リメディアル数学 (化学システム工学科) —— 第10回 2024/6/26 略解

問題 1.

(1) $y \neq 0$ のとき, $\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{x}$ より

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}.$$
$$\therefore \log|y| = -\log|x| + C_0 \quad (C_0 \text{ は積分定数}).$$

よって, $y = \dfrac{C}{x}$ $(C = \pm e^{C_0})$. 定数関数 $y = 0$ も解になるので, 一般解は $y = \dfrac{C}{x}$ (C は任意).

(2) $y \neq 0$ のとき, $\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} = -x^6$ より

$$\int \frac{dy}{y} = -\int x^6 dx.$$
$$\therefore \log|y| = -\frac{1}{7}x^7 + C_0 \quad (C_0 \text{ は積分定数}).$$

よって, $y = Ce^{-\frac{1}{7}x^7}$ $(C = \pm e^{C_0})$. 定数関数 $y = 0$ も解になるので, 一般解は $y = Ce^{-\frac{1}{7}x^7}$ (C は任意).

(3) $y \neq 0$ のとき, $\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ より

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx.$$
$$\therefore \log|y| = \log|\sin x| + C_0 \quad (C_0 \text{ は積分定数}).$$

よって, $y = C\sin x$ $(C = \pm e^{C_0})$. 定数関数 $y = 0$ も解になるので, 一般解は $y = C\sin x$ (C は任意).

(4) $y \neq \pm 1$ のとき, $\dfrac{1}{y^2-1}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}$ より

$$\int \frac{dy}{y^2-1} = \int \frac{dx}{x}.$$
$$\therefore \frac{1}{2}\log\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \log|x| + C_0 \quad (C_0 \text{ は積分定数}).$$

よって, $\dfrac{y-1}{y+1} = Cx^2$ $(C = \pm e^{2C_0})$, つまり $y = \dfrac{1+Cx^2}{1-Cx^2}$. 定数関数 $y = 1$, $y = -1$ も解になるので, 一般解は $y = \dfrac{1+Cx^2}{1-Cx^2}$ (C は任意), $y = -1$.

問題 2.

(1) $y \neq 0$ のとき, $\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{2x+1}$ より

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{2x+1}.$$
$$\therefore \log|y| = -\frac{1}{2}\log|2x+1| + C_0 \quad (C_0 \text{ は積分定数}).$$

よって, $y = \dfrac{C}{\sqrt{2x+1}}$ $(C = \pm e^{C_0})$. 定数関数 $y = 0$ も解になるので, 一般解は $y = \dfrac{C}{\sqrt{2x+1}}$ (C は任意). ここで, $y(1) = 1$ より $C = \sqrt{3}$. よって, $y = \sqrt{\dfrac{3}{2x+1}}$.

(2) $y \neq 0$ のとき, $\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x^2+1}$ より

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x^2+1}.$$
$$\therefore \log|y| = \arctan x + C_0 \quad (C_0 \text{ は積分定数}).$$

よって, $y = Ce^{\arctan x}$ $(C = \pm e^{C_0})$. 定数関数 $y = 0$ も解になるので, 一般解は $y = Ce^{\arctan x}$ (C は任意). ここで, $y(-1) = 1$ より $C = e^{\frac{\pi}{4}}$. よって, $y = e^{\arctan x + \frac{\pi}{4}}$.

(3) $y \neq 0$ のとき, $\dfrac{1}{y^2}\dfrac{dy}{dx} = 2e^x$ より

$$\int \frac{dy}{y^2} = 2\int e^x dx.$$
$$\therefore -\frac{1}{y} = 2e^x + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

よって, $y = \dfrac{-1}{2e^x + C}$. 定数関数 $y = 0$ も解になるので, 一般解は $y = \dfrac{-1}{2e^x + C}$ (C は任意), $y = 0$. ここで, $y(0) = \dfrac{1}{2}$ より $C = -4$. よって, $y = \dfrac{1}{4 - 2e^x}$, $y = 0$.

問題 3.

(1) $y' = 2y$ を解くと $y = Ce^{2x}$ (C は任意). C を x の関数 $C(x)$ とみなして与えられた方程式に代入すると,

$$\begin{aligned}(C(x)e^{2x})' - 2(C(x)e^{2x}) &= 2e^{2x}\\ C'(x)e^{2x} + 2C(x)e^{2x} - 2C(x)e^{2x} &= 2e^{2x}\\ C'(x) &= 2.\end{aligned}$$

よって, $C(x) = 2x + C_1$ (C_1 は積分定数). 以上より一般解は $y = (2x + C_1)e^{2x}$. ここで, $y(0) = 0$ より $C_1 = 0$. よって, $y = 2xe^{2x}$.

(2) $y' + y = 0$ を解くと $y = Ce^{-x}$ (C は任意). C を x の関数 $C(x)$ とみなして与えられた方程式に代入すると,

$$\begin{aligned}(C(x)e^{-x})' + C(x)e^{-x} &= 3e^{-x}\\ C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x} + C(x)e^{-x} &= 3e^{-x}\\ C'(x) &= 3.\end{aligned}$$

よって, $C(x) = 3x + C_1$ (C_1 は積分定数). 以上より一般解は $y = (3x + C_1)e^{-x}$. ここで, $y(0) = 3$ より $C_1 = 3$. よって, $y = (3x+3)e^{-x} = 3(x+1)e^{-x}$.

問題 3.

(1) 行列式の定義 (サラスの公式) より

$$\begin{aligned} &3 \cdot 2 \cdot 5 + 1 \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot 6 \cdot 9 \\ &\qquad - 2 \cdot 2 \cdot 4 - 3 \cdot 4 \cdot 9 - 1 \cdot 6 \cdot 5 \\ &= 30 + 16 + 108 - 16 - 108 - 30 \\ &= 0 \end{aligned}$$

(2) 行列式の定義 (サラスの公式) より

$$\begin{aligned} &1 \cdot 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 4 \\ &\qquad - 3 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 4 - (-2) \cdot 3 \cdot (-1) \\ &= -1 + (-8) + 36 - 6 - 8 - 6 \\ &= 7 \end{aligned}$$

(3) ブロック行列の行列式の公式より

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-26) \cdot (-1) = 26$$

(4) $(1,1)$ 成分を要として, 第 1 列を掃き出すと

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & -6 & -10 \\ 0 & -5 & -10 & -15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -5 \\ -2 & -6 & -10 \\ -5 & -10 & -15 \end{vmatrix}.$$

さらに, 右辺の $(1,1)$ 成分を要として, 第 1 列を掃き出すと

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -1 & -2 & -5 \\ -2 & -6 & -10 \\ -5 & -10 & -15 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -1 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} \\ &= (-1) \cdot (-2) \cdot 10 \\ &= 20. \end{aligned}$$

問題 4.

(1) $|AB| = |A| \cdot |B| = 2 \cdot 3 = 6$.

(2) $|B^{-1}| = |B|^{-1} = 3^{-1} = \dfrac{1}{3}$.

(3) $|A^{10}| = |A|^{10} = 2^{10} = 1024$.