第 10 周作业

董仕强

Friday 20th December, 2024

0 说明

可以将作业中遇到的问题标注在此. 如有, 请补充.

目录

1 二次型

1.1 Ex 1. 消歧义问题

假定 U 是 $\mathbb{F}$ 上的有限维线性空间.

问题 1.1. 称 $f : U \times U \to \mathbb{F}$ 是双线性的, 当且仅当对任意向量与常数,

$$f(au + v, bx + y) = abf(u, x) + af(u, y) + f(v, x) + f(v, y),$$

试证明:$\{f \mid f : U \times U \to \mathbb{F}\text{是双线性映射}\}$ 是一个 $\mathbb{F}$-线性空间, 其对象是一些二元函数. 求其维度与基.

证明. $f \equiv 0$ 符合定义, 因此集合非空.
定义加法 $(f + g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$, 数乘 $(kf)(x, y) = kf(x, y)$, 由定义

$$(f + g)(au + v, bx + y) = ab(f + g)(u, x) + a(f + g)(u, y) + (f + g)(v, x) + (f + g)(v, y)$$

$$(kf)(au + v, bx + y) = f(kau + kv, bx + y)$$

维数是 $\dim U \times \dim U$, 基为 $f(u_i, u_j)$, 其中 u_i 是 U 的一组基. 完证毕明

问题 1.2. 依照集合的 Cartesian 积, 定义新的集合 $U \times U = \{(u_1, u_2) \mid u_1, u_2 \in U\}$. 试证明 $U \times U$ 也是线性空间, 并求其维数与基.

证明. 定义加法 $(u_1, u_2) + (u'_1 + u'_2) = (u_1 + u'_1, u_2 + u'_2) \in U \times U$.
定义数乘 $k(u_1, u_2) = (ku_1, ku_2) \in U \times U$.
维数是 $dimU \times \dim U$. 基是 (v_i, v_j), 其中 v_i 是 U 的一组基. 完证毕明

问题 1.3. 试证明:$\{f \mid f : U \times U \to \mathbb{F}\text{是线性映射}\}$ 是一个 $\mathbb{F}$-线性空间, 其对象是一些一元函数. 求其维数与基.

证明. 显然集合非空
定义加法 $(f + g)(u_1, u_2) = f(u_1, u_2) + g(u_1, u_2)$ 和数乘 $(kf)(u_1, u_2) = kf(u_1, u_2)$.
那么由定义可以知道这个集合对加法和数乘都封闭. 且满足其他性质.
维数是 $\dim U \times \dim U$, 基为 $f(u_i, u_j)$, 其中 u_i 是 U 的一组基. 完证毕明

1.2 Ex 2. 二次型的最值问题

问题 1.4. 记 A 是实对称矩阵, 证明 A 的最大特征值是 $\sup_{x\neq 0}\frac{x^TAx}{x^Tx}$, 并考虑取达最大值的充要条件. 同时, 这也说明 sup 可以改成 max.

证明. 作换元处理, 令 $x=Py$, 其中 P 为正交矩阵且 $P^{-1}AP=D$,D 为对角矩阵.
那么

$$\sup_{x\neq 0}\frac{x^TAx}{x^Tx}=\sup_{y\neq 0}\frac{y^TDy}{y^Ty}$$

.
设 $y=\begin{pmatrix}y_1 & y_2 & \cdots & y_n\end{pmatrix}^T, D=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$
因此求

$$\sup_{\sum\limits_{k=1}^{n}y_k^2\neq 0}\frac{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k y_k^2}{\sum_{k=1}^{n}y_k^2}$$

考虑 $\max\limits_{1\leq k\leq n}(\lambda_k)=\lambda_r$, 那么

$$\frac{\sum\lambda_k y_k^2}{\sum y_k^2}\leq\frac{\sum\lambda_r y_k^2}{\sum y_k^2}=\lambda_r$$

取等当且仅当 $y_i=y_r\cdot\delta_{ir},\forall 1\leq i\leq n$, 其中 r 满足 $\lambda_r=\max\limits_{1\leq i\leq n}(\lambda_i)$. 完证毕明

问题 1.5. 记 A 是实对称矩阵, 记最大特征值为 λ_1 的重数为 1, 相应的特征向量为 $Av=\lambda_1 v$. 证明 A 的第二特征值是 $\sup_{x\perp x_1,x\neq 0}\frac{x^TAx}{x^Tx}$. 此处 x_1 是使得上一问取达最大值的任一向量.

证明. 若 $x\perp x_1$, 也即 $xx_1^T=0$, 也即 $Py\cdot(Py_1)^T=-0$, 即 $yy_1^T=0$. 其中 $y_1=\begin{pmatrix}t & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}^T$, t 为任意非 0 实数.
因此令 $y'=\begin{pmatrix}y_2 & \cdots & y_n\end{pmatrix}^T$,$D=\operatorname{diag}(\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$

$$\sup_{x\perp x_1,x\neq 0}\frac{x^TAx}{x^Tx}=\sup_{y'\neq 0}\frac{y'^TD'y}{y'^Ty}$$

下同 **问题 1.4.** 即可. 完证毕明

问题 1.6. 假定 A 是实对称正定矩阵, 证明 $\inf_{x\neq 0}\frac{x^TA^{-1}x}{x^Tx}$ 和 $\sup_{x\neq 0}\frac{x^TAx}{x^Tx}$ 互为倒数.

证明. 由于 A 是正定矩阵, 知道 A^{-1} 也正定, 即 A 的所有特征值都大于 0. 而 A^{-1} 的特征值为 A 的特征值的倒数.
类似**问题 1.4.** 我们可以知道,A 的最小特征值是 $\inf_{x\neq 0}\frac{x^TAx}{x^Tx}$. 因此若 A 的最大特征值为 λ_1, 那么 A^{-1} 的最小特征值是 $1/\lambda_1$. 完证毕明

问题 1.7. 记 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 是实数, 满足 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ 与 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$. 求

$$x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n+x_nx_1$$

的最大值.

解答 记 $x=\begin{pmatrix}0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{pmatrix}^T$, $x^T\cdot\mathbf{1}=0$.

对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, 第二大特征值为 λ_2, 那么 $\max\sum\limits_{cyc}x_1x_2=\frac{\lambda_2}{2}$

1.3 Ex 5. 极分解

以下仅讨论对称半正定矩阵.

问题 1.8. 若 A 是对称半正定矩阵, 则存在唯一的对称半正定矩阵 $\sqrt{A}$ 使得 $\sqrt{A}^2 = A$.

证明. $A = U^T \Lambda U$, 那么取 $\sqrt{A} = U^T \sqrt{\Lambda} U$.
假设存在对称半正定矩阵 $B^2 = C^2 = A$, 那么 $B^2 = C^2$, 设 $B = U^* \Lambda U, C = V^* \Lambda V$. 因此 $U^* \Lambda^2 U = V^* \Lambda^2 V$. 故而 $\Lambda^2 UV^* = UV^* \Lambda^2$,, 因此 UV^* 与 Λ^2 可交换, 因此 UV^* 是对角矩阵因此 UV^* 与 Λ 可交换. 故 $UV^* \Lambda = \Lambda UV^*$, 即 $V^* \Lambda V = U^* \Lambda U$. 完证毕明

问题 1.9. 任意矩阵 A 都是对称半正定矩阵与正交矩阵的乘积. 若 A 对称正定, 则这一分解唯一.

证明. $A = U^* \Sigma V = U^* \Sigma U \cdot U^* V = SQ$.
假设 $A = SQ = S_1 Q_1$, 因此 $AA^* = SS^* = S_1 S_1^*$, 故 $S^2 = S_1^2$, 利用上一问知道 $S = S_1$. 完证毕明

问题 1.10. 假设 S 实正定,Q 正交. 若 $\det(xI - SQ) = \det(xI - S)$, 则 $S = SQ$.

证明. 由题目知 $S \sim SQ$, 存在正交矩阵 $U, USU^* = D$.
不会了. 完证毕明

2 Jordan 标准型

2.1 Problem 3.

假定 A 与 B 是**一般域**上的方阵, 下面研究乘法式 $AX-XB$.

问题 2.1. (第三问) 证明:$AX-XB=O$ 只有零解, 当且仅当 A 与 B 的特征多项式互素.

证明. 不失一般性设 $X=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$, 其中 $r=rank(X)$,$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$

$$AX=\begin{pmatrix} A_{11} & O \\ A_{21} & O \end{pmatrix}, \quad XB=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ O & O \end{pmatrix}.$$

$AX=XB$, 那么 $A_{11}=B_{11}, A_{21}=O, B_{12}=O$

$$\det(\lambda I-A)=\det\begin{pmatrix} \lambda I-A_{11} & A_{12} \\ O & \lambda I-A_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I-B)=\det\begin{pmatrix} \lambda I-B_{11} & O \\ B_{21} & \lambda I-B_{22} \end{pmatrix}$$

所以 $\lambda I-A$ 与 $\lambda I-B$ 的特征值由 r 个相同. 所以 $X=O$ 等价于 A 与 B 的特征多项式互素. 完证毕明

问题 2.2. 给定矩阵 $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 和 $B\in\mathbb{F}^{m\times m}$. 证明一下命题等价.

1. 对未知量 $X\in\mathbb{F}^{n\times m}$, 方程 $AX-XB=O$ 只有零解.
2. 任意给定矩阵 $C\in\mathbb{F}^{n\times m}$, 对未知量 $X\in\mathbb{F}^{n\times m}$, 方程 $AX-XB=C$ 总有解.
3. 任意给定矩阵 $C\in\mathbb{F}^{n\times m}$, 对未知量 $X\in\mathbb{F}^{n\times m}$, 方程 $AX-XB=C$ 有且仅有唯一解.
4. 对任意相似矩阵 C, 总有相似矩阵

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$$

5. A 与 B 的特征多项式互素.

证明.

(5) ⇔ (1) 上一问已经证明.

(5) ⇒ (3) 作以下矩阵变换结果不变

$$B\to P^{-1}BP, C\to CP, X\to XP.$$

于是假定 B 是 Jordan 标准型.

设 $X=(\alpha_1,\dots,\alpha_n), C=(\beta_1,\dots,\beta_n)$. 那么 $AX-XB=C$ 可以拆分为 k 个独立方程, 如果 B 有 n 个快

$(A-\lambda_i I)\alpha_i=\beta_i$. 由于互素因此 λ_i 不是 A 的特征值.$A-\lambda_i I$ 可逆, 因此每个方程都有解, 所以矩阵方程有解且唯一.

$(3) \Rightarrow (5)$ 假设 A, B 有相同特征值 λ.

若这 k 个方程有一个无解, 那么这个矩阵方程无解.

若都有解, 由于 λ 是 A 的特征值, 那么 $(A-\lambda I)x=0$ 有无穷多组解. 若 $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ 是上述方程的一组解, 那么对 $(A-\lambda I)x=0$ 的任意一个解 α_0,$(\alpha_1,\ldots,\alpha_n+\alpha_0)$ 也是解, 因此 $AX-XB=C$ 有无穷多组解. 矛盾

$(1) \Leftrightarrow (4)$ 显然成立.

$(2) \Rightarrow (3)$ 不太会

完证毕明