第四周作业

董仕强

Sunday 26$^{\text{th}}$ January, 2025

0 说明

可以将作业中遇到的问题标注在此. 如有, 请补充.

目录

对称矩阵

0.1 习题 1

对称矩阵判断题. 不必证明真命题, 但须对假命题举出反例.

问题 0.1. 线性空间 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 中的矩阵构成 $\binom{n+1}{2}=\frac{n^2+n}{2}$-维子空间.

解答 对.

问题 0.2. 分块矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 是对称的, 当且仅当 $B=C^T$.

解答 错的. 还需要 A,D 均为对称矩阵. 反例取 A 非对称即可.

问题 0.3. 给定阶数相同的方阵 A 与 B, 则 $A\cdot B$ 也对称.

解答 错. 需要 $A\cdot B=B\cdot A$, 否则不可以. 反例取 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.$AB$ 不对称.

问题 0.4. 给定阶数相同的方阵 A 与 B, 若 $A\cdot B=B\cdot A$ 对称, 则 A 与 B 必有一者对称.

解答 错. 取非对称满秩方阵 A 和他的逆矩阵即可.

问题 0.5. 若 A^2 是对称矩阵, 则 A 对称.

解答 错. 取 $A=E_{1,2},A^2=O$ 对称, 但是 A 不是对称矩阵.

0.2 习题 2

问题 0.6. 若 X 与线性空间 $\mathbb{F}^n$ 中一切矩阵乘积可交换, 尝试求出 X.

解答

1. 若 $A=I-E_{ii}$, 那么 AX 效果为将 X 的第 i 行全部变成零.XA 效果为将 X 的第 i 列全部变成零.$AX=XA$ 说明 $x_{ij}=x_{ji}=0(1\leq j\leq n$ 且 $j\neq 0)$.i 取遍 1 到 n 后, 可知 X 为对角矩阵.
2. 不妨设 $X=diag(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, 取 A 为元素全部为 1 的矩阵.
$$AX=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}. \quad XA=\begin{pmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$
3. 所以,$\forall i,j,a_i=a_j$, 即 $X=kI,k\in\mathbb{F}$.

0.3 习题 3

问题 0.7. 给出以下方程的一个解:

$$L \cdot L^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{0.1}$$

其中要求 L 是下三角矩阵.

$$\begin{pmatrix} a & & \\ b & c & \\ d & e & f \end{pmatrix} \tag{0.2}$$

- 以上是数值分析中常见的 Cholesky 分解. 这一个分解对所有 (半) 正定矩阵奏效.

解答

$$L = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & & \\ 2/\sqrt{3} & \sqrt{2}/\sqrt{3} & \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

0.4 习题 4

问题 0.8. 给定 (a_1, a_2, a_3, a_4), 求解以下方程中的 (x_1, x_2, x_3).

$$\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & x_1 \\ & 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & & & a_4 \\ 1 & & & a_3 \\ & 1 & & a_2 \\ & & 1 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & x_1 \\ & 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \tag{0.3}$$

空缺的位置都是 0.

- 结合结合有理标准型, 以上构造间接解答了以下问题: 任意域上的方阵 A 通过对称矩阵与其转置相似, 即, 在对称矩阵 S 使得 $S^{-1}AS = A^T$.

解答 计算得:

$$LHS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 1 & x_1 & a_2 + x_1 a_1 \\ 1 & x_1 & x_2 & a_3 + x_1 a_2 + x_2 a_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & a_4 + x_1 a_3 + x_2 a_2 + x_3 a_1 \end{pmatrix}.$$

$$RHS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 + x_1 a_1 & a_3 + x_1 a_2 + x_2 a_1 & a_4 + x_1 a_3 + x_2 a_2 + x_3 a_1 \end{pmatrix}.$$

所以可以得到线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & -1 & 0 \\ a_2 & a_1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}.$$

可以解得

$$x_1 = a_1, \quad x_2 = a_1^2 + a_2, \quad x_3 = a_1^3 + 2a_1a_2 + a_3.$$

0.5 习题 5

问题 0.9. 将以下两个实矩阵分解作 2 个实对称矩阵的乘积,

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & & \\ -b & a & 1 & \\ & & a & b \\ & & -b & a \end{pmatrix}. \tag{0.4}$$

- 依照复矩阵的 Jordan 型与实矩阵的旋转-反射标准型, 任意方阵 (相应的, 复方阵) 一定是两个实对称矩阵 (相应的, 复对称矩阵) 的乘积.
- 作为推论, 两个对称矩阵的乘积不必对称.

解答

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & \\ \lambda & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} a & b & & \\ -b & a & 1 & \\ & & a & b \\ & & -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & b & a \\ & 1 & a & -b \\ b & a & & \\ a & -b & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}.$$

0.6 习题 6

问题 0.10. 若方阵 A 满足 $A(A-A^T)=O$. 证明 $A=A^T$.

- 若认为考试题比较简单, 可尝试由 $A(A-A^T)A=O$ 推导 $A=A^T$. 此处可以借用实矩阵的正交标准型:

$$A = Q^T \cdot \begin{pmatrix} S & R \\ O & O \end{pmatrix} \cdot Q \tag{0.5}$$

  其中 Q 是正交矩阵,S 是可逆矩阵.

- 这一标准型原理简单, 但各大教材很少涉及, 往后还会反复出现.

解答

(1) 证明. 若 $A=O$, 显然成立.
若 $A\neq O$, 考虑到 $tr(AA^T)\geq 0$. 取等当且仅当 $A=O$;
$tr(A^T)=tr(A)$; $tr(A\pm B)=tr(A)\pm tr(B)$. $tr(AB)=tr(BA)$.(这是容易验证的.)

$$\begin{aligned}
tr((A-A^T)(A^T-A)) &= tr(AA^T-AA-A^TA^T+A^TA) \\
&= tr(A^TA-A^TA^T) \\
&= tr(A^TA)-tr(A^TA^T) \\
&= tr(AA^T)-tr(AA) \\
&= tr(O) \\
&= 0
\end{aligned}$$

故 $A=A^T$. 完证毕明

(2) 证明. $A(A-A^T)A=O$, 即 $A^3=AA^TA.$, 带入 A 得正交标准型得到

$$\begin{pmatrix} S^3 & S^2R \\ O & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} SS^TS+RR^TS & SS^TR+RR^TR \\ O & O \end{pmatrix}.$$

所以

$$SS^TS+RR^TS=S^3.$$

两边同时右乘 S^{-1} 得正交标准型得到

$$SS^T+RR^T=S^2.$$

因此

$$\begin{aligned}
0 &\leq tr((A-A^T)(A^T-A)) \\
&= tr(SS^T-S^2-S^TS^T+S^TS) \\
&= 2tr(SS^T-S^2) \\
&= -2tr(RR^T) \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

所以

$$R=R^T.$$

完证毕明

1 专题: 相抵标准型 (仅仅只做了 Problem 1)

1.1 Problem 1

问题 1.1. (同时相抵化) 对相同规格的矩阵 A 和 B. 若

$$\operatorname{rank}(A+B)=\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B),$$

则存在 $P\in \mathrm{GL}_m(\mathbb{F})$ 与 $Q\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 使得

$$PAQ=\begin{pmatrix} I_{\operatorname{rank}(A)} & O & O \\ O & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix},\quad PBQ=\begin{pmatrix} O & O & O \\ O & O & O \\ O & O & I_{\operatorname{rank}(B)} \end{pmatrix}.$$

证明. 由不等式 $r(A+B)\le r((A\quad B))\le r(A)+r(B)$ 知,
若 $r(A+B)=r(A)+r(B)$ 有 $r((A\quad B))=r(A)+r(B)$.
存在可逆矩阵 P 使得 PA 为行最简,$PA=\begin{pmatrix} A_1 \\ O \end{pmatrix}$, A_1 为行满秩矩阵. 设 $PB=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$.

$$P\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ O & B_2 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & B_2 \end{pmatrix}$$

$r(A\quad B)=r\left(\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & B_2 \end{pmatrix}\right)=r(A_1)+r(B_2)=r(A)+r(B)$, 得到 $r(B)=r(B_2)=r\left(\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}\right)$. 因此存在可逆矩阵 X 使得 $B_1=XB_2$.
所以

$$\begin{pmatrix} I_{r_1} & -X \\ O & I_{n-r_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} O \\ B_2 \end{pmatrix}$$

若同时存在可逆矩阵 M 使得 $MB_2=\begin{pmatrix} O \\ B_3 \end{pmatrix}$,$B_3$ 为行最简

即

$$\begin{pmatrix} I_{r(A)} & -X \\ O & M \end{pmatrix}B=\begin{pmatrix} O \\ O \\ B_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_{r(A)} & -X \\ O & M \end{pmatrix}A=\begin{pmatrix} A_1 \\ O \\ O \end{pmatrix}$$

同理再对列进行类似操作即得结论. 证明完毕

问题 1.2. (分块上三角化) 记矩阵 (各分块不必是方阵)

$$M=\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}.$$

证明 $r(M)=r(A)+r(B)$ 的充要条件如下:

- 存在矩阵 X 和 Y 使得 $AX+YB=C$.

证明. 记 $P=\begin{pmatrix}P_1 & O\\ O & P_2\end{pmatrix}, Q=\begin{pmatrix}Q_1 & O\\ O & Q_2\end{pmatrix}$, 其中 $P_1AQ_1=\begin{pmatrix}I_{r_1} & O\\ O & O\end{pmatrix}, P_2BQ_2=\begin{pmatrix}I_{r_2} & O\\ O & O\end{pmatrix}$. $P_1CQ_2=\begin{pmatrix}C_1 & C_2\\ C_3 & C_4\end{pmatrix}$.

$$M'=PMQ=\begin{pmatrix}I_{r_1} & O & C_1 & C_2\\ O & O & C_3 & C_4\\ O & O & I_{r_2} & O\\ O & O & O & O\end{pmatrix}.$$

存在 P', Q' 使得

$$P'M'Q'=\begin{pmatrix}I_{r_1} & & & \\ & C_4 & & \\ & & I_{r_2} & \\ & & & O\end{pmatrix}$$

所以 $r(M)=r(A)+r(B)\Leftrightarrow C_4=O\Leftrightarrow P_1CQ_2=\begin{pmatrix}C_1 & C_2\\ C_3 & O\end{pmatrix}\Leftrightarrow C=P_1^{-1}\begin{pmatrix}C_1 & C_2\\ C_3 & O\end{pmatrix}Q_2^{-1}$.

$$\begin{aligned}P_1^{-1}\begin{pmatrix}C_1 & C_2\\ C_3 & O\end{pmatrix}Q_2^{-1}&=P_1^{-1}\cdot\begin{pmatrix}I_{r_1} & O\\ O & O\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}O & C_2\\ O & O\end{pmatrix}Q_2^{-1}+P_1^{-1}\begin{pmatrix}C_1 & O\\ C_3 & O\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}I_{r_2} & O\\ O & O\end{pmatrix}\cdot Q_2^{-1}\\ &=AQ_1\begin{pmatrix}O & C_2\\ O & O\end{pmatrix}Q_2^{-1}+P_1^{-1}\begin{pmatrix}C_1 & O\\ C_3 & O\end{pmatrix}P_2B.\end{aligned}$$

取 $X=Q_1\begin{pmatrix}O & C_2\\ O & O\end{pmatrix}, Y=P_1^{-1}\begin{pmatrix}C_1 & O\\ C_3 & O\end{pmatrix}P_2$, 得 $r(M)=r(A)+r(B)\Leftrightarrow AX+YB=C$. 完证毕明

问题 1.3. (何时能砍掉无用的行列空间) 所有矩阵不必是方阵. 证明:

$$r\left(\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\right)=r(A)$$

的充要条件是存在 X 和 Y 使得以下三个等式同时成立

$$AX=B,\quad YA=C,\quad YAX=D$$

充分性: 证明.

$$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & AX\\ YA & YAX\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}A & AX\\ O & O\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}A & O\\ O & O\end{pmatrix}.$$

得到 $r(\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix})=r(A)$ 完证毕明

必要性: 证明. 过程类似于问题 2.2;

$$\begin{pmatrix}P & O\\ O & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & O\\ O & Q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_r & O & B_1\\ O & O & B_2\\ C_1 & C_2 & D\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}I_r & O & O\\ O & O & B_2\\ C_1 & C_2 & D-C_1B_1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}I_r & O & O\\ O & O & B_2\\ O & C_2 & D-C_1B_1\end{pmatrix}$$

所以 $C_2 = O, \quad B_2 = O, \quad D = C_1 B_1$.

$$PB = \begin{pmatrix} B_1 \\ O \end{pmatrix}, \quad B = P^{-1}\begin{pmatrix} B_1 \\ O \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 \\ O \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q^{-1}Q\begin{pmatrix} B_1 \\ O \end{pmatrix} = AX$$

其中

$$X = Q\begin{pmatrix} B_1 \\ O \end{pmatrix}$$

其他等式同理可以得到.

完证
毕明

1.2 Problem 2(没做)

问题 1.4. 任取矩阵 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ 与 $B \in \mathbb{F}^{n\times m}$, 满足 $r(A) = r(ABA)$. 证明: 存在行满秩或列满秩的矩阵 C 使得 $ABC = CBA$.

- 对 $M = N$ 的特殊情形而言, AB 与 BA 相似.

问题 1.5. 任取矩阵 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ 与 $B \in \mathbb{F}^{n\times m}$, 满足 $r(B) = r(ABA)$. 证明: 存在行满秩或列满秩的矩阵 C 使得 $ABC = CBA$.

- 对 $M = N$ 的特殊情形而言, AB 与 BA 相似.

问题 1.6. 任取矩阵 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ 与 $B \in \mathbb{F}^{n\times m}$, 使得以下条件恒成立

$$r((AB))^d = r((BA)^d), (\forall d \in \mathbb{N}_+).$$

证明: 存在行满秩或列满秩的矩阵 C 使得 $ABC = CBA$.

- 对 $M = N$ 的特殊情形而言, AB 与 BA 相似.

1.3 Problem 3(没做)

问题 1.7. 假定存在方阵 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 满足 $A^2 = O$. 证明: 存在 $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 使得

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} O & I & O \\ O & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix}.$$

问题 1.8. 假定存在方阵 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 满足 $A^2 = A$. 证明: 存在 $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 使得

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} I & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

- 等价的, 存在 $A = BC$ 使得 $BC = I_{\mathrm{rank}(A)}$.

问题 1.9. 假定存在方阵 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 满足 $A^2 = I$. 证明: 存在 $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 使得

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} I & O \\ O & -I \end{pmatrix}.$$

- 假定域 $\mathbb{F}$ 的特征为 2, 即 $1+1=0$. 此时结论做何变化?

问题 1.10. 假定存在方阵 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 满足 $A^3 = A$. 证明: 存在 $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 使得

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} I & O & O \\ O & -I & O \\ O & O & O \end{pmatrix}.$$

- 假定域 $\mathbb{F}$ 的特征为 2, 即 $1+1=0$. 此时结论做何变化?

问题 1.11. 假定方阵 A 是幂零的, 即, 存在某一 $\in \mathbb{N}_+$ 使得 $A^n = O$. 求证:

- 存在 $S \in \mathrm{GL}_n\mathbb{F}$ 使得 $S^{-1}AS$ 是 $\{0,1\}$ 取值的矩阵, 且该矩阵的 1 仅允许分布在 $E_{i,i+1}$ 位置.

问题 1.12. 给定任意方阵 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. 证明: 存在 $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 使得

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} D & O \\ O & N \end{pmatrix}.$$

以上,D 是可逆的,N 是幂零的.

2 习题: 矩阵的秩

我选择习题 2,7,9,10.

2.1 行满秩, 列满射

2.2 常用技巧: 完全平方

例子. 此例假定 $\mathbb{Q}\subset\mathbb{F}\subset\mathbb{C}$, 定义 $A^H=(\overline{a_{i,j}})$ 是矩阵的共轭转置, 则

$$N(A)=N(A^HA)=N(AA^HA)=N(A^HAAA^HA)=\cdots \tag{2.1}$$

第一个不等式证明如下:

1. 若 $Ax=0$, 则 $A^Hx=0$; 反之,
2. 若 $A^HAx=0$, 则 $x^HA^HAx=\|Ax\|^2=0$, 从而 $Ax=0$.

每处的等式都能归纳得到.

2.2.1 习题 2

问题 2.1. 固定数域上得矩阵 A, 称 B 为" 好矩阵", 若 B 是有限个 A 与 A^H 的交错积. 证明任意两个好矩阵的秩相同.

证明. 知道例子中的结论后, 我们知道 $n=\dim N(A)+r(A)$, 立即得到 $r(A)=r(A^HA)=r(AA^HA)=r(A^HAA^HA)=\cdots$, 故命题成立. 完证毕明

2.3 秩不等式

2.4 Schur 补及其推广

2.4.1 习题 7

问题 2.2. 若 A 是可逆方阵, 则 $A+BC$ 是可逆方阵当且仅当 $I+CA^{-1}B$ 是可逆方阵.

解答

充分性 证明. 恒等变形

$$(A+BC)A^{-1}B=B+BCA^{-1}B=B(I+CA^{-1}B).$$

故

$$A^{-1}B=C(A+BC)^{-1}B(I+CA^{-1}B).$$

同时左乘 C, 得

$$CA^{-1}B=C(A+BC)^{-1}B(I+CA^{-1}B).$$

因此

$$\begin{aligned}I&=I+CA^{-1}B-CA^{-1}B\\&=(I+CA^{-1}B)-C(A+BC)^{-1}B(I+CA^{-1}B)\\&=(I-C(A+BC)^{-1}B)(I+CA^{-1}B).\end{aligned}$$

完证毕明

必要性 证明. 还是由恒等变形可以得到

$$(A+BC)A^{-1}B(I+CA^{-1}B)^{-1}=B.$$

因此同时右乘 C 得

$$(A+BC)A^{-1}B(I+CA^{-1}B)^{-1}C=BC.$$

因此

$$\begin{aligned}
I &= AA^{-1} \\
&= (A+BC-BC)A^{-1} \\
&= ((A+BC)-(A+BC)A^{-1}B(I+CA^{-1}B)^{-1}C)A^{-1} \\
&= (A+BC)(I-A^{-1}B(I+CA^{-1}B)^{-1}C)A^{-1} \\
&= (A+BC)(A^{-1}-A^{-1}B(I+CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1})
\end{aligned}$$

完证毕明

2.5 初等变换与秩

2.5.1 习题 9

问题 2.3. 证明 $r(AD-BC)\le r(A-B)+r(C-D)$. 此处 $A,B\in\mathbb{F}^{m\times n}$, 以及 $C,D\in\mathbb{F}^{n\times l}$.

证明.

$$\begin{aligned}
r(AD-BC) &= r(AD-BD+BD=BC) \\
&= r((A-B)D+B(C-D)) \\
&\le r((A-B)D)+r(B(C-D)) \\
&\le r(A-B)+r(C-D).
\end{aligned}$$

完证毕明

2.5.2 习题 10

问题 2.4. 若 $A^2=A$ 且 $B^2=B$, 则 $r(A-B)=r(A-AB)+r(B-AB)$.

解答

一方面, 考虑到 $A(A-B)B=O$, 因此

$$0=r(A(A-B)B)\ge r(A(A-B))+r((A-B)B)-r(A-B).$$

得到

$$r(A-B)\ge r(A-AB)+r(B-AB).$$

另一方面 考虑到 $A-B=A(A-B)-(B-A)B$,
因此

$$r(A-B)=r(A(A-B)-(B-A)B)\leq r(A(A-B))+r((B-A)B)=r(A-AB)+r(B-AB)$$

所以 $(A-B)=r(A-AB)+r(B-AB)$.