第 10 回 リメディアル数学（化学システム工学科）2023/6/28 略解

問題 1

(1) $y \neq 0$ のとき,

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0 \Longrightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x} \Longrightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$$

$\Longrightarrow \log|y| = -\log|x| + C_0$ (C_0 は積分定数)

$\Longrightarrow y = \dfrac{C}{x}$ $(C = \pm e^{C_0})$.

定数関数 $y = 0$ も解になるので, 一般解は,

$y = \dfrac{C}{x}$ (C は任意).

(2) $y \neq 0$ のとき,

$$x^6 y + \frac{dy}{dx} = 0 \Longrightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -x^6 \Longrightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int x^6 dx$$

$\Longrightarrow \log|y| = -\dfrac{1}{7}x^7 + C_0$ (C_0 は積分定数)

$\Longrightarrow y = Ce^{-\frac{1}{7}x^7}$ $(C = \pm e^{C_0})$.

定数関数 $y = 0$ も解になるので, 一般解は,

$y = Ce^{-\frac{1}{7}x^7}$ (C は任意).

(3) $y \neq 0$ のとき,

$$\frac{dy}{dx}\sin x = y\cos x \Longrightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$\Longrightarrow \displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx$

$\Longrightarrow \log|y| = \log|\sin x| + C_0$ (C_0 は積分定数)

$\Longrightarrow y = C\sin x$ $(C = \pm e^{C_0})$.

定数関数 $y = 0$ も解になるので, 一般解は,

$y = C\sin x$ (C は任意).

(4) $y \neq \pm 1$ のとき,

$$x\frac{dy}{dx} + 1 = y^2 \Longrightarrow \frac{1}{y^2-1}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \Longrightarrow \int \frac{dy}{y^2-1} = \int \frac{dx}{x}$$

$\Longrightarrow \dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{y-1}{y+1}\right| = \log|x| + C_0$ (C_0 は積分定数)

$\Longrightarrow \dfrac{y-1}{y+1} = Cx^2$ $(C = \pm e^{2C_0})$

$\Longrightarrow y = \dfrac{1+Cx^2}{1-Cx^2}$.

定数関数 $y = 1$, $y = -1$ も解になるので, 一般解は,

$y = \dfrac{1+Cx^2}{1-Cx^2}$ (C は任意), $y = -1$.

問題 2

(1) $y \neq 0$ のとき,

$$(2x+1)\frac{dy}{dx} + y = 0 \Longrightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2x+1}$$

$\Longrightarrow \displaystyle\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{2x+1}$

$\Longrightarrow \log|y| = -\dfrac{1}{2}\log|2x+1| + C_0$ (C_0 は積分定数)

$\Longrightarrow y = \dfrac{C}{\sqrt{2x+1}}$ $(C = \pm e^{C_0})$.

定数関数 $y = 0$ も解になるので, 一般解は,

$y = \dfrac{C}{\sqrt{2x+1}}$ (C は任意).

ここで, $y(1) = 1$ より, $C = \sqrt{3}$. よって, $y = \sqrt{\dfrac{3}{2x+1}}$.

(2) $y \neq 0$ のとき,

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x^2+1} = 0 \Longrightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2+1}$$

$\Longrightarrow \displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x^2+1}$

$\Longrightarrow \log|y| = \arctan x + C_0$ (C_0 は積分定数)

$\Longrightarrow y = Ce^{\arctan x}$ $(C = \pm e^{C_0})$.

定数関数 $y = 0$ も解になるので, 一般解は,

$y = Ce^{\arctan x}$ (C は任意).

ここで, $y(-1) = 1$ より, $C = e^{\frac{\pi}{4}}$. よって, $y = e^{\arctan x + \frac{\pi}{4}}$.

(3) $y \neq 0$ のとき,

$$\frac{dy}{dx} = 2e^x y^2 \Longrightarrow \frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = 2e^x$$

$\Longrightarrow \displaystyle\int \frac{dy}{y^2} = 2\int e^x dx$

$\Longrightarrow -\dfrac{1}{y} = 2e^x + C$ (C は積分定数)

$\Longrightarrow y = \dfrac{-1}{2e^x + C}$.

定数関数 $y = 0$ も解になるので, 一般解は,

$y = \dfrac{-1}{2e^x + C}$ (C は任意), $y = 0$.

ここで, $y(0) = \dfrac{1}{2}$ より, $C = -4$. よって, $y = \dfrac{1}{4 - 2e^x}$.

問題 3

(1) $P(x) = -2$, $Q(x) = 2e^{2x}$ として, 公式に代入して計算すると,

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int_0^x (-2)dt}\left(\int_0^x 2e^{2t}e^{\int_0^t (-2)du}dt + 0\right) \\ &= e^{2x}\left(2\int_0^x dt\right) \\ &= 2xe^{2x}. \end{aligned}$$

(2) $P(x) = 1$, $Q(x) = 3e^{-x}$ として, 公式に代入して計算すると,

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int_0^x dt}\left(\int_0^x 3e^{-t}e^{\int_0^t du}dt + 3\right) \\ &= e^{-x}\left(3\int_0^x dt + 3\right) \\ &= 3(x+1)e^{-x}. \end{aligned}$$

問題 4

(1) $\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 6 \cdot 5 - 8 \cdot 4 = 30 - 32 = -2.$

(2) $\begin{vmatrix} 12 & 13 \\ 11 & 12 \end{vmatrix} = 12 \cdot 12 - 13 \cdot 11 = 144 - 143 = 1.$

(3)
$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \\ 4 & 9 & 5 \end{vmatrix} &= 3 \cdot 2 \cdot 5 + 1 \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot 6 \cdot 9 \\ &\quad -2 \cdot 2 \cdot 4 - 3 \cdot 4 \cdot 9 - 1 \cdot 6 \cdot 5 \\ &= 30 + 16 + 108 - 16 - 108 - 30 \\ &= 0 \end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} &= 1 \cdot 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 4 \\ &\quad -3 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 4 - (-2) \cdot 3 \cdot (-1) \end{aligned}$$

$$= -1 + (-8) + 36 - 6 - 8 - 6$$
$$= 7$$

(5) $$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= (-26) \cdot (-1)$$
$$= 26$$

(6) $(1,1)$ 成分を要として, 第 1 列を掃き出すと,
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & -6 & -10 \\ 0 & -5 & -10 & -15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -5 \\ -2 & -6 & -10 \\ -5 & -10 & -15 \end{vmatrix}.$$
さらに, 右辺の $(1,1)$ 成分を要として, 第 1 列を掃き出すと,
$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & -5 \\ -2 & -6 & -10 \\ -5 & -10 & -15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-2) \cdot 10 = 20.$$

(7) $(1,1)$ 成分を要として, 第 1 行を掃き出すと,
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y-x & z-x \\ x^2 & y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} y-x & z-x \\ y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix}$$
$$= (y-x)(z-x)(z+x) - (z-x)(y-x)(y+x)$$
$$= (y-x)(z-x)(z-y).$$

問題 5

(1) $|AB| = |A| \cdot |B| = 2 \cdot 3 = 6.$

(2) $|B^{-1}| = |B|^{-1} = 3^{-1} = \dfrac{1}{3}.$

(3) $|A^{10}| = |A|^{10} = 2^{10} = 1024.$