リメディアル数学 (化学システム工学科) —— 第 6 回 2024/5/29 略解

問題 1.

(1) $\frac{1}{6}x^6 + C.$

(2) $-\frac{1}{2x^2} + C.$

(3) $\int x^{\frac{3}{2}}\ dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C.$

(4) $\int \left(\frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)\ dx = \log|x| + \frac{4}{x} - \frac{1}{2x^2} + C.$

(5) $\int \left(1 - \frac{5}{x^2} + \frac{6}{x^4}\right)\ dx = x + \frac{5}{x} - \frac{2}{x^3} + C.$

(6) $\frac{1}{4}x^4 - 2e^x + C.$

(7) $t^3 - \log|t| + C.$

問題 2.

(1) $\sin x + 2\cos x + C.$

(2) $4\tan x - \frac{5}{\tan x} + C.$

(3) $\int \left(2\cos x - \frac{1}{\cos^2 x}\right)\ dx$
$= 2\sin x - \tan x + C.$

(4) $\int (2\cos\theta - \sin\theta)\ d\theta = 2\sin\theta + \cos\theta + C.$

(5) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\ dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\ dx$
$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\ dx = \tan x - x + C.$

(6) $\frac{1}{2}\int \sin x\ dx = -\frac{1}{2}\cos x + C.$

(7) $\int \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2\ dx = \int (1 + \sin x)\ dx$
$= x - \cos x + C$

問題 3.

(1) $\left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_{-8}^{27} = \frac{3}{4}\left(27^{\frac{4}{3}} - (-8)^{\frac{4}{3}}\right) = \frac{195}{4}.$

(2) $\left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_2^4 = 2\left(4^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{2}}\right) = 4 - 2\sqrt{2}.$

(3) $\int_1^e \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y} - 1\right)\ dy = \left[-\frac{1}{y} - \log|y| - y\right]_1^e$
$= \left(-\frac{1}{e} - \log|e| - e\right) - (-1-1) = -\frac{1}{e} - e + 1.$

(4) $\int_1^6 \left(\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)\ dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}}\right]_1^6$
$= \left(4\sqrt{6} + 4\sqrt{6}\right) - \left(\frac{2}{3} + 4\right) = 8\sqrt{6} - \frac{14}{3}.$

(5) $-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x}\ dx = -\Big[\tan x\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -\left(\sqrt{3} + 1\right).$

(6) $\Big[\arcsin x\Big]_{-\frac{1}{2}}^{1} = \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{2}{3}\pi.$

(7) $\Big[\arctan x\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$

問題 4.

(1) 対応する行列は $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}$ である. $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & -7 \end{vmatrix} = 4\cdot(-7) - 1\cdot 8 = -36 \neq 0$ なので,

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{36}\begin{pmatrix} -7 & -1 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}.$$

よって, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{1}{36}\begin{pmatrix} -7 & -1 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{36} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$

(2) 対応する行列は $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ である. $\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5\cdot 2 - (-3)\cdot 1 = 13 \neq 0$ なので,

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

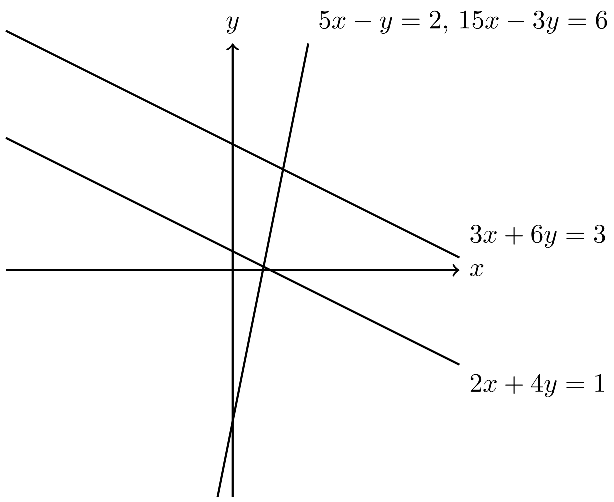
よって, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{13} \\ \frac{19}{13} \end{pmatrix}.$

問題 5.

(1) (i) 解なし.

(ii) 式を整理すると $y = 5x - 2$. したがって, 解は $(x, y) = (a, 5a - 2)\quad (a : 定数)$.

(2) 次のページの図.



(i) の 2 式は平行な 2 直線を表しており, 交点がないために解がない. 一方, (ii) の 2 式は同じ直線を表しているため, 直線上の任意の点が解となる.