第 7 回リメディアル数学 (化学システム工学科) 2023/6/7 略解

問題 1.

(1) $t=\sqrt{2x-1}$ とおくと, $x=\dfrac{t^2+1}{2}$, $\dfrac{dx}{dt}=t$. よって,

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{2x-1}\ dx &= \int \frac{t^2+1}{2}\cdot t\cdot t\ dt\\ &= \frac{1}{2}\int (t^4+t^2)\ dt\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3\right)+C\\ &= \frac{1}{30}t^3(3t^2+5)+C\\ &= \frac{1}{15}(3x+1)(2x-1)\sqrt{2x-1}+C.\end{aligned}$$

(2) $t=\sin x$ とおくと, $\dfrac{dt}{dx}=\cos x$. よって,

$$\int \sin^3 x\cos x\ dx=\int t^3\ dt=\frac{1}{4}t^4+C=\frac{1}{4}\sin^4 x+C.$$

(3) $t=\log x$ とおくと, $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$. よって,

$$\int \frac{\log x}{x}\ dx=\int t\ dt=\frac{1}{2}t^2+C=\frac{1}{2}(\log x)^2+C.$$

(4) $t=x^2$ とおくと, $\dfrac{dt}{dx}=2x$. よって,

$$\int xe^{x^2}\ dx=\frac{1}{2}\int e^t\ dt=\frac{1}{2}e^t+C=\frac{1}{2}e^{x^2}+C.$$

問題 2.

(1) $\displaystyle\int (3x+1)^4\ dx=\frac{1}{15}(3x+1)^5+C.$

(2) $\displaystyle\int (4x-3)^{-3}\ dx=-\frac{1}{8}(4x-3)^{-2}+C.$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-2x}}\ dx=-\sqrt{1-2x}+C.$

(4) $\displaystyle\int \sin 2x\ dx=-\frac{1}{2}\cos 2x+C.$

(5) $\displaystyle\int e^{3x-1}\ dx=\frac{1}{3}e^{3x-1}+C.$

問題 3.

(1) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2-3}\ dx=\int \frac{(x^2-3)'}{x^2-3}\ dx=\log|x^2-3|+C.$

(2) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x-1}\ dx=\int \frac{(x^2+x-1)'}{x^2+x-1}\ dx$
$=\log|x^2+x-1|+C.$

(3) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}\ dx=\int \frac{(e^x+1)'}{e^x+1}\ dx=\log(e^x+1)+C.$

(4) $\displaystyle\int \tan x\ dx=\int \frac{\sin x}{\cos x}\ dx=-\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\ dx$
$=-\log|\cos x|+C.$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{\tan x}\ dx=\int \frac{\cos x}{\sin x}\ dx=\int \frac{(\sin x)'}{\sin x}\ dx$
$=\log|\sin x|+C.$

問題 4.

(1) $t=2-x$ とおくと, $x=2-t$, $\dfrac{dx}{dt}=-1$. また積分範囲は右図の通り. よって,

x	1	$\longrightarrow$	2
t	1	$\longrightarrow$	0

$$\begin{aligned}\int_1^2 x(2-x)^4\ dx &= \int_1^0 (2-t)t^4\cdot(-1)\ dt\\ &= \int_0^1 (2t^4-t^5)\ dt\\ &= \left[\frac{2}{5}t^5-\frac{1}{6}t^6\right]_0^1=\frac{7}{30}.\end{aligned}$$

(2) $t=1-x$ とおくと, $x=1-t$, $\dfrac{dx}{dt}=-1$. また, 積分範囲は右図の通り. よって,

x	0	$\longrightarrow$	1
t	1	$\longrightarrow$	0

$$\begin{aligned}\int_0^1 x(1-x)^5\ dx &= \int_1^0 (1-t)t^5\cdot(-1)\ dt\\ &= \int_0^1 (t^5-t^6)\ dt\\ &= \left[\frac{1}{6}t^6-\frac{1}{7}t^7\right]_0^1=\frac{1}{42}\end{aligned}$$

(3) $t=x-1$ とおくと, $x=t+1$, $\dfrac{dx}{dt}=1$. また積分範囲は右図の通り. よって,

x	2	$\longrightarrow$	5
t	1	$\longrightarrow$	4

$$\begin{aligned}\int_2^5 x\sqrt{x-1}\ dx &= \int_1^4 (t+1)\sqrt{t}\ dt\\ &= \int_1^4 (t^{\frac{3}{2}}+t^{\frac{1}{2}})\ dt\\ &= \left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^4=\frac{256}{15}\end{aligned}$$

問題 5.

(1) $x=\sin\theta$ とおくと, $\dfrac{dx}{d\theta}=\cos\theta\ d\theta$. また積分範囲は右図の通り. よって,

x	-1	$\longrightarrow$	1
t	$-\frac{\pi}{2}$	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\ dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot\cos\theta\ d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\ d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{2}\right)\ d\theta \\
&= \left[\frac{1}{4}\sin 2\theta+\frac{1}{2}\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\ dx=\left[\arcsin\frac{x}{2}\right]_1^{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}.$

(3) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^2+1}\ dx=\left[\arctan x\right]_0^1=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}.$

問題 6. $t=x+\sqrt{x^2+A}$ とおくと,

$$\begin{aligned}
\frac{dt}{dx}&=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+A}}=\frac{t}{\sqrt{x^2+A}}. \\
\therefore \frac{1}{t}\frac{dt}{dx}&=\frac{1}{\sqrt{x^2+A}}.
\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
\int\frac{1}{\sqrt{x^2+A}}\ dx &= \int\frac{1}{t}\ dt=\log|t|+C \\
&= \log\left(x+\sqrt{x^2+A}\right)+C.
\end{aligned}$$

問題 7. 以下では, 行列の n 行目を ⓝ と表すこととする.

(1) 考える拡大係数行列は $\left(\begin{array}{cc|c}1&-2&4\\2&1&3\end{array}\right)$ である. これに対して, 行基本変形を行うと

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&-2&4\\2&1&3\end{array}\right)\xrightarrow{②+①\times(-2)}\left(\begin{array}{cc|c}1&-2&4\\0&5&-5\end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{②\times\frac{1}{5}}\left(\begin{array}{cc|c}1&-2&4\\0&1&-1\end{array}\right)\xrightarrow{①+②\times2}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&2\\0&1&-1\end{array}\right).$$

よって, 求める解は $(x,y)=(2,-1)$.

(2) 考える拡大係数行列は $\left(\begin{array}{cc|c}1&-2&4\\-2&4&7\end{array}\right)$ である. これに対して, 行基本変形を行うと

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&-2&4\\-2&4&7\end{array}\right)\xrightarrow{②+①\times2}\left(\begin{array}{cc|c}1&-2&4\\0&0&15\end{array}\right).$$

よって, 求める解は存在しない.

(3) 考える拡大係数行列は $\left(\begin{array}{cc|c}1&-2&4\\-3&6&-12\end{array}\right)$ である. これに対して, 行基本変形を行うと

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&-2&4\\-3&6&-12\end{array}\right)\xrightarrow{②+①\times3}\left(\begin{array}{cc|c}1&-2&4\\0&0&0\end{array}\right).$$

よって, 求める解は $(x,y)=(2t+4,t)$ (t は任意の実数).

問題 8.

(1) 考える拡大係数行列は $\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&-1&-2\\1&2&-2&-7\\-3&1&4&8\end{array}\right)$ である. これに対して, 行基本変形を行うと

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&-1&-2\\1&2&-2&-7\\-3&1&4&8\end{array}\right)\xrightarrow{\substack{①+②\times(-2)\\③+②\times3}}\left(\begin{array}{ccc|c}0&-3&3&12\\1&2&-2&-7\\0&7&-2&-13\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{①\leftrightarrow②}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-2&-7\\0&-3&3&12\\0&7&-2&-13\end{array}\right)\xrightarrow{②\times(-\frac{1}{3})}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-2&-7\\0&1&-1&-4\\0&7&-2&-13\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{①+②\times(-2)\\③+②\times(-7)}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&-1&-4\\0&0&5&15\end{array}\right)\xrightarrow{③\times\frac{1}{5}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&-1&-4\\0&0&1&3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{②+③\times1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&3\end{array}\right).$$

よって, 求める解は $(x,y,z)=(1,-1,3)$.

(2) 考える拡大係数行列は $\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&1\\2&3&5&3\\3&4&7&5\end{array}\right)$ である. これに対して, 行基本変形を行うと

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&1\\2&3&5&3\\3&4&7&5\end{array}\right)\xrightarrow{\substack{②+①\times(-2)\\③+①\times(-3)}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&1\\0&1&1&1\\0&1&1&2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{①+②\times(-1)\\③+②\times(-1)}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&1&1\\0&0&0&1\end{array}\right)$$

よって, 求める解は存在しない.

(3) 考える拡大係数行列は $\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&3\\1&2&4&4\\2&-1&-2&3\end{array}\right)$ である. これに対して, 行基本変形を行うと

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&3\\1&2&4&4\\2&-1&-2&3\end{array}\right)\xrightarrow{\substack{②+①\times(-1)\\③+①\times(-2)}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&3\\0&1&2&1\\0&-3&-6&-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{①+②\times(-1)\\③+②\times3}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\0&1&2&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

よって, 求める解は $(x,y,z)=(2,-2t+1,t)$ (t は任意の実数).