

# 技術者リテラシー I (機械工学科) —— 第5回 小テスト

学籍番号:

名前:

問題.  $a > 0$  を定数とする. 次の問に答えよ.

(1)  $\int_0^3 2x \, dx$  を求めよ. また,  $y = 2x$  のグラフを  $0 \leq x \leq 3$  の範囲で描け.

(2) 関数  $y = \sqrt{a^2 - x^2}$  のグラフを定義域  $0 \leq x \leq a$  の範囲で描け. (Hint: 両辺 2 乗して整理してみましょう.)

(3) 次の①から⑤に当てはまる数式・値を答えよ. また, ⑥に当てはまる文章を選択肢から選べ.

定積分  $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$  を求めたい.  $x = a \sin t$  とおくと,  $\frac{dx}{dt} = \text{① (数式)}$  である. また,  $x = 0$  のとき  $t = \text{② (値)}$ ,  $x = a$  のとき  $t = \text{③ (値)}$  である. したがって, 置換積分を行うと求める積分は  $\int_{\text{②}}^{\text{③}} \text{④ (数式)} \, dt$  とできる.  $\cos^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$  に注意して計算すると求める値は  $\text{⑤ (値)}$  である. (1) のグラフと比較すると, この値は  $\text{⑥ (選択肢)}$  であると考えられる.

## 選択肢

(i) 1 辺が  $a$  の正方形の面積

(iii) 中心が原点, 半径が  $a$  の半円の面積

(ii) 1 辺が  $\frac{a}{2}$  の正方形の面積

(iv) 中心が原点, 半径が  $a$  の円の  $\frac{1}{4}$  の面積

(4) (3) の考察を踏まえて, (1) の積分の答えは何を表しているか説明せよ.

解答. (10 点満点, (1) 各 1 点, (2) 1 点, (3) 各 1 点, (4) 1 点)

(1)  $\left[ x^2 \right]_0^3 = 9$ . また, グラフは左下図.

(2) 両辺 2 乗して整理すると  $x^2 + y^2 = a^2$ . したがって,  $\sqrt{a^2 - x^2} \geq 0$  に注意すると求めるグラフは中心が原点, 半径が  $a$  の円の上部.

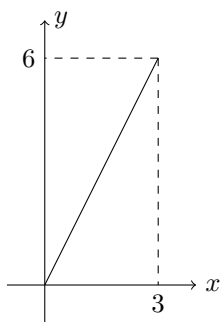


図 1: (1) のグラフ

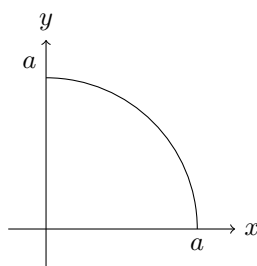


図 2: (2) のグラフ

(3) ①  $a \cos t$ , ② 0, ③  $\frac{\pi}{2}$ , ④  $a^2 \cos^2 t$ , ⑤  $\frac{a^2}{4} \pi$ , ⑥ (iv)

(4)  $y = 2x$  のグラフと  $x$ -軸, 直線  $y = 3$  で囲まれている部分の面積.

## 解説・総評

今回の小テストはかなりコンセプチュアルに作りました. ある程度解けていた方は気付いた (知ってた?) と思いますが, 積分は「グラフと  $x$ -軸の上の部分に囲まれた部分の面積」を求める計算になります. 授業では積分は「微分の逆演算」として説明しましたが, 実際の定義は「面積」として定義します (cf. 区分求積法).

(2) で  $x$ -軸より下の部分を描いていた方がいましたが,  $\sqrt{a^2 - x^2} \geq 0$  なので解答のような  $x$ -軸より上部分のみが答えです. また, (4) で「底辺が 3, 高さが 6 の三角形の面積」と答えた方がいました. 間違っていないのでバツにはしていませんが, 「グラフと  $x$ -軸の上の部分に囲まれた部分の面積」ということを理解しておきましょう.