

Aproksymacja profilu wysokościowego

Metody Numeryczne - Projekt 3

Ruslan Rabadanov 196634

03-06-2024

Spis treści

1. Wstęp	1
1.1. Interpolacja wielomianowa Lagrange'a	1
1.2. Interpolacja funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia	2
1.3. Zestawy danych	2
2. Analiza podstawowa interpolacji	3
2.1. Interpolacja wielomianowa Lagrange'a	4
2.2. Interpolacja funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia	8
3. Analiza dodatkowa interpolacji	10
4. Podsumowanie	12

1. Wstęp

Celem tego projektu jest implementacja i porównanie algorytmów interpolacji funkcji, używając przykładu aproksymacji profilu wysokościowego terenu.

W projekcie zaimplementowano metodę interpolacji wielomianowej Lagrange'a i metodę interpolacji z użyciem funkcji sklejanych trzeciego stopnia wraz z niezbędnymi funkcjami macierzowymi i algorytmami do rozwiązywania układów równań liniowych.

Implementacja została przeprowadzona w języku Python, bez korzystania z zewnętrznych bibliotek do obliczeń numerycznych. Wykorzystano bibliotekę `matplotlib` do rysowania wykresów.

Projekt ma na celu porównanie wyników interpolacji dla różnych zestawów danych, charakteryzujących się różnymi cechami, aby zbadać zachowanie obu metod w różnych warunkach. Dodatkowo, przeanalizowane zostaną różnice wynikające z różnych parametrów interpolacji, takich jak charakter funkcji, liczba i rozmieszczenie węzłów interpolacji.

1.1. Interpolacja wielomianowa Lagrange'a

Interpolacja wielomianowa Lagrange'a polega na znalezieniu wielomianu stopnia $n-1$, który przechodzi przez n punktów.

W tym celu przyda się policzenie bazy Lagrange'a:

$$\phi_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^{n+1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, i = 1, 2, \dots, n + 1$$

Funkcja interpolująca ma postać:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n+1} y_i \phi_i(x)$$

Metoda ta jest stabilna i łatwa do implementacji, jednak ma swoje wady w postaci efektu Rungego, który polega na oscylacjach wynikowego wielomianu na krańcach przedziału interpolacji.

Efekt ten może zostać zniwelowany (jednak nie całkowicie wyeliminowany) poprzez zmianę rozmieszczenia węzłów interpolacji. W projekcie zaimplementowano dwa rodzaje węzłów: równoodległe oraz Czebyszewa.

1.2. Interpolacja funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia

Interpolacja funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia polega na znalezieniu funkcji sklejaney, która przechodzi przez wszystkie węzły, a jej pochodne pierwszego i drugiego rzędu są ciągłe.

W i -tym podprzedziale wielomian sklejaney funkcji trzeciego stopnia ma postać:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

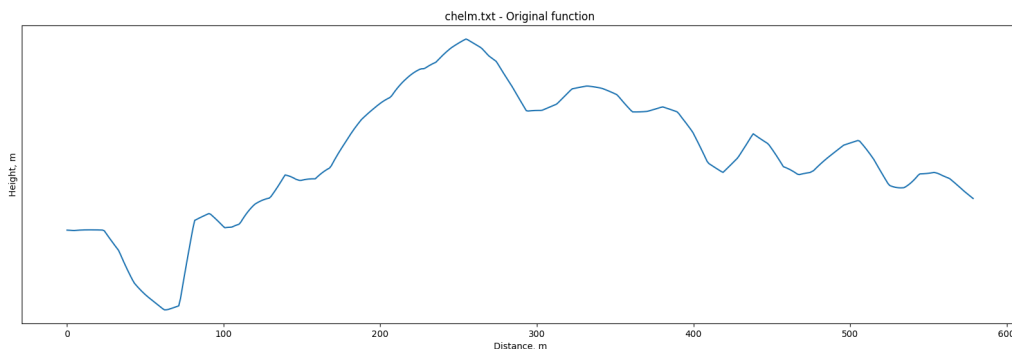
gdzie współczynniki a_i, b_i, c_i, d_i są znane dla każdego z przedziałów.

Metoda ta jest bardziej skomplikowana w implementacji, jednak rozwiązuje problem efektu Rungego, który występuje w przypadku interpolacji wielomianowej Lagrange'a. Funkcje sklejane pozwalają na uzyskanie gładkiej interpolacji, która nie wykazuje oscylacji na krańcach przedziału interpolacji.

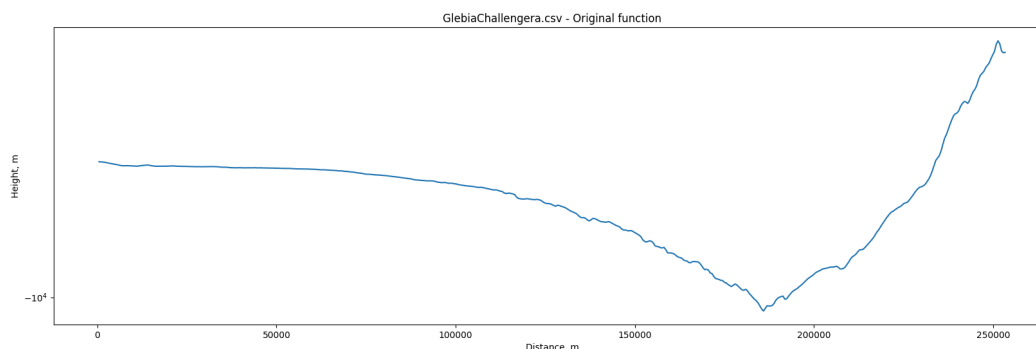
1.3. Zestawy danych

Do analizy wybrano trzy zestawy danych, które różnią się swoimi cechami, aby zbadać zachowanie obu metod interpolacji w różnych warunkach:

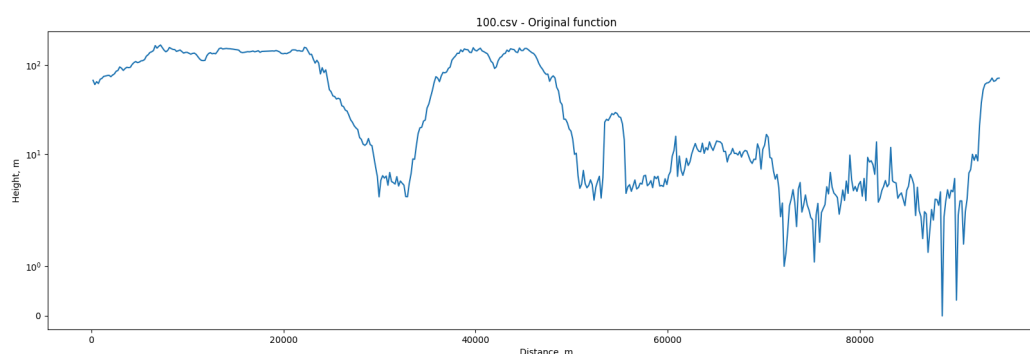
- `chelm.txt` - płynna trasa z niewielkimi zmianami wysokości,
- `GlebiaChallenger.csv` - płaska trasa z jednym wzniesieniem,
- `100.csv` - trasa z wieloma wzniesieniami i spadkami.



Rysunek 1: Funkcja terenu dla zestawu danych Chelm



Rysunek 2: Funkcja terenu dla zestawu danych Głębia Challengeera



Rysunek 3: Funkcja terenu dla zestawu danych 100

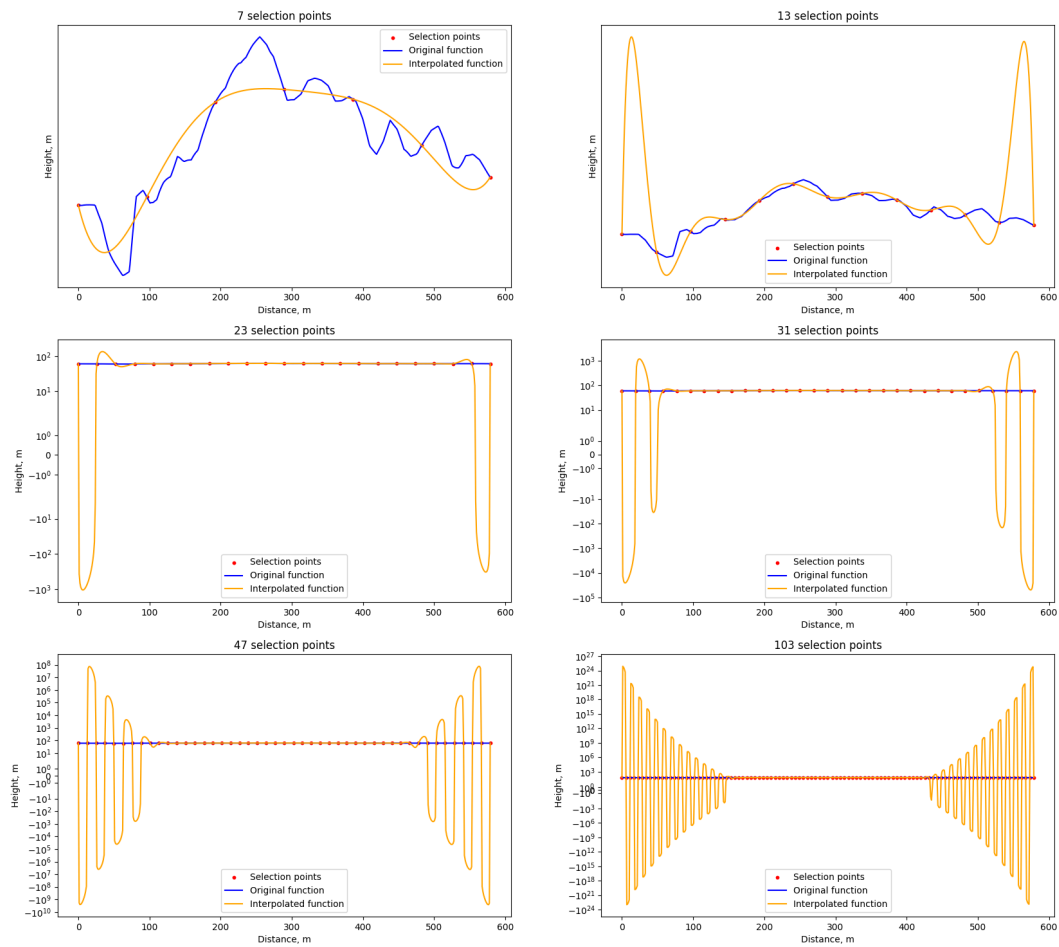
2. Analiza podstawowa interpolacji

Analiza wyników interpolacji dla każdego zestawu danych koncentruje się na badaniu wpływu liczby punktów pomiarowych oraz ich rozmieszczenia na jakość interpolacji. Badanie zostało przeprowadzone dla zestawów danych `chelm.txt` oraz `GlebiaChallenger.csv`, uwzględniając od kilku do stu punktów pomiarowych spośród około pięciuset dostępnych.

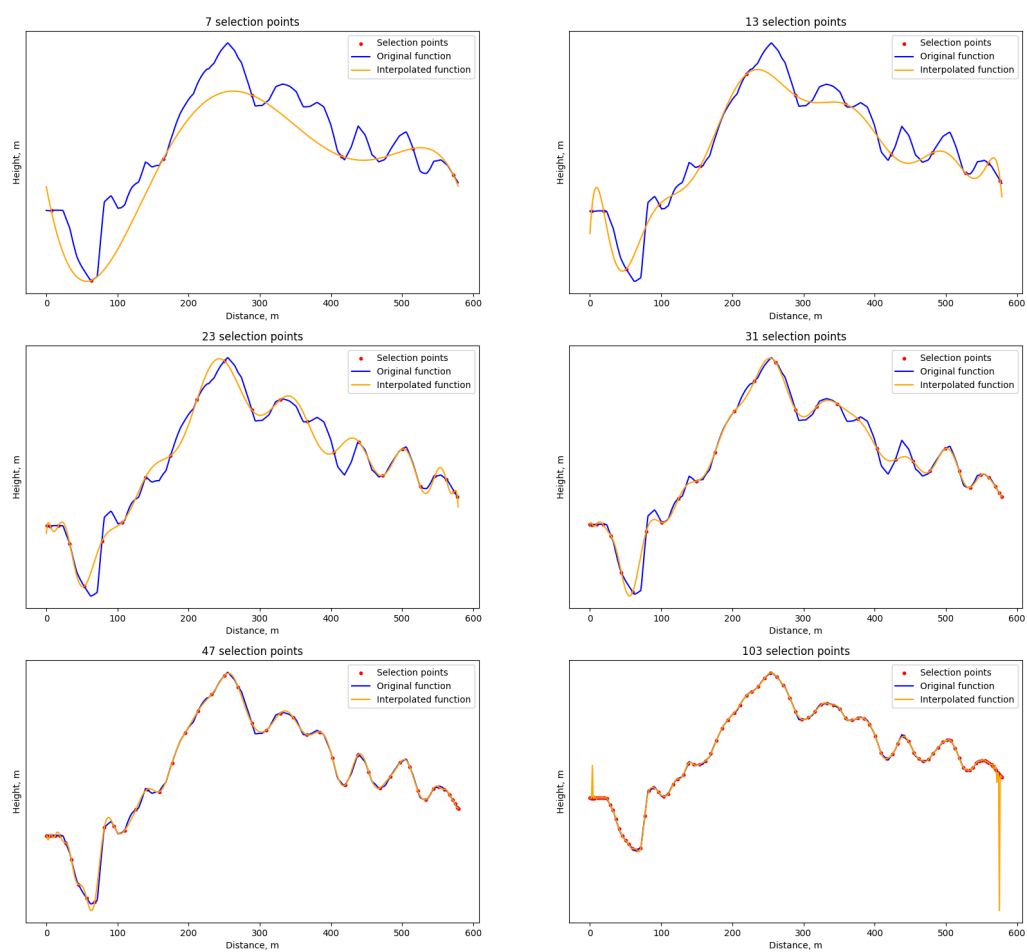
Jak przedstawiono na poniższych wykresach, liczba punktów pomiarowych znacząco wpływa na jakość interpolacji. W przypadku interpolacji wielomianowej Lagrange'a z równoodległymi węzłami, efekt Rungego jest bardzo widoczny już przy 13 punktach pomiarowych, co znacznie ogranicza efektywność tej metody. Zastosowanie węzłów Czebyszewa pomaga uniknąć efektu Rungego do pewnej (dużej) liczby węzłów interpolacji. Przy użyciu funkcji sklejanych trzeciego stopnia, efekt Rungego nie występuje, a interpolacja jest dokładna nawet przy niewielkiej liczbie punktów pomiarowych.

2.1. Interpolacja wielomianowa Lagrange'a

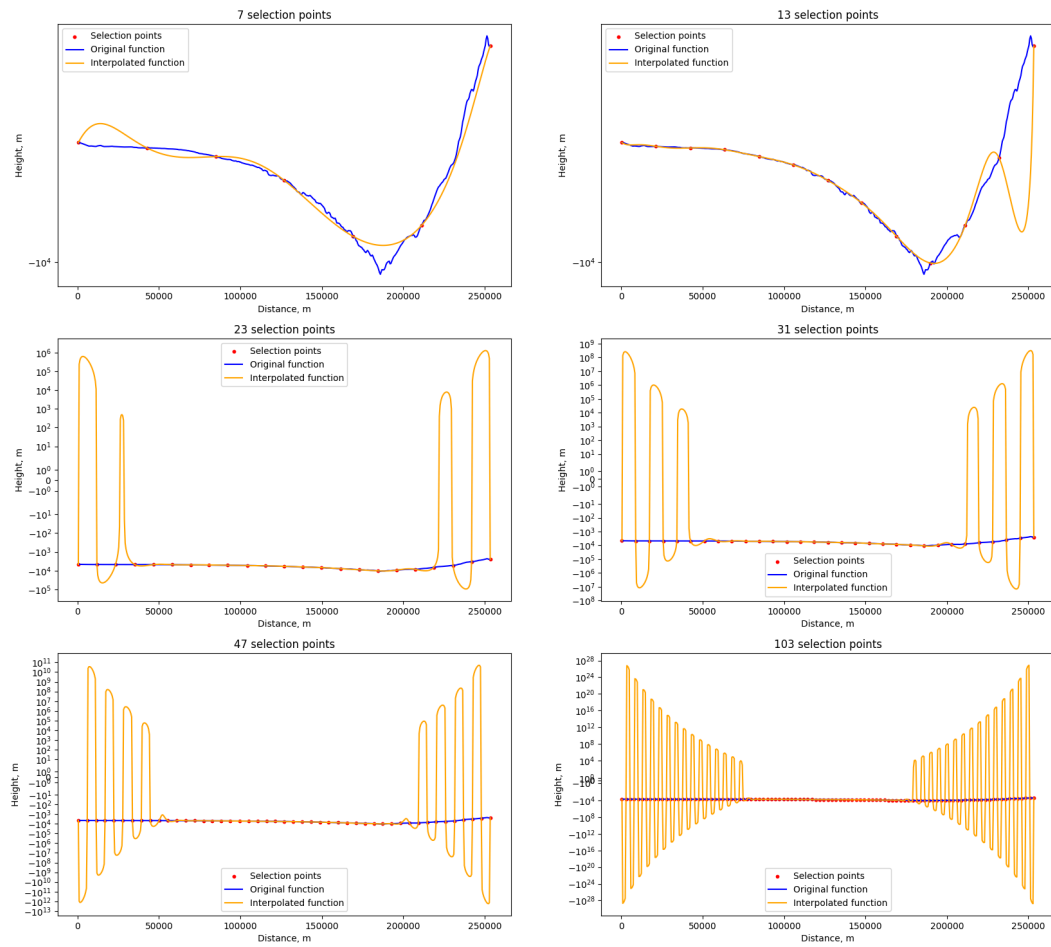
chelm.txt - Lagrange interpolation with linearly spaced nodes



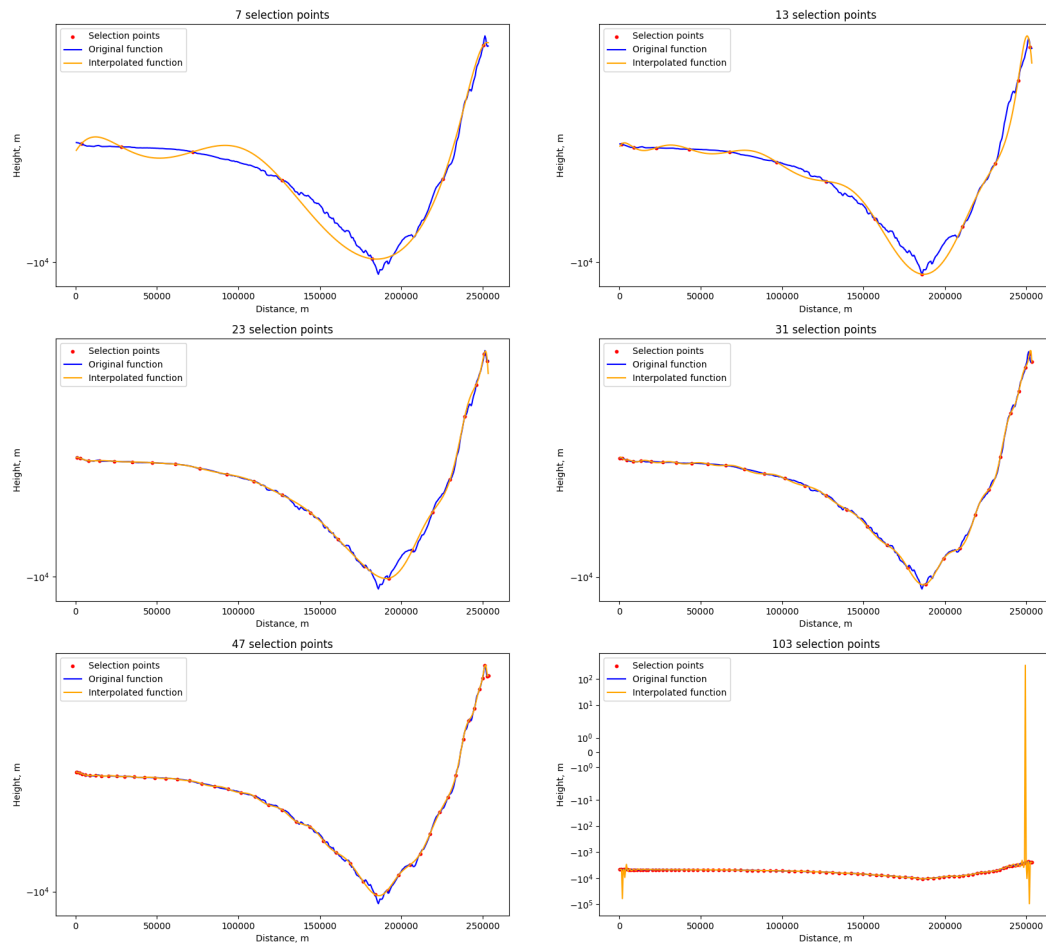
Rysunek 4: Wpływ liczby punktów pomiarowych na dokładność interpolacji wielomianowej dla zestawu danych Chelm (węzły równoodległe)



Rysunek 5: Wpływ liczby punktów pomiarowych na dokładność interpolacji wielomianowej dla zestawu danych Chelm (węzły Czebyszewa)



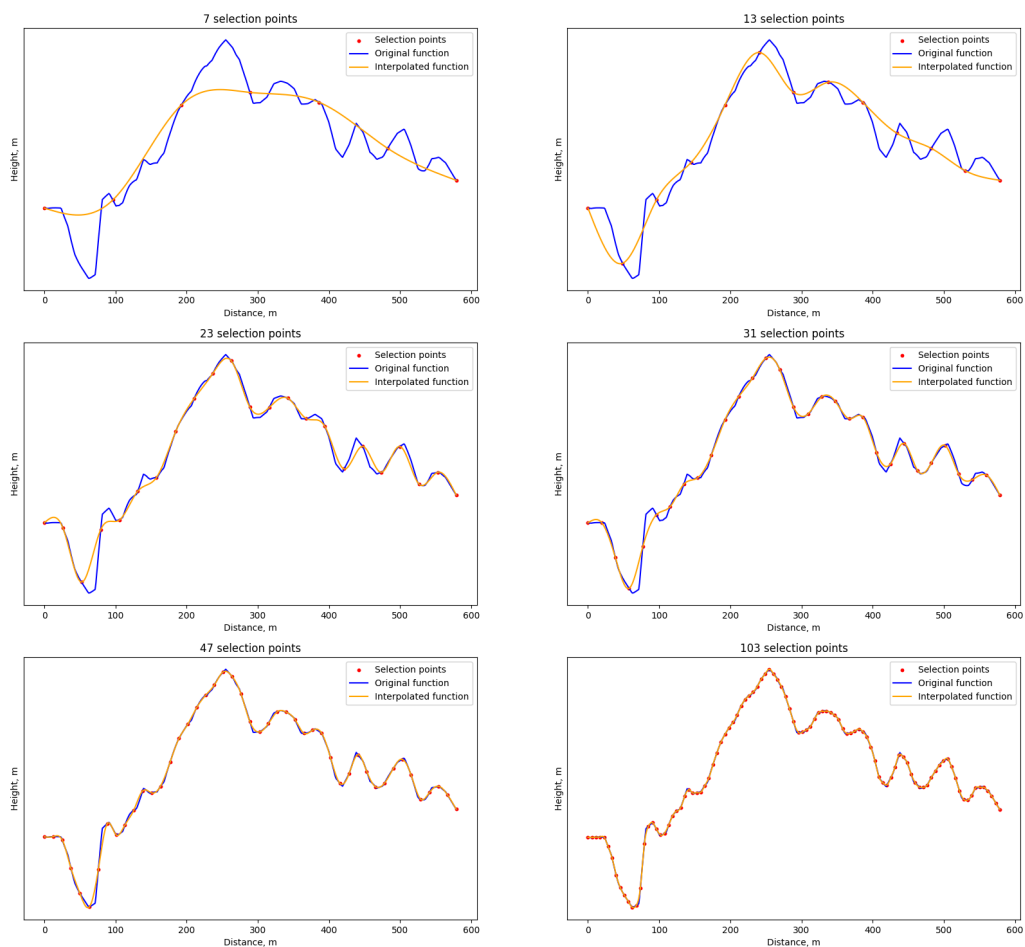
Rysunek 6: Wpływ liczby punktów pomiarowych na dokładność interpolacji wielomianowej dla zestawu danych Głębia Challenger (węzły równoodległe)



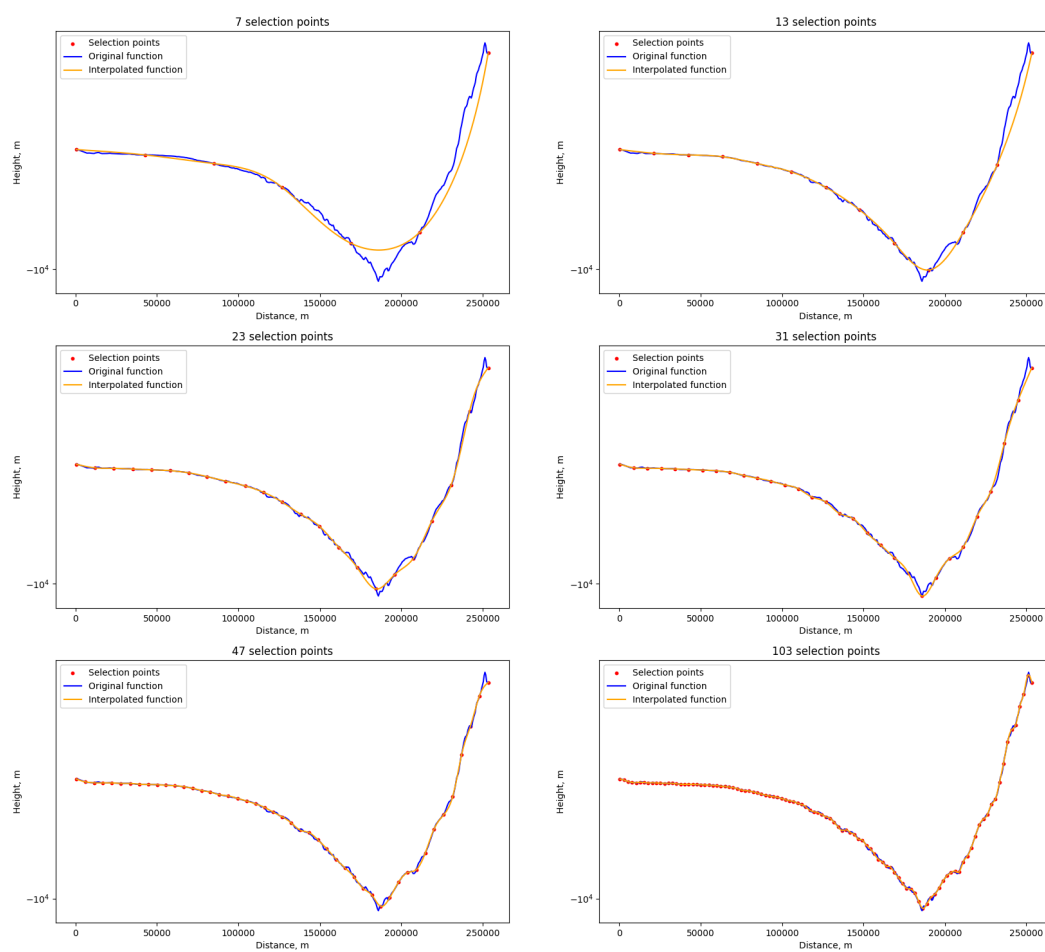
Rysunek 7: Wpływ liczby punktów pomiarowych na dokładność interpolacji wielomianowej dla zestawu danych Głębia Challenger (węzły Czebyszewa)

2.2. Interpolacja funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia

chelm.txt - Cubic spline interpolation



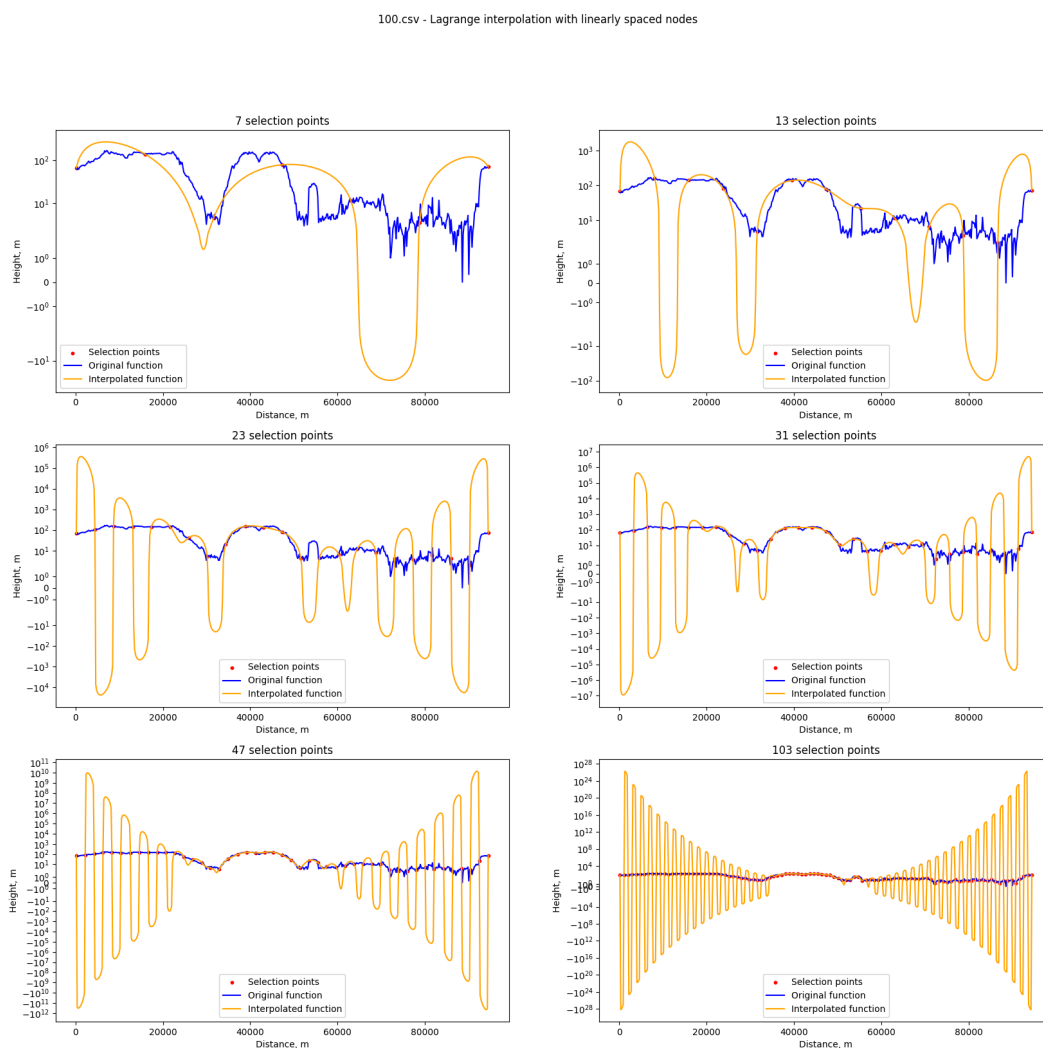
Rysunek 8: Wpływ liczby punktów pomiarowych na dokładność interpolacji funkcjami sklejanymi dla zestawu danych Chelm



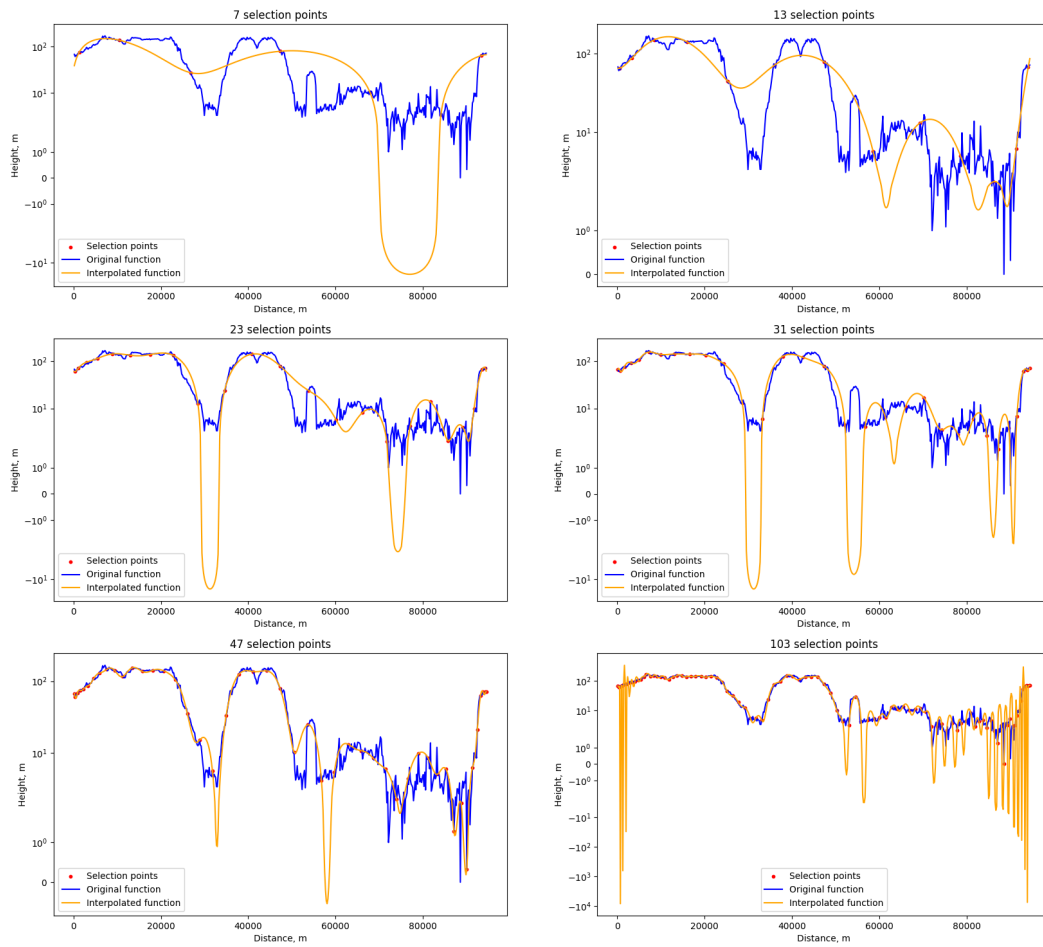
Rysunek 9: Wpływ liczby punktów pomiarowych na dokładność interpolacji funkcjami sklejonymi dla zestawu danych Głębia Challenger

3. Analiza dodatkowa interpolacji

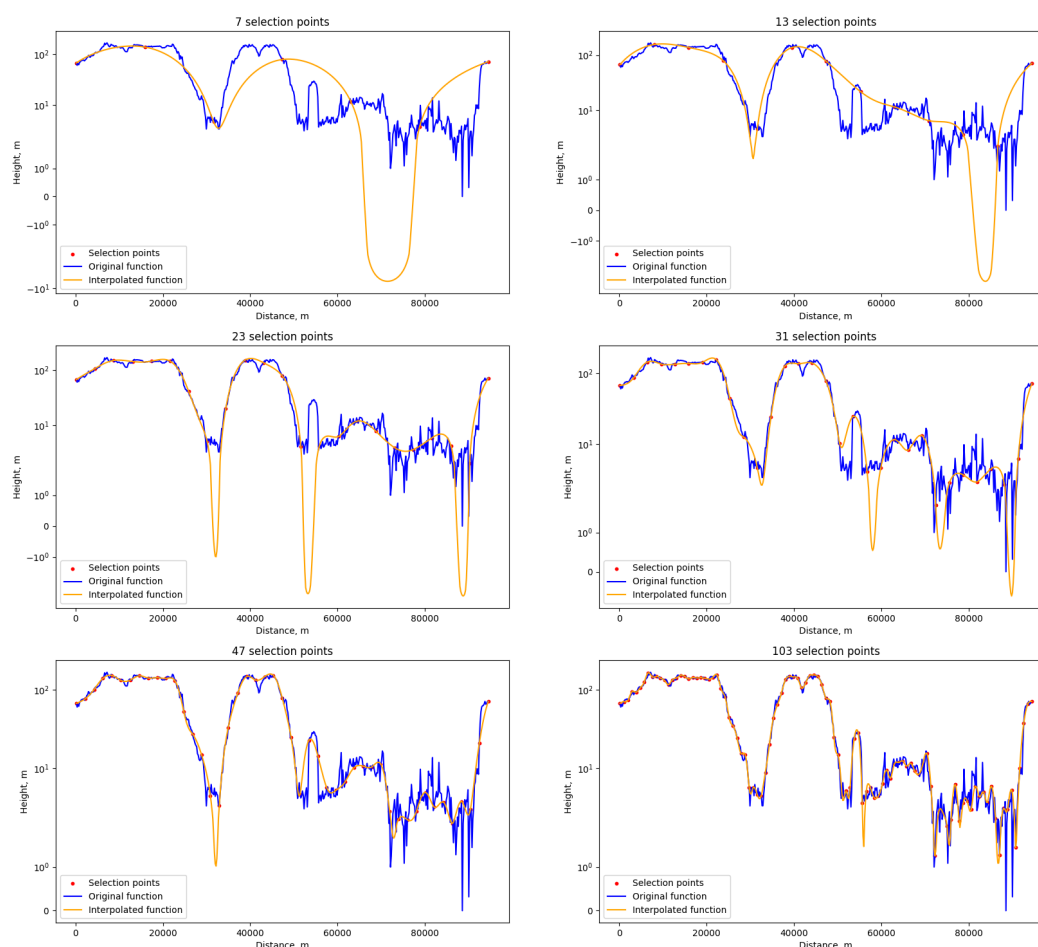
W ramach analizy dodatkowej, przeprowadzono testy dla zestawu danych 100.csv, ponieważ jest to zestaw danych o niezwykle charakterze trasy, co pozwala na lepsze zbadanie zachowania obu metod interpolacji. Przy interpolacji wielomianowej Lagrange'a widać wyraźny efekt Rungego jak w przypadku stosowania węzłów równoodległych (przy 23 punktach), tak i w przypadku stosowania węzłów Czebyszewa (przy 103 punktach). W przypadku interpolacji funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia, efekt Rungego nie występuje. W każdej metodzie interpolacja jest niedokładna w niektórych przedziałach trasy z powodu skomplikowanego profilu terenu, jednak interpolacja funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia daje najlepsze rezultaty.



Rysunek 10: Wpływ liczby punktów pomiarowych na dokładność interpolacji wielomianowej dla zestawu danych 100 (węzły równoodległe)



Rysunek 11: Wpływ liczby punktów pomiarowych na dokładność interpolacji wielomianowej dla zestawu danych 100 (węzły Czebyszewa)



Rysunek 12: Wpływ liczby punktów pomiarowych na dokładność interpolacji funkcjami sklejonymi dla zestawu danych 100

4. Podsumowanie

Najmniej dokładna okazała się interpolacja wielomianowa Lagrange'a z równoodległymi węzłami. Efekt Rungego jest bardzo widoczny już przy stosunkowo niewielkiej liczbie punktów pomiarowych, co ogranicza skuteczność tej metody. Jest ona użyteczna jedynie w przypadku najprostszych funkcji terenu z małą liczbą punktów pomiarowych.

Interpolacja wielomianowa Lagrange'a z węzłami Czebyszewa przynosi zadowalające wyniki. Pomaga uniknąć efektu Rungego do pewnej liczby węzłów interpolacji, jednak nie jest w stanie zapewnić takiej dokładności jak funkcje sklejane trzeciego stopnia.

Najlepsze wyniki daje interpolacja funkcjami sklejonymi trzeciego stopnia, zarówno pod względem dokładności, jak i odporności na efekt Rungego. Ta metoda zapewnia najwyższą jakość interpolacji w każdych warunkach. Chociaż może uproszczyć profil terenu w przypadku bardziej skomplikowanych funkcji, jest to zazwyczaj akceptowalne.