

# 数据结构纵览

2024 年 9 月

feecle8146

# 目录

# 目录

今天我们将复习、学习、练习以下内容：

1. 线段树，树状数组，倍增，ST 表。
2. 基本的树上数据结构问题。
3. 单调栈和笛卡尔树。
4. 经典模型简介：分治和偏序问题。

同时，也将见到若干个综合例题。

# 线段树

## 基础例子

### 序列操作

P2572

给定一个 01 数组，支持区间赋值、区间取反、求区间 1 的个数、区间最长 1 连续段。

$$n, q \leq 200000$$

### K 次方和

无来源

给定一个数组，支持区间加、区间求 K 次方和。

$$n, q \leq 200000, K \leq 5$$

### 最大值个数

无来源

给定一个数组，支持区间加、查询区间最大值的出现次数。

$$n, q \leq 500000$$

# 线段树

## 基础例子

### 序列操作

P4247

给定一个数组，支持区间加、区间取反、区间求选出  
 $K$  个下标不同的数，所有选法得到的积的和。

$$n, q \leq 50000, K \leq 20$$

### 求数值

AT\_abl\_e

给定一个数字串，只包含 0~9。要求支持区间赋值，  
求出数字串从左到右读出的值。

$$n, q \leq 500000$$

### 经典问题

无来源

给定一个数组  $a$ ，支持区间加、求  $\sum_{i=l}^r \sum_{j=i}^r \sum_{k=i}^j a_k$ 。

$$n, q \leq 500000$$

# 试看看！

幻梦

P8969

给定一个数组，支持区间加、区间  $x \rightarrow \text{popcount}(x)$  、单点查询。

$n, q \leq 300000$ , 保证总有  $a_i \leq 10^{18}$

# 线段树

## 例子

### 见风使舵

CF773E

对于长为  $n$  的数组  $a$ ，维护变量  $x$ ，初始为 0。然后，依次扫描  $a_1, \dots, a_n$ ：若  $x > a_i$  则  $x \rightarrow x - 1$ ；若  $x = a_i$  则  $x$  不变；若  $x < a_i$  则  $x \rightarrow x + 1$ 。定义该过程结束后  $x$  的值为  $F(a)$ 。

定义  $G(a)$  为：任意排列  $a_1, \dots, a_n$  的前提下， $F(a)$  的最大值。

现在给出序列  $b_1, \dots, b_n$ ，对每个  $i$  求  $G(b[1 \dots i])$ 。  
 $n, |b_i| \leq 500000$

# 倍增

## 树上倍增

### 数据传输

P8820

给出一棵树，点  $x$  有点权  $v_x$ 。

$q$  次询问，每次问  $x, y$ ，你需要求出一个序列  $a_1 = x, a_2, \dots, a_k = y$ ，使得  $dis(a_i, a_{i+1}) \leq K$  且  $\sum v_{a_i}$  最小。

$$n, q \leq 200000, K \leq 3$$

# 倍增

## 树上倍增

### 保卫王国

P5024

给出一棵树，点  $x$  有点权  $v_x$ 。每次询问给定两个点必须选/不选，求此时的最小点覆盖（选权值和最小的点，满足每条边都至少一端被选）。

$$n, q \leq 300000$$



# dfs 序和树上差分

综合运用

## 简单环

P5203

给定一棵树，和  $m - n + 1$  条非树边，构成一个无向图。询问有多少个简单环恰好包含 2 条非树边（点相同但是经过的重边不同，算不同的环）。

$$n \leq m \leq 10^5$$

# 单调栈

## 基本运用

### 区间后缀最大值和

无来源

给你一个数组，多次询问区间的所有后缀的最大值之和。

$$n, q \leq 300000$$

### 区间最大值之和

无来源

给你一个数组，求所有区间  $[l, r]$  的最大值之和。

要求线性。

# 单调栈

## 基本运用

带删数的区间最大值之和

CF1988E

定义数组  $a$  所有区间的最大值之和为  $f(a)$ 。

设  $a$  删掉第  $i$  个元素得到的数组为  $b_i$ ，求所有  $f(b_i)$ 。

### 体育馆问题

CF1601E

有一个体育馆，第  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 天，票价为  $a_i$  元。每张你手上的票可以管任意连续的  $k$  (定值) 天，也就是说，如果你在第  $i$  天买了这张票，你可以任意选择  $A$ ，满足  $i \leq A$ ，这样，第  $A, A + 1, \dots, A + k - 1$  天都可以用这张票进入体育馆。

$q$  次询问，每次给出  $l, r$ ，问如果第  $l$  天某人来到这个城市（也就是无法在第  $l$  天前买票），并且要在第  $l, l + 1, \dots, r$  天进入体育馆，至少要花多少钱。

$n, q \leq 300000$

# 笛卡尔树

## 基本运用

带删数的区间最大值之和

CF1988E

定义数组  $a$  所有区间的最大值之和为  $f(a)$ 。

设  $a$  删掉第  $i$  个元素得到的数组为  $b_i$ ，求所有  $f(b_i)$ 。

用笛卡尔树解决本题。



P6240

给定一个序列，每个元素是物品，具有体积  $w_i$  和价值  $c_i$ 。  $q$  次询问，每次询问一个区间  $[l, r]$  和背包大小  $V$ ，请你求出用这个背包去装区间内的物品（每个物品只能装一次），价值和最大是多少。

$$n \leq 10^4, q \leq 10^5, V \leq 500$$

## 最大独立集

P7482

给定一个序列，求所有区间的最大独立集之和。

$$n \leq 10^5$$

# 偏序问题

例子

## 区间数颜色

P4113

给出一个序列，多次询问区间中有几种不同的  $a_i$ 。

$$n, q \leq 10^6$$

## 带修数点

经典问题

平面上初始没有点，你需要支持动态加点、删点，同时求矩形内点数。

$$n, q \leq 10^5$$

## 三角形求和

经典问题

给定平面上  $n$  个点，每次询问给出  $u, v, w$ ，求满足  $x + y \leq u, x \geq v, y \geq w$  的点的个数。

$$n, q \leq 10^6$$



# 偏序问题

## 扫描线

### 矩形面积并

经典问题

平面上有  $n$  个矩形，求其面积并。

$$n \leq 10^5, x_i, y_i \leq 10^9$$

# 偏序问题

扫描线

## 连续段问题

CF526F

给定一个排列，问有几个区间满足  $r - l = \max_{i \in [l, r]} a_i - \min_{i \in [l, r]} a_i$ 。

$$n \leq 3 \times 10^5$$

# 偏序问题

例子

如何正确地排序

P8253

有一个  $4 \times n$  的数组  $a_{i,j}$ , 定义

$$f(i,j) = \min_k (a_{k,i} + a_{k,j}) + \max_k (a_{k,i} + a_{k,j})$$

求  $\sum_{i,j \in [1,n]} f(i,j)$ 。

$$n \leq 2 \times 10^5$$

# 综合运用

## 例子

### Beautiful Pair

P4755

给定一个数组，问有多少个  $(i, j)$  满足  $a_i a_j \leq \max_{k \in [i, j]} a_k$ 。

$$n \leq 10^5$$

# 综合运用

## 例子

### 天天爱打卡

P9871

小 T 跑步打卡。共有  $n$  天，每天可以跑步或不跑步。能量值初始为 0，若某天选择跑步，则能量值减少  $d$ 。不能连续超过  $k$  天跑步。

有  $m$  条奖励：若他在第  $l_i \sim r_i$  天都选择跑步，会得到  $v_i$  能量值。

问  $n$  天后能量值最高是多少。

$$n \leq 10^9, m \leq 10^5$$

# 综合运用

## 例子

### Drying Plan

CF1889C2

有  $m$  条线段，值域为  $[1, n]$ 。请删除不超过  $K$  条线段，最大化未被任何线段覆盖的整点数量。

$$n, m \leq 10^5, K \leq 10$$