高等代数 (荣誉) I 作业模板

董仕强

Monday 7th October, 2024

0　说明

可以将作业中遇到的问题标注在此. 如有, 请补充.
Exercise 的第三题，不会做。

证明.

§1.1

27.　16　8　32

30.　$c^2+d^2=0 \quad or \quad \mathbf{v}=\lambda\mathbf{w},\lambda\in\mathbf{F}$

$\mathbf{u}=(1,1,1,1)\mathbf{v}=(1,1,1,-1)\mathbf{w}=(1,1,-1,1)\mathbf{z}=(1,-1,1,1)$

31.　$2c-d=0 \quad \& \quad -c+2d-e=0 \quad \& \quad -d+2e=0$

$c=0.75 \quad d=0.5 \quad e=0.25$

§1.2

30.$\mathbf{u}=(2,1)\mathbf{v}=(-2,1)\mathbf{w}=(1,-3) \quad 4$

proof: 平面中,$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}<0 \Leftrightarrow \arg(\mathbf{u},\mathbf{v})>90°$

反证法，假设平面中有四个向量两两内积均为负，也即两两夹角为钝角，这显然不可能，因为这样一个周角就大于 360° 了。所以平面里四个向量是不可能的。

31.$(x+y+z)^2=0, \quad s.t. \quad x^2+y^2+z^2=-2(xy+yz+zx)$

$\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}=\frac{xz+yx+zy}{x^2+y^2+z^2}=-\frac{1}{2}$

§1.3

3.$\mathbf{A}=\mathbf{S}^{-1}\mathbf{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$

$independent.$

5.$y=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} or \begin{pmatrix}100\\-200\\100\end{pmatrix}$

6.　3　-1　0

Exercise 1.

1. $\begin{pmatrix} a_{11}b11 + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{212} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$

2. 8 4

3. 计算得,

$$S_2 + S_3 - S_6 - S_7 = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$$

$$S_4 + S_6 = a_{11}b_{212} + a_{12}b_{22}$$

$$S_5 + S_7 = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}$$

$$S_1 - S_3 - S_4 - S_5 = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$$

4. 12 24

Exercise 2.

1.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & -bc + ad \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} da - bc & 0 \\ 0 & -cb + ad \end{pmatrix}$$

2.

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

3.

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{-\sqrt{5} - 1}{2}$$

4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} + a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$$

5.

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6. 利用矩阵，得到的通项表示更加简洁。与特征根法相比，不用求方程的根。而实际上，特征根法中的特征方程与这个矩阵的特征方程相同，特征根法中的特征根就是这个矩阵的两个特征值。

Exercise 3.

1. 加法. 乘法. 共轭. 模平方. 实部?

2.$A = \begin{pmatrix} \cos\frac{2k\pi}{2023} & \sin\frac{2k\pi}{2023} \\ -\sin\frac{2k\pi}{2023} & \cos\frac{2k\pi}{2023} \end{pmatrix} \quad , k \in \mathbb{Z}$

3.??

矩阵级数的第 n+1 项$\frac{A}{n!}$,他的范数$\|\frac{A^n}{n!}\| = \frac{\|A^n\|}{n!} \leq \frac{\|A\|^n}{n!}$

这个级数的收敛性可以通过比较它与标量级数$\sum \frac{\|A\|^n}{n!}$来判断. 由于标量级数是指数函数$e^{\|A\|}$的展开，肯定收敛。

所以矩阵级数也收敛

4.可以。$j = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

证明完毕