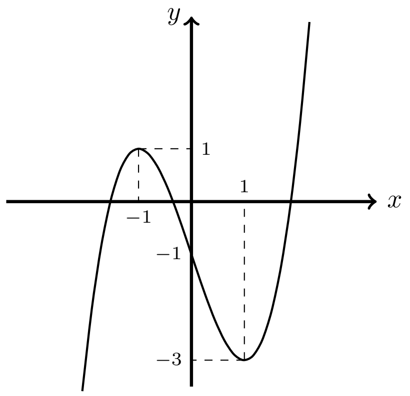
第5回リメディアル数学 (化学システム工学科) 2023/5/24 略解

問題 1.

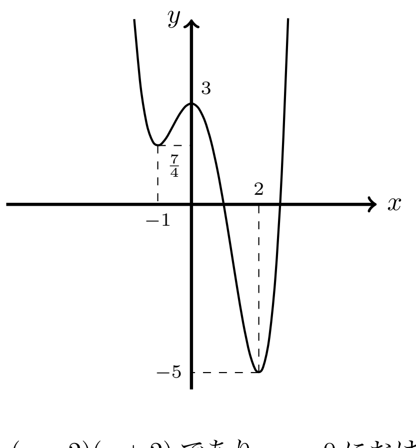
(1) $y' = 3(x-1)(x+1)$ より, 増減表は以下のようになる. よって極大値は 1 $(x=-1)$, 極小値は -3 $(x=1)$ である.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$



(2) $y' = 3x(x-2)(x+1)$ より増減表は以下のようになる. よって, 極大値は 3 $(x=3)$, 極小値は $\frac{7}{4}$ $(x=-1)$, -5 $(x=2)$ である.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	$\frac{7}{4}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-5	$\nearrow$

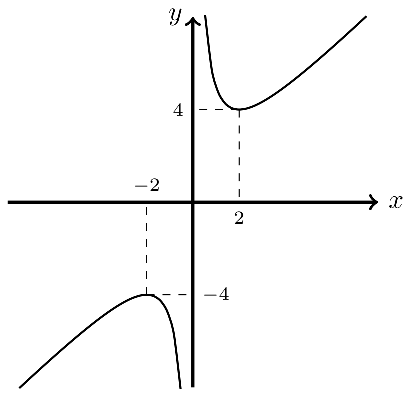


(3) $y' = \dfrac{1}{x^2}(x-2)(x+2)$ であり, $x=0$ における漸近挙動は

$$\lim_{x\to+0}\left(x+\frac{4}{x}\right)=\infty, \quad \lim_{x\to-0}\left(x+\frac{4}{x}\right)=-\infty$$

であることから増減表は以下のようになる. よって, 極大値は -4 $(x=-2)$, 極小値は 4 $(x=2)$ である.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	-4	$\searrow$		$\searrow$	4	$\nearrow$



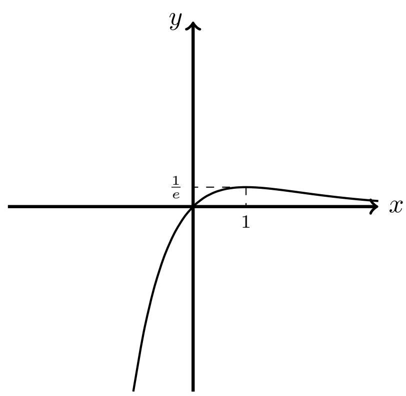
問題 2.

(1) $y' = e^{-x}(1-x)$ であり, $+\infty$, $-\infty$ における漸近挙動は

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty$$

であることから, 増減表は以下のようになる. よって, 最大値は $\frac{1}{e}$ $(x=1)$ であり, 最小値は存在しない.

x	$(-\infty)$	$\cdots$	1	$\cdots$	$(+\infty)$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

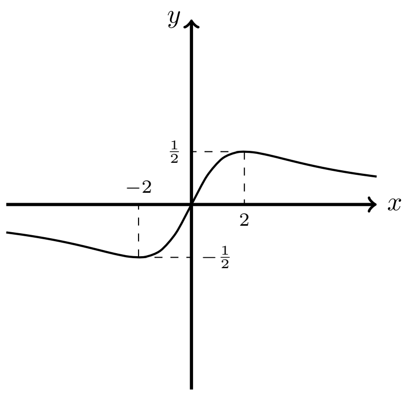


(2) $y' = \dfrac{-2(x-2)(x+2)}{(x^2+4)^2}$ であり, $+\infty$, $-\infty$ における漸近挙動は

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x^2+4} = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x^2+4} = 0$$

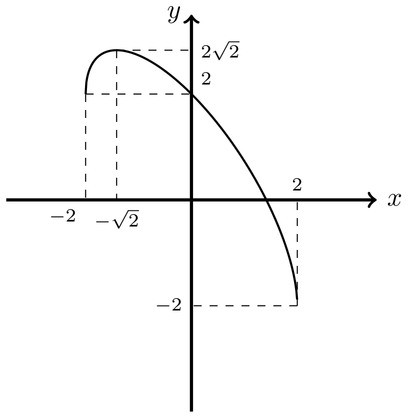
であることから, 増減表は以下のようになる．よって, 最大値は $\dfrac{1}{2}$ $(x=2)$, 最小値は $-\dfrac{1}{2}$ $(x=-2)$ である．

x	$(-\infty)$	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$	$(+\infty)$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	$\searrow$	$-\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\searrow$	0



(3) $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}} - 1$ より, 増減表は以下のようになる．よって, 最大値は $2\sqrt{2}$ $(x=-\sqrt{2})$, 最小値は -2 $(x=2)$ である．

x	-2	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	2
y'		$+$	0	$-$	
y	2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	-2



問題 3.

(1) $|A| = 2\cdot 7 - 4\cdot 3 = 2$, $|B| = 4\cdot 3 - 10\cdot 5 = -38$,

$|C| = 2\cdot(-6) - (-3)\cdot 4 = 0$.

(2) $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = -\dfrac{1}{38}\begin{pmatrix} 3 & -10 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$, C の逆行列は存在しない.

(3) $X = A^{-1}B = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & 58 \\ -2 & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 29 \\ -1 & -12 \end{pmatrix}$,

$Y = BA^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 26 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 13 & -7 \end{pmatrix}$

問題 4. $F = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ である.

(1) 求める点は $F\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{3}+3}{2} \\ \frac{-2+3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.

(2) (i) 求める点は $F\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$,

$F\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+4}{2} \\ \frac{-1+4\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

(ii) 求める直線の方程式を $y = ax + b$ とおくと, (i) より連立方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{2}a + b \\ \dfrac{-1+4\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}+4}{2}a + b \end{cases}$$

を得る．これを解くと $a = \dfrac{-6+5\sqrt{3}}{3}$, $b = \dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$. よって求める直線の方程式は $y = \dfrac{-6+5\sqrt{3}}{3}x + \dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$.