第三周作业

董仕强

Sunday 20th October, 2024

涉及矩阵的初等变换与阶梯型 (échelon form)

0 说明

可以将作业中遇到的问题标注在此. 如有, 请补充.

目录

1 第三周习题

1.1 Problem 1

给定 n 行矩阵 A.

问题 1.1. 交换 A 的 $[i,j]$ 两行, 等价于左乘一个矩阵 $S_{i,j}$. 写出该矩阵.

解答

$$S_{i,j}=I-E_{i,i}-E_{j,j}+E_{i,j}+E_{j,i} \quad .$$

问题 1.2. 将 A 第 k 行的各项同时乘上一个非零常数 λ, 等价于左乘一个矩阵 D_k^λ, 写出该矩阵.

解答

$$D_k^\lambda=I+(\lambda-1)E_{k,k} \quad .$$

问题 1.3. 向 A 的第 j 行加上第 i 行的 λ 倍 (这一过程仅改变第 j 行, 其他行不变), 等价于左乘一个矩阵 $T_{i,j}^\lambda$. 写出该矩阵.

解答

$$T_{i,j}^\lambda=I+\lambda E_{j,i} \quad .$$

问题 1.4. 求逆变换 (逆矩阵)$S_{i,j}^{-1}, (D_k^\lambda)^{-1}$, 以及 $(T_{i,j}^\lambda)^{-1} \quad .$

解答

$$S_{i,j}^{-1}=S_{i,j} \quad , \quad (D_k^\lambda)^{-1}=(D_k^{1/\lambda}) \quad , \quad (T_{i,j}^\lambda)^{-1}=(T_{i,j}^{-\lambda})^{-1} \quad .$$

问题 1.5. 使用自然语言描述这三类逆变换.

解答 将置换后的两行再次置换;
将第 k 行的各项同时乘上一个非零常数 $1/\lambda$;
向 A 的第 j 行加上第 i 行的 $-\lambda$ 倍.

问题 1.6. 求 $S_{i,j}S_{k,l}=S_{k,l}S_{i,j}$ 的充要条件.

解答 $\{i,j\}=\{k,l\}$ 或 $\{i,j\}\cap\{k,l\}=\varnothing$;
充分性: 结合 $S_{i,j}$ 变换的意义容易验证.
必要性: 我们结合 $S_{i,j}$ 变换的意义容易验证有 $S_{i,j}=S_{j,i}$.
不妨设 $i<j, k<l$, 若 i,j,k,l 互不相等, 那么先交换 i,j 再交换 k,l 和先交换 k,l 再交换 i,j 效果相同.
若有一个相同, 不妨设 $j=k$, 那么三列顺序本来是 xyz, 先 i,j 后 j,l 变成 yzx, 先 j,l 后 i,j 变成 zxy, 不相等, 不成立.
若有两个相同, 那么由 $S_{i,j}=S_{j,i}$ 知, 两边相同.

问题 1.7. 求 $T^{\lambda}_{i,j}T^{\mu}_{k,l} = T^{\mu}_{k,l}T^{\lambda}_{i,j}$ 的充要条件.

解答 $i = j = k = l$ 或 $(i-k)(j-l) \neq 0$.

$$T^{\lambda}_{i,j}T^{\mu}_{k,l} = (I + \lambda E_{j,i})(I + \mu E_{k,l}) = I + \lambda E_{j,i} + \mu E_{k,l} + \lambda\mu E_{j,i}E_{k,l}$$
$$T^{\mu}_{k,l}T^{\lambda}_{i,j} = (I + \mu E_{k,l})(I + \lambda E_{j,i}) = I + \lambda E_{j,i} + \mu E_{k,l} + \lambda\mu E_{k,l}E_{j,i}$$

故只需考虑 $E_{j,i}E_{k,l} = E_{k,l}E_{j,i}$ 的充要条件.
若 $i \neq k$, $\quad E_{j,i}E_{k,l} = O$, 那么在该条件下等号成立的充要条件是 $E_{k,l}E_{j,i} = O$, 也即 $l \neq j$;
若 $i = k, E_{j,i}E_{k,l} = E_{j,l}$ 那么在该条件下等号成立的充要条件是 $E_{k,l}E_{j,i} = E_{j,l}$, 也即 $k = j, l = j, i = l$, 也即 $i = j = k = l$;
综上, 原命题的充要条件是 $i = j = k = l$ 或 $(i-k)(j-l) \neq 0$

问题 1.8. 能否通过某两类矩阵得到第三类?

解答 $S\&D \to T$:

$$\begin{aligned}
&S_{i,j}D^{\lambda}_{i} + S_{i,j}S_{i,j} - S_{i,j}\\
=&(I - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i})(I + (\lambda-1)E_{i,i}) + I - (I - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i})\\
=&(I - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + \lambda E_{j,i}) - (E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i})\\
=&I + (\lambda-1)E_{j,i}\\
=&T^{\lambda-1}_{i,j}
\end{aligned}$$

$S\&T \to D$:

$$\begin{aligned}
&S_{i,j}T^{\lambda}_{i,j} + S_{i,j}S_{i,j} - S_{i,j}\\
=&(I - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i})(I + \lambda E_{j,i}) + I - (I - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i})\\
=&(I + (\lambda-1)E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}) + (E_{i,i} + E_{j,j} - E_{i,j} - Ej,i)\\
=&I + \lambda E_{i,i}\\
=&D^{\lambda+1}_{i}
\end{aligned}$$

$D\&T \to S$:

$$\begin{aligned}
&-D^2_i - D^2_j + T^1_{i,j} + T^1_{j,i} + D^1_i\\
=&-(I + E_{i,i}) - (I - E_{j,j}) + (I + E_{j,i}) + (I + E_{i,j}) + I\\
=&I - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + Ej,i\\
=&S_{i,j}
\end{aligned}$$

问题 1.9. 假定 A 是方阵, 将以上三个矩阵乘在 A 右侧, 效果如何.

解答 将 A 的第 i 列与第 j 列交换;
将 A 的第 k 列的各项同时乘上一个非零常数;
向矩阵 A 的第 j 列加上第 i 行的 λ 倍.

1.2 Problem 2

矩阵的最简行阶梯形

问题 1.10. 给定矩阵 A, 其最简行阶梯形 R 为何唯一?

证明. 仅考虑非零矩阵 $A=[\alpha_1,\dots,\alpha_n]$, 不妨设 $n\geq m$,$\alpha_1\neq 0$, 若不然考虑将最小下标非零向量 α_k 列做类似的操作.
不妨设 $a_{11}=0$, 若不然可以利用置换矩阵 S 来左乘 A 使得非零元素位于第一行. 然后利用倍乘矩阵使得 $a_{11}=1$.
再左乘消元矩阵使得 $a_{k1}=0,\quad(k=2,3,\dots,n)$. 此时 A 可以表示为

$$\begin{pmatrix} 1 & B^{(1)}_{1\times(n-1)} \\ O_{(m-1)\times 1} & A^{(1)}_{(m-1)\times(n-1)} \end{pmatrix}.$$

再对 $A^{(1)}$ 进行上述的操作, 得到的矩阵再操作, 最后会得到一个行阶梯型矩阵 A', 其递推类似于

$$A^{(k-1)}=\begin{pmatrix} 1 & B^{(k-1)} \\ O & A^{(k)} \end{pmatrix} \quad or \quad \begin{pmatrix} O & 1 & B^{(k-1)} \\ O & O & A^{(k)} \end{pmatrix}.$$

再进行化为最简操作. 只需考虑 A', 从最后一列开始, 进行消元操作, 仅保留该列最后一行元素, 该列其他行元素都能变成 0. 进行有限次操作后就能得到最简行阶梯形.
在这样的操作下肯定得到的矩阵是唯一的.

证明完毕

问题 1.11. 尝试给出一个无字证明.

解答 一个矩阵 A 可以对应一个线性方程组 $Ax=0$. 矩阵化为行最简即视为解出这个方程组.
当这个方程组有非零解时矩阵 A 的各列是线性相关的, 否则是线性无关的. 由于对行进行初等变换不改变各列的线性相关性, 也即不改变方程的解, 这些变换是同解变化.
而一个确定的方程他的解也是确定的, 所以行最简矩阵唯一.

问题 1.12. 转置矩阵 R^T 的最简行阶梯形是什么?

解答 矩阵 R 的列最简矩阵.

问题 1.13. 证明相抵标准型的存在性: 对任意矩阵 A, 存在可逆矩阵 P 和 Q 使得

$$A=P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q.$$

以上,I_r 是 r 阶单位矩阵,O 表示数字 0 出现的位置.

证明. 由问题 1.10 的解答可以知道,
对任意矩阵 A, 其行最简存在, 可以由一系列初等变换得到. 对他的行最简矩阵再进行置换操作可以得

到一个新的矩阵 A'', 而这些变换都可以通过对 A 左乘初等矩阵 P_i 得到. 记 $P' = P_1P_2\cdots P_s$.

$$A'' = P'A = \begin{pmatrix} I_r & F \\ O & O \end{pmatrix}.$$

$$(A'')^T = \begin{pmatrix} I_r & O \\ F^T & O \end{pmatrix}$$

对转置后的矩阵进行行最简操作, 由于 I_r 与 F^T 列数相同且这 r 列均非 0, 因此会得到矩阵 A''', 左乘的矩阵为 Q_i, 记 $Q' = (Q_1Q_2\cdots Q_t)^T$

$$A''' = (Q')^T(A'')^T = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

得到了,

$$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}^T = ((Q')^T(A'')^T)^T = A''Q' = P'AQ'$$

P', Q' 显然可逆, 因为他们都可以表示成初等矩阵的乘积, 且可逆矩阵转置后仍然可逆.
两边同时左乘右乘逆, 得到

$$A = (P')^{-1}\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}(Q')^{-1}$$

取 $P = (P')^{-1}, Q = (Q')^{-1}$, 即可得

$$A = P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q.$$

完证毕明

问题 1.14. 证明以上的 r 由 A 唯一决定. 作为推论, 矩阵的行秩等于列秩. 往后统一称作秩.

证明. 由问题 1.13 知道,A 经过初等变换后得到的 $\begin{pmatrix} I_r & F \\ O & O \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 的 r 相同.

而矩阵 $\begin{pmatrix} I_r & F \\ O & O \end{pmatrix}$ 中的 r 表示方程 $Ax = 0$ 的主元的个数. 这是由方程系数矩阵 A 唯一决定的. 完证毕明

2 Challenging Problem 1

问题 2.1. 若整数矩阵 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 满足 $ad-bc=1$, 则 A 是以下几类矩阵的有限乘积.

$$S=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad T^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

证明. 反过来考虑对 A 进行操作, 对 A 右乘 S^{-1},T 或 T^{-1}, 目的是得到单位矩阵. 我们有两种操作.

$$AS^{-1}=\begin{pmatrix}b & -a\\ d & -c\end{pmatrix} \tag{2.1}$$

$$AS^{-1}S^{-1}=\begin{pmatrix}-a & -b\\ -c & -d\end{pmatrix}\text{(由 (2.1) 可以推得)}$$

$$AT=\begin{pmatrix}a+b & b\\ c+d & d\end{pmatrix} \tag{2.2}$$

$$AT^{-1}=\begin{pmatrix}a-b & b\\ c-d & d\end{pmatrix} \tag{2.3}$$

(2.1) 操作视为两列互换位置, 并且新的第二列乘以-1.
(2,2) 和 (2.3) 操作视为将第二列加或减到第一列.
如果将矩阵 A 任选一种操作, 经过变换后的矩阵为 $A'=\begin{pmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{pmatrix}$, 计算可知 $a'd'-b'c'=1$.
此外, 我们注意到 $ad-bc=1$.
若 $bc=0, ad=1$. 若 a,d 均为 1 那么就是单位矩阵. 若均为 -1 则操作两次 (2.1) 即可.
若 $ad<0$, 那么对矩阵 A 操作两次 (2.1) 即可变得均为正.
若 $bc>0$, 可以知道,$\gcd(ad,bc)=1$, 有 a,b 互质.
对其进行 **辗转相除法** 的有限次操作, 最终会得到一个矩阵, 使得其左上角的元素为 1.
得到新矩阵 $A''=\begin{pmatrix}1 & x\\ y & z\end{pmatrix}$, 且 $z-xy=1$.

$$A^{(3)}=A''S^{-1}=\begin{pmatrix}x & -1\\ z & -y\end{pmatrix}$$

$$A^{(4)}=A^{(3)}T^{x}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ z-xy & -y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -y\end{pmatrix}$$

$$A^{(5)}=A^{(4)}S^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -y & -1\end{pmatrix}$$

$$A^{(6)}=A^{(5)}(T^{-1})^{y}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$A^{(7)} = A^{(6)}(S^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{完证}\\\text{毕明}}$