高等代数 (荣誉) I 作业模板

董仕强

Tuesday 15th October, 2024

0 说明

可以将作业中遇到的问题标注在此. 如有, 请补充.

目录

1 习题课相关

1.1 习题课相关

问题 1.1. State the definition of a number field,and prove that number fields are $\mathbb{Q}$-linear spaces.

解答 设 P 是由一些复数组成的集合, 其中包括 0 与 1, 如果 P 中任意两个数的和, 差, 积, 商 (除数不为 0) 仍是 P 中的数, 则称 P 为一个数域.
可以将复数域看作在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间, 其维数为无穷. 任取 $\mathbb{C}$ 中的元素 c, 可以表示 $c = k_1c_1 + k_2c_2 + ... + k_nc_n + ... \quad, k_i \in \mathbb{Q}, c_i \in \mathbb{C}$

问题 1.2. Prove that the 3-demensional $\mathbb{Q}$-linear space V is a number field.

$$V = \{a + b \cdot 2^{1/3} + c \cdot 2^{2/3} : a, b, c \in \mathbb{Q}\}$$

证明. 首先有零元和单位元;
验证加减封闭: $\forall a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Q}$,

$$\begin{aligned}&(a + b \cdot 2^{1/3} + c \cdot 2^{2/3}) \pm c + d \cdot 2^{1/3} + e \cdot 2^{2/3}\\ =&(a \pm d) + (b \pm e) \cdot 2^{1/3} + (c \pm f) \cdot 2^{2/3}\\ \in&V.\end{aligned}$$

验证乘法封闭: $\forall a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Q}$,

$$\begin{aligned}&(a + b \cdot 2^{1/3} + c \cdot 2^{2/3})(d + e \cdot 2^{1/3} + f \cdot 2^{2/3})\\ =&(ad + 2bf + 2ce) + (bd + ae + 2cf) \cdot 2^{1/3} + (cd + af + be) \cdot 2^{2/3}\\ \in&V.\end{aligned}$$

验证除法封闭: $\forall a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Q}$ 且 d, e, f 不全为 0(记 $d^2 - 2ef, 2f^2 - de, e^2 - af$ 分别为 D, E, F),

$$\begin{aligned}&\frac{(a + b \cdot 2^{1/3} + c \cdot 2^{2/3})}{(d + e \cdot 2^{1/3} + f \cdot 2^{2/3})}\\ =&\frac{(a + b \cdot 2^{1/3} + c \cdot 2^{2/3})((d^2 - 2ef) + (2f^2 - de) \cdot 2^{1/3} + (e^2 - af) \cdot 2^{2/3})}{(d + e \cdot 2^{1/3} + f \cdot 2^{2/3})((d^2 - 2ef) + (2f^2 - de) \cdot 2^{1/3} + (e^2 - af) \cdot 2^{2/3})}\\ =&\frac{(aD + 2bF + 2cE) + (bD + aE + 2cF) \cdot 2^{1/3} + (cD + aF + bE) \cdot 2^{2/3}}{d^3 + 2e^3 + 4f^3 - 6def}\\ =&\frac{aD + 2bF + 2cE}{d^3 + 2e^3 + 4f^3 - 6def} + \frac{bD + aE + 2cF}{d^3 + 2e^3 + 4f^3 - 6def} \cdot 2^{1/3} + \frac{cD + aF + bE}{d^3 + 2e^3 + 4f^3 - 6def} \cdot 2^{2/3}\\ \in&V\end{aligned}$$

故 V is a number field. 完证毕明

问题 1.3. Find a field K such that $\mathbb{C}$ is a **proper** subfield of K.

解答 K 为有理函数域.

问题 1.4. Prove that $(1, e^x, e^{2x}, ..., e^{2024x})$are linearly independent real-valued functions.

• Hint:take derivatives,and use the fact **Vandermonde matrix is invertible** as a shortcut.

证明. 考虑这样的 2024×2024 的矩阵.

$$\begin{bmatrix} 1 & e^{x_1} & e^{2x_1} & \cdots & e^{(n-1)x_1} \\ 1 & e^{x_2} & e^{2x_2} & \cdots & e^{(n-1)x_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{x_n} & e^{2x_n} & \cdots & e^{(n-1)x_n} \end{bmatrix}$$

他是一个范德蒙矩阵. 只要 $x_i \neq x_j, \forall 1 \leq i < j \leq n$, 那么这个矩阵可逆, 也即矩阵的列向量线性无关. 而 x_i 可取遍全体实数. 故可以得到,$(1, e^x, e^{2x}, \cdots, e^{2024x})$ 是线性无关的. 完证毕明

问题 1.5. find n such that $(\sin \frac{\pi}{2n}, \sin \frac{2\pi}{2n}, \cdots, \sin \frac{(n-1)\pi}{2n})$ are linearly dependent (over $\mathbb{Q}$).

解答 skip

2 线性子空间

2.1 线性子空间

问题 2.1. 证明一下两个句子包含了相同的子集.

1. 既包含 U_1, 有包含 U_2 的最小线性子空间.

2. 集合 $\{\sum u_1 + u_2 | u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$

这一子集是线性空间, 记作 $U_1 + U_2$

证明. 一方面, 记 U 是包含 U_1, U_2 的最小线性子空间, 那么任取 U_1, U_2 中的元素 u_1, u_2,$u_1 + u_2 \in U$. 那么 $U \subseteq \{\sum u_1 + u_2 | u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$;

另一方面, 记 $U' = \{\sum u_1 + u_2 | u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$, 任取 U' 中的元素 u', 他能用 U_1, U_2 中的元素线性表示, 也就是 $\forall u' \in U, u' \in U$, 即 $U' \subseteq U$;

故 $U = U'$. 完证毕明

问题 2.2. 类似的, 请以两种观点定义 $U_1 \cap U_2$.

解答 1. 同时是 U_1, U_2 的线性子空间的最大线性子空间.

2. 集合 $\{u : u \in U_1 \wedge u \in U_2\}$

问题 2.3.

问题 2.4. 直接写出 $\cap$ 满足的交换律.

解答 交换律. $U_1 \cap U_2 = U_2 \cap U_1$

结合律. $(U_1 \cap U_2) \cap U_3 = U_1 \cap (U_2 \cap U_3)$

问题 2.5. 写出分配律的反例. 此处应化为什么?

解答 取 U_1, U_2, U_3 是平面上三条过同一个点的直线, 则等式左边表示 U_3 代表的直线, 右边表示三条直线的交点, 左边与右边不等.

. $\supset$

问题 2.6.

解答 $U_1 + (U_2 \cap U_3) \subseteq (U_1 + U_2) \cap (U_1 + U_3)$.

问题 2.7. 证明线性子空间的 modular lattice 结构, 具体而言, 若 U_- 是 U_+ 的子空间, 则

$$(U_- + U_0) \cap U_+ = U_- + (U_0 \cap U_+)$$

.

解答 $\forall u_1 + u_2 \in ((U_- + U_0) \cap U_+)$, 其中 $u_1 \in U_-, u_2 \in U_0$,
则

$$u_1 + u_2 \in U_+$$

又

$$u_1 \in u_- \subseteq U_+$$

则

$$u_2 \in U$$

于是有

$$u_1 \in U_- \cap U_+, u_2 \in U_0 \cap U_+$$

既有

$$u_1 + u_2 \in (U_- \cap U_+) + (U_0 \cap U_+)$$

所以有

$$(U_- + U_0) \cap U_+ = U_- + (U_0 \cap U_+)$$

3 课堂思考题

3.1 课堂思考题

问题 3.1. To prove that any subset of n+1 vectors of $\mathbb{F}^n$ is linearly dependent.

证明. case1. 若前 n 个向量中有线性相关, 则 n+1 个也线性相关.
case2. 若前 n 个向量线性无关, 则这 n 个向量可以看作这个向量空间中的基 $v_1, \cdots, v_n.\mathbb{F}^n = span(v_1, \cdots, v_n)$.
由于第 n+1 个向量是 $\mathbb{F}^n$ 中的元素, 那么他就能被这 n 个元素线性表示.
故命题得证. 完证毕明

问题 3.2. 数域 (无限域) 上, 线性方程组解的个数可能有:0 个,1 个, 无限个. 那种情况概率大?

解答 1.$\|A\| < 1$, 则 $E - A$ 可逆,

$$E - A = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

.

$$\|\sum_{k=0}^{\infty} A^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A\| < +\infty$$

$$(E - A)\sum_{k=0}^{\infty} A = E$$

2.A 可逆, 如果 $B \in N_\delta(A).\delta = \frac{1}{\|A^{-1}\|}$, 则 B 可逆.

$$\|E - A^{-1}B\| = \|A^{-1}(A - B)\| \leq \|A^{-1}\|\|A - B\|$$

.

$$B \in N_\delta(A), \|B - A\| \leq \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

$$\|E - A^{-1}B\| < 1.$$

由 1.$E - (E - A^{-1}B)$ 可逆, 得 B 可逆.

问题 3.3. 用 Dedekind 分割证明 $\mathbb{R}$ 满足加法交换律.

证明. 由于有理数满足加法的交换律, 在定义了加法运算之后我们就有 $A + B = B + A$, 完证毕明