间断有限元第三次作业报告

九所　韩若愚

2022.3.31

1　题目

Considering the following Burgers equation

$$\begin{cases} u_t + (]fracu^2 2)_x = 0, \\ u(x,0) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sin(\pi x), \end{cases} -1 \leq x \leq 1, \tag{1}$$

with periodic boundary condition. Code up the DG scheme for P^1 and P^2, together with 2nd and 3rd order SSP RK method in time, respectively. Use uniform mesh is space.

1. Take the final time at $T = 0.4$. Show error tables of the L^2 error, L^∞ error and $|\int_{-1}^{1}(u-u_h)\phi\, dx|$ with $\phi(x) = \cos(x)$.

2. Take $T = 1.5$. Show pictures of the exact solution and the numerical solution.

2　算法

2.1　真解

由于方程是 Burgers 方程, 所以真解 u 沿特征线 $\frac{dx}{dt} = u$ 不变。而特征线的斜率刚好是 u, 所以特征线是直线。于是真解为 $u(x,t) = u(x-u(\xi,0)t, 0)$, 其中 ξ 为经过点 (x,t) 的特征线与 $t=0$ 的交点。这个真解是隐式给出的, 为了得到真解，需要得到经过点 (x,t) 的特征线的斜率 $u(\xi,0)$。

可以使用牛顿迭代法求 ξ。因为 (x,t) 和 $(\xi,0)$ 在同一条直线上，特征线方程 $x=u(\xi,0)t+\xi$ 可改写为：

$$f(\xi) := x - u_0(\xi)t - \xi = 0$$

其中 $u_0(x)=u(x,0)$。于是可以构造迭代公式：

$$\xi^{(n+1)} = \xi^{(n)} - \frac{f(\xi^{(n)})}{f'(\xi^{(n)})}$$

其中 $\xi^{(n)}$ 表示第 n 个迭代值。

2.2 DG 格式

首先对单元 $[-1,1]$ 进行均匀剖分。假设将区间均匀剖分为 n 份，令：

$$0 = x_{\frac{1}{2}} < x_{\frac{3}{2}} < \cdots < x_{n-\frac{1}{2}} < x_{n+\frac{1}{2}} = 1 \tag{2}$$

则第 j 个区间为：$I_j=[x_{j-\frac{1}{2}},x_{j+\frac{1}{2}}]$，每个区间的长度都为 $h=\frac{2}{n}$。记 $x^-_{j+1/2}=\lim_{x\in I_j,\,x\to x_{j+1/2}} x$，$x^+_{j+1/2}=\lim_{x\in I_{j+1},\,x\to x_{j+1/2}} x$。

假设对固定的时间 t，所求数值解 $u_h(\cdot,t)$ 存在的空间为：$V_h^k := \{v: v|_{I_j}\in P^k(I_j), j=1,\dots,n\}$，其中 k 为给定常数，$P^k(I_j)$ 为定义在 I_j 上的最高次项不超过 k 次的多项式空间。并假设检验函数 $v\in V_h^k$，用 v 乘以方程两端并在 I_j 上积分。由于方程中通量函数 $f(u)=\frac{u^2}{2}$ 是非线性的，在构造数值格式时需要要求当 $k=0$ 时，格式退化为一阶单调 FD 格式，于是空间离散后的半 DG 格式为：

$$\begin{aligned}&\int_{I_j} u_t v\,dx - \int_{I_j}(\frac{u^2}{2})v_x\,dx\\&+\hat{f}_{j+1/2}v(x^-_{j+1/2})-\hat{f}_{j-1/2}v(x^+_{j-1/2})=0,\quad j=1,\dots,n\end{aligned} \tag{3}$$

其中 $\hat{f}_{j+1/2}$ 是单调数值通量，保证在 $k=0$ 时格式退化为 1 阶单调格式。$\hat{f}_{j+1/2}=\hat{f}(u^-_{j+1/2},u^+_{j+1/2})$。

在 I_j 上取定一组 $P^k(I_j)$ 的基底 $\{\phi_j^l\}_{l=0}^k$，则数值解 u_h 在 I_j 上表示为：$u_h(x,t)=\sum_{j=1}^n\sum_{l=0}^k u_j^l(t)\,\phi_j^l(x)$，求解 u_h 即求解系数 u_j^l, $j=1,\dots,n$, $l=$

$0,\ldots,k$。令检验函数 $v=\phi_j^m$, $m=0,\ldots,k$，则方程组 (3) 变为：

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{k}\int_{I_j}\phi_j^l\phi_j^m\,dx\,u_j^l-\frac{1}{2}\sum_{p,q=0}^{k}\int_{I_j}\phi_j^p\phi_j^q(\phi_j^m)_x\,dx\,u_j^pu_j^q\\
&+\hat{f}(\sum_{l=0}^{k}u_j^l\phi_j^l(x_{j+1/2}),u_{j+1/2}^+)\phi_j^m(x_{j+1/2})\\
&-\hat{f}(u_{j-1/2}^-,\sum_{l=0}^{k}u_j^l\phi_j^l(x_{j-1/2}))\phi_j^m(x_{j-1/2})=0,\quad j=1,\ldots,n
\end{aligned}\tag{4}$$

这是关于向量 $\mathbf{u}_j=(u_j^0,\ldots,u_j^k)$ 的 m 维方程组。

为便于求解，假设参考单元 $I=[-1,1]$，对每个单元 I_j 都有一个到 I 的微分同胚 $\Phi_j:I_j\to I$，$\xi:=\Phi_j(x)=\frac{2}{h}(x-x_{j-1/2})-1$。在参考单元上取定一组 $P^k(I)$ 的基底 $\{\phi^l\}_{l=0}^k$，则由 Φ_j 将 ϕ^l 拉回到 I_j 上得到的函数组 $\{(\Phi_j^{-1})^*\phi^l\}$ 也是 $P^k(I_j)$ 的基底，不妨就设为 $\{\phi_j^l\}$。于是每个单元 I_j 上的计算都可以在 I 上进行，方程组 (4) 变为：

$$\begin{aligned}
&\frac{h}{2}\sum_{l=0}^{k}\int_{I}\phi^l\phi^m\,d\xi\,u_j^l-\frac{1}{2}\sum_{p,q=0}^{k}\int_{I}\phi^p\phi^q(\phi^m)_\xi\,d\xi\,u_j^pu_j^q\\
&+\hat{f}(\sum_{l=0}^{k}u_j^l\phi^l(1),u_{j+1/2}^+)\phi^m(1)\\
&-\hat{f}(u_{j-1/2}^-,\sum_{l=0}^{k}u_j^l\phi^l(-1))\phi^m(-1)=0,\quad j=1,\ldots,n
\end{aligned}\tag{5}$$

其中 $u_{j+1/2}^+=\sum_{l=0}^k u_{j+1}^l\phi^l(-1)$,$u_{j-1/2}^-=\sum_{l=0}^k u_{j-1}^l\phi^l(1)$，$j$ 为循环指标。

(5) 可以写为向量形式：

$$\frac{h}{2}A\frac{d}{dt}\mathbf{u}_j=\frac{1}{2}\mathbf{u}_jB\mathbf{u}_j-C_j$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{u}_j=\frac{2}{h}A^{-1}(\frac{1}{2}\mathbf{u}_jB\mathbf{u}_j-C_j):=L_j(\mathbf{u}_j)\tag{6}$$

其中 A 为 $(k+1)\times(k+1)$ 维矩阵，$A_{ml}=\int_I phi^l\phi^m\,d\xi$，$B$ 为三阶张量，$B=\int_I\phi^p\phi^q(\phi^m)_\xi\,d\xi\,\omega^p\otimes\omega^q\otimes\omega^m$，其中 ω^i 是取定的余切标架场，在本例中即自然标架场的对偶标架场。C_j 为 m 维向量，$C_{j,m}=\hat{f}(\sum_{l=0}^k u_j^l\phi^l(1),u_{j+1/2}^+)\phi^m(1)-\hat{f}(u_{j-1/2}^-,\sum_{l=0}^k u_j^l\phi^l(-1))\phi^m(-1)$。于是 (6) 可以用 R-K 法求解。求解前还

需要得到 $\mathbf{u}_j$ 的初值，对初值 $u(x,0)$ 做到 $P^k(I_j)$ 上的 L^2 投影：对任意 $j=1,2,\ldots,n$, $m=0,1,\ldots,k$，有

$$\int_{I_j} u(x,0)\phi_j^m(x)\,dx = \int_{I_j}\sum_{l=0}^{k} u_j^l(0)\phi_j^l(x)\phi_j^m(x)\,dx.$$

SSPRK(2,2) 和 SSPRK(3,3) 格式分别如下：

$$\begin{aligned}
&SSPRK(2,2):\\
&\quad u^{(0)} = u^n\\
&\quad u^{(1)} = u^{(0)} + \Delta t F(u^{(0)})\\
&\quad u^{n+1} = \frac{1}{2}u^{(0)} + \frac{1}{2}u^{(1)} + \frac{1}{2}\Delta t F(u^{(1)})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&SSPRK(3,3):\\
&\quad u^{(0)} = u^n\\
&\quad u^{(1)} = u^{(0)} + \Delta t F(u^{(0)})\\
&\quad u^{(2)} = \frac{3}{4}u^{(0)} + \frac{1}{4}u^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t F(u^{(1)})\\
&\quad u^{n+1} = \frac{1}{3}u^{(0)} + \frac{2}{3}u^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t F(u^{(2)})
\end{aligned}$$

同时为保证稳定性，对时间步长 Δt 的选取还要满足 CFL 条件。

3 计算结果

为了方便计算，取 $P^k(I)$ 上的基函数为 Legendre 函数。数值通量选为 Lax-Fridrichs 通量：

$$\hat{f}(u^-,u^+) = \frac{1}{2}(f(u^-) + f(u^+) - \alpha(u^- - u^+))$$

其中 $\alpha = \max_{u|_{I_j}} |f'(u)|$。为了满足 CFL 条件并观察到超收敛性，将时间步长 Δt 取为 h^2。算法使用 C++ 实现。

在终止时刻 $t=0.4$ 时计算真解与数值解的 L^2 范数、L^∞ 范数误差和误差 $|int_{-1}^1(u-u_h)\cos(x)\,dx|$。$P^1, P^2$ 元的误差表如下（保留三位小数）：

当终止时刻 $T = 1.5$ 时，在 $x=0$ 处特征线会相交，出现激波。当 $n=80$ 时得到的真解 u 和数值解 u_h 的图像如下：

表 1: P^1

n	L^2 error	order	L^∞error	order	H^{-k}error	order
10	1.005e-2		2.670e-2		1.297e-4	
20	2.678e-3	1.908	7.895e-3	1.758	2.410e-5	2.428
40	6.941e-4	1.948	2.126e-3	1.893	3.410e-6	2.821
80	1.765e-4	1.975	5.537e-4	1.941	4.464e-7	2.933
160	4.448e-5	1.988	1.413e-4	1.970	5.694e-8	2.971
320	1.116e-5	1.995	3.566e-5	1.986	7.238e-9	2.976

表 2: P^2

n	L^2 error	order	L^∞error	order	H^{-k}error	order
10	1.091e-3		4.615e-3		6.730e-6	
20	1.472e-4	2.900	7.674e-4	2.588	1.481e-7	5.506
40	1.914e-5	2.943	1.027e-4	2.902	3.382e-9	5.453
80	2.442e-6	2.970	1.383e-5	2.893	1.655e-10	4.353
160	3.082e-7	2.986	1.759e-6	2.975	4.036e-11	2.036
320	3.896e-8	2.984	2.342e-7	2.909	5.900e-11	-0.548

图 1: P^1

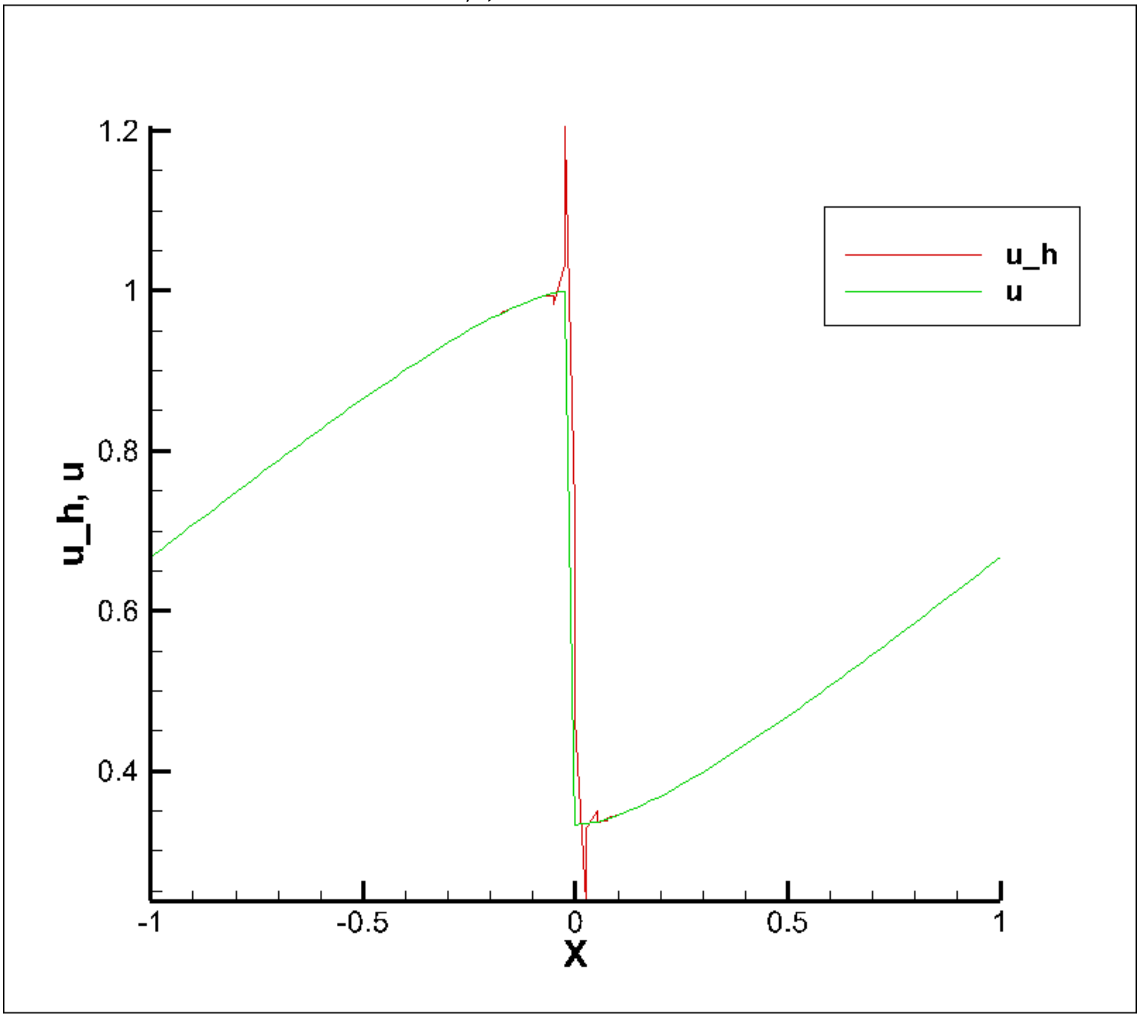
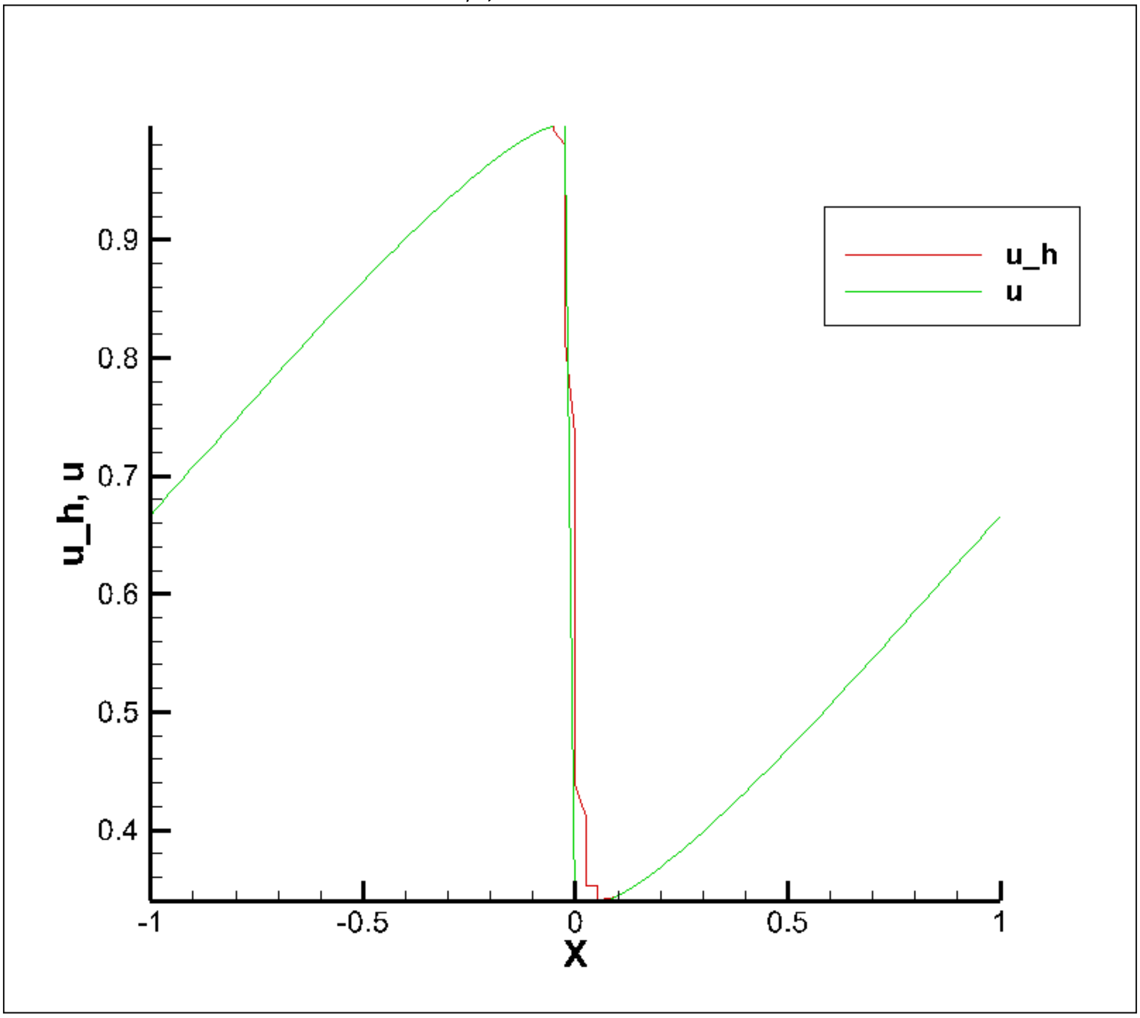


图 2: P^2



4 分析

可以看到当 k 分别等于 1,2 时，L^2 和 L^∞ 误差分别在 2，3 附近。当 $k=1$ 时，负模误差接近 3，出现了超收敛现象。而当 $k=2$ 时负模的误差一直在减小，在 $n \leq 80$ 时存在超收敛现象，但是 $n>80$ 后误差基本没有改变反而增长了。如果将 Δt 调小，情况也没有太大改变。我的程序使用的是双精度浮点数，在 C++ 中应该能达到 10^{308} 数量级，按道理应该不会出现这种情况的，但是到目前为止我还没有想明白问题在哪里。

而当 $T=1.5$ 时，计算结果在 $k=0$ 时在 $=0$ 处出现了明显振荡，而当 $k=1$ 时震荡并不是十分明显。

5 源代码

本次报告程序使用 C++ 编译。

```cpp
#include <iostream>
#include <cmath>
#include <fstream>
using namespace std;

//先定义一些全局的变量
const int n = 80;    //划分单元个数
const int k = 1;     //多项式最高次项次数
const double h = (double) 2/n;    //空间步长
const double dt = (double) h * h;    //时间步长
const double pi = 3.1415926;

double p[n+1];   //节点位置, p_j = j * h = x_{j+1/2}, j =0,1, ..., n
//存储不变的系数矩阵

```

```
const double Legendre[5] = {-0.9061798459,-0.5384693101,0.,
0.5384693101,0.9061798459};
const double LegendreCo[5] = {0.2369268851,0.4786286705,0.5688888889,
0.4786286705,0.2369268851};

//*************函数声明*************//
double u_0(double y);   //初值
double u_exact(double y, double t);   //真解
double f(double y); //通量函数
double phi(int l, double y);    //参考单元基函数
double** initial();   //计算初始时刻u_j
double flux(double ul, double ur);  //数值通量计算
double** L(double** ut);   //用于计算RK的函数, u_t= F(u)
double** RK22(double** un);     //2步二阶RK
double** RK33(double** un);
double** RK(int k, double** un);
//************声明完毕*************//

int main()
{
int i, j, l;
double t, temp1, temp2, norm1, norm2, norm3, xi;
double T = 1.5;
double** u1 = new double* [n];
double** u2 = new double* [n];
```

```
for (i=0; i<n; i++)
{
u1[i] = new double [k+1];
u2[i] = new double [k+1];
}
for (j=0; j<=n; j++)
{
p[j] = j * h - 1;
}


u1 = initial();
t = 0;
while(t<T - 1e-10)
{

t = t + dt;
u2 = RK(k,u1);

u1 = u2;
cout<<t<<endl;
}

//*
norm1 = 0;
norm2 = 0;
norm3 = 0;
for (j=1; j<=n; j++)
{

for (i=0; i<5; i++)
```

```
    {
    xi = Legendre[i];
    temp1 = 0;
    for (l=0; l<=k; l++)
    {
    temp1 = temp1 + u1[j-1][l] * phi(l,xi);
    }

    temp2 = h * (xi + 1) / 2. + p[j-1];
    temp1 = u_exact(temp2,T) - temp1;

    if (abs(temp1) > norm2)
    {
    norm2 = abs(temp1);
    }

    norm3 = norm3 + LegendreCo[i] * temp1 * cos(
        temp2);

    temp1 = temp1 * temp1;
    norm1 = norm1 + LegendreCo[i] * temp1;
    }

    }
    norm1 = norm1 * h / 2.;
    norm1 = sqrt(norm1);
    norm3 = norm3 * h / 2.;
    norm3 = abs(norm3);
    cout<<"L2="<<norm1<<endl<<"Linf="<<norm2<<endl
        <<"Lphi="<<norm3<<endl;//*/
```

```
    {
    const char* fn = "DGLecture\\homework3\\output
        .plt";
    remove(fn);
    fstream f, f1;
    f.open(fn, ios::out | ios :: app);
    f<<"VARIABLES="<<"X"<<","<<"u_h"<<","<<"u"<<
        endl;
    for (j=1; j<=n; j++)
    {
    temp1 = 0;
    temp2 = 0;
    for (l=0; l<=k; l++)
    {
    temp1 = temp1 + u1[j-1][l] * phi(l,-1);
    temp2 = temp2 + u1[j-1][l] * phi(l,1);
    }
    f<<"\t"<<p[j-1]<<"\t"<<temp1<<"\t"<<u_exact(p[
        j-1],T)<<endl;
    f<<"\t"<<p[j]<<"\t"<<temp2<<"\t"<<u_exact(p[j
        ],T)<<endl;
    }
    f.close();
    }

    for (i=0; i<n; i++)
    {
    delete[] u1[i];
    delete[] u2[i];
    }
    delete[] u1;
```

```
delete[] u2;

system("pause");
}

double u_0(double y)
{
return sin(pi*y) / 3.0 + 2.0 / 3.0 ;
}

double u_exact(double y, double t)
{
int time=1;
double ans, xi1=0, xi2=0.1;
double e = 1e-6;

//if (t==1.5) //1.5时刻发生激波，单独算
{
if (y < -1+2*t/3.0)
{
y = y+2;
}
}

while(abs(xi1 - xi2)>e)
{
xi1 = xi2;
xi2 = xi1 + ( y - u_0(xi1) * t - xi1 ) / (t *
    pi * cos(pi*xi1)/3.0 + 1);
time++;
if (time > 10000)
```

```
{
cout<<"error"<<endl;
cout<<y<<endl;
break;
}
}
ans = u_0(xi2);

return ans;
}

double f(double y)
{
return y * y /2;
}

double phi(int l, double y)
{
if (l==0)
{
return 1;
}
else if (l == 1)
{
return y;
}
else if (l == 2)
{
return (3*y*y - 1)/2;
}
else{
```

```
return 0;
}
}

double** initial()
{
double ans, temp;
int j, l, m;
double** ut = new double* [n];
double* Bt = new double [n];
for (j=0; j<n; j++)
{
ut[j] = new double [k+1];
}

for (j=1; j<=n; j++)
{
for (m=0; m<=k; m++)
{
ans = 0;
for (l=0; l<5; l++)
{
temp = h * (Legendre[l] + 1)/2 + p[j-1];
ans = ans + LegendreCo[l] * u_0(temp) * phi(m,
    Legendre[l]);
}
ans = ans / 2;
Bt[m] = ans;
}

double A[3][3] = {{1,0,0},{0,3,0},{0,0,5}};
```

```
for (m=0; m<=k ;m++)
{
ut[j-1][m] = 0;
for (l=0; l<=k; l++)
{
ut[j-1][m] = ut[j-1][m] + A[m][l] * Bt[l];
}
}

}

delete[] Bt;

return ut;
}

double flux(double ul, double ur)
{
double ans, alpha;
int i, l;
if ( ul <= ur)
{
//ans = f(ul);  //Godnov
alpha = ur; //Lax-Friedrichs
}
else{
//ans = f(ul);
alpha = ul;
}

ans = f(ul) + f(ur) - alpha * (ur - ul);
```

```
ans = ans * 0.5;

return ans;
}

double** L(double** ut)
{
int i, j, l, m, p, q;
double ul, ur;
double** ans = new double* [n];
for (i=0; i<n; i++)
{
ans[i] = new double [k+1];
}

double A[3] = {1,3,5};
double B[3][3][3] =
    {{{0,0,0},{0,0,0},{0,0,0}},
    {{2,0,0},{0,2.0/3.0,0},{0,0,2.0/5.0}},
    {{0,2,0},{2,0,4.0/5.0},{0,4.0/5.0,0}}};


for (j=1; j<=n; j++)
{
for (m=0; m<=k; m++)
{
ans[j-1][m] = 0;

for (p=0; p<=k; p++)
{
for (q=0; q<=k; q++)
```

```
{
ans[j-1][m] = ans[j-1][m] + ut[j-1][p] * B[m][p][q] * ut[j-1][q];
}
}
ans[j-1][m] = ans[j-1][m] / 2;

//计算第一个数值通量
{
ul = 0;
ur = 0;
q = j;
if (q == n)
{
q = 0;
}
for (l=0; l<=k; l++)
{
ul = ul + ut[j-1][l] * phi(l,1);
ur = ur + ut[q][l] * phi(l,-1);
}
ans[j-1][m] = ans[j-1][m] - flux(ul,ur) * phi(m,1);

}

//计算第二个数值通量
{
ul = 0;
ur = 0;

```

```
p = j-2;
if ( p == -1)
{
p = n-1;
}
for (l=0; l<=k; l++)
{
ul = ul + ut[p][l] * phi(l,1);
ur = ur + ut[j-1][l] * phi(l,-1);
}
ans[j-1][m] = ans[j-1][m] + flux(ul,ur) * phi(
    m,-1);
}

ans[j-1][m] = ans[j-1][m] * A[m] / h;
}
}

return ans;
}

double** RK22(double** un)
{
int j,l,m;
double ul;
double** ans = new double* [n];
for (j=0; j<n; j++)
{
ans[j] = new double [k+1];
}
double** u0 = new double* [n];
```

```
        double** u1 = new double* [n];
        double** u2 = new double* [n];

        for (j=0; j<n; j++)
        {
        u0[j] = new double [k+1];
        u1[j] = new double [k+1];
        u2[j] = new double [k+1];
        }

        for (j=1; j<=n; j++)
        {
        for (l=0; l<=k; l++)
        {
        u0[j-1][l] = un[j-1][l];
        }
        }

        u1 = L(u0);
        for (j=1; j<=n; j++)
        {
        for (l=0; l<=k; l++)
        {
        u1[j-1][l] = u1[j-1][l] * dt + u0[j-1][l];
        }
        }


        u2 = L(u1);
        for (j=1; j<=n;j++)
        {
```

```
        for (l=0; l<=k; l++)
        {
        u2[j-1][l] = u0[j-1][l] * 0.5 + u1[j-1][l] *
            0.5 + u2[j-1][l] * 0.5 * dt;
        ans[j-1][l] = u2[j-1][l];
        }
        }


        delete[] u0;
        delete[] u1;
        delete[] u2;

        return ans;
        }

        double** RK33(double** un)
        {
        int j,l,m;
        double ul;
        double** ans = new double* [n];
        for (j=0; j<n; j++)
        {
        ans[j] = new double [k+1];
        }
        double** u0 = new double* [n];
        double** u1 = new double* [n];
        double** u2 = new double* [n];
        double** u3 = new double* [n];

        for (j=0; j<n; j++)
```

```
{
u0[j] = new double [k+1];
u1[j] = new double [k+1];
u2[j] = new double [k+1];
u3[j] = new double [k+1];
}

for (j=1; j<=n; j++)
{
for (l=0; l<=k; l++)
{
u0[j-1][l] = un[j-1][l];
}
}

u1 = L(u0);
for (j=1; j<=n; j++)
{
for (l=0; l<=k; l++)
{
u1[j-1][l] = u1[j-1][l] * dt  + u0[j-1][l];
}
}


u2 = L(u1);
for (j=1; j<=n;j++)
{
for (l=0; l<=k; l++)
{
u2[j-1][l] = u0[j-1][l] * 3 / 4 + u1[j-1][l]
```

```
/4 + u2[j-1][l] * dt / 4;
}
}

u3 = L(u2);
for (j=1; j<=n; j++)
{
for (l=0; l<=k; l++)
{
u3[j-1][l] = u0[j-1][l] / 3 + 2 * u2[j-1][l] /
    3 + 2 * dt * u3[j-1][l] /3;
ans[j-1][l] = u3[j-1][l];
}
}


delete[] u0;
delete[] u1;
delete[] u2;
delete[] u3;

return ans;
}

double** RK(int k, double** un)
{
double** u2;
if ( k == 1 )
{
u2 = RK22(un);
}
```

```
else if (k == 2)
{
u2 = RK33(un);
}
else{
;
}

return u2;
}
```