

数论习题

feecle6418

2024 年 11 月 3 日

1 唯一分解，数论函数，同余，整除分块

1.1 数学题

1. 设 f, g 均为积性函数，证明 $f * g$ 也是积性函数，其中 $*$ 表示狄利克雷卷积。
2. 设 f 为积性函数且 $f(1) = 1$ ，证明存在唯一一个积性函数 f^{-1} 使得 $f * f^{-1} = \iota$ 。
3. 证明所有满足 $f(1) = 1$ 的积性函数在运算 $*$ 、单位元 ι 下构成一个 Abel 群。
4. 设 n 是任意正整数。证明 $\prod_{1 \leq j \leq i, j \perp i} j^2 \equiv 1 \pmod{n}$ 。
5. 设 n 是任意正整数。证明 $\prod_{1 \leq j \leq i, j \perp i} j \equiv 1 \pmod{n}$ 或 $\prod_{1 \leq j \leq i, j \perp i} j \equiv n-1 \pmod{n}$ 。
当 n 满足什么条件时前者成立？

1.2 编程题

1. P5656：课件上的习题。
2. P1082：课件上的习题。
3. P2613：课件上的习题。
4. P1495：课件上的习题。
5. CF1706D2：课件上的习题。
6. CF1717E：课件上的习题。
7. P7960：课上提到的习题。建议思考一下 $O(n \log \log n)$ 做法。
8. P4588：课上提到的习题。建议使用 CRT 做法。

2 卢卡斯定理

2.1 数学题

1. 试给出 $\binom{n+m}{m} \equiv 1 \pmod{2}$ 关于 n, m 的二进制表示的充要条件。

2.2 编程题

1. ARC137D: 课上提到的习题。
2. CF1770F。
3. P6669。

3 阶与原根

3.1 数学题

1. 给定奇质数的幂次 p^m 以及正整数 k , 求有几个整数 $1 \leq x < p^m$ 满足 x 模 p^m 意义下的阶等于 k 。
2. 设不存在整数 $x > 1$ 使得 $x^2 | n$ 。证明 $\mathbb{Z}_{n^2}^* \cong \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n^*$, 其中 \mathbb{Z}_n 表示模 n 加法群, \mathbb{Z}_n^* 表示所有 n 以内与 n 互质的数构成的模 n 乘法群。
3. 给定奇质数的幂次 p^m 。若 g 为 p^m 的原根, 证明存在 $2p^m$ 的原根 g' 满足 $g \equiv g' \pmod{p^m}$ 。

3.2 编程题

1. P6091: 课件上的习题。
2. P8993: 课件上的习题。
3. P8457。