CF1542C

注意到，$x=\sum_{i\le x}1$。

故 $f(n)=\sum_{i\le f(n)}1$。

而 $\sum_{i=1}^n f(i)=\sum_{i=1}^n\sum_{j\le f(i)}1=\sum_j\sum_{i=1}^n[f(i)\ge j]$。

考虑 $f(i)\ge j$ 是什么意思，就是 $1,2,\dots,j-1$ 都能整除 i，也就是 $lcm(1,2,\dots,j-1)$ 能整除 i。

而 n 以内的 $f(i)\ge j$ 的个数就是 n 以内这个东西的倍数的个数，就是 n/lcm。

所以 j 的范围也不会太大，暴力枚举即可。

CF1696E

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{a_i}\binom{i+j}{j}\\
=&\sum_{i=0}^{n}\binom{i+a_i+1}{a_i+1}
\end{aligned}
$$

链上二次求和

差分成 $\le r$ 的减去 $\le l-1$ 的。不妨设要算 $\le R$ 的。

链上长度 $=len$ 的区间和，考虑 a_i 被算了几次。

如果 $len\le n/2$，那在 $i\in[1,len]$ 的会被算 i 次，在 $[len+1,n-len]$ 的会被算 len 次，在 $[n-len+1,n]$ 的会被算 $n-i+1$ 次。

如果 $R\le n/2$，则 a_i 在 $i\in[1,R]$ 的会被算 $\sum_{1\le j\le i}j+i\times(R-i)$ 次；$[R+1,n-R]$ 的会被算 $\sum_{i=1}^R i$ 次；最后一部分同理。

如果 $R>n/2$，把 $[n/2+1,R]$ 长度的单独处理。注意到 len 的答案和 $n-len+1$ 的答案是一样的，故翻转之后其实也能化归到前一种情况。

据此维护 a_i,a_ii,a_ii^2 等的和即可。

P6620

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{m}a_ik^ix^k\binom{n}{k}\\
=&\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{m}a_i\sum_{j=0}^{i}S2(i,j)\binom{k}{j}j!x^k\binom{n}{k}\\
=&\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{j=0}^{m}j!\sum_{i=j}^{m}a_iS2(i,j)\binom{k}{j}x^k\\
=&\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{j=0}^{m}j!A_j\binom{k}{j}x^k\\
=&\sum_{j=0}^{m}A_jj!\sum_{k\le n}\binom{n}{k}\binom{k}{j}x^k\\
=&\sum_{j=0}^{m}A_jj!\sum_{k\le n}\binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}x^k\\
=&\sum_{j=0}^{m}A_jj!\binom{n}{j}x^j\sum_{k\le n-j}\binom{n-j}{k}x^k\\
=&\sum_{j=0}^{m}A_jj!\binom{n}{j}x^j(x+1)^{n-j}
\end{aligned}
$$

P4827

设 $f(i,j)$ 表示 i 到子树内所有路径的长度选 k 的和。

$f(i,0)=1$，转移 $f(x,i)+f(y,i)+f(y,i-1)\to f'(x,i)$。

设 $g(i,j)$ 表示 i 到所有点，包括内外，路径的长度选 k 的和。

$g(1)=f(1)$。

从 fa 推向 son：先去除 son 的贡献，再把 fa 加上来。

CF1097G, P4071

略。

P7961

注意到，如果知道了 a_i 选了 cnt_i 个，则方案数为 $n!/\prod(cnt_i!)$。

从低位到高位 dp，设 $dp(i,j,k,l)$ 表示做完了 $0\sim i-1$ 位，其中有 j 个 1，当前选了 k 个数（最终要选 n 个），当前选的数往上的进位为 $l\times 2^{i-1}$ 的权值和（某一位选 p 个，权值为 $1/(p!)$）。

AGC018E

问题问的是，从第一个矩形里选一个点 A，第二个矩形里选一个点 B，第三个矩形里选一个点 C，$A\to B\to C$ 的方案数之和。

考虑固定 B，算 $A\to B$，$B\to C$ 的方案数之和。

一个点到一个以其为左下角矩形的方案数，也即

$$\sum_{0\le i\le r_1}\sum_{0\le j\le r_2}\binom{i+j}{i}$$
$$=\sum_{0\le i\le r_1}\binom{i+r_2+1}{i+1}$$
$$=\binom{i+r_2+2}{r_2+1}-1$$

用二维前缀和，可以把 -1 消掉，并且把到一个任意矩形的方案数变成到四个点的方案数。

右上和左下，处理方式一样的。

然后再把中间矩形内枚举点，改为枚举出点和入点，计算 $(x+y)$ 之差并求和。

时间复杂度是线性，带有 16 的常数。

P7116

考虑对每一轮的每一步分别算贡献，贡献是 $\prod len_i$ 的形式。

注意到从第三轮开始，某一步时最大前缀和，就是上一轮这一步的最大前缀和加上全局和，所以是一个关于轮数 x 的多项式。

据此，可以暴力求出多项式，然后算自然数幂和。

CF995F

设 $f(x,i)$ 为 x 号点工资为 i，子树内的方案数，答案关于 i 是 n 次多项式。

LOJ6024

多次前缀和就是多次把多项式次数加一。

P4463

$f(i,j)$ 从小到大第 i 个数为 j 的方案数，答案关于 j 是 $2i$ 次多项式。

ARC118F

正着 dp 的话，设 $f(i,j)$ 表示 $a_i=j$ 前 i 个的方案数，可以发现 f 转移跟下取整有关。

但是倒着 dp，就能插值了！设 $f(i,j)$ 表示 $a_i=j$，$[i,n]$ 方案数，则 f 的转移其实就是求前缀和（“前缀和”是指，把第二维下标翻转，只看 $[1,m/\prod a_i]$ 内的数），跟“倍数”有关（注意 推论 2）！

还需要注意实现细节：存下来多项式在 $[1,n]$ 的点值（特别地，值域上限不到 n 直接暴力 dp 就行），然后跳过连续的大段 1（转移方法是：插值出后 n 个，然后不停做前缀和，再插值回来）。

用线性插值，复杂度 $O(n^2\log m)$。

省选 Day1 T2

第一问题意就是，对于树上的每一条链，求出下面问题的答案之和：

- 有多少种填数方案，使得链上最大值 - 最小值 $\leq K$。

首先，有一个容斥：最大值 - 最小值 $\leq K$ 的方案数，等于所有数都属于某个长度为 K 的区间的方案数，减去所有数都属于某个长度为 $K-1$ 的区间的方案数（考虑某个方案被算了多少次来理解，这里“某个”是指取遍所有整数）。

考虑“所有数都属于 $[L, L+K]$ 的方案数”对 L 求和怎么做，实际上就是把所有点权区间对这个区间左端点取 max 右端点取 min 然后长度乘起来（树上就是长度乘积和）。

如果把 $L, L+K$ 触碰到端点的情况分段，每一段内部，每个点的权值数量，相对于 L，是个一次函数。则链上乘起来，是不超过 n 次函数；**常数**个 n 次函数加起来，还是 n 次函数。故求出这个 n 次函数的任意 $n+2$ 项，再插值求出其前缀和即可。

如果看所有权值之和，就是把链上一个点的一次函数变成二次函数，所以只是多一次和树形 dp 麻烦一点的区别。

dp 具体方程就不列了，注意：算“……之和”和“……之方案数”的一般方法是一边和 * 一边方案数。

图计数

$g(n,m)=\binom{\binom{n}{2}}{m}$。$f(n,m)$：$n$ 个点 m 条边的答案。

$$f(n,m)=g(n,m)-\sum_{i<n}\binom{n-1}{i-1}\sum_{j}f(i,j)g(n-i,m-j)$$

直接 dp 是 $O(n^3\times n^3)=O(n^6)$ 的。

如果把 $f(n,*), g(n,*)$ 看成一个多项式，求出某个数代进去的值怎么算呢？实际上，上面的式子就是 $F_n(x)=G_n(x)-\sum_{i<n}\binom{n-1}{i-1}F_i(x)G_{n-i}(x)$，而 $G_i(x)=\sum_{i=0}^{U}\binom{U}{i}x^i$ 可以二项式定理预处理，每个代入的 x dp 是 $O(n^2)$，总共带入 $O(n^2)$ 个 x，插值回来是 $O((n^2)^2)=O(n^4)$，所以每一步都是 $O(n^4)$。

CF622F

略。

P4464

不妨假设 $\sum_{1\leq i\leq n} i^y=\sum_{0\leq i\leq y+1} a_i n^i$。

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i\le n} i^y n^y (i,n)^{x-y} \\
&= n^y \sum_{g|n} g^{x-y} \sum_{i\le n} [(i,n)=g] i^y \\
&= n^y \sum_{g|n} g^{x} \sum_{i\le n/g} [(i,n/g)=1] i^y \\
&= n^y \sum_{g|n} g^{x} \sum_{dg|n} \mu(d) \sum_{i\le n/g, d|i} i^y \\
&= n^y \sum_{g|n} g^{x} \sum_{dg|n} \mu(d) d^y \sum_{i\le n/gd} i^y \\
&= n^y \sum_{g|n} g^{x} \sum_{dg|n} \mu(d) d^y \sum_{k} a_k (n/gd)^k \\
&= n^y \sum_{k} a_k (id^x * (\mu \cdot id^y) * (id^k))(n)
\end{aligned}
$$

积性函数都很容易算单点值的！

- $h=(f*g)$ 表示 h 是 f,g 的狄利克雷卷积。
- $h=(f\cdot g)$ 表示 $h(x)=f(x)g(x)$。
- $h=f^k$ 表示 $h(x)=(f(x)*f(x)*\cdots*f(x))$，共卷积 k 次。
- ϵ 或者 ι 表示这样一个函数：$\iota(x)=[x=1]$。
- id 表示这样一个函数：$id(n)=n$。
- 1 表示这样一个函数：$1=id^0$。
- f^{-1} 定义为 $(f*f^{-1})=\epsilon$。
- $\mu=1^{-1}$。
- $\sigma_k(x)=\sum_{d|x} d^k$。
- $\varphi(x)=\sum_{1\le d\le x}[(d,x)=1]$。