MAP655B - cours 5 - 14/02/2024

3.2) Conditions de non-arbitrage sur une surface de vol implicite

Rappel:

$\mathrm{Call}_{BS}(t, T, F, K, \sigma)$

$$= \begin{cases} D_t^T \left(F N\left(\frac{\ln \frac{F}{K}}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2} \right) - K N\left(\frac{\ln \frac{F}{K}}{\sigma\sqrt{T-t}} - \frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2} \right) \right) & K > 0, T > t, \sigma > 0 \\ D_t^T (F - K)^+ & \text{sinon} \end{cases}$$

où $D_t^T = e^{-r(T-t)}$

$$N(y) = \int_{-\infty}^{y} \phi(z)\, dz \qquad \phi(z) = \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$F = F_t^T = S_t\, e^{(r-q)(T-t)}$$

Rmq: le prix BS normalisé $\frac{\mathrm{Call}_{BS}(t, T, F, K, \sigma)}{D_t^T F}$

ne dépend que des variables

$m = \frac{K}{F} \rightarrow$ moneyness $\quad \left(x = \log \frac{K}{F} \right)$

$v = \sigma\sqrt{T-t} \rightarrow$ volatilité totale ("total volatility")

On pose donc :

$$\boxed{C_{BS}(x,v)} = \begin{cases} N(d_1(x,v)) - e^{x} N(d_2(x,v)) & v>0 \\ (1-e^{x})^{+} & v=0 \end{cases}$$

prix du Call BS normalisé

où $\displaystyle d_1(x,v) = \frac{-x}{v} + \frac{v}{2}, \quad d_2(x,v) = \frac{-x}{v} - \frac{v}{2}$

Bien évidemment, on a :

$$\mathrm{Call}_{BS}(t,T,F,K,\sigma) = D_t^T F_t^T \, C_{BS}\left(\ln\frac{K}{F}, \sigma\sqrt{T-t}\right)$$

- Soit t fixé. On considère une fonction

$$C_t : (T, K) \longmapsto \mathbb{R}_+ \qquad T \geq t, \ K \geq 0$$

Déf : la <u>volatilité totale implicite</u> de la fct $C_t(\cdot,\cdot)$ est la fonction $v_t : (T, x) \longmapsto \mathbb{R}_+$ définie par l'équation

$$c_{BS}(x, v_t(T,x)) = \frac{1}{D_t^T F_t^T} C_t(T,K)\Big|_{K = F e^x}$$

<u>On définit aussi :</u>

- la <u>variance totale</u> implicite

$$w_t(T,x) = \left(v_t(T,x)\right)^2$$

- la <u>vol. implicite</u> standard

$$\hat{\sigma}_t(T,x) = \frac{1}{\sqrt{T-t}} v_t(T,x) \qquad \forall T \neq t$$

<u>Rmq :</u> $\hat{\sigma} \rightarrow$ dimension $\frac{1}{\sqrt{\text{Temps}}}$

$v, w \longrightarrow$ nombre (sans dimension)

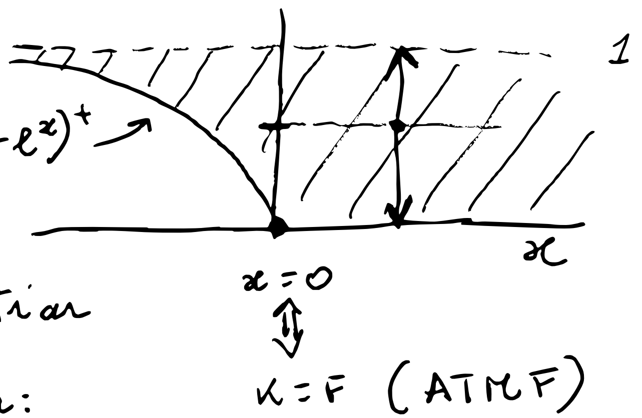
Rmq :

i) v_t bien définie si la fct $C_t(\cdot,\cdot)$ satisfait les bornes d'arbitrage

$$D_t^T (F-K)^+ \leq C_t(T,K) < D_t^T F$$

$$\Downarrow$$

$$(1-e^x)^+ \leq \frac{C_t(T,K)}{D_t^T F} < 1 \quad \text{avec } x = \ln \frac{K}{F}$$



Il existe toujours une solution $v_t(T,K)$ à l'équation, car :

- $c_{BS}(x,v)\big|_{v=0} = (1-e^x)^+$
- $\lim\limits_{v\to\infty} c_{BS}(x,v) \to 1$

De plus :

$$\partial_v c_{BS}(x,v) = \phi(d_1(x,v)) > 0 \quad \forall x, \forall v>0$$

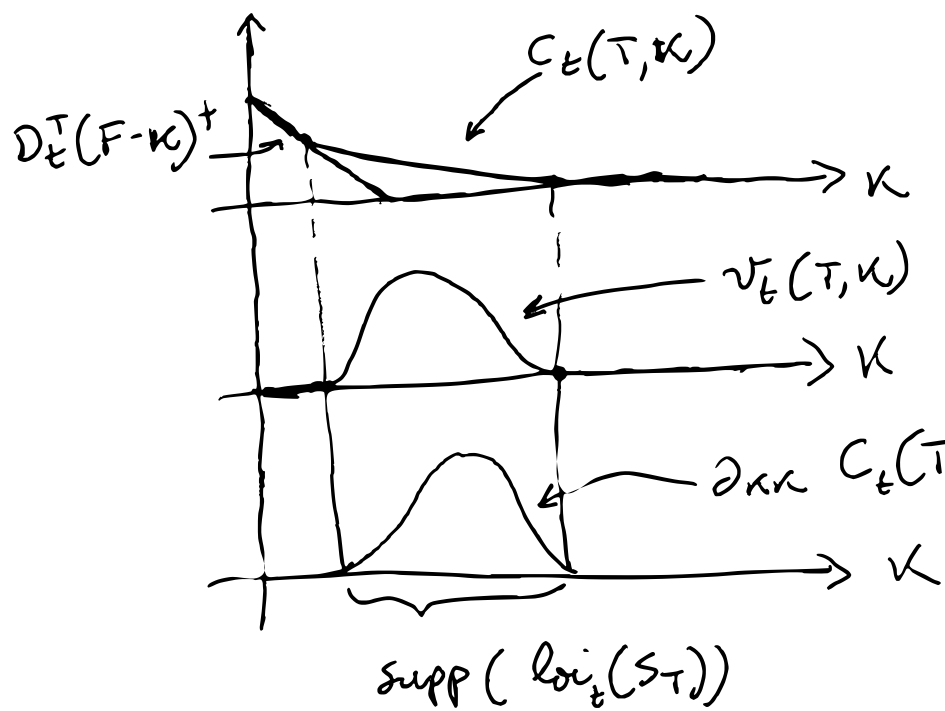
$\rightarrow$ la solution est unique.

ii) La configuration $v_t(T,x) = 0$ pour un certain x est possible : c'est le cas si la fct $C_t(\cdot,\cdot)$ touche sa borne inf, car dans ce cas :

$$\frac{C_t(T,K)}{D_t^T F} = \frac{D_t^T (F-K)^+}{D_t^T F} = (1-e^x)^+ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{on impose}}}{=} C_{BS}(x, v_t(T,x))$$

Seule solution : $v_t(T,x) = 0$

Exemple : à T fixé



Déf (surface de vol impli totale sans arbitrage)

Soit t fixé. Une fct $(T,x) \mapsto v_t(T,x)$ $T \geq t, x \in \mathbb{R}$

est une vol impli totale sans arbitrage statique

(à l'instant t)

si la fct définie par

$$(T,K) \mapsto C(T,K) := D_t^T \; F \; C_{BS}(x, v_t(T,x))\Big|_{x = \log \frac{K}{F}}$$

est telle que $C(T,K)\big|_{T=t} = (S_t - K)^+$

et elle satisfait les propriétés

0) Bornes d'arbitrage

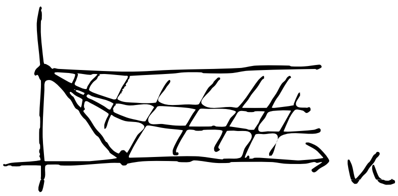
i) Convexité en K

ii) Monotonie en T (pour moneyness fixé)

(voir cours 4)

et de plus :

iii) $\lim_{K \to \infty} C(T,K) = 0$ $\quad \forall T$



<u>Q :</u> conditions plus explicites sur la fct $v_t(\cdot,\cdot)$?

<u>Thm</u> (surface de vol impli totale sans arbitrage)

t fixe! Soit v_t une fonction telle que

- $v_t(T,x) \geq 0 \qquad \forall T > t, \ \forall x \in \mathbb{R}$
- $x \mapsto v_t(T,x) \in C^2(\mathbb{R}), \quad \forall T \geq t$

Alors, v_t est une vol impli totale sans arbitrage <u>ssi</u>

(1) $\partial_{xx} v_t(T,x)$

$$+ \ v_t(T,x) \ \frac{d}{dx}\left[d_1(x, v_t(T,x))\right] \frac{d}{dx}\left[d_2(x, v_t(T,x))\right] \geq 0$$

$\forall x, \forall T$

De manière plus compacte:

$$\boxed{v'' + v \, d_1' \, d_2' \geq 0}$$

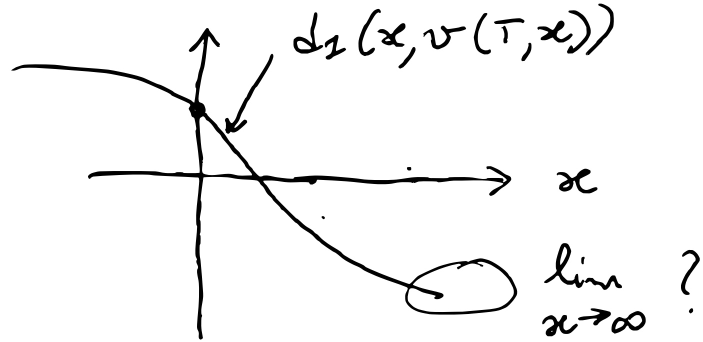
avec :
$$v'' = \partial_{xx} v$$
$$d_1(x) := d_1(x, v_t(T,x))$$
$$d_2(x) := d_2(x, v_t(T,x))$$

(2) la fct $T \mapsto v_t(T,x)$ est croissante, $\forall x \in \mathbb{R}$,

et $v_t(T,x)\big|_{T=t} = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(3) $$\lim_{x \to \infty} d_1(x, v_t(T,x)) = -\infty$$

$$d_1(x,v) = \frac{-x}{v} + \frac{v}{2}$$



__preuve:__ on pose

$$C(T,K) := D_t^T F \, C_{BS}(x, v(T,x))\big|_{x = \log \frac{K}{F}}$$

Nous allons montrer :

(1) $\Longleftrightarrow$ (i) convexité de $C(T,\kappa)$ par rapport à κ

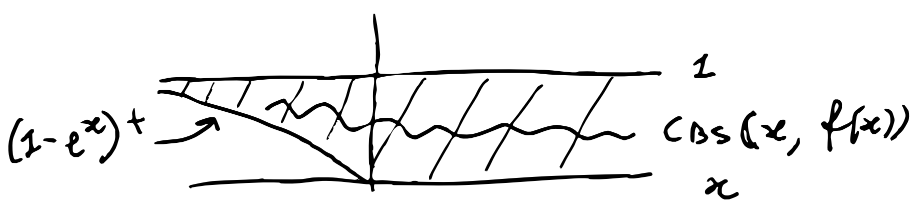
(2) $\Longleftrightarrow$ (ii) monotonie en T pour C

(3) $\Longleftrightarrow$ (iii) $\lim_{\kappa\to\infty} C(T,\kappa) = 0$

<u>Rmq:</u> les bornes d'arbitrage pour la fct $C(T,\kappa)$ (condition (0)) sont toujours satisfaites, grâce à la fct C_{BS} :

$$(1-e^{x})^+ \leq C_{BS}(x, f(x)) < 1$$

pour n'importe quelle fct. $f(x) \geq 0$



preuve:

2) croissance par rapport à T :

puisque $\partial_v C_{BS}(x,v) > 0 \quad \forall x, \forall v > 0$

on a :

$$T \mapsto C_{BS}(x, v(T,x)) \text{ est croissante}, \quad \text{(condition (ii))}$$
$$\forall x$$

ssi

$$T \mapsto v(T,x) \text{ est croissante}, \forall x$$

donc

$$(2) \Leftrightarrow (ii)$$

De plus, condition initiale: pour $T = t$

$$C_t(T,K)\Big|_{T=t} = S_t \quad C_{BS}(x, v_t(T,x))\Big|_{T=t}$$

$$= S_t \ (1 - e^x)^+$$

$$= (S_t - K)^+ \qquad \forall K$$

$$\text{ssi} \quad v_t(T,x)\Big|_{T=t} = 0 \qquad \forall x$$

3) On veut montrer

$$(3) \iff \underbrace{\lim_{x\to\infty} C(T,x) = 0}_{\text{équivalente à } \lim_{x\to\infty} C_{BS}(x, v(T,x)) = 0}$$

Notons : $v(x) = v_t(T,x)$ (T fixé, t fixé)

On a :

$$C_{BS}(x, v(x)) = N(d_1(x, v(x))) - e^x N(d_2(x, v(x)))$$

<u>Rmq</u> : $\forall x > 0$

$$d_2(x, v(x)) = \frac{-x}{v(x)} - \frac{v(x)}{2}$$

$$= -\left(\frac{1}{2}\frac{2x}{v(x)} + \frac{1}{2}v(x)\right)$$

$$\leq -\sqrt{2x}$$

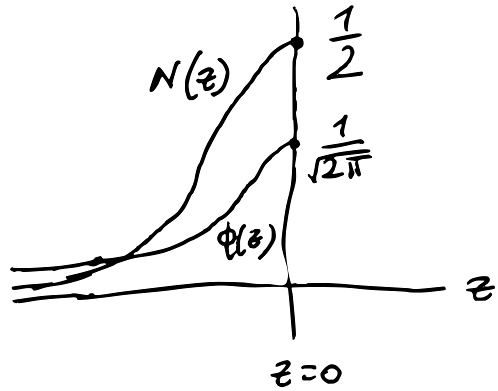
puisque

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \qquad \forall a, b > 0$$

En utilisant l'inégalité :

$$\begin{array}{l} \text{cdf} \rightarrow \\ \text{densité} \rightarrow \end{array} \boxed{\frac{N(z)}{\phi(z)} < \frac{1}{|z|}} \qquad \forall z < 0$$

ratio de Mills



On obtient : $\forall x > 0$

$$\begin{aligned} N(d_2(x, v(x))) &\leq N(-\sqrt{2x}) \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2x}} \phi(-\sqrt{2x}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2x}} \frac{e^{-x}}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

d'où :

$$e^{x} N(d_2(x, v(x))) \leq \cancel{e^{x}} \frac{1}{\sqrt{2x}} \frac{\cancel{e^{-x}}}{\sqrt{2\pi}} \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$$

pour toute fonction v

<u>Conclusion :</u>

$$\lim_{x \to \infty} CBS(x, v(x)) = 0$$

ssi $\displaystyle\lim_{x \to \infty} N(d_2(x, v(x))) = 0$

ssi $\displaystyle\lim_{x \to \infty} d_2(x, v(x)) = -\infty \qquad (3)$

On a montré $(iii) \Leftrightarrow (3)$

Exercise (une condition suffisante)

Si $\boxed{\limsup\limits_{x \to \infty} \frac{v(x)}{\sqrt{x}} < \sqrt{2}}$ borne de Roger Lee, 2004

alors $\lim\limits_{x \to \infty} d_1(x, v(x)) = -\infty$

donc la condition (3) est satisfaite.

1) On veut montrer

(1) $\Longleftrightarrow$ la fct $K \mapsto C_{BS}\left(\ln \frac{K}{F}, v\left(T, \ln \frac{K}{F}\right)\right)$ est convexe, $\forall T$.

On utilise:

$$\partial_v C_{BS}(x, v) = \phi(d_1(x, v)) = e^{x} \phi(d_2(x, v))$$

$$\partial_x C_{BS}(x, v) = - e^{x} N(d_2(x, v))$$

note $v(x) = v(T, x)$

On calcule

$$\frac{d}{dK^2} C_{BS}\left(\ln\frac{K}{F},\ v\left(\ln\frac{K}{F}\right)\right)$$

$$= \frac{d}{dK}\left[\partial_x C_{BS}\left(\ln\frac{K}{F},\ v\left(\ln\frac{K}{F}\right)\right)\frac{1}{K} + \partial_v C_{BS}\left(\text{———}\right) v'\left(\ln\frac{K}{F}\right)\frac{1}{K}\right]$$

$$= \frac{d}{dK}\left[-\cancel{e^x}\, N\left(d_2(x, v(x))\right)\frac{1}{F\cancel{e^x}} + \cancel{e^x}\,\phi\left(d_2(x, v(x))\right) v'(x)\frac{1}{F\cancel{e^x}}\right]$$

avec $x = \ln\frac{K}{F}$

on note $d_2(x) = d_2(x, v(x))$

$$= \frac{1}{F}\left[-\phi(d_2)\, d_2' \frac{1}{K} + \phi(d_2)\, v'' \frac{1}{K} + \underbrace{\phi'(d_2)}_{-d_2\phi(d_2)} d_2'\, v' \frac{1}{K}\right]$$

on utilise : $\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\right) = -z\,\phi(z)$

$$= \underbrace{\frac{1}{FK}\phi(d_2(x))}_{>0}\left[v'' - d_2'(1 + v' d_2)\right]$$

On a obtenu :

$$\text{convexité en } K \iff \underbrace{v'' - d_2'(1+v'd_2)}_{\substack{\text{on peut manipuler ce terme} \\ \text{pour faire ressortir } d_1'}} \geq 0 \quad \text{toujours}$$

On observe :

$$d_1'(x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{v} + \frac{v}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{v} + \frac{xv'}{v^2} + \frac{v'}{2}$$

$$= -\frac{1}{v}\left(1 + v'\left(-\frac{x}{v} - \frac{v}{2}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{v}(1+v'd_2)$$

Conclusion : convexité en $K \iff \boxed{v'' + v\, d_1' d_2' \geq 0}$

(i) $\iff$ (1) $\square$

Rmq:

- Si on développe d_1' et d_2', la condition (1) s'écrit aussi:

$$[\mathcal{L}\, v\,(T,\cdot)](x) \geq 0$$

où

$$\mathcal{L} v = v'' + \frac{1}{v} - 2x\,\frac{v'}{v} + \frac{(v')^2}{2}\left(\frac{x}{v^2} - \frac{v^2}{4}\right)$$

↳ opérateur différentiel du 2nd ordre non-linéaire (en v et v').

Application du Thm:

- Test d'admissibilité d'une fonction paramétrique

  $v(T,x\,;\,\theta)$

- L'ensemble

  $\{\theta : v(\cdot,\cdot\,;\,\theta) \text{ satisfait } (1), (2), (3)\}$

  est l'ensemble des paramètres admissibles

↳ admissibles = compatibles avec le non-arbitrage statique.

Exemple de paramétrisation pour v:

modèle SVI (voir TP)