リメディアル数学 (化学システム工学科) —— 第 3 回 2024/5/8 略解

問題 1.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{10}{n}}=1.$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^3\left(-4+\frac{7}{n}\right)=-\infty.$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}}{2+\frac{3}{n^2}}=2.$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{(1-n)(1+n+n^2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-n}=0.$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0.$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n^2+2n}}{-2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{-2}=-1.$

(7) 部分分数分解より

$$\begin{aligned}a_n&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=1-\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

とわかるので, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$

(8) グラフより 0.

(9) グラフより $+\infty$.

(10) $\displaystyle\lim_{x\to 0}3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}=3.$

(11) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}.$

(12) $\displaystyle 0\leqq\left|x^2\sin\frac{1}{x}\right|\leqq|x^2|$ より, はさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0.$

問題 2.

(1) -1.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{5x-3}=0.$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{5}{x^2}}{5+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}}=\frac{2}{5}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+2)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+2)=5.$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x-3)}{(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x-3}{x-3}=\frac{1}{2}.$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{-1}{3(x+3)}=-\frac{1}{9}.$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$
$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1.$

問題 3.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1-0}f(x)&=\lim_{x\to 1-0}(2x^2+1)=3,\\\lim_{x\to 1+0}f(x)&=\lim_{x\to 1+0}3x^2=3,\\f(1)&=3\end{aligned}$$

より, $f(x)$ は $x=1$ で連続.

問題 4. $\displaystyle\lim_{x\to -0}\frac{1}{x}=-\infty,\ \lim_{x\to +0}\frac{1}{x}=+\infty$ であることに注意すると,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -0}f(x)&=\lim_{x\to -0}\frac{1}{1+e^{1/x}}=1\\\lim_{x\to +0}f(x)&=\lim_{x\to +0}\frac{1}{1+e^{1/x}}=0\end{aligned}$$

より, $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)$ は存在しない. よって $f(x)$ は $x=0$ で連続でない.

問題 5. $3X=A+2B=\begin{pmatrix}2&-1\\1&-6\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}5&-7\\4&3\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}12&-15\\9&0\end{pmatrix}.$

よって $X=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}12&-15\\9&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-5\\3&0\end{pmatrix}.$

問題 6.

(1) 定義できない.

(2) 定義できる. $AB=\begin{pmatrix}27&44&3&6\\6&24&6&-12\\29&36&-1&17\end{pmatrix}.$

(3) 定義できる. $AB=\begin{pmatrix}13&9&8\\36&13&27\end{pmatrix}.$

(4) 定義できる. $AB=\begin{pmatrix}10&-15\\8&-12\end{pmatrix}.$

問題 7.

$$
\begin{aligned}
A^2 &= \begin{pmatrix} 2\cdot 2 + 1\cdot(-4) & 2\cdot 1 + 1\cdot(-2) \\ -4\cdot 2 + (-2)\cdot(-4) & -4\cdot 1 + (-2)\cdot(-2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \\
AB &= \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 1\cdot 0 & 2\cdot(-1) + 1\cdot 3 \\ -4\cdot 1 + (-2)\cdot 0 & (-4)\cdot(-1) + (-2)\cdot 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}. \\
BA &= \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + (-1)\cdot(-4) & 1\cdot 1 + (-1)\cdot(-2) \\ 0\cdot(-2) + 3\cdot(-4) & 0\cdot 1 + 3\cdot(-2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -12 & -6 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

問題 8. $AB = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -6 \\ 0 & 5 & 1 \\ 8 & -8 & 18 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ -4 & 15 & 5 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.