间断有限元第一次作业报告

九所　　韩若愚

2022.3.4

1　题目

Consider the following ODE problem:

$$\begin{cases} u_x = 2\pi\cos(2\pi x), \quad x \in [0,1] \\ u(0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

The exact solution is $u(x) = \sin(2\pi x)$. Code up the first DG method for $k = 1$ and $k = 2$ with uniform meshes. Show error tables for the numerical erro in L_2 norm.

2　算法

首先对单元 $[0,1]$ 进行均匀剖分。假设将区间均匀剖分为 n 份，令：

$$0 = x_{\frac{1}{2}} < x_{\frac{3}{2}} < \cdots < x_{n-\frac{1}{2}} < x_{n+\frac{1}{2}} = 1 \tag{2}$$

则第 j 个区间为：$I_j = [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$，每个区间的长度都为 $h = \frac{1}{n}$。记 $x^-_{j+1/2} = \lim_{x\in I_j, x\to x_{j+1/2}} x$，$x^+_{j+1/2} = \lim_{x\in I_{j+1}, x\to x_{j+1/2}} x$。

假设所求数值解 u_h 存在的空间为：$V_h^k := \{v : v|_{I_j} \in P^k(I_j), j = 1,\dots,n\}$，其中 k 为给定常数，$P^k(I_j)$ 为定义在 I_j 上的最高次项不超过 k 次的多项式空间，并假设检验函数 $v \in V_h^k$，用 v 乘以方程两端并在 I_j 上积

分，并保证 $k=0$ 时算法退化为一阶有限差分格式，于是得到：

$$\begin{aligned} -\int_{I_j} u_h\, v'\, dx + u_h(x_{j+1/2}^-) v(x_{j+1/2}^-) \\ = u_h(x_{j-1/2}^-) v(x_{j-1/2}^+) + \int_{I_j} f\, v\, dx, \quad j=1,\dots,n \end{aligned} \tag{3}$$

在 I_j 上取定一组 $P^k(I_j)$ 的基底 $\{\phi_j^l\}_{l=0}^k$，则数值解 u_h 在 I_j 上为：$u_h|_{I_j}(x) = \sum_{j=1}^n \sum_{l=0}^k u_j^l\, \phi_j^l(x)$，求解 u_h 即求解系数 $u_j^l, j=1,\dots,n, l=0,\dots,k$。令检验函数 $v=\phi_j^m, m=0,\dots,k$，则方程 (3) 变为：

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^k u_j^l \big[-\int_{I_j} \phi_j^l (\phi_j^m)'\, dx + \phi_j^l(x_{j+1/2}) \phi_j^m(x_{j+1/2}) \big] \\ = u_h(x_{j-1/2}^-) \phi_j^m(x_{j-1/2}) + \int_{I_j} f \phi_j^m\, dx, \quad j=1,\dots,n \end{aligned} \tag{4}$$

这是一个在 I_j 上的线性方程组。

为便于求解 (4)，假设对固定的 l，每个 I_j 上的基底 $\phi_j^l, j=0,\dots,n$ 的自由度的定义形式都相同。现在假设参考单元 $I=[0,1]$，$\Phi_j: I_j \to I$ 是从 I_j 到 I 的仿射变换，$\xi := \Phi_j(x) = (x-x_{j-1/2})/h, x\in I_j$。显然 Φ_j 是 I_j 到 I 的微分同胚，$\Phi_j^{-1}(\xi) = \xi\cdot h + x_{j-1/2}$，$\Phi_j(I_j)=I$。令 $\phi^l(\xi) = \phi_j^l \circ \Phi_j^{-1}(\xi) = \phi_j^l(x(\xi))$，因为每个区间 I_j 上 ϕ_j^l 的自由度定义都相同，可以发现 ϕ^l 的取法是和 j 无关的，同时 $\{\phi^l\}_{l=0}^k$ 也是 $P^k(I)$ 的一组基底。考虑方程 (4) 中各项：

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}(\phi_j^m(x)) = \frac{d}{d\xi}(\phi^m(\xi)) \cdot \frac{d\xi}{dx} = (\phi^m)'(\xi) \cdot \frac{d\xi}{dx} \\ &\int_{I_j} \phi_j^l(x) (\phi_j^m)'(x)\, dx = \int_{I_j} \phi_j^l(x) \frac{d}{dx}(\phi_j^m(x))\, dx \\ &\quad = \int_I \phi^l(\xi) (\phi^m)'(\xi) \frac{d\xi}{dx}\, d\xi \cdot \frac{dx}{d\xi} \\ &\quad = \int_I \phi^l(\xi)(\phi^m)'(\xi)\, d\xi \end{aligned} \tag{5}$$

$$\phi_j^l(x_{j+1/2}) \phi_j^m(x_{j+1/2}) = \phi^l(1)\phi^l(1) \tag{6}$$

$$
\begin{aligned}
&u_h(x_{j-1/2}^-)\phi_j^m(x_{j-1/2}) = u_h(x_{j-1/2}^-)\phi^m(0) \\
&u_h(x_{j-1/2}^-) = \begin{cases} u(0), \quad j=1 \\ \sum_l u_{j-1}^l \phi_{j-1}^l(x_{j-1/2}^-) = \sum_l u_{j-1}^l \phi^l(1), \quad j \geq 1 \end{cases}
\end{aligned} \tag{7}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{I_j} f(x)\phi_j^m(x)\,dx &= \int_I f(x(\xi))\phi^m(\xi)\,d\xi \cdot \frac{dx}{d\xi} = h \cdot \int_I f(x(\xi))\phi^m(\xi)\,d\xi \\
x(\xi) &= \xi \cdot h + x_{j-1/2}
\end{aligned} \tag{8}
$$

于是所有 I_j 上的运算可以转换为 I 上的运算，方程组 (4) 变为：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{n} u_j^l \big[-\int_I \phi^l(\phi^m)'\,d\xi + \phi^l(1)\phi^m(1) \big] \\
&= u_h(x_{j-1/2}^-)\phi^m(0) + h\int_I f(\xi h + x_{j-1/2})\phi^m(\xi)\,d\xi, \\
&\quad j = 1, \ldots, k
\end{aligned} \tag{9}
$$

其中 $u_h(x_{j-1/2}^-)$ 由 (7) 给出。方程组 (9) 可写为矩阵形式：$A\mathbf{u}_j = B_j$，其中 A 为 $(k+1)\times(k+1)$ 维方阵，其第 (m,l) 个元素为 $a_{ml} = -\int_I \phi^l(\phi^m)'\,d\xi + \phi^l(1)\phi^m(1)$，$\mathbf{u}_j = (u_j^0, \ldots, u_j^n)^T$ 为需要求解的列向量，B_j 为 $k+1$ 维列向量，第 m 个元素为 $B_j^m = u_h(x_{j-1/2}^-)\phi^m(0) + h\int_I f(\xi h + x_{j-1/2})\phi^m(\xi)\,d\xi$。

最后在每个 I_j 上令：$\phi_j^0(x) = 1$，$\phi_j^1(x) = (x - x_{j-1/2})/(x_{j+1/2} - x_{j-1/2})$，$\phi_j^2(x) = (x - x_{j-1/2})^2/(x_{j+1/2} - x_{j-1/2})^2$，$x \in I_j$，则参考单元 I 上相应的基底为：$\phi^0(\xi) = 1$，$\phi^1(\xi) = \xi$，$\phi^2(\xi) = \xi^2$，$\xi \in I$。通过简单计算能直接得到 A 的值如下：

$$
\text{k=1 时：} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{10}
$$

$$
\text{k=2 时：} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & 1/2 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 6 \\ 0 & 18 & -24 \\ 0 & -12 & 18 \end{bmatrix} \tag{11}
$$

对于 B_j 中的积分项用复化梯形公式计算。

3 计算结果

将 I_j 上的基底 ϕ_j^l 延拓到整个区间：令

$$\varphi_j^l(x) = \begin{cases} \phi_j^l(x), & x \in I_j \\ 0, & else \end{cases}$$

则数值解 $u_h(x) = \sum_{j=0}^n \sum_{l=0}^k u_j^l \varphi_j^l(x)$。假设真解为 u，则 L^2 误差为：

$$\begin{aligned} e = (\int_0^1 |u - u_h|^2\, dx)^{1/2} &= (\sum_{j=0}^n \int_{I_j} |u(x) - \sum_{j=0}^k u_j^l \varphi_j^l(x)|^2\, dx)^{1/2} \\ &= (\sum_{j=0}^n \int_{I_j} |u(x) - \sum_{l=0}^k u_j^l \phi_j^l(x)|^2\, dx)^{1/2} \\ &= (\sum_{j=0}^n \int_{I_j} |u(x) - \sum_{l=0}^k u_j^l \phi^l(\xi(x))|^2\, dx)^{1/2} \end{aligned} \tag{12}$$

在计算积分时使用梯形公式数值计算，将每个 I_j 上的积分 $\int_{I_j} |u(x) - \sum_{l=0}^k u_j^l \phi^l(\xi(x))|^2\, dx$ 近似为

$$(|u(x_{j+1/2}) - \sum_l u_j^l \phi^l(1)|^2 + |u(x_{j-1/2}) - \sum_l u_j^l \phi^l(0)|^2) \cdot h/2$$

于是得到误差表如下（保留三位小数）：

表 1: $k = 1$

n	L^2 error	order
10	3.306e-2	
20	8.327e-3	1.989
40	2.086e-3	1.997
80	5.217e-4	1.999
160	1.304e-4	2.000
320	3.261e-5	2.000

表 2: $k = 2$

n	L^2 error	order
10	2.051e-3	
20	2.573e-4	2.995
40	3.197e-5	3.009
80	3.880e-6	3.043
160	4.261e-7	3.187
320	2.381e-8	4.162

4 分析

通过误差表可以看到当 $k = 1$ 时收敛阶稳定在二阶，$k = 2$ 时收敛阶在三阶附近。而且步长相同时，$k = 2$ 得到的误差比 $k = 1$ 得到的误差小了几个数量级，$k = 2$ 时得到的结果更为精确。

对真解 $u(x) = \sin(2\pi x)$ 在 $x = x_{j-1/2}$ 处 Taylor 展开：

$$\begin{aligned} u(x) =& \sin(2\pi x_{j-1/2}) + 2\pi\cos(2\pi x_{j-1/2})(x - x_{j-1/2}) \\ & - 2\pi^2\sin(2\pi x_{j-1/2})(x - x_{j-1/2})^2 + O((x - x_{j-1/2})^3) \end{aligned} \tag{13}$$

注意到 I_j 上基底 $\{\phi_j^l\}_{l=0}^2$ 的定义形式，(13) 变为：

$$\begin{aligned} u(x) =& \sin(2\pi x_{j-1/2})\phi_j^0(x) + 2\pi\cos(2\pi x_{j-1/2})h\phi_j^1(x) \\ & - 2\pi^2\sin(2\pi x_{j-1/2})h^2\phi_j^2(x) + O((x - x_{j-1/2})^3) \end{aligned} \tag{14}$$

u 显然满足方程 (3)，由于 v 的任意性，忽略 u 的无穷小量，应有：

$$\begin{aligned} u_h(x) =& \sin(2\pi x_{j-1/2})\phi_j^0(x) + 2\pi\cos(2\pi x_{j-1/2})h\phi_j^1(x) \\ & - 2\pi^2\sin(2\pi x_{j-1/2})h^2\phi_j^2(x) \quad a.e. \end{aligned}$$

所以 $k = 1$，$k = 2$ 时收敛阶分别应该是 $2, 3$。计算结果是符合理论的。

但是在数值求解 $k = 2$ 情况的时候可以看到阶数在不断变大，最后变成了 4。实际上在计算 $k = 2$ 的情况时我发现，方程组 $A\mathbf{u}_j = B_j$ 中右端项 B_j 的一个小扰动在步长比较小 ($h <= 0.0125$) 时对误差阶数会产生比较大的影响，我认为这是机器误差导致的，因为实际上当右端项扰动在 1e-4

左右时，对 L^2 范数误差的影响只在 1e-7 左右。虽然从结果上看对真解的逼近仍然非常好，但是误差的收敛阶却受到了比较大的影响。但是在 $k=1$ 的情况下却不会出现这样的问题。