第六周作业

董仕强

Monday 11th November, 2024

0 说明

可以将作业中遇到的问题标注在此. 如有, 请补充.

目录

1 投影, 正交性, 最小二乘法

1.1 problem 1

问题 1.1. 以下是一些关于 $\mathbb{R}^n$ 中向量内积的小题.

1. 给定 $\|u\| \le 1$ 与 $\|v\| \le 1$, 证明:$\sqrt{1-\|u\|^2} \cdot \sqrt{1-\|v\|^2} \le 1- < u, v >$.
2. 证明:$\|u+v\| \cdot \|u-v\| \le \|u\|^2 + \|v\|^2$.
3. 证明:$\langle u, v\rangle = 0$, 当且仅当 $\|u\| \le \|u + c \cdot v\|$ 对一切 $c \in \mathbb{R}$ 成立.
4. 证明: 任意给定 $u \ne 0$, 则对一切 $\|v\| = 1$ 均有 $\|u - (\|u\|^{-1} \cdot u)\| \le \|u - v\|$.
5. 表述极化恒等式.
6. 表述平行四边形恒等式.

解答

1. 证明. 由柯西不等式, 只需证

$$\sqrt{1-\|u\|^2} \cdot \sqrt{1-\|v\|^2} \le 1 - \|u\|\|v\|.$$

两边同时平方, 即证

$$(1-\|u\|^2)(1-\|v\|^2) \le 1 - 2\|u\|\|v\| + (\|u\|\|v\|)^2.$$

即

$$(\|u\| - \|v\|)^2 \ge 0.$$

完证毕明

2. 证明. 记 $a = (u+v)/2, b = (u-v)/2$.
只需证

$$4\|a\|\|b\| \le \|a+b\|^2 + \|a-b\|^2.$$

即证

$$2\|a\|\|b\| \le \|a\|^2 + \|b\|^2.$$

完证毕明

3. 证明. 充分性: 两边平方即可.
必要性: 两边平方后得到

$$-2cu^T v \le c^2 v^T v.$$

不妨 $\|v\| \ne 0$, 否则显然成立.
当 $c > 0$ 时,

$$\frac{-2u^T v}{v^T v} \le c.$$

两边取 c 趋近于 0 的极限, 得到 $u^T v \ge 0$.
同理可以得到 $u^T v \le 0$.
因此 $\langle u, v\rangle = 0$.

完证毕明

4. 证明. 由三角不等式 $\|u-v\| \geq | \|u\| - \|v\| |$, 取等当且仅当 $u = \lambda v, \lambda \geq 0$. 因此

$$\|u-v\| \geq \|u\| - \|v\| = \|u - (\|u\|^{-1} \cdot u)\|.$$

完证毕明

5. $u^T v = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2)$.

6. $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$.

1.2 Problem 2

问题 1.2. 使用最小平方法找到一条抛物线 $y = a + bx + cx^2$, 使得该抛物线可以尽可能地拟合以下所有点

$$\{(-2,4),(-1,2),(0,1),(3,1)\}.$$

解答 考虑方程

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

这个方程无解, 考虑两边同时左乘 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}^T$, 得到

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 18 \\ 2 & 18 & 26 \\ 18 & 26 & 114 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 31 \end{pmatrix}.$$

利用高斯消元法可以得到

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{86}{77} & -\frac{62}{77} & \frac{43}{154} \end{pmatrix}$$

定义点到抛物线的距离 $d_i = | y_i - (a + bx_i + cx_i^2) |$, 最小二乘法得到的最佳拟合函数就是使得 $\sum d_i^2$ 最小, 即 $\|Y - AX\|^2$ 最小.