

数据结构纵览

2024 年 9 月

feecle8146

目录

目录

今天我们将复习、学习、练习以下内容：

1. 线段树，树状数组，倍增，ST 表。
2. 基本的树上数据结构问题。
3. 单调栈和笛卡尔树。
4. 经典模型简介：分治和偏序问题。

同时，也将见到若干个综合例题。

线段树

基础例子

序列操作

P2572

给定一个 01 数组，支持区间赋值、区间取反、求区间 1 的个数、区间最长 1 连续段。

$$n, q \leq 200000$$

K 次方和

无来源

给定一个数组，支持区间加、区间求 K 次方和。

$$n, q \leq 200000, K \leq 5$$

最大值个数

无来源

给定一个数组，支持区间加、查询区间最大值的出现次数。

$$n, q \leq 500000$$

线段树

基础例子

序列操作

P4247

给定一个数组，支持区间加、区间取反、区间求选出 K 个下标不同的数，所有选法得到的积的和。

$$n, q \leq 50000, K \leq 20$$

求数值

AT_abl_e

给定一个数字串，只包含 0~9。要求支持区间赋值，求出数字串从左到右读出的值。

$$n, q \leq 500000$$

经典问题

无来源

给定一个数组 a ，支持区间加、求 $\sum_{i=l}^r \sum_{j=i}^r \sum_{k=i}^j a_k$ 。

$$n, q \leq 500000$$

试看看！

幻梦

P8969

给定一个数组，支持区间加、区间 $x \rightarrow \text{popcount}(x)$ 、单点查询。

$n, q \leq 300000$, 保证总有 $a_i \leq 10^{18}$

线段树

例子

见风使舵

CF773E

对于长为 n 的数组 a ，维护变量 x ，初始为 0。然后，依次扫描 a_1, \dots, a_n ：若 $x > a_i$ 则 $x \rightarrow x - 1$ ；若 $x = a_i$ 则 x 不变；若 $x < a_i$ 则 $x \rightarrow x + 1$ 。定义该过程结束后 x 的值为 $F(a)$ 。

定义 $G(a)$ 为：任意排列 a_1, \dots, a_n 的前提下， $F(a)$ 的最大值。

现在给出序列 b_1, \dots, b_n ，对每个 i 求 $G(b[1 \dots i])$ 。
 $n, |b_i| \leq 500000$

倍增

树上倍增

数据传输

P8820

给出一棵树，点 x 有点权 v_x 。

q 次询问，每次问 x, y ，你需要求出一个序列 $a_1 = x, a_2, \dots, a_k = y$ ，使得 $dis(a_i, a_{i+1}) \leq K$ 且 $\sum v_{a_i}$ 最小。

$$n, q \leq 200000, K \leq 3$$

倍增

树上倍增

保卫王国

P5024

给出一棵树，点 x 有点权 v_x 。每次询问给定两个点必须选/不选，求此时的最小点覆盖（选权值和最小的点，满足每条边都至少一端被选）。

$$n, q \leq 300000$$

dfs 序和树上差分

综合运用

简单环

P5203

给定一棵树，和 $m - n + 1$ 条非树边，构成一个无向图。询问有多少个简单环恰好包含 2 条非树边（点相同但是经过的重边不同，算不同的环）。

$$n \leq m \leq 10^5$$

单调栈

基本运用

区间后缀最大值和

无来源

给你一个数组，多次询问区间的所有后缀的最大值之和。

$$n, q \leq 300000$$

区间最大值之和

无来源

给你一个数组，求所有区间 $[l, r]$ 的最大值之和。

要求线性。

单调栈

基本运用

带删数的区间最大值之和

CF1988E

定义数组 a 所有区间的最大值之和为 $f(a)$ 。

设 a 删掉第 i 个元素得到的数组为 b_i ，求所有 $f(b_i)$ 。

体育馆问题

CF1601E

有一个体育馆，第 i ($1 \leq i \leq n$) 天，票价为 a_i 元。每张你手上的票可以管任意连续的 k （定值）天，也就是说，如果你在第 i 天买了这张票，你可以任意选择 A ，满足 $i \leq A$ ，这样，第 $A, A + 1, \dots, A + k - 1$ 天都可以用这张票进入体育馆。

q 次询问，每次给出 l, r ，问如果第 l 天某人来到这个城市（也就是无法在第 l 天前买票），并且要在第 $l, l + 1, \dots, r$ 天进入体育馆，至少要花多少钱。

$n, q \leq 300000$

笛卡尔树

基本运用

带删数的区间最大值之和

CF1988E

定义数组 a 所有区间的最大值之和为 $f(a)$ 。

设 a 删掉第 i 个元素得到的数组为 b_i ，求所有 $f(b_i)$ 。

用笛卡尔树解决本题。



P6240

给定一个序列，每个元素是物品，具有体积 w_i 和价值 c_i 。 q 次询问，每次询问一个区间 $[l, r]$ 和背包大小 V ，请你求出用这个背包去装区间内的物品（每个物品只能装一次），价值和最大是多少。

$$n \leq 10^4, q \leq 10^5, V \leq 500$$

最大独立集

P7482

给定一个序列，求所有区间的最大独立集之和。

$$n \leq 10^5$$

偏序问题

例子

区间数颜色

P4113

给出一个序列，多次询问区间中有几种不同的 a_i 。

$$n, q \leq 10^6$$

带修数点

经典问题

平面上初始没有点，你需要支持动态加点、删点，同时求矩形内点数。

$$n, q \leq 10^5$$

三角形求和

经典问题

给定平面上 n 个点，每次询问给出 u, v, w ，求满足 $x + y \leq u, x \geq v, y \geq w$ 的点的个数。

$$n, q \leq 10^6$$

偏序问题

扫描线

矩形面积并

经典问题

平面上有 n 个矩形，求其面积并。

$$n \leq 10^5, x_i, y_i \leq 10^9$$

偏序问题

扫描线

连续段问题

CF526F

给定一个排列，问有几个区间满足 $r - l = \max_{i \in [l, r]} a_i - \min_{i \in [l, r]} a_i$ 。

$$n \leq 3 \times 10^5$$

偏序问题

例子

如何正确地排序

P8253

有一个 $4 \times n$ 的数组 $a_{i,j}$, 定义

$$f(i,j) = \min_k (a_{k,i} + a_{k,j}) + \max_k (a_{k,i} + a_{k,j})$$

求 $\sum_{i,j \in [1,n]} f(i,j)$ 。

$$n \leq 2 \times 10^5$$

综合运用

例子

Beautiful Pair

P4755

给定一个数组，问有多少个 (i, j) 满足 $a_i a_j \leq \max_{k \in [i, j]} a_k$ 。

$$n \leq 10^5$$

综合运用

例子

天天爱打卡

P9871

小 T 跑步打卡。共有 n 天，每天可以跑步或不跑步。能量值初始为 0，若某天选择跑步，则能量值减少 d 。不能连续超过 k 天跑步。

有 m 条奖励：若他在第 $l_i \sim r_i$ 天都选择跑步，会得到 v_i 能量值。

问 n 天后能量值最高是多少。

$$n \leq 10^9, m \leq 10^5$$

综合运用

例子

Drying Plan

CF1889C2

有 m 条线段，值域为 $[1, n]$ 。请删除不超过 K 条线段，最大化未被任何线段覆盖的整点数量。

$$n, m \leq 10^5, K \leq 10$$