第3回リメディアル数学 (化学システム工学科) 2023/5/10 略解

問題 1.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{10}{n}}=1.$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^3\left(-4+\frac{7}{n}\right)=-\infty.$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}}{2+\frac{3}{n^2}}=2.$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{(1-n)(1+n+n^2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-n}=0.$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0.$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n^2+2n}}{-2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{-2}=-1.$

(7) 部分分数分解より

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1}$$

とわかるので, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$

(8) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(5n-3)a_n\cdot\frac{1}{5n-3}=3\cdot0=0.$
また, 線形性より

$$3=\lim_{n\to\infty}(5n-3)a_n$$
$$=5\left(\lim_{n\to\infty}na_n\right)-3\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)$$
$$=5\lim_{n\to\infty}na_n.$$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}na_n=\frac{3}{5}.$

問題 2.

(1) $-1.$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{5x-3}=0.$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{5}{x^2}}{5+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}}=\frac{2}{5}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+2)}{x-3}=\lim_{x\to3}(x+2)=5.$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(2x-3)}{(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to1}\frac{2x-3}{x-3}=\frac{1}{2}.$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{-1}{3(x+3)}=-\frac{1}{9}.$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$
$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1.$

(8) $0.$

(9) $+\infty.$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to0}3\cdot\frac{\sin3x}{3x}=3.$

(11) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}.$

(12) $0\leqq\left|x^2\sin\frac{1}{x}\right|\leqq|x^2|$ より, はさみうちの原理から
$\displaystyle\lim_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x}=0.$

問題 3.

$$\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1-0}(2x^2+1)=3,$$
$$\lim_{x\to1+0}f(x)=\lim_{x\to1+0}3x^2=3,$$
$$f(1)=3$$

より, $f(x)$ は $x=1$ で連続.

問題 4.

(1) $f(x)=x^3,$
$f(x+h)=(x+h)^3=x^3+3hx^2+3h^2x+h^3.$

(2) $\displaystyle\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}$
$\displaystyle=\frac{3ha^2+3h^2a+h^3}{h}=3a^2+3ha+h^2.$

(3) $\displaystyle f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{h\to0}(3a^2+3ha+h^2)=3a^2.$

問題 5.

(1) $f'(x)=6x^2+10x-1.$

(2) $f'(x)=\sin x+x\cos x.$

(3) $f'(x) = (2^x)' \cos x + 2^x (\cos x)'$

   $= 2^x \log 2 \cos x - 2^x \sin x.$

(4) $f'(x) = (2 \log x)' = \dfrac{2}{x}.$

(5) $(\tan x)' = \dfrac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x}$

   $= \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}.$