第11回リメディアル数学 (化学システム工学科) 2023/7/5 略解

問題1.

(1) 変数分離により $\int \frac{1}{[A]} d[A] = -\lambda \int dt$. 計算すると $\log\big|[A]\big| = -\lambda t + C_0$. よって $C := e^{\pm C_0}$ とすると $[A] = Ce^{-\lambda t}$.

(2) $t = 0$ のとき $[A] = [A]_0$ なので $[A]_0 = Ce^{-\lambda\cdot 0} = C$. つまり $[A] = [A]_0 e^{-\lambda t}$ である. $t = T$ のとき $[A] = \frac{[A]_0}{2}$ なので $\frac{[A]_0}{2} = [A]_0 e^{-\lambda T}$. これを整理すると $T = \frac{\log 2}{\lambda}$.

(3) $[B] = [A]_0 - [A] = [A]_0 - [A]_0 e^{-\lambda t} = [A]_0(1 - e^{-\lambda t})$.

問題2.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \left[\frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}}\right]_\varepsilon^1$
$\displaystyle= \lim_{\varepsilon\to+0} \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{3}{2}$.

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^2} dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{(1-x)^2} dx$
$\displaystyle= \lim_{\varepsilon\to+0} \left[\frac{1}{1-x}\right]_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to+0} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) = +\infty$.
よってこの広義積分は発散する.

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$
$\displaystyle= \lim_{\varepsilon\to+0} [\arcsin x]_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to+0} \arcsin(1-\varepsilon) = \frac{\pi}{2}$.

(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \left[-\frac{1}{x}\right]_\varepsilon^1$
$\displaystyle= \lim_{\varepsilon\to+0} \left(-1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) = +\infty$.
よってこの広義積分は発散する.

問題3.

(1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{M\to+\infty} \int_1^M \frac{1}{x^2} dx = \lim_{M\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^M$
$\displaystyle= \lim_{M\to+\infty} \left(-\frac{1}{M} + 1\right) = 1$.

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{M\to+\infty} \int_0^M e^{-x} dx = \lim_{M\to+\infty} [-e^{-x}]_0^M$
$\displaystyle= \lim_{M\to+\infty} (-e^{-M} + 1) = 1$.

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xe^x dx = \lim_{M\to+\infty} \int_{-M}^0 xe^x dx$
$\displaystyle= \lim_{M\to+\infty} [(x-1)e^x]_{-M}^0$
$\displaystyle= \lim_{M\to+\infty} \left\{-1 + (M+1)e^{-M}\right\} = -1$.

(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx = \lim_{M\to+\infty} \int_0^M xe^{-x^2} dx$
$\displaystyle\lim_{M\to+\infty} \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^M = \lim_{M\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}e^{-M^2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

(5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{M\to+\infty} \int_0^M \frac{1}{1+x^2} dx$
$\displaystyle= \lim_{M\to+\infty} [\arctan x]_0^M = \lim_{M\to+\infty} \arctan M = \frac{\pi}{2}$.

(6) $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\log x} dx = \lim_{M\to+\infty} \int_e^M \frac{1}{x\log x} dx$
$\displaystyle= \lim_{M\to+\infty} [\log(\log x)]_e^M = \lim_{M\to+\infty} \log(\log M) = +\infty$.
よってこの広義積分は発散する.

問題4. 以下ではnは行列の n 行目を表すものとする.

(1) A の固有多項式 Φ_A は

$$\begin{aligned}\det(tI_3 - A) &= \det\begin{pmatrix} t-3 & -2 & 2 \\ 2 & t+1 & -2 \\ -2 & -2 & t+1 \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ t-1 & t-1 & * \\ -\frac{1}{2}(t-1)^2 & t-1 & * \end{pmatrix} \\ &= 2\det\begin{pmatrix} t-1 & t-1 \\ -\frac{1}{2}(t-1)^2 & t-1 \end{pmatrix} \\ &= 2\left((t-1)^2 + \frac{1}{2}(t-1)^3\right) \\ &= (t-1)^2(t-1).\end{aligned}$$

よって A の固有値は $1, -1$.

$t = 1$ のとき,

$$I_3 - A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[3-1]{2+1} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2\times\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より, 固有値 1 に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

$t=-1$ のとき,

$$\begin{aligned}
-I_3-A &= \begin{pmatrix}-4 & -2 & 2\\ 2 & 0 & -2\\ -2 & -2 & 0\end{pmatrix}\\
&\xrightarrow[\text{①}\leftrightarrow\text{③}]{(\text{すべての行})\times\frac{1}{2},} \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ -2 & -1 & 1\end{pmatrix}\\
&\xrightarrow[\text{③}+\text{①}\times 2]{\text{②}-\text{①}} \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\\
&\xrightarrow[\text{③}+\text{②}]{\text{②}\leftrightarrow\text{③}} \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

より, 固有値 -1 に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

(2) $P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ とおけば, $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

(3) 帰納法より, $(P^{-1}AP)^n=(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)^{n-1}=(P^{-1}AP)(P^{-1}A^{n-1}P)=P^{-1}A^nP$.

$P^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ より

$$\begin{aligned}
A^n &= P\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}P^{-1}\\
&= \begin{pmatrix}2+(-1)^{n+1} & 1+(-1)^{n+1} & -1+(-1)^n\\ -1+(-1)^n & (-1)^n & 1+(-1)^{n+1}\\ 1+(-1)^{n+1} & 1+(-1)^{n+1} & (-1)^n\end{pmatrix}\\
&= \begin{cases} A & (n\text{ が奇数}),\\ I_3 & (n\text{ が偶数}).\end{cases}
\end{aligned}$$