技術者リテラシー I (機械工学科) —— 第 2 回 小テスト

学籍番号:　　　　　　　　　　　　名前:

解答だけでなく, 途中式も書くこと.

問題. r を実数とする. 次の問に答えよ.

(1) 次の①〜③に当てはまるものを, 下の選択肢の中から選べ. (答えのみで良い)

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \boxed{①} & (r > 1) \\ 1 & (r = 1) \\ \boxed{②} & (-1 < r < 1) \\ \boxed{③} & (r \leqq -1) \end{cases}$$

選択肢

(a) 0　　(b) 1　　(c) r　　(d) $+\infty$　　(e) $-\infty$　　(f) 振動する

(2) $1 + \dfrac{1}{3} + \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^4$ を計算せよ.

(3) 次の④〜⑧に当てはまるものを答えよ. (答えのみで良い)

初項 1, 公比 r の等比数列の和「$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k = 1+r+r^2+\cdots+r^n$」の公式を次の手順で得よう. $S_n = 1+r+r^2+\cdots+r^n$ とおく. このとき, S_n の r 倍は $rS_n = \boxed{④ (数式)}$ と表せる. したがって, S_n との差を考えると

$$\begin{array}{rrcl} & S_n & = & 1 + r + r^2 + \cdots + r^n \\ -) & rS_n & = & \boxed{④} \\ \hline & (1-r)S_n & = & \boxed{⑤ (数式)} \end{array}$$

よって, $\boxed{⑥ (条件)}$ のとき, $S_n = \boxed{⑦ (数式)}$ である. $\boxed{⑥}$ が成り立たないとき, $S_n = 1 + 1 + 1^2 \cdots + 1^n = n + 1$ である.

実際, $\boxed{⑦}$ に $r = \dfrac{1}{3}$, $n = 4$ を代入した値は $\boxed{⑧ (数値)}$ である.

(4) (1), (2) を用いて無限等比級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} r^k = \lim_{n\to\infty} S_n$$

を求めよ. (**場合分けに注意せよ.**)

解答. (15 点満点)

(1) ① (d),　② (a),　③ (f).

(2) $\dfrac{81 + 27 + 9 + 3 + 1}{81} = \dfrac{121}{81}$.

(3) ④ $r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n+1}$,　⑤ $1 - r^{n+1}$,　⑥ $r \neq 1$,　⑦ $\dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$,　⑧ $\dfrac{121}{81}$.

(4) まず, (3) により

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = S_n = \begin{cases} \dfrac{1-r^{n+1}}{1-r} & (r \neq 1) \\ n+1 & (r=1) \end{cases}$$

である. $r=1$ のとき, 求める極限は $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(n+1) = +\infty$. $r \neq 1$ のとき, 求める極限は (1) より

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r}\lim_{n\to\infty}(1-r^{n+1}) = \begin{cases} +\infty & (r>1), \\ \dfrac{1}{1-r} & (-1<r<1), \\ \text{振動} & (r<-1). \end{cases}$$

以上をまとめると, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} r^k = \begin{cases} +\infty & (r \geqq 1), \\ \dfrac{1}{1-r} & (-1<r<1), \\ \text{振動 (発散)} & (r \leqq -1). \end{cases}$

解説・総評　意外と (1) を完答している人が少なく, 悲しい気持ちになりました. r に具体的な数字 (例えば③なら $r=-2$ など) を考えて想像すると自ずと答えは出てくるはずです. (3)⑥に関して, $(1-r)S_n = \boxed{⑤\ 1-r^{n+1}}$ の両辺を $1-r$ を割ることで S_n (⑦の答え) を得たいわけですが, $1-r=0$, つまり $r=1$ だと「0 割り」となってしまうので困りますね (困ってください). したがって, 「0 割り」を避けるための条件として $r \neq 1$ が必要なわけです. また, 実は文章をきちんと読み理解すれば (3)⑧は (2) の計算さえ合っていれば答えられます. それに気づいた人がごく少数いました (数人しかいなかったことがまた悲しいです) が, もちろん正解です. (4) は全滅でしたが, 高校の教科書にも載っている超重要公式です. しっかり復習しておきましょう.