技術者リテラシー I (機械工学科) —— 第 7 回 2024/11/6

学籍番号: ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 名前: ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

置換積分

x を t の関数とみなして, $x = x(t)$ とおくと, 次が成り立つ:

$$\int f(x)\ dx = \int f(x(t))\frac{dx}{dt}\ dt.$$

$\boxed{\text{例}}$ $\displaystyle\int x(1-x)^4\ dx$ を求めよ.

$t = 1 - x$ とおくと, $x = 1 - t$, $\dfrac{dx}{dt} = -1$. よって,

$$\begin{aligned}\int x(1-x)^4\ dx &= \int (1-t)t^4 \cdot (-1)\ dt\\ &= \int (t^5 - t^4)\ dt\\ &= \frac{1}{6}t^6 - \frac{1}{5}t^5 + C\\ &= \frac{1}{30}t^5(5t-6) + C\\ &= \frac{1}{30}(x-1)^5(5x+1) + C.\end{aligned}$$

問題 1. 次の不定積分を求めよ. (積分定数を C とする.)

(1) $\displaystyle\int x\sqrt{2x-1}\ dx$

(2) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos x\ dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}\ dx$

(4) $\displaystyle\int xe^{x^2}\ dx$

特別な置換積分

$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とする.

- $\displaystyle\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$
  ($\because$ $t = ax + b$ で置換積分する.)
- $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ dx = \log|f(x)| + C.$
  ($\because$ $t = f(x)$ で置換積分する.)

問題 2. 次の不定積分を求めよ. (積分定数を C とする.)

(1) $\displaystyle\int (3x+1)^4\ dx$

(2) $\displaystyle\int (4x-3)^{-3}\ dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-2x}}\ dx$

(4) $\displaystyle\int \sin 2x \; dx$

(5) $\displaystyle\int e^{3x-1} \; dx$

問題 3. 次の不定積分を求めよ. (積分定数を C とする.)

(1) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2-3} \; dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x-1} \; dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1} \; dx$

(4) $\displaystyle\int \tan x \; dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{\tan x} \; dx$

問題 4. 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^2 x(2-x)^4 \; dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 x(1-x)^5 \; dx$

(3) $\displaystyle\int_2^5 x\sqrt{x-1} \; dx$

問題 5. 定数 $A > 0$ に対して, $t = x + \sqrt{x^2 + A}$ と置くことで不定積分

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + A}}\, dx$$

を求めよ. ただし積分定数を C とする.

問題 6. 次の問に答えよ.

(1) 閉区間 $[a, b]$ で連続な関数 $f(x)$ に関して,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a + b - x)dx$$

を示せ.

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1 + e^x} dx$ を求めよ.

行基本変形

行列に対する次の操作のことを**行基本変形**という.

(1) i 行目を c 倍 $(c \neq 0)$ する.

(2) i 行目と j 行目を入れ替える.

(3) i 行目の c 倍を j 行目に足す.

掃き出し法

連立一次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_1 = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_1 = b_m \end{cases}$$

に対して, 係数を並べた行列

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

を**拡大係数行列**という. この行列に対して行基本変形を行って

$$\left(\begin{array}{cccc:ccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * & b'_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & * & \cdots & * & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & * & \cdots & * & b'_r \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * & b'_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * & b'_m \end{array}\right)$$

の形にすることを**掃き出し法**という.

問題 7. 掃き出し法を用いて, 次の連立 1 次方程式を解け. (解がない場合や, 解が一つだけではない場合もある)

(1) $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ -2x + 4y = 7 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ -3x + 6y = -12 \end{cases}$

問題 8. 掃き出し法を用いて, 次の連立 1 次方程式を解け.
(解がない場合や, 解が一つだけではない場合もある)

(1) $\begin{cases} 2x + y - z = -2 \\ x + 2y - 2z = -7 \\ -3x + y + 4z = 8 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + 5z = 3 \\ 3x + 4y + 7z = 5 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + 4z = 4 \\ 2x - y - 2z = 3 \end{cases}$

※ 授業後, 略解をホームページに置きます ⟶

読み込めなければ:
`https://r-s-2612.github.io/homepage/edu_jp.html`
PW: `engin-liter2024-fantasy`