高等代数 (荣誉) I 作业模板

请输入姓名

Friday 10^{th} January, 2025

0 说明

可以将作业中遇到的问题标注在此. 如有, 请补充.

目录

1 逆矩阵

1.1 基础习题

1.1.1 习题 1

问题 1.1. 将 M 顺时针旋转 $90°$, 得 $\widetilde{M}$. 试描述由 M^{-1} 至 $(\widetilde{M})^{-1}$ 的运动过程.

解答 设 $M = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix}$. $M^{-1} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix}$

$$(MM^{-1})_{i,j} = \alpha_I^T \beta_j = \beta_j^T \alpha_i = \delta_{ij} E_{ij}.$$

$$\widetilde{M} = \begin{pmatrix} \alpha_n & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{pmatrix} \beta_n^T \\ \beta_{n-1}^T \\ \vdots \\ \beta_1^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_n & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_1 \end{pmatrix} \right)_{ji} = \beta_j^T \alpha_i = \delta_{ji} E_{ji} = (MM^{-1})_{ij}.$$

所以由 M^{-1} 逆时针旋转 $90°$ 可以得到 $(\widetilde{M})^{-1}$.

1.1.2 习题 2

问题 1.2. 计算以下矩阵的逆矩阵.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

备注.M 并非高度对称的, 其严格表述是

$$M = 2I - E_{1,1} - \sum_{1 \le i \ne j \le n} E_{i,j} \tag{1.2}$$

解答

1.1.3 习题 3

问题 1.3. 计算以下矩阵的逆矩阵.

$$M = \begin{pmatrix} \xi^{1\cdot 1} & \xi^{1\cdot 2} & \xi^{1\cdot 3} & \cdots & \xi^{1\cdot(n-1)} & \xi^{1\cdot n} \\ \xi^{2\cdot 1} & \xi^{2\cdot 2} & \xi^{2\cdot 3} & \cdots & \xi^{2\cdot(n-1)} & \xi^{1\cdot n} \\ \xi^{3\cdot 1} & \xi^{3\cdot 2} & \xi^{3\cdot 3} & \cdots & \xi^{3\cdot(n-1)} & \xi^{3\cdot n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \xi^{(n-1)\cdot 1} & \xi^{(n-1)\cdot 2} & \xi^{(n-1)\cdot 3} & \cdots & \xi^{(n-1)\cdot(n-1)} & \xi^{(n-1)\cdot n} \\ \xi^{n\cdot 1} & \xi^{n\cdot 2} & \xi^{n\cdot 3} & \cdots & \xi^{n\cdot(n-1)} & \xi^{n\cdot n} \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

以上 $\xi = e^{2\pi i/n}$ 是 n 次单位根.n 即 M 的阶数. 备注. 以上矩阵在 Fourier 分析中常见. 若无思路, 不妨先计算 M^2.

解答 单位根满足如下性质.

$$\sum_{k=1}^{n} \xi^{pk} = \begin{cases} 0, & n \nmid p \\ n, & n \mid p \end{cases}$$

$$(M^2)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \xi^{(i+j)k} = \begin{cases} 0, & n \nmid (i+j) \\ n, & i+j=n \ \ or \ \ i+j=2n \end{cases}$$

所以

$$M^2 = \sum_{i+j=n} E_{ij} + E_{nn}.$$

$$M^4 = I.$$

因此 $M \cdot M^3 = I$, 即 $M^{-1} = M^3$.

1.1.4 习题 4

问题 1.4. 计算以下矩阵的逆矩阵.

$$M = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & a & a & a & \cdots & a & a & a \\
1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & a & a & a & \cdots & a & a & a \\
1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 & a & a & a & \cdots & a & a & a \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 1 & a & a & a & \cdots & a & a & a \\
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & a & a & a & \cdots & a & a & a \\
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & a & a & a & \cdots & a & a & a \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

解答 记 $u = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^T$. 则

$$M = \begin{pmatrix} uu^T - I & A \\ O & uu^T - I \end{pmatrix}.$$

增广矩阵 $(M, I) = \begin{pmatrix} uu^T - I & A & I & O \\ O & uu^T - I & O & I \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} I & O & (uu^T - I)^{-1} & -(uu^T - I)^{-1} A (uu^T - I)^{-1} \\ O & I & O & (uu^T - I)^{-1} \end{pmatrix}$.

由

$$(A + \alpha\beta^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1 + \beta^T A^{-1} \alpha} A^{-1} \alpha \beta^T A^{-1}.$$

代入即可.

1.1.5 习题 5

问题 1.5. 计算以下矩阵的逆矩阵

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

解答

$$M^{-1}=\frac{2}{n^2(n+1)}\cdot \text{循环矩阵}\begin{pmatrix}1-\frac{n(n+1)}{2} & 1+\frac{n(n+1)}{2} & 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

1.1.6 问题 6

问题 1.6. 计算以下矩阵的逆矩阵

$$(M)_{ij}=\min\{i,j\}. \tag{1.6}$$

解答

$$M^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1.7 习题 7

问题 1.7. 计算以下矩阵的逆矩阵

$$M=\begin{pmatrix} k^0\cdot C_0^0 & & & & & & \\ k^1\cdot C_1^0 & k^0\cdot C_1^1 & & & & & \\ k^2\cdot C_2^0 & k^1\cdot C_2^1 & k^0\cdot C_2^2 & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ k^{n-2}\cdot C_{n-2}^0 & k^{n-3}\cdot C_{n-2}^1 & k^{n-4}\cdot C_{n-2}^2 & \cdots & k^0\cdot C_{n-2}^{n-2} & & \\ k^{n-1}\cdot C_{n-1}^0 & k^{n-2}\cdot C_{n-1}^1 & k^{n-3}\cdot C_{n-1}^2 & \cdots & k^1\cdot C_{n-1}^{n-2} & k^0\cdot C_{n-1}^{n-1} & \\ k^nC_n^0 & k^{n-1}\cdot C_n^0 & k^{n-2}\cdot C_n^1 & \cdots & k^2\cdot C_n^{n-2} & k^1\cdot C_n^{n-1} & k^0\cdot C_n^n \end{pmatrix}^T \tag{1.7}$$

解答

$$M=\begin{pmatrix} k^0\cdot C_0^0 \\ -k^1\cdot C_1^0 & k^0\cdot C_1^1 \\ -k^2\cdot C_2^0 & -k^1\cdot C_2^1 & k^0\cdot C_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ -k^{n-2}\cdot C_{n-2}^0 & -k^{n-3}\cdot C_{n-2}^1 & -k^{n-4}\cdot C_{n-2}^2 & \cdots & k^0\cdot C_{n-2}^{n-2} \\ -k^{n-1}\cdot C_{n-1}^0 & -k^{n-2}\cdot C_{n-1}^1 & -k^{n-3}\cdot C_{n-1}^2 & \cdots & -k^1\cdot C_{n-1}^{n-2} & k^0\cdot C_{n-1}^{n-1} \\ -k^nC_n^0 & k^{n-1}\cdot C_n^0 & -k^{n-2}\cdot C_n^1 & \cdots & -k^2\cdot C_n^{n-2} & -k^1\cdot C_n^{n-1} & k^0\cdot C_n^n \end{pmatrix}$$

1.2 困难习题

1.2.1 习题 8

问题 1.8. 计算以下矩阵的逆矩阵

$$M=\begin{pmatrix} 2\cos x & 1 \\ 1 & 2\cos x & 1 \\ & 1 & 2\cos x & 1 \\ & & 1 & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & 2\cos x & 1 \\ & & & & 1 & 2\cos x \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

解答

2 线性空间

2.1 通过 Sage 计算 LU 分解

2.1.1 习题 1

问题 2.1. (广义 LU 分解) 任意矩阵 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ 可以分解作 $A = LD\widetilde{I}SU$ 的五元乘积形式.

解答

2.2 线性空间, 基的证明题

2.2.1 习题 2

问题 2.2. 假定 V 是任意域上的线性空间. 试构造子集 $S \subset V$(向量组), 其同时满足

1. 集合 S 的大小是 2024.
2. S 中任意 20

解答 取 V 中 2024 个线性无关的向量 $v_1, v_2, \ldots, v_{2024}$,
构造 $S := \{v_i \mid 1 \le i \le 2024\} \cup \{v_1 + v_2 + \cdots + v_{2024}\}$. 其满足条件 1.
下证明满足条件 2.
$v_1, v_2, \ldots, v_{2024}$ 是线性无关的, 只需证明 $v_2, v_3, \ldots, v_{2024}, v_1 + v_2 + \cdots + v_{2024}$ 线性无关.
假设他们是线性相关的, 那么存在不全部为 0 的 $c_1, c_2, \ldots, c_{2024}$ 使得

$$c_1v_2 + c_2v_3 + \cdots + c_{2023}v_{2024} + c_{2024}(v_1 + v_2 + \cdots + v_{2024}) = 0.$$

即

$$c_{2024}v_1 + (c_1 + c_{2024})v_2 + (c_2 + c_{2024})v_3 + \cdots + (c_{2023} + c_{2024})v_{2024} = 0 \qquad (*)$$

由于 $v_1, v_2, \ldots, v_{2024}$ 线性无关, 若 $(*)$ 式推得 $c_{2024} = c_1 = c_2 = \cdots = c_{2023} = 0$.
所以构造的 S 符合要求.

2.2.2 习题 4

问题 2.3. 给定数域上的线性空间 V. 任意给定 V 中有限个真子空间 $\{U_i\}_{i=1}^m$, 总有

$$\left(\bigcup_{i=1}^m U_i\right) \neq V. \tag{2.1}$$

(若 $\mathbb{F}$ 不是数域. 试给出 $m = 3$ 的反例.)

解答 引理: 线性空间 U_1, U_2 的并是线性空间当且仅当 $U_1 \subset U_2$ 或 $U_2 \subset U_1$.

证明. $U_1 + U_2$ 是包含 U_1 和 U_2 的最小的线性空间, 因此 $(U_1 + U_2) \subset (U_1 \cup U_2)$.
但是任取 $U_1 \cup U_2$ 中的元素, 他一定在 U_1 或 U_2 中, 也在 $U_1 + U_2$ 中, 因此 $(U_1 \cup U_2) \subset (U_1 + U_2)$.
得出 $U_1 + U_2 = U_1 \cup U_2$.

假设结论不成立, 那么存在 U_1, U_2 中的元素 v_1, v_2 分别不在向量空间 U_2, U_1 中, 因此 v_1+v_2 在 V_1 中或 V_2 中.
若 $v_1+v_2 \in V_1$, 那么 $v_2 = (v_1+v_2) - v_1 \in V_1$, 矛盾!
同理可以得到 $v_1+v_2 \notin V_2$, 因此假设不成立. 证明完毕

由引理可知习题 4 成立.
反例: 取 $\mathbb{F}$ 是一个环, 不是域.
特别的,
取 $\mathbb{F}$ 为特征值为 2 的域. 那么取 V 是定义在 F 上的线性空间.$V = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$.
取 $U_1 = \{(0,0),(0,1)\}$, $\quad U_2 = \{(0,0),(1,0)\}$, $\quad U_3 = \{(0,0),(1,1)\}$, $\quad$ 这是一个反例.

2.2.3 习题 8

问题 2.4. 证明

1. $((V \cap W) + U) \cap V = \qquad = V \cap (W + (U \cap V))$,
2. $((V + W) \cap U) + V = \qquad = V + (W \cap (U + V))$.

解答

1. 证明.
$$(U \cap V) \subset V, \quad (V \cap W) \subset V.$$
$$((V \cap W) + U) \cap V = ((V \cap W) \cap V) + (U \cap V) = (U \cap V) + (V + W).$$
$$V \cap (W + (U \cap V)) = (V \cap W) + (V \cap (U + V)) = (V \cap W) + (U \cap V)$$
线性空间的和有交换律. 证明完毕

2. 证明.
$$V \subset (V + W), \quad V \subset (U + V).$$
$$((V + W) \cap U) + V = ((V + W) + V) \cap (U \cap V) = (V + W) \cap (U + V).$$
$$V + (W \cap (U + V)) = (V + W) \cap (V + (V + V)) = (V + W) \cap (U + V).$$
证明完毕

2.3 (span: 子集 $\to$ 子空间)(dim: 子空间 $\to \mathbb{N}$) 与 (rank=dim$\circ$span)

2.3.1 习题 16

问题 2.5. 给定子集 S_1 和 S_2.

1. 证明 $\mathrm{span}(S_1 \cap S_2) \subset \mathrm{span}(S_1) \wedge \mathrm{span}(S_2)$.
2. 证明 $\mathrm{span}(S_1) + \mathrm{span}(S_2) = \mathrm{span}(S_1 \cup S_2)$.

解答

1. 证明. 若 $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, 易知其成立.
若 $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$,
不妨设

$$S_1 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_k\}$$

$$S_2 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \gamma_1, \dots, \gamma_l\}$$

$$\mathrm{span}(S_1) = \mathrm{span}\{\alpha_{n_1}, \dots, \alpha_{n_p}, \beta_{n_1}, \dots, \beta_{n_q}\}$$

$$\mathrm{span}(S_2) = \mathrm{span}\{\alpha_{n_1}, \dots, \alpha_{n_p}, \gamma_{n_1}, \dots, \gamma_{n_r}\}$$

则

$$\mathrm{span}(S_1 \cap S_2) = \mathrm{span}\{\alpha_{n_1}, \dots, \alpha_{n_p}\} \subset (\mathrm{span}(S_1) \wedge \mathrm{span}(S_2))$$

同时可以举例

$$S_1 = \{(0,1),(1,1)\}, \quad S_2 = \{(0,2),(1,1)\}$$

说明是包含关系.

证明完毕

2. 证明. 同 1, 可以得到

$$\mathrm{span}(S_1 \cup S_2) = \mathrm{span}\{\alpha_{n_1}, \dots, \alpha_{n_p}, \beta_{n_1}, \dots, \beta_{n_q}, \gamma_{n_1}, \dots, \gamma_{n_r}\}$$

容易验证, 这等于 $\mathrm{span}(S_1) + \mathrm{span}(S_2)$ 证明完毕