

高等代数 (荣誉) I 作业模板

董仕强

Monday 9th December, 2024

0 说明

可以将作业中遇到的问题标注在此. 如有, 请补充.

Exercise 的第三题, 不会做.

证明.

§1.1

$$27. \begin{pmatrix} 16 & 8 & 32 \end{pmatrix}$$

$$30. \quad c^2 + d^2 = 0 \quad \text{or} \quad \mathbf{v} = \lambda \mathbf{w}, \lambda \in \mathbf{F}$$

$$\mathbf{u} = (1, 1, 1, 1) \mathbf{v} = (1, 1, 1, -1) \mathbf{w} = (1, 1, -1, 1) \mathbf{z} = (1, -1, 1, 1)$$

$$31. \quad 2c - d = 0 \quad \& \quad -c + 2d - e = 0 \quad \& \quad -d + 2e = 0$$

$$c = 0.75 \quad d = 0.5 \quad e = 0.25$$

§1.2

$$30. \mathbf{u} = (2, 1) \mathbf{v} = (-2, 1) \mathbf{w} = (1, -3) \quad 4$$

proof: 平面中, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0 \Leftrightarrow \arg(\mathbf{u}, \mathbf{v}) > 90^\circ$

反证法, 假设平面中有四个向量两两内积均为负, 也即两两夹角为钝角, 这显然不可能, 因为这样一个周角就大于 360° 了. 所以平面里四个向量是不可能的.

$$31. (x + y + z)^2 = 0, \quad \text{s.t.} \quad x^2 + y^2 + z^2 = -2(xy + yz + zx)$$

$$\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} = \frac{xz + yx + zy}{x^2 + y^2 + z^2} = -\frac{1}{2}$$

§1.3

$$3. \mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

independent.

$$5. y = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} 100 \\ -200 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$6. \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercise 1.

$$1. \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{212} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} 8 & 4 \end{pmatrix}$$

3. 计算得,

$$S_2 + S_3 - S_6 - S_7 = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$$

$$S_4 + S_6 = a_{11}b_{212} + a_{12}b_{22}$$

$$S_5 + S_7 = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}$$

$$S_1 - S_3 - S_4 - S_5 = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$$

$$4. \begin{pmatrix} 12 & 24 \end{pmatrix}$$

Exercise 2.

1.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & -bc + ad \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} da - bc & 0 \\ 0 & -cb + ad \end{pmatrix}$$

2.

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

3.

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{-\sqrt{5} - 1}{2}$$

4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} + a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$$

5.

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6. 利用矩阵, 得到的通项表示更加简洁. 与特征根法相比, 不用求方程的根. 而实际上, 特征根法中的特征方程与这个矩阵的特征方程相同, 特征根法中的特征根就是这个矩阵的两个特征值.

Exercise 3.

1. 加法. 乘法. 共轭. 模平方. 实部?

2. $A = \begin{pmatrix} \cos \frac{2k\pi}{2023} & \sin \frac{2k\pi}{2023} \\ -\sin \frac{2k\pi}{2023} & \cos \frac{2k\pi}{2023} \end{pmatrix}, k \in \mathbb{Z}$

3.????????????????????????????????????

矩阵级数的第 $n+1$ 项 $\frac{A^n}{n!}$, 他的范数 $\|\frac{A^n}{n!}\| = \frac{\|A^n\|}{n!} \leq \frac{\|A\|^n}{n!}$

这个级数的收敛性可以通过比较它与标量级数 $\sum \frac{\|A\|^n}{n!}$ 来判断. 由于标量级数是指数函数 $e^{\|A\|}$ 的展开, 肯定收敛。

所以矩阵级数也收敛

4. 可以。 $j = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} = 2 = \infty =$

完证
毕明