第 7 周作业

董仕强

Monday 9th December, 2024

0 说明

可以将作业中遇到的问题标注在此. 如有, 请补充.
Ex 3. 的推广, Ex 5. 的第 2 题不会

目录

1 Ex 1.

问题 1.1. 直接写出以下矩阵的行列式, 或简要说明其行列式的求解方式.

> $\lambda \in \mathbb{F}$ 是给定的常数,$A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 是矩阵.

1. 置换矩阵.
2. 初等变换矩阵 $D_i^j, T_{j,i}^\lambda$ 以及 $S_{i,j}$.
3. 若 A 是对角矩阵, 求 $\det A$.
4. 若 A 是上三角矩阵, 求 $\det A$.
5. 若 $A = \begin{pmatrix} X & O \\ Y & Z \end{pmatrix}$, 其中 X 与 Z 都是方阵. 求 $\det A$.
6. A^{-1}(若存在) 的行列式.
7. 方阵乘积的行列式.
8. 若 $\operatorname{rank}(A) < n$, 求 $\det A$.
9. λA 的行列式.
10. A^T 的行列式.
11. 将 A 顺时针旋转 $\pi/2$ 后的行列式.
12. f 是 $\mathbb{F}$ 上的多项式, 求 $\det(f(A))$.
13. 求 $\det(\mathrm{e}^{\mathrm{A}})$.

解答

1. 分别记第 i 行中 1 出现的位置为 a_i, 将 $(a_1, a_2, \ldots, a_i)$ 相邻两项两两交换最终得到 $(1, 2, \ldots, n)$ 需要的次数为 s_n, 那么这个矩阵的行列式为 $(-1)^{s_n}$.
2. $\det(D_i^\lambda) = \lambda, \quad \det(T_{j,i}^\lambda) = 1, \quad S_{i,j} = -1.$
3. 主对角线元素的乘积.
4. 主对角线元素的乘积.
5. $\det(A) = \det(X)\det(Y)$.
6. $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.
7. 方阵乘积的行列式等于各方阵行列式的乘积.
8. $\det(A) = 0$.
9. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

10. $\det(A^T) = \det(A)$.

11. $(-1)^{n(n-1)/2}\det(A)$.

12. 记 A 的特征根分别为 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, 那么 $\det(f(A)) = \prod_{i=1}^{n} f(\lambda_i)$.

13. $\det(e^A) = e^{\operatorname{tr}(A)}$.

2 Ex 3

问题 2.1. 使用矩阵的初等变换证明, 对任意 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 以及 $\lambda \in \mathbb{F}$. 总有

$$\lambda^n \cdot \det(\lambda I_m - AB) = \lambda^m \cdot \det(\lambda I_n - BA). \tag{2.1}$$

推广: 对方阵 A, B 与 C(未必可逆), 总有 $\det(A + B + ABC) = \det(A + B + BCA)$.

解答

Case 1. 若 $\lambda = 0$, 等式两边均为 0. 成立.

Case 2. 若 $\lambda \neq 0$, 令 $A = \lambda M$, 则只需证明 $\det(I_m - MB) = \det(I_n - BM)$.

考虑分块矩阵 $\begin{pmatrix} I & M \\ B & I \end{pmatrix}$ 的行列式.

$$\begin{vmatrix} I & M \\ B & I \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I & M \\ O & I - BM \end{vmatrix} = \det(I)\det(I - BM) = \det(I - BM).$$

$$\begin{vmatrix} I & M \\ B & I \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I - MB & O \\ B & I \end{vmatrix} = \det(I - MB)\det(I) = \det(I - MB).$$

证毕!

3 Ex 4.

问题 3.1. 求以下矩阵行列式.

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & a_n \\ 1 & 0 & & & a_{n-1} \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & a_2 \\ & & & 1 & a_1 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

解答 分别将第 1 列的 $-a_n$ 倍, 第 2 列的 $-a_{n-1}$ 倍,. . ., 第 $(n-1)$ 列的 $-a_1$ 倍加到第 n 列, 得到

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & a_n \\ 1 & 0 & & & 0 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此

$$\begin{vmatrix} 0 & & & & a_n \\ 1 & 0 & & & a_{n-1} \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & a_2 \\ & & & 1 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & & & & a_n \\ 1 & 0 & & & 0 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}a_n \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}a_n.$$

4 Ex 5.

以下是三对角矩阵的行列式问题.

问题 4.1. 求以下三对角矩阵的行列式.

$$\begin{pmatrix} a & b & & & \\ c & a & b & & \\ & c & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a & b \\ & & & c & a \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

解答 按照最后一行展开得到

$$D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}.$$

其中 $D_1 = a, \quad D_2 = a^2 - bc.$
记方程 $x^2 - ax + bc = 0$ 的根为 α, β.
若 $a^2 - 4bc \neq 0$,$\alpha \neq \beta, D_n = A\alpha^n + B\beta^n$, 其中 A, B 由带入 D_1, D_2 带入得到.
若 $a^2 - 4bc = 0$,$\alpha = \beta, D_n = (A + Bn)\alpha^n$, 其中 A, B 由带入 D_1, D_2 带入得到.

问题 4.2. 证明

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & 1 & & & \\ -1 & a_2 & 1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a_{n-1} & 1 \\ & & & -1 & a_n \end{pmatrix} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}} \tag{4.2}$$

解答 按最后一列展开, 得到 $D_n = a_nD_{n-1} + D_{n-2}$. $\quad D_1 = a_1, D_2 = a_1a_2 + 1$.
不会了. 为什么 $n = 2$ 和 $n = 3$ 我算出来只有分子一样, 没有分母.

问题 4.3. 证明

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & \\ & c_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -c_1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ -c_{n-2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ -c_{n-1} \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

解答 按最后一列展开, 得到 $D_n = a_nD_{n-1} - b_{n-1}c_{n-1}D_{n-2}$. $\quad D_1 = a_1, D_2 = a_1a_2 - b_1c_1$.
可以定义 $D_0 = 1$
即

$$\begin{pmatrix} D_n & b_nD_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{n-1} & b_{n-1}D_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ -c_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

因此

$$\begin{pmatrix} D_{n-1} & bD_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 & b_1D_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -c_2 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ -c_{n-2} & 0 \end{pmatrix}.$$

结合 $D_n = a_nD_{n-1} - b_{n-1}c_{n-1}D_{n-2}$ 及 D_0, D_1 即证!

5 Ex 8.

问题 5.1. 取 $(a_i)_{i\geq 1}$ 是周期为 n 的 $\mathbb{F}$ 中的数列, 定义 $n\times n$ 矩阵的第 (i,j) 项为 a_{i+j-1}. 计算这一循环矩阵的行列式.

解答 考虑矩阵

$$M = \begin{pmatrix} & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ 1 & & & & \end{pmatrix}$$

满足 $M^n = I$. 定义 $M^0 = I$.
定义矩阵 A 是题述循环矩阵. 那么 $A = \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_{i+1}M^i$. 记 $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_{i+1}M^i$. 则 $A = f(M)$.
设矩阵 M 的特征值是 λ, 那么 M^n 特征值就是 I 的特征值, 也即 $\lambda^n = 1$, 因此矩阵 M 的特征值为 n 个 n 次单位根.
因此

$$\det(A) = \det(f(M)) = \prod_{i=0}^{n-1} f(w^i).$$

其中 w 是 n 次单位根, 即 $\exp\left(\frac{2\pi}{n}\,\mathrm{i}\right)$.

6 Ex 9.

问题 6.1. 给定常数 $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$. 试计算 $(c_{\min(i,j)}) \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 的行列式.

解答 将每一行加上前一行得-1 倍, 即得上三角矩阵, 容易求得行列式.

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_1 & c_1 & \cdots & c_1 \\ c_1 & c_2 & c_2 & \cdots & c_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & c_1 & c_1 & \cdots & c_1 \\ 0 & c_2 - c_1 & c_2 - c_1 & \cdots & c_2 - c_1 \\ 0 & 0 & c_3 - c_2 & \cdots & c_3 - c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_n - c_{n-1} \end{vmatrix} = c_1 \prod_{i=1}^{n-1} (c_{i+1} - c_i).$$