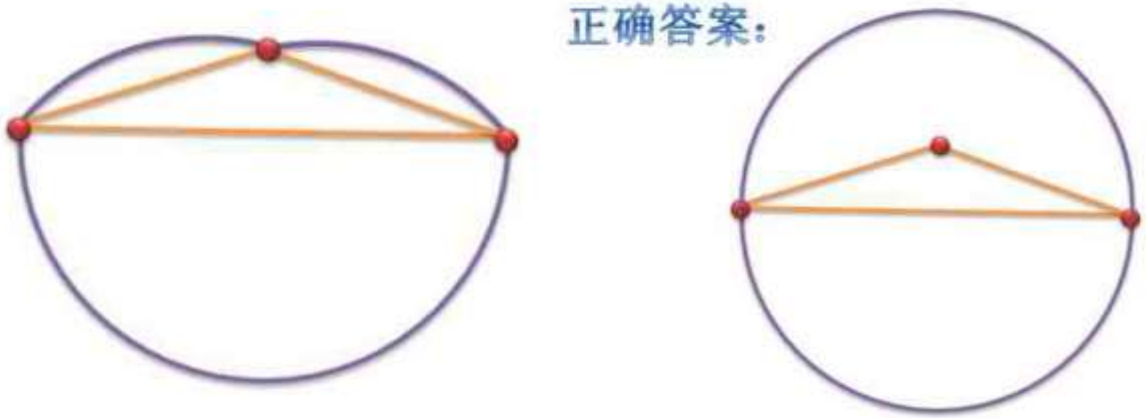
设 S 为所有包含所有点的半径为 R 的圆构成的集合。求 $\text{area}(\cap_{x\in S}\, x)$。

$$n \le 10^5, R \le 10^9$$

CF154E

感性理解一下，答案很可能是贴着凸包每条边画一个半径为 R 的圆得到的。

但这样有问题：考虑下图。



CF154E

可以发现，存在非法情况，就一定存在相邻的非法情况，也就是 $i, i+1, i+2$ 三个点满足 $i, i+1$ 的圆不包含 $i+2$。

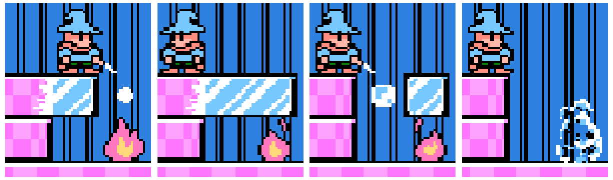
如果 $i, i+1$ 的圆不包含 $i+2$，但 $i, i+2$ 的圆含 $i+1$，则可以把 $i+1$ 删去，把 $(i, i+2)$ 看成凸包的一条边。

注意，还有一种情况：如果 $i, i+1$ 的圆不包含 $i+2$，但 $i+1, i+2$ 的圆含 i，则可以把 i 删去，把 $(i-1, i+1)$ 看成凸包的一条边。

可以用类似拓扑排序的方式模拟，时间复杂度 $O(n)$。

CF89E

你在玩下面这个小游戏:



初始时，小人站在最左边的柱子上。你可以做三种操作:

1. 左移: L
2. 右移，要求移动到的位置必须有冰块: R
3. 在小人当前位置右侧位置放置一块冰块，使得自己可以移动上去: A
4. 打碎在小人当前位置前方的冰块，并使得该位置右侧的所有位置的冰块都掉到地上: A

地上有 n 团火，第 i 团火在柱子右侧第 $i+1$ 格，血量为 a_i。一团火被冰块砸到一次，血量就会减小 1。问至少多少次操作后，火的血量全部小于等于 0，并给出方案。

$$n \le 1000, a_i \le 100$$

CF89E

每次操作是给 $[l,r]$ 血量减一。

为了给 $[l,r]$ 血量减一，需要站在 $l-2$ 上敲碎 $l-1$ 的冰。

可以发现，假设初始站在 $l-2$ 上，则消除一次 $[l,r]$ 区间需要 $3(r-l+1)+2$ 次操作（每个位置 RAL，第零个位置两个 A）。

不妨假设 n 处有火。通过调整可以证明，总可以认为最后一次操作消除的区间是 $[p,n]$。

同时也能证明，只要消完某个位置还要向后走（也就是除了最后一次操作），则消除的区间就不会做无用功。（考虑拆分成 $[l,k-1],[k+1,r]$）

CF89E

考虑最优策略是什么。容易发现，除了最后一次，都是按照左端点从小到大的顺序依次消除区间，最后退回 p 把 n 消除了。可以发现这样总步数为 $3\sum a_i + 2m + C - p$ 级别，m 为消除次数。所以枚举 p，选择 $3\sum a_i + 2m - p$ 最小的 p。

输出方案直接模拟上述策略即可。

CF238E

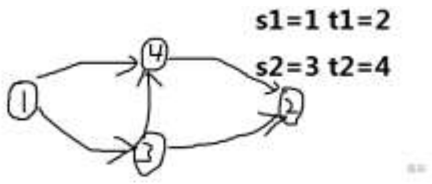
有一个城市，共有 n 个点，m 条有向边，边权均为 1。有 k 路公交车，第 i 条公交车从 s_i 到 t_i。公交车的路径不固定，但一定走最短路。

你想从 a 到 b，且只能搭车。你可以在任意点上下车。问最坏情况至少转几次车，或指出最坏情况无法到 b。

$$n \le 100, k \le 100, m \le n^2$$

CF238E

直接找必经点有 hack：右图中，1 可以到 4，
但是路线没有必经点。



考虑看成人和车之间的“博弈”问题，直接 dp。

设 $f(i,j)$ 表示人在 i 点，在 j 车上的答案。

1. 不下车，此时车会把人带到答案最大的在最短路上的点。
2. 下车，此时可以换乘到这个点是必经点的车。

考虑用类似 Dijkstra 的思路转移，按照 f 值分层。

具体地：第二种转移会使得 dp 值加一，故转移到下一层。第一种转移是同层更新前驱的转移，可以用队列迭代实现。

CF238E review

直接 dp。

CF183E

n 个人买糖果，第 i 个人手上有 a_i 元。

有 m 种糖果，第 i 种价格为 i 元，每种糖果只有一袋。

买糖果的过程是：

1. 这 n 个人自行选择结束购买过程，或执行第二步（如果要执行第二步，需要保证每个人手上都有足够的钱）。
2. 按照编号从小到大的顺序，每个人依次选择一袋糖果并买下。要求后一个人买的糖果价格必须高于前一个人的（轮间也有类似限制，即上一轮第 n 个人买的糖果价格必须小于这一轮第 1 个人买的糖果价格）。不允许出现买不起的情况。

这 n 个人齐心协力，希望买下的糖果价值和最大。如果大家都做最优决策，求出能买到多少价值的糖果。

$$n \le 200000, m \le 5 \times 10^6$$

CF183E

题目的过程是一轮一轮的，先枚举轮数 $p \le m/n$。

显然的结论：

1. 第 $i+1$ 个人花的钱数至少是第 i 个人花的钱数加 p，所以不妨认为 $a_{i+1} \ge a_i + p$。
2. 第 i 个人的下一轮，花的钱至少比上一轮多 n。

先假设已经固定了第一个人买了哪些糖果，如何求出剩下人至多买多少糖果？

考虑在最劣解的基础上调整。

假设现在空位数为 s：

从前往后考虑，某个人如果还剩 x 元，就可以把答案加上 $\min(x, s)$，s 减去 $\min(x, s)$。
（由于 $a_{i+1} \ge a_i + p$，所以不可能前一个人能移动后一个人不能移动）

CF183E

空位数 s 只和 1 选择的最靠左的糖果有关。

考虑 1 应该如何选择糖果。首先，容易证明：若最终 1 还有剩余的钱，一定不优。因此 1 一定把钱花光了。

而 1 要把钱花光，还希望让空位尽量多（前述贪心过程只和 s 有关），所以要让买的最便宜的糖果尽量便宜，这可以 $O(1)$ 求出。之后根据此时的 s 贪心即可。

时间复杂度 $O\left(\frac{m}{n} \times n\right) = O(m)$。

[Submission #155503798 - Codeforces]

CF183E review

调整法。通过简化题目条件，发现只和空位有关。

infoj #13 / CC PARTODD

有一个长度为 n 的 01 串。你需要把它划分为尽量少的连续段，使得

1. 每段内 1 的个数都是奇数
2. 每段的长度不超过 m

对于每个 $m = 1 \sim n$，求出最少的段数。

$$n, m \leq 10^6$$

infoj #13 / CC PARTODD

答案肯定是 $O(n/m)$ 的，所以难点在于怎么 $O(ans)$ 求。

一个符合直觉的贪心：每次贪心划分能划分的最长区间。

然而这样可能会把自己搞无解，比如 11100，$m=3$。不过稍微调整一下，可以得到：

设 b_i 表示最大的 $j \in [i+1, i+m]$，$(i,j]$ 中 1 的个数是奇数。设 c_i 表示最大的这样的 j，使得 (c_i, b_i) 中存在至少一个位置 k，$(i,k]$ 中 1 的个数是偶数。则每个区间要么是 $(i,c_i]$ 要么是 $(i,b_i]$。（如果 c_i 不存在，定义 $c_i=b_i$）

b,c 均可以对于指定的 i,m $O(1)$ 求出，故据此 dp 可以做到 $O(n^2)$，或 $O(n\sqrt{n\log n})$（二分答案连续段）。

infoj #13 / CC PARTODD

事实上，如果 b_i 能到 n（也就是不会无解），则一定不会跳到 c_i。证明考虑反证 c 第一次超过 b 的位置。所以，可以把 dp 换成判断可达性，贪心。

如何判断可达性？注意到只保留 $i \to c_i$ 不影响可达性，所以可以暴力跳 c_i 来判断。

结合上述两个做法根号分治，可以得到 $O(n\sqrt{n})$ 的做法。

infoj #13 / CC PARTODD

考虑如何继续优化，瓶颈在于暴力判断可达性。

先不妨假设 1 可达 n（也就是 m 大于一个下界）。

考虑 $m \to m+1$ 时，可达性数组如何变化：肯定只会不可达变成可达。

考察一段前缀和奇偶性相同的位置 $[l,r]$。下面我们证明其可达 n 的一定是一段非空后缀。
后缀容易理解，非空性考虑下面这个调整：(0)[1111]00(1)1 -> (0)[111(1)]0(0)(1)1

由非空性，可以得到每次 m 增大时每一段都至少多一个可达的位置，所以可以枚举每一段暴力修改是否可达。

这样，维护可达性时间复杂度均摊 $O(n)$，加上计算答案的 $O(n\log n)$，可以通过。

infoj #13 / CC PARTODD review

先想一个贪心，把问题转化为“判断可达性”；非空导出的均摊分析

CF238D

有一个指针和一个操作序列（包含 <>0123456789），初始时指针指向程序的第一个字符。

程序运行过程如下：

1. 若指针指向 < 或 >，则改变指针方向为该位置的值，并移动指针一步。若移动后仍指向 < 或 >，则删除上一步的位置。
2. 若指针指向数字，则输出这个数字，并将该位置的数字减一。若减到 0 以下，则删除这个位置。（删除后剩余部分拼接）
3. 若指针移出程序边界，则程序结束。

q 次询问：若只保留 $[l,r]$ 的操作序列作为程序，每个字符被输出多少次。

$$n,q \le 10^5$$

CF238D

注意到从 1 开始模拟，时间复杂度为 $O(n)$，且任意 $[l,r]$ 的操作序列都是其子串。（到不了就模拟多次）

通过预处理一些数组可以 $O(n)$ 回答。

CF238D review

比较有趣的“子串”性质。

Educational 题部分

QOJ5022

给定非负整数序列 a，长为 n，支持 q 次以下操作：

1. 对于每个 $l < i \leq r$，同时将 a_i 改为 $a_i \operatorname{xor} a_{i-1}$。
2. 查询 a_x。

$n \leq 250000$，$q \leq 100000$

QOJ5022 cont.

对 a 以 $512 \approx n^{0.5}$ 大小分块。对于不包含整个块的操作，暴力。

用“一个矩阵 a，上面一行写着这个块内的数，左边一列写着操作到这里时左边那个块最后一个数，$a_{ij} = a_{i(j-1)}\ xor\ a_{(i-1)j}$，块内数现在的值就是矩阵的最后一行”来描述标记（也就是标记是一个数组）。

如果同一个块被操作了超过 512 次（左边的列长度大于上面的行长度），也重置。

还需要动态求出每一块对下一块应该打什么标记。注意到这个标记除非同一个块被操作超过 512 次，都只与当前块有关，所以可以 pushdown 之后就预处理出来。

Pushdown 和预处理都可以使用子集和变换。时间复杂度 $O(q\sqrt{n}\log n)$。

QOJ5022 review

分块时设计标记与 pushdown 的技巧。

QOJ5174

定义“信息”有以下两种形式：

1. (A, B, C)：表示一条直线 $Ax + By + C = 0$。
2. (x_0, y_0, θ)：表示一个点和一个角度。

定义信息相互作用如下：

1. 一类信息 A 作用于一类信息 B，就是把 B 变为 B 关于 A 的对称线。
2. 一类信息 A 作用于二类信息 B，就是把 B 的 (x_0, y_0) 变为其关于 A 的对称点，角度不变。
3. 二类信息 A 作用于一类信息 B，就是把 B 变为 B 关于 A 的点旋转 A 的角度后得到的直线。
4. 二类信息 A 作用于二类信息 B，就是把 B 的 (x_0, y_0) 变为其关于 A 的点旋转 A 的角度后的点，角度不变。

给定一个信息的序列，支持 q 次操作：每次操作把一个信息作用到一个区间上，或询问一个点经过一个区间的所有操作作用后（点 就是没有 θ 的二类信息）得到的点。

QOJ5174 cont.

信息 作用于 点，就是对 $[x\ y\ 1]$ 这个矩阵进行线性变换。如果没有修改，就是求区间矩阵乘积。

然而，有修改时，修改矩阵怎么变化？

Important observation：

1. 将直线 A 关于 B 对称后得到 C，再将 P 点关于 C 对称得到 Q。则将 P 先关于 B 对称，再关于 A 对称，再关于 B 对称，也得到 Q。
2. 将直线 A 关于 B 旋转 θ 后得到 C，再将 P 点关于 C 对称得到 Q。则将 P 先关于 B 旋转 θ，再关于 A 对称，再关于 B 旋转 $-\theta$，也得到 Q。

还有两个情况也是类似的，就是作用于旋转的情况。注意，对称作用于旋转，那作用后旋转的角度也会取反。

QOJ5174 cont.

换句话说，将矩阵 B 作用于变换 A，实际上根据信息的类别，是把 $A \to BAB^{-1}$ 或者 $A \to BA^{-1}B^{-1}$。

据此线段树维护即可。

QOJ5174 review

几何性质的观察，对线性变换的多种视角。

QOJ4356

我们说一个排列是好的，当且仅当任意一个区间都存在一个端点是最值。

问：给定的排列至少要修改多少个位置，才能变成好的。

$n \leq 7000$，排列随机生成。

QOJ4356

可以发现，每次删掉全局是最值的一端，在平面上，当前的 (位置区间，值域区间) 总是一个正方形。

设 $f(l,r,x)$ 表示位置区间是 $[l,r]$，值域区间是 $[x,x+r-l]$，此时这个正方形内至少要删几个点，时间复杂度 $O(n^3)$。

此时，没有利用到排列的 随机性。

QOJ4356

注意到，能够保留的位置不多：其级别是 随机排列 LIS，也就是 $\sqrt{n}$ 级别的。

不妨反转值和下标，设 $g(v,i,dir)$ 表示以 (i,p_i) 为一角，想要在 dir 方向上（左上左下右上右下）保留 v 个位置，至多还剩下多大的正方形。初始时，正方形抵着边界。

转移时，暴力枚举所有当前正方形内的点，并尝试以其作为新的角。

时间复杂度 $O(ans \times n^2) = O(n^{2.5})$。

由于数据随机，其实可以只用 dp 值前 k 大的状态转移。本题中，取 $k = 600$ 即可通过，时间复杂度 $O(n^{1.5}k)$。

还可以用数据结构优化转移，这里不提了。

QOJ4356 review

反转值和下标；保留前 k 大 的乱搞思想。

QOJ5035

有一个环，环上每个位置有个权值，权值互不相同。定义环上一段区间的权值为 max(前缀最大值个数，后缀最大值个数)。把环分成 k 段，最大化每一段权值和。

$$n \le 600000, k \le 30$$

QOJ5035

注意到 n 如果在段的中间，则这一段一定有一部分没有贡献。故可以以 n 为一端，转化为序列问题（序列上不一定要完全划分，可以有一个后缀不划分）。

现在，要解决的问题即为：$f(i) + val(i+1, j) \to g(j)$，$val$ 可能是前缀最大值个数 或 后缀最大值个数 的意思。数据范围需要线性转移。

1. val 是后缀最大值个数。维护一个单调栈，单调栈里即为后缀最大值个数相同的位置构成的连续段，可以在单调栈上递推，线性转移。
2. val 是前缀最大值个数。此时，考虑刷表法，从后往前维护单调栈，转移可以写把向单调栈里第 i 段位置对 v 取 max 的形式。注意到第二种转移得到的 g 不减，所以可以直接打标记再前缀 max。

时间复杂度 $O(kn)$。

QOJ5017

有两棵 n 个点的树。问两棵树上有多少对链，链上的点编号构成的集合相同。

$$n \leq 200000$$

QOJ5017

对第一棵树点分治，特判以分治中心 x 为一端的路径。

对每个顶点赋随机权值，用 sum hash 来判断是否合法。

用类似合并直径的方法，求出 x 到分治块里的每个点 p 的路径（不含 x）在第二棵树上是哪条链。

假设第一棵树上链的端点为 u, v，分类讨论 $[u, x), [v, x]$ 在第二棵树上的路径位置关系。

1. 一个包含另一个。
2. LCA 为其中一个的 LCA，在一条链上相交。

均可写出其对应的 sum hash 等式，并用哈希表求个数。注意，实际上不用判位置关系，全部丢进去就行。

精细实现可以做到 $O(n \log n)$。

QOJ5017 review

sum hash 的运用，两棵树分别怎么处理。

ABC202F

平面上有 n 个整点，任意三点不共线。

问有多少个点的子集，其凸包面积为正整数。

$$n \leq 200$$

ABC202F

把边按照斜率排序，枚举起点 dp（按顺序加入凸包上的点，加入一个新点时，有 $2^{\cdots}$ 的系数）。可以发现每个凸包只会被算到一次。

瓶颈在计算每个三角形内的点数。这里可以 bitset 优化：看成在三条边的同一方向。

时间复杂度 $O(n^4/w)$。

Bonus：也存在严格 $O(n^3)$ 做法，大家可以自己想一想。

ABC176F

有一个长度为 $3n$ 的序列，你要执行 n 次操作。

第 i 次操作，你可以在当前序列开头的 5 个数中删去 3 个（最后一次操作，就是删完）。

如果删去的三个数全相同，你会获得 1 分。

问最多能获得多少分。

$$n \leq 2000$$

ABC176F

设 $dp(i,x,y)$ 表示做完前 i 次操作，最后一次操作前五个数没被删的是 x,y 的答案。

则下一次操作的五个数就是 x,y 和三个固定的数。

分类讨论：

1. 删三个固定的数，等价于给 dp 数组全局加。
2. 删 x,y 和一个固定的数，$O(1)$ 枚举删哪个数，只需要维护全局 max（只有 $O(n)$ 个位置有 +1 的贡献）。
3. 删 x,y 中的一个和两个固定的数。此时，转移到的状态只有 $O(n)$ 个，每个状态需要查询行 / 列 max。

因此只需要维护一个数据结构支持 全局加，行 / 列 / 全局 max 查询，单点加。精细实现，不难做到单次操作 $O(1)$，总复杂度 $O(n^2)$。

CF128E

平面上有 n 个圆。

你希望画 k 条直线，最大化 k 条直线把所有圆分成的块数之和。

$$n \le 1000, k \le 10^9$$

CF128E

首先，让所有直线交在一个圆里一定最优。

除了这个圆内的交点，这些直线还可以把其它圆分割。假设一条直线至多能穿过 M 个圆，则每条直线都穿过 M 个圆肯定最优。

因此，答案只与 M 的值有关。

CF128E

如何求出 M：计算几何中，很常见的套路是固定一个元素，以其为中心“旋转扫描线”。本题中，如何扫描?

注意到，总可以认为最优的直线与某个圆相切。所以枚举与哪个圆相切，“与其它圆相交”就等价于，直线与圆的切点在圆上的位置属于某个区间。

所以，只需求出这些区间，然后求出每个点至多被几个区间覆盖。

时间复杂度 $O(n^2 \log n)$。

CF128E review

第一步贪心；旋转扫描线；调整到相切

CF150D

有一个长度为 n 的字符串。每次操作中，你可以选择一个回文子串，并删除。设你选择的子串长度为 len，则会得到 a_{len} 分。删完后，剩下的部分会前后拼接起来。

问至多得到多少分。$n \le 150$。

CF164D

n 个点，删除 k 个点，最小化剩余点的直径。

$n \le 10^3, k \le 30$。

infoj #12 / CC CHEFPIC

平面上 n 个整点。你需要在平面上横平竖直地放置一些正方形，使得

1. 每个正方形至少覆盖 3 个点。
2. 正方形顶点是整点。
3. 每个点至少被一个正方形覆盖。

求正方形边长的最小值。

$n \le 400000$，坐标 $\in [0,10^8]$

CF185E

平面上有 n 个点，m 个传送门。定义两点间距离为以下两种走法较小值：

1. 直接走，距离为曼哈顿距离。
2. 先走到一个传送门（距离为曼哈顿距离），传送至任意一个传送门，再走到终点（距离为曼哈顿距离）。

求一个点，使得所有点到其最大距离最小。

$$n, m \le 10^5$$

CF223E

给出一个点双连通且边双连通的平面图，q 次询问一个环内的点数。

$$n, m, q, \sum k \leq 10^5$$

CF468E

有一个 $n \times n$ 矩阵，其中只有 m 个位置不是 1。求其积和式。

$$n \leq 10^5, m \leq 50$$

CF303E

n 个随机实数变量，第 i 个在 $[l_i, r_i]$ 均匀随机，对每个 (i, k) 问 x_i 是第 k 小的概率。输出实数。

$$n \le 80$$