

数学习题选讲

lsy

难度标签

分为 易 中 难，分别表示 属于基础知识 / 需要一点转化 / 需要很多转化。

如果目标是获得 CSP-S / NOIP 一等奖，应该要求听懂大部分 中 的题目。

如果目标是进入省队，应该要求听懂绝大多数题目。

难度与洛谷难度没有联系，是笔者的主观见解。

知识回顾：筛法与整除

1. 埃氏筛时间复杂度？
2. 线性筛过程？线性筛时间复杂度及原因？
3. 如何在线性时间复杂度内，求出：
 - (1) $1 \sim n$ 每个整数的欧拉函数值。
 - (2) $1 \sim n$ 每个整数的因数个数。
 - (3) $1 \sim n$ 每个整数的 k 次方因数个数，也就是 $f(x) = \sigma_0(x^k)$ 。 ($k \leq n$)
 - (4) $1 \sim n$ 每个整数的唯一分解中，所有质因子次数的和。
 - (5) $1 \sim n$ 每个整数的唯一分解中，所有质因子次数的最大值；最小值。
 - (6) $1 \sim n$ 每个整数的唯一分解中，有几种不同的质因子。
4. 如何求 $\gcd(a, b)$ ？时间复杂度？
5. 如何 $O(n)$ 预处理， $O(\log n)$ 回答任意一个 n 以内数的质因数分解？

例题：UVA12716 [易]

求有多少对 (a, b) , $1 \leq a \leq b \leq n$, 满足 $\gcd(a, b) = a \text{ xor } b$ 。
 $n \leq 3 \times 10^7$, 时间限制 5s。

怎么处理看上去很奇怪的等式？打表找规律？

如果不打表，能直接证明这个规律吗？

补充知识：几个不等式

gcd:

$$\begin{aligned}\gcd(a, b) &\leq \min(a, b) \\ a \neq b &\rightarrow \gcd(a, b) \leq \min(a, b)/2 \\ a \neq b &\rightarrow \gcd(a, b) \leq |a - b|\end{aligned}$$

lcm 同理。

位运算:

$$\begin{aligned}|a - b| &\leq a \text{ xor } b \leq a + b \\ \max(a, b) &\leq a \text{ or } b \leq a + b \\ a \text{ and } b &\leq \min(a, b) \\ a \text{ and } b &\leq a \text{ xor } b \leq a \text{ or } b\end{aligned}$$

其它:

$$a \geq b \rightarrow a \bmod b \leq a/2$$

几道与 gcd 不等式有关的例题 [易]

CF1834E: 给定一个序列, 求其所有区间的 LCM 的 mex。 $n \leq 200000, a_i \leq 10^9$ 。

提示: 先找答案上界。对于一个固定的右端点, 所有以其为右端点的区间的 LCM 种类会很多吗?

夏令营测试 T1: 给定一个序列, 对于每个 x , 求有多少个区间的 gcd 等于 x 。 $n \leq 200000, a_i \leq 200000$ 。

提示: 同样, 分段维护。

补充知识：gcd 与差分 [易]

$$\begin{aligned}\gcd(a, b) &= \gcd(b, a \pm b) \\ \gcd(a, b, c) &= \gcd(a, b - a, c - a) \\ \gcd(a, b, c) &= \gcd(a, b - a, c - b)\end{aligned}$$

两道例题：

[CF1548B]

给定 n 和一个长度为 n 的数组 a ，求一个最长的区间 $[l, r]$ ，使得存在 $m \geq 2$ 和 k ，对于所有 $l \leq i \leq r, a_i \equiv k \pmod{m}$ （即区间内所有数对 m 取模余数相等），输出最长区间长度（区间长度定义为 $r - l + 1$ ）。

$$n \leq 2 \times 10^5, a_i \leq 10^9$$

[CF1458A]

给定长度为 n 的序列 a ，长度为 m 的序列 b 。

现在你需要对于所有整数 j 满足 $1 \leq j \leq m$ ，求出 $\gcd(a_1 + b_j, a_2 + b_j, \dots, a_n + b_j)$ 的值。

$$n \leq 2 \times 10^5, a_i, b_j \leq 10^{18}$$

例题： P8338 [中 / 难]

对于排列 A ，定义 $v(A)$ 为最小的 x 使得 $A^x = A$ 。

给定排列 S ，定义 $f(i, j)$ ，若存在 x 使得 $S_i^x = j$ ，则 $f(i, j) = 0$ ；否则令 S' 表示 S 交换 i, j 两个元素形成的排列， $f(i, j) = v(S')$ 。

对于所有 (i, j) ，求 $f(i, j)$ 之和。

先对题目进行转化。

1. $v(A)$ 是什么？
2. 交换两个元素后， $v(A)$ 怎么变？

例题： P8338 [难]

我们首先有一个 $O(n \log^2 n)$ （实际上跑不满，能过）的解法。

在 $v(A)$ 改变时，暴力维护其每个质因子幂次的变化，并重新统计最大值。

* 例题： P8338 cont.

给定若干个环，选择两个不在同一个环上的点，将他们所在的环合并成同一个。求每个选择方案的环长 lcm 之和。

考虑现在合并的是 a, b 这两个环，设此时的 lcm 为 l ，先前的 lcm 为 g ，我们来分析是否有好方法可以通过 g 算出 l 。

考虑 $v_p(l) = \max(v_p(a + b), v_p(others))$ ，进行分类讨论：

1. 若 $v_p(a) \neq v_p(b)$ ，则 $v_p(a + b) = \min(v_p(a), v_p(b))$ 。

2. 若 $v_p(a) = v_p(b)$ ，则 $v_p(a + b) \geq \max(v_p(a), v_p(b))$ 。

如果我们设 $f(a) = \max(v_p(a) - v_p(sc), 0)$ ，那么有：

$$v_p(l) = \max(v_p(g), v_p(a + b)) - f(a) - f(b)$$

回到 lcm 的形式，我们可以：

$$l = \frac{\text{lcm}(g, a + b)}{f^*(a)f^*(b)}$$

其中 $f^*(a)$ 是对于每个质数， $p^{-f(a)}$ 的积。

* 例题： P8338 cont.

$$l = \frac{\text{lcm}(g, a + b)}{f^*(a)f^*(b)}$$

怎么快速算这个式子？

你能做到什么复杂度？

知识回顾：扩展欧几里得算法

1. 手推一遍 exgcd 式子。
2. exgcd 的解范围有保证吗？
3. 如何用 exgcd 解决同余方程的合并？

知识回顾：同余

1. 同余意义下，什么操作可以任意进行？什么操作可以有限制地进行？
2. 如何做除法操作？
3. 如何在 $O(n + \log p)$ 时间内求出 n 个数在模 p 意义下的逆元？

例题： CF1656D [中]

如果 n 可以被表示成 k 个模 k 意义下互不相同的正整数之和，就说 n 是 k -good 的。

给出 n ，请你输出任何一个 $k \geq 2$ ，使得 n 是 k -good 的。

$$n \leq 10^{18}$$

k -good 意味着什么？

例题：CF1656D cont.

分类讨论 k 的奇偶性。

$$2n = k(k+1) + 2kt$$

$$2n \equiv k(k+1) \pmod{2k}$$

- k 是奇数，则 $k(k+1) \equiv 0 \pmod{2k}$ 。所以 $2n$ 是 $2k$ 的倍数， n 就是 k 的倍数。
- k 是偶数，则 $k(k+1) \equiv k \pmod{2k}$ ，所以 $2n$ 是 k 的倍数但不是 $2k$ 的倍数。

怎么满足“正整数”？

练习题：CF1603B

知识回顾：欧拉函数相关

1. 欧拉函数的定义是？如何计算？
2. 复述一遍欧拉定理和扩展欧拉定理。

例题：幂塔方程 (弱化版) [中]

给定 n, p ，保证 p 是质数，解方程 $x^x \equiv n \pmod{p}$ 。
 $0 < n < p \leq 10^{18}$ ，需要满足 $x \leq 2^{125}$ 。

能不能联想之前什么样的工具能帮我们处理幂次？

x 在底数和指数上，分别要满足什么条件？

例题： P4588 [易]

维护一个数，支持乘以一个正整数，除以一个正整数，输出这个数模 M 的值。

操作数 10^6 ， $M \leq 10^9$ 。

对合数取模时，什么操作可以进行，什么不能进行？

如何规避不能进行的操作？

例题： P2568 [易]

给定正整数 n ，求 $1 \leq x, y \leq n$ 且 $\gcd(x, y)$ 为素数的数对 (x, y) 有多少对。

$$n \leq 10^7$$

考虑直接枚举质数 p ，算 \gcd 为 p 的数对有多少对。条件是什么？

例题： P2568 [易]

设 $a_1 = 2, a_n = 2^{a_{n-1}}$ 。可以证明，从某一项开始， $a_i \bmod p$ 都相同了，求这个相同的值。

用拓展欧拉定理：有什么发现？

知识回顾：组合数与基本计数思想

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$
$$(x+y)^n = \sum \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{i}{n} \binom{k-i}{m} = \binom{k+1}{n+m+1}$$
$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$$

枚举子集，复杂度是什么？

$1, 2, \dots, n$ 有多少种圆排列？

卡特兰数的递推公式和通项公式分别是什么？

例题：CF1696E [易]

对于组合计数题，有两个可能的难点：列式和计算。

你有一张残缺的有 $n + 1$ 行的网格纸，第 i 行只有前 A_i 格 ($A_i \geq A_{i+1}$)。在一开始，在第一行的第一格写着一个数 1，其他格子上写的都是 0。

接下来，你可以进行若干次操作，每次操作可以将格子上任意位置 (i, j) ，将上面的数减一，并将 $(i + 1, j)$ 和 $(i, j + 1)$ 上的数加一。特别的，如果即使在纸的边界上，你也可以进行这一操作，这会使得在格子外的加法无效。

现在，你需要求出使网格纸上的数全部变成 0 的最少操作次数对 $10^9 + 7$ 取模的结果

$$A_i, n \leq 2 \times 10^5$$

知识回顾：二项式反演

若

$$f(i) = \sum_{j=i}^n \binom{j}{i} g(j)$$

则

$$g(i) = \sum_{j=i}^n (-1)^{j-i} \binom{j}{i} f(j)$$

插板法

考虑方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$, 其正整数解的个数为 $\binom{k-1}{n-1}$ 。

非负整数解的个数? $x_i \geq a_i$ 解的个数? $1 \leq x_i \leq t$ 解的个数?

例题：P5505 [易]

有 n 种球，第 i 种有 a_i 个，同种球完全相同。要把这些球分给 m 个同学，每个同学至少得到一个球，求方案数。

$n, m, a_i \leq 1000$ ，答案对大质数取模。

提示 1：忽略“每个同学至少得到一个球”，列一个简单的式子。

提示 2：“每个同学至少得到一个球”有什么简单方法处理？

例题：ARC102C [中]

有一个可重集，大小为 n ，每个元素都是 $[1, k]$ 的正整数。对于每个 $2 \leq s \leq 2k$ ，求出有多少种这样的可重集，使得不存在两个不同的数加起来是 s 。对大质数取模。

$$n, k \leq 2000$$

提示 1：基本思想：先列式，后计算。列式时，要学会分类、分步。

提示 2：善用递推。

* 例题： P3214 [难]

计算有多少个 $2^{\{1,2,\dots,n\}}$ 的 k 元子集，满足每个 $1,2,\dots,n$ 中的值都在偶数个子集中出现。
对大质数取模。

$$n, k \leq 10^6$$

提示 1：考虑递推，设 $f(i)$ 表示 $k = i$ 的答案，你能否推出 f 的递推式？

* 例题： P3214 cont.

计算有多少个 $2^{\{1,2,\dots,n\}}$ 的 k 元子集，满足每个 $1,2,\dots,n$ 中的值都在偶数个子集中出现。
对大质数取模。

$$n, k \leq 10^6$$

提示 1：考虑递推，设 $f(i)$ 表示 $k = i$ 的答案，你能否推出 f 的递推式？

提示 2：正难则反，能不能列出 k 元子集需要满足的条件，使用容斥——解决？

知识回顾：组合数前缀和

计算 $\{1, 2, \dots, n\}$ 有多少个子集，大小不超过 m ：设答案为 $f(n, m)$ 。

求出 $f(1, m), f(2, m), \dots, f(n, m)$ 。对大质数取模。

$$0 \leq m \leq 10^6, 1 \leq n \leq 10^6$$

提示：递推。

组合数前缀和 cont.

我们发现，已知 $f(n, m)$ ，可以在 $O(1)$ 时间内算出，满足 (x, y) 与 (n, m) 曼哈顿距离为 1 的任何 $f(x, y)$ 。

例如，考虑一条 $(0, 0)$ 到 (n, m) 的路径，每次向上或向右走一格。我们可以在 $O(n + m)$ 时间内求出路径上每一个整点的 f 。

Bonus：给定 q 组询问，每次询问 $f(n_i, m_i)$ ，且 $n_i, m_i \leq N$ 。设计一个 $O(Nq^{0.5})$ 的算法解决本题。

例题：ARC061D [难]

A B C 三个人玩游戏。游戏中共有 $n + m + k$ 张卡牌，其中三个人分别有 n, m, k 张。每张卡牌上写着 A B C 三个大写字母之一。初始时，A 先走。

游戏的进程如下：

1. 当前轮到的玩家抽出其牌堆里的最靠上的牌（这张牌随即消失）。如果当前玩家的牌堆为空，则当前玩家获胜。
2. 下一轮，轮到这张牌上写着的玩家。

计算在总共的 3^{n+m+k} 种安排牌堆的方式里，有多少种方式使得 A 获胜，对大质数取模。
 $n, m, k \leq 10^6$

提示 1：先列出一个计算答案的公式。

例题：ARC061D cont.

提示 1.1：先不考虑谁赢。安排牌堆的过程和游戏过程有没有对应关系？是否存在能使我们便于计数的转化？

Answer 1.1：如果到游戏结束的时候，已经拿出来的牌，按照拿的先后顺序序列是 $x_1 x_2 \dots x_s$ ，则这对应了 $3^{n+m+k-s}$ 种牌堆。

例题：ARC061D cont.

提示 1.2：列出一个用序列个数算牌堆个数的式子，先枚举序列长度，再用刚才的结论算牌堆个数。

Answer 1.2：

$$\sum_{s=n}^{n+m+k} \binom{s-1}{n-1} 3^{n+m+k-s} \sum_{i=\max(s-n-k, 0)}^m \binom{s-n}{i}$$

例题：ARC061D cont.

提示 2：考虑优化第二个求和符号，利用上一个例题的结论。

数学之高斯消元法

lsy

高斯消元法

高斯消元法的得出来源于 解线性方程组。

线性方程组可以被写成 $Ax = B$ 的形式，其中 A 是矩阵， x, B 是向量。

核心思想为：从上往下，用第 i 行，把第 $i + 1 \sim n$ 行的第 i 列都消掉。这样，整个矩阵就变为上三角矩阵。消完后，就从下往上回代。

如果在消元部分就同时消掉第 $1 \sim i - 1$ 行，就可以省去 回代 这一步。

考虑下面矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$



高斯消元法 cont.

方程组的解，有以下几种情况：唯一解，无穷解，无解。

$1 \times x = 1$ ：唯一解。

$0 \times x = 0$ ：无穷解。

$0 \times x = 1$ ：无解。

如何判断一个方程组是属于其中哪种情况？

回代过程中，若出现 $0x = 1$ 就无解。否则，若出现 $0x = 0$ 就无穷解，否则唯一解。

高斯消元法 cont.

高斯消元法在许多情况下均可进行。

1. 实数高斯消元
2. 模质数 p 意义下高斯消元

思考：

1. 若在模意义下高斯消元，且已知方程组的解个数不多，怎样生成所有合法解？（思考题：P9382）
2. 实数意义下高斯消元，肯定会遇到精度误差，这个误差可控吗？

例题： P4035 [易]

在 n 维空间里有 $n + 1$ 个点，已知它们都在一个球的球面上，试确定球的球心坐标。

$$n \leq 10$$

模 2 / 模小质数高斯消元

用高斯消元解模 2 意义下的方程组，一行加到另一行上的操作可以用 bitset 优化：模 2 意义下，对位加，就是异或。这样，可以把时间复杂度优化为 $O(n^3/w)$ ， w 通常为 32 或 64。

模板题：P3164 [易]

思考题：P2447（涉及到基于“线性相关”性质的贪心和秩的概念，超过范围。）

Bonus：模 3 意义下还能 bitset 优化吗？

Answer：可以！

模 p 意义下，如果对每行用 p 个 bitset，对每个 $0 \leq i < p$ 维护模 p 为 i 的位置集合，则用一行去消另一行的过程可以用 $O(p^2)$ 次 bitset 操作描述（枚举某个位置在两行分别是什么）。所以如果 p 很小（ $p^2 < w$ ），也可以把 $O(n^3)$ 优化到 $O(n^3 p^2 / w)$ 。

例题：CF1606F [中]

有一个无向图， n 个点 m 条边。请你给每条边染上红绿蓝三种颜色之一，使得每个三元简单环上的三条边，颜色要么互不相同，要么全部相同。或报告无解。

$n \leq 64, m \leq 256$ ，10 组数据，1s。

提示 1：可以证明， n 个点 m 条边的无向图，三元环个数不超过 $O(m^{1.5})$ 。

提示 2：本题和高斯消元有什么联系？

Answer：把三种颜色分别看作 0/1/2 三个数，则题目的限制就是每个三元环上，边权之和是 0。

现在有 $O(m^{1.5})$ 个方程， m 个未知数，消元的复杂度是什么？

Answer： $O(m^{3.5}/w)$ 。

思考题

1. 有一个多项式 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ ，现给出 $n + 1$ 个点 $(x_0, y_0) \sim (x_n, y_n)$ ，且 $f(x_i) = y_i$ ，再给出 X ，请你求出 $f(X)$ 的值。一切运算均对大质数取模。 $n \leq 500$ 。
2. 有一个序列 a_0, a_1, \dots 。已知其满足一个递推式：对于 $n \geq N$ ，都有 $a_n = b_1a_{n-1} + b_2a_{n-2} + \cdots + b_Na_{n-N}$ 。给出 $a_0 \sim a_{2N-1}$ ，再给出 m ，求出 a_m 的值（输入保证能唯一确定 a_m 的值）。一切运算均对大质数取模。 $n \leq 100, m \leq 10^9$ 。

Bonus：上述两个问题都可以做到更优的复杂度吗？