Nescafé 18 (Poetize 2) Solution

七夕祭

来源：lydrainbowcat 摘录 BNUOJ ACM Summer Training 2012.7.6 Problem A

稍加思索可以发现，行列之间是互不影响的，把每行 1 的个数看做 n 堆纸牌、每列 1 的个数看做 m 堆纸牌，题目实际上就是两个环形的均分纸牌问题。
(什么？你不知道均分纸牌问题！你还是看看 NOIP2002 T1，做做历届 NOIP 前两题再来吧……)
下面来说环形均分纸牌问题怎么做：
设有 n 堆纸牌，每堆有 ai 张，所有堆一共有 s 张，那么最终每堆应该有 s / n 张。因此如果 s mod ai≠0，显然是无解的。接下来构造数列 bi=ai-s/n。
方法一：
枚举从第 k 个位置开始(1<=k<=n)，像均分纸牌的方法一样依次向后推（如果第 i 个位置有 ai 堆牌，那么取 bi 堆牌分给下一堆，若 bi<0 表示从下一堆拿到这一堆）。最后取最小值。
时间复杂度 O(n^2)，预计得分 70 分。
方法二：
设 bi 的前缀和为 si。如果从第 k 个位置开始，那么第 i 堆和第 i+1 堆交换的纸牌数就是 |si-sk|。总代价就是|s1-sk|+|s2-sk|+|s3-sk|+……+|sn-sk|。发现什么了？当 sk 是 s1~sn 中位数的时候，上式有最小值！所以把 si 排序后，令 sk=s[(n+1)/2]，计算代价即可。
时间复杂度 O(nlogn)，预计得分 100 分。

太鼓达人

来源：XLk 摘录 HDU2894

很显然，第一问的答案就是 2^n。
第二问，构造一个有 2^(n-1)个节点的图，对应 2^(n-1)个 n-1 位二进制数。从代表数 k 的节点(0<=k<2^(n-1))向代表数(k<<1)&(1<<(n-1))的节点，和代表数((k<<1)+1)&(1<<(n-1))的节点分别连一条边。可以发现这样的图中，所有点的入度和出度都是 2，因此这是一个欧拉图。因此我们从 0 号点开始 dfs 寻找一个欧拉回路，回溯的时候记录到栈中，最后倒序输出即可。因为要求字典序最小，dfs 的时候要注意搜索顺序，先走 0 边，再走 1 边。这个算法寻找欧拉回路，每个点、每条边只访问一次，是 O(V+E)级别的。
时间复杂度 O(2^n)，预计得分 100 分。

理科男

来源：applepi 原创

首先把 A / B 约分成既约分数。设 a[1] = A，r[n] 为原分数小数点后第 n 位的数。
显然有 r[1] = floor(K * a[1] / B)。

剩下来的余数 $a[2] = K * a[1] \bmod B$。
依此类推我们有 $r[n] = \mathrm{floor}(K * a[n] / B)$，$a[n] = K * a[n - 1] \bmod B$。
不难发现如果 $a[p] = a[q]$（$p < q$），那么小数点后第 p 位到第 $q - 1$ 位这一段就可以视为一个循环节。
暴力计算数列 a，找到第一个与前面重复的项，就可以找到最短循环节了。
这个重复的项前面的部分导出混循环部分。
如果最早在 p 处计算到 $a[p] = 0$，那么原分数就是一个小数点后有 $p - 1$ 位的有限小数。
以上便是 50 分的解法。
本题前 50 分属于送分。如果没能送到你的手上，建议你去参加 noip 普及组的比赛。

下面我们对 a 数列的性质做一些讨论。
如果 $(B, K) = 1$，对于任意的 i 都有 $(a[i], B) = 1$。
设 K' 为 K 模 B 时的乘法逆元，即 $KK' \bmod B = 1$。由乘法逆元的性质 K' 存在且唯一。
假设最早出现重复的位置是 $a[p] = a[q]$ $(p < q)$。
如果 $p \neq 1$，那么 $a[p - 1] = K' * a[p] \bmod B = K' * a[q] \bmod B = a[q - 1]$。
也就是出现了更早的重复，与题设矛盾。所以显然有 $p = 1$。
这时，显然原分数是一个纯循环小数，且最短循环节长度是 $q - 1$。
设 $x = q - 1$。显然 $a[q] = a[1] * K^x \bmod B = a[1]$，于是 $K^x \bmod B = 1$。
这就转化成了求 K 模 B 的阶的问题了。
由欧拉定理 $K^{\varphi(B)} = 1 \pmod B$，由阶的性质 $x \mid \varphi(B)$。
我们可以将 $\varphi(B)$ 分解素因数，并初始化 $x = \varphi(B)$。
之后考虑 $\varphi(B)$ 的每个素因数 p。如果 $K^{(x/p)} = 1 \pmod B$，就 $x \leftarrow x / p$，并继续试除 p。
否则转下一个素因数。这样就可以求出 K 模 B 的阶了，这就是最短循环节的长度。

如果 $(B, K) > 1$，那么 $(a[2], B) > 1$。设 $(a[2], B) = g$，不难发现对于任意的 $i \geqslant 2$，有 $g \mid (a[i], B)$。
不妨设 $B' = B / g$，$a'[i] = a[i] / g$ $(i \geqslant 2)$。
若此时 $(B', K) = 1$，就转化为了上面的情况。否则继续这个过程。
如果上面的转换进行了 T 次，由于 $a[1]$ 到 $a[T]$ 与后面 a 数列的循环无关。
卡一下范围便会知道循环节的最后一个数字与混循环部分最后一个数字一定不相等。
于是原分数的混循环长度就是 T 了。
特殊地，如果在 T 次转换之后得到的最后一个 $B = 1$，那么之后 a 数列的值全为 0。这时我们可以断言原分数是一个小数点后有 T 位的有限小数。
以上便是 100 分的做法。
如果感觉“想出这种做法简直就是不可能的事情嘛”的话，请努力学习初等数论的内容。
这些推导的难度实际上是相当低的。