Real and Complex Analysis Ch1. レジュメ

2024 年 5 月 1 日

1. 発表の項立て

1.1 リーマン積分の拡張としての introduction

- リーマン積分の話
- σ-加法族, 測度, 単関数が必要だよねの話

1.2 舞台となる集合：σ-加法族とボレル集合族

- 位相空間と可測空間の対応 [2, 3]
  - 位相空間に関するコメント [4, 5]
  - 可測空間に関するコメント [6]
  - $[0, \infty]$ 上の位相と代数 [4, 22]
- 可測空間の例 [12(a)]
- ボレル集合族
  - 位相空間は可測空間か？ [11]
  - ボレル集合族の定義 [10, 11]
- 位相空間, 可測空間, ボレル集合族
- 言葉の使い方 [21]

1.3 集合の測り方：測度

- 定義 [18]
- 性質 [19]
- 例 [20]
- (確率との関係性)

1.4 舞台となる関数：可測関数と単関数

1.4.1 可測関数

- 可測関数の性質たち
  - 定理 1.7 と 定理 1.12(d) [7, 12(b), (d)]
  - 可測関数の判定 (定理 1.12(c)) [12(c)]
- 可測関数の例
  - 複素関数, 絶対値, 実部/虚部, 和, 積の可測性 [8, 9(a) (c)]
  - 特性関数 [9(d)]
  - 位相みたいな [9(e)]
- 可測関数について
  - 上限, 上極限, 各点収束極限の可測性 [13, 14]
  - 正成分と負成分の可測性 [15]

1.4.2 単関数

- 単関数の定義 [16]
- 可測関数に収束する単関数の存在 [17]

1.5 ルベーグ積分 (非負関数)

- ルベーグ積分の定義 [23]
- ルベーグ積分の自明な性質 [24]
- 2 つの線形性 [25]
- ルベーグの単調収束定理 [26]
- 線形性の一般的な証明 (その系としての無限級数との交換) [27]
- Fatou の補題 [28]
- 変数変換 [29]

1.6 ルベーグ積分 (複素関数)

- $L^1(\mu)$ の定義 [30]
- 複素関数のルベーグ積分の定義 [31]
- 線形性 [32]
- 絶対値のルベーグ積分 [33]
- ルベーグの優収束定理 [34]

1.7 測度 0：ほとんど至る所で

- 測度 0 はゴミだけど大切 [35]
- 測度の完備化 [36]
- 測度 0 を考慮した可測性のお話 [37]
- ほとんど至る所で成立する定理たち
  - ほとんど至る所での無限級数の収束とルベーグ積分との交換 [38]
  - ほとんど至る所での関数の一致 [39]
  - 平均に関する定理 [40]
  - 測度の無限級数和 [41]